

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**HAMMANI KHAOULA**

Titre :

# Transformée de Legendre et Ses Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>MENACER TIDJANI</b>	UMKB	Président
Dr. <b>BERBICHE MOHAMED</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>GHODJMIS FATIHA</b>	UMKB	Examineur

Juin 2019

## DÉDICACE

À ma chère grande mère

À mes chers parents

À mes frères et mes soeurs

À toute ma famille

À tous mes amis

À toutes les personnes qui m'ont soutenu

## REMERCIEMENTS

**A** la fin de ce travail, je tiens à remercier,

**E**n tout premier lieu, je remercie le bon **DIEU** tout puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

**J**e tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire **Dr. BERBICHE MOHAMED**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

**J'**adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

**J**e voudrai également remercier les membres de mon jury :

**"MENACER TIDJANI"**

**"GHODJMIS FATIHA"**

**B**ien sûr, j'adresse un merci tout particulier à ma famille et mes amis qui a toujours été là pour moi, dans les bons comme dans les mauvais moments, et qui me donne toute cette énergie.

**E**nfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à rendre merveilleuses mes années à l'Université.

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Introduction	1
<b>1 Notation et Définition Préliminaire</b>	<b>3</b>
1.1 Ensemble convexe . . . . .	3
1.2 Fonctions convexes . . . . .	5
1.3 Enveloppe supérieure . . . . .	7
1.4 Fermeture . . . . .	8
1.5 Fonction semi-continuité inférieurement . . . . .	9
1.6 Sous-différentiabilité . . . . .	9
<b>2 Transformée de Legendre</b>	<b>11</b>
2.1 Transformée de Legendre . . . . .	11
2.2 Biconjugaison de Legendre . . . . .	16
2.3 Transformée de Legendre et Sous-différentiels . . . . .	18

2.3.1	Interprétation géométrique de TFL . . . . .	21
2.4	Règle de Calcul de TFL . . . . .	22
2.4.1	Quelques règles pour calculer la TFL d'une fonction . . . . .	22
2.4.2	Transformée de l'inf-convolution . . . . .	22
2.4.3	Transformée d'une somme . . . . .	23
2.4.4	Transformée de l'infimum et la suprémum . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Applications de Transformée de Legendre</b>	<b>25</b>
3.1	Théorème de Fenchel-Rockafellar et applications . . . . .	25
	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# Table des figures

2.1	Interprétation géométrique de la transformation de Legendre. . . . .	21
-----	--	----

# Introduction

Dans de nombreuses applications, il est nécessaire de résoudre un problème d'optimisation, c'est-à-dire de trouver la valeur minimale ou maximale d'une fonction peut prendre à condition que certaines conditions soient remplies.

La notion est d'une importance capitale dans l'analyse convexe et l'optimisation est la notion de la dualité «conjugué», et en particulier celle de la dualité de Fenchel.

La méthode de dualité est l'une des techniques d'optimisation les plus importantes et les plus utilisées. Elle consiste à rattacher à un problème initial d'optimisation d'un problème dit dual dont la valeur objective optimale est inférieure ou égale à la valeur objective optimale du problème initial.

Le conjugué a un impact significatif dans de nombreux domaines. Il joue un rôle essentiel dans l'élaboration de la théorie et des méthodes d'optimisation convexe. Il est largement utilisé dans l'analyse matricielle et l'optimisation des valeurs propres.

Le conjugué est également couramment utilisé en thermodynamique et dans la théorie des équations différentielles non linéaires du premier ordre, par ex. pour résoudre une classe d'équations de Hamilton-Jacobi avec des formules explicites [6]. En outre, la fonction dite 'log-exp' est la fonction entropique bien connue de Shannon [2], largement utilisée dans le domaine des sciences de l'information et dans de nombreux domaines allant de l'amélioration de l'image à l'économie et à la de la mécanique statistique à la physique nucléaire [6].

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions très importantes de l'analyse convexe : ensembles convexes, fonctions convexes, enveloppe supérieure, semi continuité inférieure et sous-

différentiabilité. Dans le second chapitre est consacré à l'étude de transformation de Legendre des fonctions convexes et démontrons ses propriétés principales, et nous donnons plusieurs exemples afin d'illustrer les propriétés essentielles de cette transformation. Nous étudions la biconjugaison de Legendre, lien entre de transformée de Legendre et sous-différentielles et l'interprétation géométrique de cette transformation. À la fin de ce chapitre nous donnons quelques règles pour calculer la transformée de Legendre d'une fonction. Enfin, dans le dernier chapitre on appliquant la transformation de Legendre en dimension infinie (dualité de Fenchel).



# Chapitre 1

## Notation et Définition Préliminaire

### 1.1 Ensemble convexe

**Définition 1.1.1 (Ensemble convexe)** *Un ensemble  $C$  de  $E$  est dit convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

On peut dire que  $C$  est convexe donc le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $C$ .

#### Exemple 1.1.1

1. Tout espace vectoriel est un ensemble convexe.
2. L'ensemble vide  $\emptyset$ , les singletons  $\{x\}$  tout entier sont convexes.
3. Un ensemble est convexe ssi son intersection avec une droite quelconque est convexe.
4. Les boules d'un espace normé sont convexes.

**Définition 1.1.2 ( Combinaison convexe )** *Pour tout  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$ . On dit que  $x$  est combinaison convexe de ces points s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que :*

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

où les  $\lambda_i$  sont des réels positifs de somme 1.

**Proposition 1.1.1**

1. Une partie  $C$  de  $E$  est convexe si et seulement si toute combinaison convexe d'éléments de  $C$  appartient à  $C$ .
2. L'intersection quelconque d'une famille de convexe est un convexe.

**Corollaire 1.1.1** *Si  $C$  est un convexe fermé, alors  $C$  est l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant.*

**Définition 1.1.3 (Enveloppe convexe)** *Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'enveloppe convexe de  $A$  est l'intersection de tous les convexes contenant  $A$  et elle est notée  $\text{conv}(A)$ .*

**Autrement dit :**

- $\text{conv}(A)$  est le plus petit ensemble convexe contenant  $A$ .
- $\text{conv}(A)$  est un ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de  $A$ .

**Proposition 1.1.2** *Si  $A$  est une partie de  $E$ , alors*

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \geq 1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in A \right\}.$$

**Proposition 1.1.3** *Une combinaison linéaire de convexes est un convexe.*

**Définition 1.1.4** *Si  $A$  est une partie de  $E$ , alors l'enveloppe convexe fermée de  $A$  est l'intersection de tous les convexes fermés contenant  $A$ . On le note  $\overline{\text{conv}}(A)$ . C'est le plus petit convexe fermé contenant  $A$ .*

**Définition 1.1.5 (cône convexe)** *Soit  $\Gamma \subset E$  est un cône si*

$$\forall x \in \Gamma, \forall \lambda \geq 0 : \lambda x \in \Gamma.$$

Et elle est notée  $\text{cone}(\Gamma)$ . Autrement dit, un cône  $\Gamma$  doit vérifier  $\lambda\Gamma \subset \Gamma$  pour tout  $\lambda \geq 0$ .

**Définition 1.1.6 (Combinaison conique)** *Pour tout  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$ , Une combinaison conique de  $x_1, \dots, x_n$  est une combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  telle que  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Proposition 1.1.4** *Un ensemble  $\Gamma$  est un cône convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.*

**Proposition 1.1.5** *Si  $\Gamma \in E$ , alors cône est l'ensemble des combinaisons coniques des éléments de  $\Gamma$  :*

$$\text{cone}(\Gamma) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \geq 1, x_i \in \Gamma, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

## 1.2 Fonctions convexes

**Définition 1.2.1 (Fonction convexe)** *Soient  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction est convexe si et seulement si pour tout  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

*On dit que  $f$  est concave si  $(-f)$  est convexe .*

**Proposition 1.2.1** *On dit que  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction est strictement convexe si pour tout  $x, y \in E$  avec  $x \neq y$  et tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Sur un espace normé  $E$ . On dit que la fonction  $f$  est fortement convexe si de module  $\alpha \succ 0$ , si pour tout  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\alpha}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

**Remarque 1.2.1** Une fonction fortement convexe est donc strictement convexe.

**Exemple 1.2.1** Norm carré est un exemple de fonction fortement convexe : La fonction  $x \rightarrow |x|^2$  est fortement convexe. Pour vérifier cela, laissez d'abord  $x$  et  $y$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\lambda$  un nombre positif inférieur à un. Puisque

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y|^2 - \lambda |x|^2 - (1 - \lambda) |y|^2 = -\lambda(1 - \lambda) |x - y|^2.$$

La norme au carré est fortement convexe avec une constante 2.

**Lemme 1.2.1** Pour la fonction convexe  $f$ , nous avons  $D^2f \geq 0$  la dérivée seconde est définie.

**Inversement**, si  $f$  est deux fois différentiable  $D^2f \geq 0$ , alors  $f$  est convexe.

**Définition 1.2.2 (Domaine effectif)** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. Son domaine effectif est défini par  $\text{dom}(f) = \{x \in E, f(x) < +\infty\}$ .

**Remarque 1.2.2** Le domaine d'une fonction est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur  $+\infty$ .

**Proposition 1.2.2** Si  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est une fonction convexe, alors  $\text{dom}(f)$  est convexe.

**Définition 1.2.3** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. L'épigraphe de  $f$  est le sous-ensemble de  $E \times \mathbb{R}$  définie par

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

L'épigraphe stricte de  $f$  est :

$$\text{epi}_s(f) = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) < \alpha\}.$$

**Proposition 1.2.3**

1. On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est convexe si son épigraphe est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .

2. Si  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est une fonction convexe si et seulement si  $\text{epi}(f)$  ( $\text{epi}_s(f)$ ) est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .
3. Si Une fonction identiquement égale à  $+\infty$  est convexe alors son epigraphe est vide.

**Définition 1.2.4** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction ne prenant pas la valeur  $-\infty$  et n'étant pas identiquement égale à  $+\infty$  est dite propre, sinon elle est dite impropre.

**Autrement dit :** La fonction  $f$  sera dite propre lorsque  $f(x) > -\infty$  pour tout  $x \in E$  et  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ . On note

$$\text{conv}(E).$$

L'ensemble des fonctions de  $E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  qui sont convexes et propres. Si  $f \in \text{conv}(E)$  alors son épigraphe n'est pas vide. Et on dit que  $f$  est fermé si son épigraphe est fermé. On note

$$\overline{\text{conv}}(E).$$

La partie de  $\overline{\text{conv}}(E)$  formée des fonctions fermées.

**Proposition 1.2.4 (Inégalité de Jensen)** Une fonction propre  $f$  est convexe si et seulement si

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout  $\lambda_i \geq 0$  avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et tout  $x_i \in E$ .

### 1.3 Enveloppe supérieure

L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions est la fonction dont la valeur en un point est le supremum (ou borne supérieure) des valeurs prises par ces fonctions en ce point.

Soit  $I$  un ensemble quelconque utilisé comme ensemble d'indices. Pour tout  $i \in I$ , on suppose donnée une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . On peut alors introduire la fonction  $f = \sup_{i \in I} f_i$  définie pour

$x \in E$  par

$$f(x) = \sup_{i \in I} (f_i(x)).$$

Cette fonction s'appelle l'enveloppe supérieure des fonctions  $f_i$ .

**Proposition 1.3.1** *Si  $f_i : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sont des fonctions convexes (fermées) propres pour tout  $i \in I$ , alors  $\sup_{i \in I} f_i$  est une fonction convexe (fermée).*

**Proposition 1.3.2** *Soit  $\{f_i\}_{i \in I}$  une famille quelconque de fonctions. Alors*

$$\text{epi} \left( \sup_{i \in I} f_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\text{epi}(f_i)).$$

**Remarque 1.3.1** *Il se peut cependant que l'enveloppe supérieure de fonctions convexes soit identiquement égale à  $+\infty$ , même si les  $f_i \in \text{conv}(E)$ .*

## 1.4 Fermeture

**Définition 1.4.1 (La fermeture)** *Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. Alors  $\text{adh}(\text{epi}(f))$  est l'épigraphe d'une fonction  $\bar{f} : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  :*

$$\text{epi}(\bar{f}) = \overline{\text{epi}(f)}.$$

**Proposition 1.4.1** *Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction, et  $\bar{f}$  sa fermeture. Alors*

1.  $\bar{f}$  est fermée et  $\bar{f} \leq f$ ,
2. Pour tout  $x \in \text{dom}(f)$

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

3. En  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $f(x) = \bar{f}(x)$  ssi  $f$  est semi-continuité inférieurement en  $x$ .

**Proposition 1.4.2** *Soit  $f \in \text{conv}(E)$ . Alors  $\bar{f}$  est l'enveloppe supérieure des minorantes affines de  $f$ .*

## 1.5 Fonction semi-continuité inférieurement

**Définition 1.5.1** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. Alors est semi-continue inférieurement (S.C.I.) au point  $x \in E$  si

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x).$$

Une fonction  $f$  est semi-continue inférieurement si elle est semi-continue inférieurement en chaque point de  $E$ .

### Exemple 1.5.1

- considérons la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 0$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ . Cette fonction est S.C.Supérieurement, mais non S.C.I. Plus généralement, la fonction caractéristique d'une partie  $A$  d'un espace topologique est S.C.Supérieurement ssi  $A$  est fermé et S.C.I. ssi  $A$  est ouvert.
- L'enveloppe supérieure de fonctions S.C.I. est S.C.I. .

**Proposition 1.5.1** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. La fonction  $f$  est S.C.I ssi l'épigraphe  $\text{epi}(f)$  est un ensemble fermé de  $E \times \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.5.1** On dira que  $f$  est S.C.I. en  $x_0 \in E$  si  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Proposition 1.5.2** Si  $\{f_i : i \in I\}$  est une famille de fonctions propres S.C.I sur  $E$ , alors  $\sup_{i \in I} f_i$  est une fonction S.C.I.

**Proposition 1.5.3** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction est S.C.I en  $x$  ssi  $f(x) = \bar{f}(x)$ .

## 1.6 Sous-différentiabilité

Rappelons que si  $f$  est convexe et G-différentiable, alors son gradient en  $x$ , à savoir  $\nabla f(x)$ , appartient à  $E^*$  et vérifie l'inégalité  $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$  pour tout  $y \in E$ . L'idée est de généraliser le concept de gradient en remplaçant  $\nabla f(x)$  par un élément du dual  $E^*$  dans cette inégalité. C'est la notion de sous-gradient.

**Définition 1.6.1** Si  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est une fonction, alors un sous-gradient de  $f$  en  $x \in \text{dom}(f)$  est un élément  $p \in E^*$  tel que

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \quad \forall y \in E.$$

L'ensemble des sous-gradients de  $f$  en  $x$  est appelé le sous-différentiel de  $f$  en  $x$  et est noté  $\partial f(x)$ , tel que

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{p \in E^*, \forall y \in E, f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle\} \\ &= \{p \in E^*, f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle\} \end{aligned}$$

lorsque  $f(x)$  est fini. Le sous-différentiel de  $f$  est la multiapplication  $\partial f : E \rightrightarrows E^*$  telle que  $\partial f(x)$  désigne l'ensemble des sous-gradients de  $f$  en  $x$ . Par convention, on pose  $\partial f(x) = \emptyset$  si  $f(x)$  est infini. On dira que  $f$  est sous-différentiable en  $x \in E$  ssi  $\partial f(x) \neq \emptyset$ .

**Remarque 1.6.1** A priori, le sous-différentiel est défini pour n'importe quelle fonction, mais nous verrons qu'il fonctionne bien essentiellement dans le cas des fonctions convexes.

**Proposition 1.6.1** Si  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est une fonction et si  $p \in E^*$  est un sous-gradient de  $f$  en  $x \in E$ , alors  $p$  définit un hyperplan d'appui de  $\text{epi}(f)$  en  $(x, f(x))$ .

**Remarque 1.6.2** Nous voyons que la sous-différentiabilité implique la semi-continuité inférieure.



# Chapitre 2

## Transformée de Legendre

### 2.1 Transformée de Legendre

$(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach,  $E^*$  son dual topologique.

Les éléments de  $E^*$  sont notés  $x^*$ , mais aussi  $p$  ou  $s$  ( $p$  car ils peuvent correspondre à des pentes dans certains contextes d'applications,  $s$  pour slope (= pente) en anglais).

Après la transformée de Fourier et la transformée de Laplace que nous avons rencontré, on a une nouvelle transformée de fonction, portant le nom de W. Fenchel et A.-M. Legendre. Lorsque nous considérons une fonction  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , elle ne sera pas identiquement égale à  $+\infty$  et minorée par une fonction affine continue, c'est-à-dire : pour un certain  $p_0 \in E^*$  et un certain  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) \geq \langle p_0, x \rangle - \alpha \text{ pour tout } x \in E. \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.1 (Transformée de Legendre)** Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction propre ( $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ ). On définit sa transformée de Legendre  $f^* : E^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par :

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f(x)]. \quad (2.2)$$

L'application  $\mathcal{L} : f \mapsto f^*$  est appelée Transformation de Legendre de  $f$ . Et on a autres appellations pour  $f^*$  : Transformation de Legendre-Fenchel de  $f$ , conjuguée de  $f$ , polaire de  $f$ .

La motivation pour introduire cette transformation est la suivante. On peut définir la convexifiée fermée d'une fonction comme l'enveloppe supérieure de toutes les minorantes affines de  $f$ . Parmi toutes les minorantes affines  $x \mapsto \langle p, x \rangle + \alpha$ , on ne peut garder que celle qui est la plus haute, c'est-à-dire qui a le plus grand  $\alpha$ . Il faut donc déterminer le plus grand  $\alpha$  tel que  $\forall x \in E$  :

$$\langle p, x \rangle + \alpha \leq f(x).$$

La plus petite valeur de  $-\alpha$  est donnée par :  $f^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f(x)]$ .

**Remarque 2.1.1** Comme  $f$  est propre, il existe  $x_0 \in \text{dom}(f)$ . Ainsi

$$\forall p \in E^*, f^*(p) \geq \langle p, x_0 \rangle - f(x_0),$$

et  $f^*$  est minorée par une fonction affine sur  $E^*$ , En particulier,  $f^* > -\infty$ .

**Remarque 2.1.2**  $f^*$  est l'enveloppe supérieure de la famille de fonctions affines continues  $\langle \cdot, x \rangle - f(x)$  pour  $x \in \text{dom} f$  de  $E^*$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 2.1.1** La fonction conjuguée  $f^*$  d'une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est convexe et fermée.

Par ailleurs, on a les équivalences suivantes :

$$1. f \not\equiv +\infty \iff f^* > -\infty \iff f^* \not\equiv -\infty. \quad (2.3)$$

$$2. f \text{ a une minorante affine} \iff f^* \not\equiv +\infty. \quad (2.4)$$

$$3. f \text{ propre avec minorante affine} \iff f^* \text{ propre} \iff f^* \in \overline{\text{conv}}(E). \quad (2.5)$$

**Démonstration(1).** Si  $f \not\equiv +\infty$ , il existe un  $x \in E$  tel que  $f(x) < +\infty$ ; dans ce cas, quel que soit  $p \in E^*$ ,  $f^*(p) \geq \langle p, x \rangle - f(x) > -\infty$ , si bien que  $f^* > -\infty$ . **Évidemment**,  $f^* > -\infty$  implique que  $f^* \not\equiv -\infty$ . Enfin, si  $f \equiv +\infty$  alors  $f^* \equiv -\infty$ . ■

**Démonstration(2).** Soit  $x \mapsto \langle p, x \rangle + \alpha$  une minorante affine de  $f$ ,  $p \in E^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; alors, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) \geq \langle p, x \rangle + \alpha$ ; on en déduit que  $-\alpha \geq \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle + \alpha] = f^*(p)$  et donc que  $f^* \equiv +\infty$ , **La réciproque** est obtenue par le raisonnement inverse : si  $f^* \equiv +\infty$ , il existe  $p \in E^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $f^*(p) \leq -\alpha$ ; alors, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle p, x \rangle - f(x) \leq -\alpha$ , si bien que  $x \mapsto \langle p, x \rangle + \alpha$  est une minorante affine de  $f$ . ■

**Démonstration(3).** Par (1) et (2),  $f$  est propre et a une fonction affine si seulement si  $f^*$ . Enfin, il revient au même de dire que  $f^*$  est propre et que  $f^* \in \overline{\text{conv}}(f)$ , parce que  $f^*$  est toujours convexe fermée. ■

**Remarque 2.1.3** La fonction conjuguée  $f^*$  d'une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est convexe et fermée, alors

1. Si  $f$  prend la valeurs t  $-\infty$  alors  $f^* \equiv +\infty$  (par la défintion de  $f^*$  ou par (2.4), une fonction convexe et fermée (l'épigraphe de  $f^*$ est vide ,donc convexe et fermée).
2. Si  $f \equiv +\infty$ , alors  $f^* \equiv -\infty$  (par la défintion de  $f^*$  ou par (2.3), une fonction convexe et fermée (l'épigraphe de  $f^*$ est égale à  $E \times \mathbb{R}$ ,donc convexe et fermée).
3. Si  $f$  est propre,  $f^*$  s'écrit comme le supremum de la famille indicée par  $x \in \text{dom}(f)$  (non vide) des fonctions affines (donc convexes et fermées)  $p \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$ . On en déduit que  $f^*$  est elle-même convexe et fermée.

### Exemple 2.1.1

(i) Soit  $A$  un ensemble non-vide de  $E$ , et  $\chi_A$  sa fonction indicatrice. Alors

$$\forall p \in E^*, \chi_A^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - \chi_A(x)] = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle = \delta_A.$$

c'est la fonction d'appui de l'ensemble  $A$ .

(ii) Soit  $f = \|\cdot\|$  la norme de l'espace  $E$ . Alors

$$\forall p \in E^*, f^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - \|x\|].$$

Si  $\|p\|_* > 1$ , alors  $\sup_{\|x\| \leq 1} \langle p, x \rangle > 1$ .  $\exists x \in E$  tel que  $\|x\| \leq 1$  et  $\langle p, x \rangle > 1$ . Donc,  $\langle p, x \rangle - \|x\| \geq \langle p, x \rangle - 1 > 0$ .

Donc, comme  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle p, \lambda x \rangle - \|\lambda x\| = +\infty$ . Alors  $\|p\|^* = +\infty$ . Au contraire, si  $\|p\|_* \leq 1$ ,  $\langle p, x \rangle - \|x\| \leq 0$  avec égalité

lorsque  $x = 0$  Ainsi,  $f^*(p) = 0$ . Conclusion,  $f^*$  est la fonction indicatrice convexe de la boule unité pour la norme

duale, i.e.  $f^* = \chi_B$  où  $B = \{p \in E^* / \|p\|_* \leq 1\}$ .

(iii) Soit  $f(x) = \frac{1}{p} |x|^p$  sur  $\mathbb{R}$ , pour  $\forall y \geq 0$  on a

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ xp - \frac{1}{p} |x|^p \right] = \sup_{x \geq 0} \left[ xp - \frac{1}{p} |x|^p \right]$$

alors, calculer le supremum de la fonction  $xp - \frac{1}{p} |x|^p$  pour  $x \geq 0$ , qui concave

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( xp - \frac{1}{p} |x|^p \right) = y - |x|^{p-1} = 0 \implies x = y^{1/(p-1)}$$

où  $q$  est l'exposant conjugué de  $p$  i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , (pour  $y \leq 0$  en utilisant la meme méthode).

Alors  $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ xp - \frac{1}{p} |x|^p \right] \\ &= y^{1+1/(p-1)} - \frac{1}{p} y^{p/(p-1)} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{p} \right) y^{p/(p-1)} = \frac{1}{q} |y|^q. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.2** La transformée de Legendre-Fenchel d'une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  propre vérifie :

(i) **Inégalité de Fenchel-Young** :  $\forall x \in E, \forall p \in E^*, f^*(p) + f(x) \geq \langle p, x \rangle$ .

On a l'égalité ssi  $p \in \partial f(x)$ .

(ii)  $f^*(0) = \sup -f = -\inf f$ .

**Preuve.**

(i) Inégalité de Fenchel-Young :

L'inégalité est une conséquence immédiate de la définition de  $f^*$

$$f^*(p) + f(x) = \sup_{y \in E} \langle p, y \rangle - f(y) + f(x) \geq \langle p, x \rangle \quad \forall x \in E, \forall p \in E^*.$$

l'égalité :

$$\begin{aligned} f^*(p) = \langle p, x \rangle - f(x) &\Leftrightarrow \forall y, \langle p, x \rangle - f(x) \geq \langle p, y \rangle - f(y) \\ &\Leftrightarrow \forall y, \langle p, x - y \rangle + f(x) \leq f(y) \\ &\Leftrightarrow p \in \partial f(x). \end{aligned}$$

(ii) On a autre lecture de la formule (2.1) :

$$-f^*(p) = \inf_{x \in E} [f(x) - \langle p, x \rangle].$$

Alors, on se rappelle qu'avec la transformée de Fourier  $\mathcal{F}f$  de  $f$ , on a  $\mathcal{F}f(0) = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$ .

Avec la transformée de Legendre-Fenchel, on a quelque chose de similaire :  $f^*(0) = -\inf_{x \in E} f(x)$ .

Alors,

$$f^*(p) = -\inf_{x \in E} [f(x) - \langle p, x \rangle] = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f(x)] \Rightarrow f^*(0) = \sup_{x \in E} (-f(x)).$$

■

**Exemple 2.1.2 (L'inégalité de holder)** avec  $f(x) = \frac{1}{p} |x|^p$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$xy \leq f(x) + f^*(y) = \frac{1}{p} |x|^p + \frac{1}{q} |y|^q$$

En sommant, on obtient que pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , si  $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ ,

$$\langle x, y \rangle \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} \|x\|_p + \frac{1}{q} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Cette inégalité reste vraie pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.1.3** *La fonction conjuguée  $f^*$  est soit une fonction convexe S.C.I. de  $E^*$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , soit la fonction identiquement égale à  $-\infty$ .*

**Preuve.** d'après la remarque (2.1.3)(3),  $f^*$  s'écrit comme le supremum de la famille indicée par  $x \in \text{dom}(f)$  (non vide) des fonctions affines continue (donc convexes et fermées)  $p \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$ . On en déduit que  $f^*$  est elle-même convexe et fermée. alors  $f^*$  une fonction convexe S.C.I. et ne prend pas la valeur  $-\infty$ . ■

**Proposition 2.1.4** *Soit  $f_i : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction propre. Alors  $f^* = \delta_{\text{epi}(f)}^*(\cdot, -1)$ .*

**Preuve.** Il suffit de voir que, pour tout  $p \in E^*$ , on a

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} \langle p, x \rangle - f(x) = \sup_{(x,y) \in \text{epi}(f)} \langle p, x \rangle - y = \sup_{(x,y) \in \text{epi}(f)} \langle (p, -1), (x, y) \rangle = \delta_{\text{epi}(f)}^*(p, -1).$$

■

## 2.2 Biconjugaison de Legendre

Ayant défini  $f^*$  sur  $E^*$ , il est tentant de définir  $(f^*)^*$  (notée  $f^{**}$ ) sur  $E^{**}$ . Nous ne considérerons que la restriction de  $f^{**}$  à  $E$ , en gardant la même notation. On peut penser qu'on va retomber sur nos pieds, c'est-à-dire avoir  $f^{**} = f$ , ce qui est sans espoir en général puisqu'une transformée de Legendre-Fenchel est... toujours convexe. Le résultat qui suit, donné ici sans démonstration, est fondamental dans ce contexte de biconjugaison.

**Définition 2.2.1 ( La biconjugaison de Legendre)** *Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction. Sa biconjugée définir par :*

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in E^*} [\langle x, p \rangle - f^*(p)].$$

**Proposition 2.2.1** *La fonction biconjuguée  $f^{**}$  d'une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est convexe et fermée.*

*De plus*

$$f \text{ est propre et a une minorante affine} \iff f^{**} \in \overline{\text{conv}}(E).$$

**Preuve.** Si  $f$  est propre et a une minorante affine, alors  $f^*$  est propre par (2.5). Mais  $f^*$  a aussi une minorante affine puisque, avec  $x \in \text{dom} f \neq \emptyset$ , on a

$$\forall p \in E^* \quad f^*(p) \geq \langle p, x \rangle - f(x).$$

Dès lors,  $f^{**} \in \overline{\text{conv}}(E)$  par (2.5) appliqué à  $f^*$  au lieu de  $f$ . **Réciproquement**, Si  $f^{**} \in \overline{\text{conv}}(E)$ , alors  $f^*$  est propre par (2.5) appliqué à  $f^*$ . ■

**Proposition 2.2.2** *Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction propre ayant une minorante affine, Alors*

1. Sa biconjuguée  $f^{**}$  est l'enveloppe supérieure des minorantes affines de  $f$ .
2.  $f^{**} \leq f$ .
3.  $f \in \text{conv}(E) \implies f^{**} = \bar{f}$  ( la ferméteure de  $f$  ).
4.  $f \in \overline{\text{conv}}(E) \iff f^{**} = f$ .

**Démonstration.**

1. Soit  $x \in E$ . La valeur en  $x$  de l'enveloppe supérieure des minorantes affines de  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned} \sup_{p \in E^*, \alpha \in \mathbb{R}, \langle p, y \rangle + \alpha \leq f(y), \forall y \in E} [\langle p, x \rangle + \alpha] &= \sup_{p \in E^*} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}, \langle p, y \rangle + \alpha \leq f(y), \forall y \in E} [\langle p, x \rangle + \alpha] \\ &= \sup_{p \in E^*} [\langle p, x \rangle - f^*(p)] = f^{**}(x). \end{aligned}$$

2. Soit  $x \in E, p \in E^*$ . D'après l'inégalité de fenchel-young [  $f^*(p) + f(x) \geq \langle p, x \rangle$  ], On a  $f(x) \geq \sup_{p \in E^*} [\langle p, x \rangle - f^*(p)] = f^{**}(x)$ .
3. Si  $f \in \text{conv}(E)$ ,  $\bar{f}$  est l'enveloppe supérieure des minorantes affines de  $f$ , c'est-à-dire  $f^{**}$  d'après (1).

4. Si  $f \in \overline{\text{conv}}(E)$ ,  $\text{epi } f = \text{adh}(\text{epi } f) \stackrel{(i)}{=} \overline{\text{epi } f} \stackrel{(ii)}{=} \text{epi } f^{**}$ , donc par (3)  $f = f^{**}$ . [(i) car est  $\text{epi } f$  fermé, (ii)

**Inversement**, l'égalité  $f = f^{**}$  implique que  $f$  est convexe et fermée car  $f^{**} \in \overline{\text{conv}}(E)$ .

■

**Remarque 2.2.1** *Il est naturel d'appeler aussi la biconjuguée  $f^{**}$ , l'enveloppe convexe fermée de  $f$ .*

**Théorème 2.2.1** *Si  $f \in \text{conv}(E)$  et  $x \in \text{dom}(f)$ , alors  $f(x) = f^{**}(x)$  ssi  $f$  est S.C.I. en  $x$ .*

**Preuve.** lorsque  $x \in \text{dom}(f)$  on a  $f(x) = \bar{f}(x)$  ssi  $f$  est S.C.I. en  $x$ . Le résultat est alors une conséquence du fait que  $\bar{f} = f^{**}$  lorsque  $f \in \text{conv}(E)$ . ■

**Proposition 2.2.3 (triconjuguée)** *Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction propre ayant une minorante affine. Alors  $(f^{**})^* = f^*$ .*

**Preuve.** On a  $f^{**} \leq f$ , donc  $(f^{**})^* \geq f^*$ . **Inversement**, pour  $p$  fixé,  $f^{**} \geq \langle p, x \rangle - f^*(p)$  pour tout  $x \in E$ , et donc  $(f^{**})^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f^{**}(x)] \leq f^*(p)$ . ■

## 2.3 Transformée de Legendre et Sous-différentiels

Le calcul sous-différentiel et la transformation de Legendre-Fenchel sont très étroitement liés.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction propre convexe  $G$ -différentiable en  $x \in E$ . Alors  $x \in \text{int}(\text{dom}(\partial f))$  et  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ . **Inversement**, si  $\partial f(x)$  est le singleton  $\{p\}$ , alors  $f$  est  $G$ -différentiable en  $x$  et  $\nabla f(x) = p$ . Lorsque la fonction considérée  $f$  est  $G$ -différentiable et convexe, la formule de Young nous donne une formule utile pour calculer la transformée de Legendre. En effet, on a*

$$f^*(\nabla f(x)) = \langle \nabla f(x), x \rangle - f(x) \quad \forall x \in E.$$

Telle que la fonction  $x \mapsto \langle \nabla f(x), x \rangle - f(x)$  atteint son supremum sur  $E$  en un point unique  $x(p) \in E$ , ainsi  $p = [\nabla f(x)]_{x=x(p)}$ , par conséquent

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} \langle p, x \rangle - f(x) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p)).$$



On a que si  $E = \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad \text{et si } p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{bmatrix} \quad \text{alors } \begin{cases} p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(p)) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(p)). \end{cases}$$

Donc  $p = \nabla f(x) \implies x = (\nabla f)^{-1}$ , tel que  $\nabla f : E \rightarrow E^*$  soit surjectif. Alors

$$f^*(p) = \langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle - f((\nabla f)^{-1}(p)) \quad \text{pour tout } p \in E^*$$

*Ceci est la formule de Legendre.*

**Théorème 2.3.1** Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction convexe S.C.I. Alors, pour tout  $x \in E$  et tout  $p \in E^*$ , on a

$$P \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(p).$$

Comme  $f$  est convexe et semi-continue inférieurement, on sait que

$$\begin{aligned} P \in \partial f(x) &\iff f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle \\ &\iff f^{**}(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle \\ &\iff x \in \partial f^*(p). \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$ , où  $A$  est supposée définie positive.

Alors

$$f^*(p) = \frac{1}{2} \langle A^{-1}p, p \rangle.$$

**Exemple 2.3.2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^x$ . On a  $\nabla f(x) = e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et c'est une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $]0, +\infty[$ , donc  $\nabla^{-1}f(p) = \ln(p)$  pour tout  $p \in ]0, +\infty[$ . Il s'ensuit que

$$f^*(p) = p \ln(p) - p \quad \forall p \in ]0, +\infty[.$$

Si  $p < 0$ , alors  $f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} px - e^x = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} px - e^x = +\infty$ . Enfin,  $f^*(0) = -\inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = 0$ .

**Corollaire 2.3.1** Si  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $x \in E$  vérifient  $f^{**}(x) = f(x)$ , alors

$$p \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(p).$$

**Corollaire 2.3.2** Soient  $f \in \text{conv}(E)$  et  $x \in \text{dom}(f)$ . Alors

1.  $\partial f(x) \subset \partial f^{**}(x)$ ,
2.  $\partial f(x) \neq \emptyset \implies f(x) = f^{**}(x)$ ,
3.  $f(x) = f^{**}(x) \iff \partial f(x) = \partial f^{**}(x)$ .

**Démonstration.**

1. Si  $p \in \partial f(x)$ , alors  $f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle$ , donc  $f^{**}(x) + (f^{**})^*(p) \leq \langle p, x \rangle$  car  $f^{**} \leq f$ , et  $(f^{**})^* = f^*$ , si bien que  $p \in \partial f^{**}(x)$ .
2. On toujours  $f^{**}(x) \leq f(x)$ . D'autre part, si  $p \in \partial f(x)$  on a par définition de  $f^{**}$  et par l'égalité  $f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle$  :

$$f^{**}(x) \geq \langle p, x \rangle - f^*(p) = f(x).$$

■

**Preuve.** D'après le point 1) il reste montrer l'inclusion  $\partial f^{**}(x) \subset \partial f(x)$ . Si  $p \in \partial f^{**}(x)$ , on a  $f^{**}(x) + (f^{**})^*(p) = \langle p, x \rangle$ . En utilisant l'hypothèse  $f(x) = f^{**}(x)$  et la propriété  $(f^{**})^*(p) = f^*(p)$ , on obtient  $f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle$ , c'est-à-dire  $p \in \partial f(x)$ . ■

### 2.3.1 Interprétation géométrique de TFL

Voici l'Interprétation géométrique que l'on peut donner de la transformée de Legendre d'une fonction si on prend  $E = \mathbb{R}$ . Pour une pente  $p$  donnée il existe un unique réel  $x(p)$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = p$ . On définit alors la fonction  $f^*(p)$  comme l'opposé de la valeur à l'origine de la tangente en  $x(p)$  (voir figure 2.1).

$$f^*(p) = xp - f \quad \text{avec } p = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

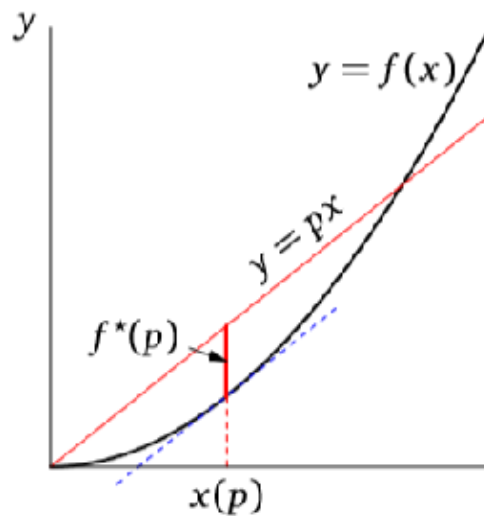


FIG. 2.1 – Interprétation géométrique de la transformation de Legendre.

## 2.4 Règle de Calcul de TFL

### 2.4.1 Quelques règles pour calculer la TFL d'une fonction

Hypothèse	Conclusion	Remarque
(1) $f(x) \leq g(x)$	$f^*(p) \geq g^*(p)$	
(2) $g(x) = \chi_C(x)$	$g^*(p) = \delta_C(p)$	
(3) $g(x) = \ x\ _E$	$g^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ p\ _* \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$	
(4) $g(x) = \ x\ _H^2$	$g^*(p) = \ p\ _H^2$	$H = \text{Hilbert}$
(5) $g(x) = f(\lambda x), \lambda \neq 0$	$g^*(p) = f^*(p/\lambda)$	
(6) $g(x) = \lambda f(x), \lambda \succ 0$	$g^*(p) = \lambda f^*(p/\lambda)$	
(7) $g(x) = \tau_b f(x), b \in E$	$g^*(p) = f^*(p) + \langle p, b \rangle$	$\tau_b f(x) = f(x - b)$ fonction translatée
(8) $g(x) = f(x + \beta), \beta \in \mathbb{R}$	$g^*(p) = f^*(p) - \beta$	

**Démonstration.** (1) Soit  $p \in E^*, \forall x \in E$ , on a  $f(x) \leq g(x) \implies -g(x) \leq -f(x)$

$$\implies \langle p, x \rangle - g(x) \leq \langle p, x \rangle - f(x)$$

cela implique facilement les relations  $f^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f(x)] \geq g^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - g(x)]$ ,

alors  $f^* \geq g^*, \forall p \in E^*, \forall x \in E$ . ■

### 2.4.2 Transformée de l'inf-convolution

Étant données  $f$  et  $g$  deux fonctions  $E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  minorées par une fonction affine commune, l'**inf-convolution** (ou **somme épigraphique**) de  $f$  et  $g$  est la fonction  $f \square g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  définie comme suit :

$$(f \square g)(x) := \inf_{y+z=x} [f(y) + g(z)] = \inf [f(y) + g(z) : y + z = x] = \inf_{y \in E} [f(y) + g(x - y)].$$

Alors  $\text{epi}_s(f \square g) = \text{epi}_s(f) + \text{epi}_s(g)$  et  $\text{dom}(f \square g) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$ .

Donc pour tout  $x \in E$  et  $p \in E^*$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 (f \square g)^*(p) &= \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - (f \square g)(x)] \\
 &= \sup_{x \in E} \left[ \langle p, x \rangle - \inf_{y \in E} (f(y) + g(x - y)) \right] \\
 &= \sup_{x \in E} \sup_{y \in E} \langle p, x \rangle - (f(y) + g(x - y)) \\
 &= \sup_{(x, y) \in E^2} \langle p, x + y \rangle - (f(x) + g(y)) \\
 &= \sup_{x \in E} \langle p, x \rangle - f(x) + \sup_{y \in E} \langle p, y \rangle - g(y) = f^*(p) + g^*(p).
 \end{aligned}$$

C'est la transformé de l'inf-convolution.

### 2.4.3 Transformée d'une somme

C'est une bonne idée pour évaluer  $(f + g)^*$ . En appliquant la formule ci-dessus à  $f^*$ ,  $g^*$  on obtient que

$$(f^* \square g^*)^{**} = (f^{**} + g^{**})^* = (f + g)^*.$$

Ainsi, si  $f^* \square g^* \in \overline{\text{conv}}(E)$ , alors

$$(f + g)^* = f^* \square g^*.$$

### 2.4.4 Transformée de l'infimum et la suprémum

Soit  $I$  un ensemble non-vide. Soient  $f_i : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  des fonctions pour tout  $i \in I$ . On a pour tout  $p \in E^*$

$$\begin{aligned} \left( \inf_{i \in I} (f_i) \right)^* (p) &= \sup_{x \in E} \langle p, x \rangle - \inf_{i \in I} (f_i)(x) \\ &= \sup_{x \in E} \sup_{i \in I} \langle p, x \rangle - f_i(x) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in E} \langle p, x \rangle - f_i(x) \\ &= \sup_{i \in I} (f_i^*(p)). \end{aligned}$$

Ensuite, nous savons que  $f_j \leq \sup_{i \in I} (f_i)$  pour tout  $j \in I$ . La transformée de Legendre inverse les inégalités, ce qui donne  $(\sup_{i \in I} (f_i))^* \leq (f_j)^*$  pour tout  $j \in I$ . On en tire l'inégalité

$$\left( \sup_{i \in I} (f_i) \right)^* \leq \inf_{i \in I} (f_i^*).$$

# Chapitre 3

## Applications de Transformée de Legendre

On applique la fonction de transformée de Legendre pour convexifier une fonction (en calculant la biconjuguée), calculer le sous-différentiel d'une fonction convexe, calculer des problèmes en optimisation (dualisation) et pour passer de la mécanique lagrangienne à la mécanique hamiltonienne,..... alors dans ce chapitre nous parlons comment calculer des problèmes en optimisation par deux théorèmes importants :

### 3.1 Théorème de Fenchel-Rockafellar et applications

**Lemme 3.1.1** *La fonction*

$$h(u) = \inf_{x \in E} f(x) + g(x + u)$$

*est convexe et continue en l'origine.*

**Théorème 3.1.1 (Fenchel-Rockafellar)** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  deux fonctions convexes S.C.I. vérifiant l'hypothèse de qualification (Q) suivante :*

$$\exists x_0 \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g), \text{ tel que } f \text{ est continue en } x_0. \quad (Q)$$

On suppose de plus  $\inf_{x \in E} f + g > -\infty$ . Alors,

$$\inf_{x \in E} f(x) + g(x) = \max_{\phi \in E^*} -f^*(-\phi) - g^*(\phi). \quad (3.1)$$

**Démonstration.** On a par définition de la conjuguée (**Transformée de Legendre**),

$$\inf_{x \in E} f(x) + g(x) = -(f + g)^*(0),$$

et la conclusion suit par la proposition sur **la transformée de Legendre-Fenchel d'une somme** appliqué en  $\phi = 0$  :

$$(f + g)^*(\phi) = \inf_{\psi \in E^*} f(\phi - \psi) + g(\psi)$$

alors,

$$\inf_{x \in E} f(x) + g(x) = -(f + g)^*(0) = - \inf_{\psi \in E^*} f(-\psi) + g(\psi) = \max_{\psi \in E^*} -f^*(-\psi) - g^*(\psi).$$

■

**Théorème 3.1.2 (Fenchel-Rockafellar)** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  deux fonctions convexes S.C.I. vérifiant l'hypothèse de qualification suivante :

$$\exists x \in E, \text{ tel que } x \in \text{dom}(f) \text{ et } g \text{ continue en } Ax. \quad (Q')$$

On suppose de plus que  $\inf_E f + g \circ A > -\infty$ . Pour  $\psi \in F^*$ , on pose  $A^*\psi = \psi \circ A \in E^*$ . Alors,

$$\inf_{x \in E} f(x) + g(Ax) = \max_{\psi \in F^*} -f^*(-A^*\psi) - g^*(\psi). \quad (3.2)$$



**Démonstration.** On va chercher à appliquer la précédente version du théorème de Fenchel-Rockafellar sur l'espace produit  $E \times F$ . On pose

$$f_1 : E \times F \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } y = Ax \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g_1 : E \times F \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(y).$$

On a alors facilement que  $\inf_E f + g \circ A = \inf_{E \times F} f_1 + g_1$ . Il s'agit maintenant d'appliquer la précédente version du théorème de Fenchel-Rockafellar à ce deuxième problème. On identifie  $(E \times F)^*$  à  $E^* \times F^*$ . Pour  $\phi \in E^*$  et  $\psi \in F^*$ , on a

$$\begin{aligned} f_1(\phi, \psi) &= \sup_{x \in E, y \in F} \langle \phi, x \rangle + \langle \psi, x \rangle - f_1(x) = \sup_{\substack{x, y \\ Ax=y}} \langle \phi, x \rangle + \langle \psi, x \rangle - f(x) \\ &= \sup_{\substack{x, y \\ Ax=y}} \langle \phi, x \rangle + \langle \psi, Ax \rangle - f(x) = \sup_{\substack{x, y \\ Ax=y}} \langle \phi + A^* \psi, x \rangle - f(x) \\ &= f^*(\phi + A^* \psi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(\phi, \psi) &= \sup_{x \in E, y \in F} \langle \phi, x \rangle + \langle \psi, x \rangle - g_1(x) = \sup_{\substack{x, y \\ Ax=y}} \langle \phi, x \rangle + \langle \psi, x \rangle - g(x) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \psi \neq 0. \\ g^*(\psi) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème de Fenchel-Rockafellar et en utilisant les calculs précédents,

$$\begin{aligned} \inf_E f + g \circ A &= \inf_{E \times F} f_1 + g_1 = - \sup_{(\phi, \psi) \in E^* \times F^*} f_1^*(-\phi, -\psi) + g_1^*(\phi, \psi) \\ &= - \sup_{\psi \in F^*} f(-A^* \psi) + g(\psi). \end{aligned}$$

■

**Exemple 3.1.1** On considère le problème de minimisation sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $A$  est une matrice à  $m$

lignes et  $n$  colonnes,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2 - \|Ax\|_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Ax).$$

Comme  $f$  et  $g$  sont continues, on peut appliquer le **théorème de Fenchel-Rockafellar**. Calculons maintenant les **conjuguées (Transformée de Legendre)** de  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle - \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2 \\ &= \langle x_0, y \rangle + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x - x_0, y \rangle - \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2 \\ &= \langle x_0, y \rangle + \frac{1}{2} \|y\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \|y + x_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|x_0\|_2^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé  $(\frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2)^* = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$ . De plus,

$$g^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_i x_i y_i - \sum_i |x_i| = \sum_{1 < i < m} h^*(y_i),$$

où l'on a posé  $h : x \in \mathbb{R} \rightarrow |x|$ . De plus,

$$h^*(r) = \sup_{s \in \mathbb{R}} rs - |s| = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,  $g^*$  est la fonction indicatrice de (qui est la boule unité pour  $\|\cdot\|_\infty$ ). Ainsi,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2 - \|Ax\|_1 &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Ax) \\ &= \max_{y \in \mathbb{R}^n} -f^*(-A^t y) - g^*(y) \\ &= \min_{y \in [-1, 1]^n} \frac{1}{2} \|A^t y - x_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|x_0\|_2^2. \end{aligned}$$

# Conclusion

En conclusion, nous avons présenté les théorèmes et les propositions de l'analyse convexe qui jouent un rôle important dans divers domaines de mathématiques. Ensuite nous avons focalisé notre travail sur le calcul de la Transformée de Legendre-Fenchel de problèmes d'optimisation permettant ceux que nous souhaitons résoudre.

# Bibliographie

## [Livres]

- [1] Aude Rondepierre. Introduction à l'optimisation convexe non différentiable.
- [2] D. Rudolph Fundamentals of Measurable Dynamics Oxford University Press.
- [3] J.-B.Hiriart-Urruty, C.Lemaréchal, Convex Analysis and Minimization Algorithms(1993).
- [4] J. Garnier et V. Perrier. MATHÉMATIQUES Et APPLICATIONS.
- [5] R. T. Rockafellar. (1997). Convex Analysis. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.
- [6] V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics, volume 60 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1978.

## [Site internet]

- [7] Jean Charel Gilbert. (3 juillet 2013). Éléments d'Optimisation Différentiable-Théorie et Algorithmes.
- [8] Site internet [http ://quentin.mrgt.fr/files/teaching/aca-2016/chap3. pdf](http://quentin.mrgt.fr/files/teaching/aca-2016/chap3.pdf).

## [Mémoires]

- [9] Molla, Arman, (2016-2017 ). Analyse & optimisation convexe sur des espaces de Banach. Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie.