Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Sciences de la Matière

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière
Filière de Physique
Spécialité Physique des Matériaux

Réf. :

Présenté par :

Bezzalla Saida

Le : Mardi 25 juin 2019

Étude Analytique De La Stabilité De La Convection Naturelle Dans Un Milieu Sphérique

---

Devant le jury:

M.C.B	Zermane Samira	M.C.B	Université Med Khider-Biskra	Président
M.C.B	Bensalah Nadjoua	M.C.B	Université Med Khider-Biskra	Examinateur
M.C.A	Guergueb Saida	M.C.A	Université Med Khider-Biskra	Rapporteur

Année universitaire : 2018 - 2019

REMERCIEMENT

Je remercie tout d'abord le BON Dieu le tout puissant.

Je remercie également Mme Saida Guergueb, encadreur de ce mémoire de fin de cycle, pour m'avoir soutenu et guidé tout au long de mon travail, pour surtout sa patience et ses conseils avisés.

Je n'oublierai pas ma famille, pour son soutien tout au long de mes études. Je tiens à remercier toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail, mes enseignants, mes amis.

je remercie également les membres de jury d'avoir accepté de me faire l'honneur de participer au jury de ce modeste travail.

Enfin, j'espère que ce travail aura la valeur souhaitée.

≪ SAIDA ≫

DEDICACE

Je dédie ce travail:

À ma mère et mon père, qui m'ont soutenu, et encouragé, durant toute ma vie.

À mes frères.

À M .B.

À tous mes amis.

À mes professeurs.

À toutes les personnes que j'aime.

NOMENCLATURE

P Pression normalisée

R_e nombre de Reynolds.

Pr nombre de Prandtl$\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)$.

Ra nombre de Rayleigh $\left(\frac{R_2^5}{\kappa\nu}\Delta T g a\right)$.

T Température normalisée.

ΔT Déférence de température

R_1 Rayon de la sphère interne.

r coordonnée radiale.

k coefficient de conductivité thermique.

R Rayon normalisé$\left(\frac{r}{R_2}\right)$.

u Vitesse radiale.

V Vitesse azimutale normalisé.

v Vitesse azimutale.

U vitesse caractéristique du fluide [m/s].

L Dimension caractéristique [m].

Lettres grecques

ρ masse volumique du fluide [kg/m^3].

μ Viscosité dynamique du fluide [kg / (m.s)].

ν Viscosité cinématique du fluide [m^2/s].

η Rapport rayon extérieure au rayon intérieur.

θ Angle azimutale.

κ Diffusivité thermique.

α Coefficient d'expansion thermique.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Introduction

Suite au problème classique et célèbre de Rayleigh Bénard de la convection naturelle dans une couche fluide homogène chauffée par le bas, et pour laquelle la structure de l'écoulement bidimensionnel et hexagonal a été bien déterminée [1], le problème de la convection dans un fluide confiné dans un espace annulaire sphérique a suscité l'intérêt d'innombrables chercheurs. Le phénomène de la convection naturelle dans les cavités sphériques est d'une importance considérable vu ses applications diverses dans les réacteurs nucléaires , systèmes de stockage thermiques, les collecteurs sphériques et en géophysique.

Des études expérimentales et numériques ont déterminé les modèles d'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur, pour des rapports donnés de rayons, de nombre de Prandtl et de Rayleigh. Bishop *et al.* [2] ont réalisé une expérimentation première de la convection naturelle dans un fluide convectant entre deux sphères concentriques isothermes. Ils ont rapporté des écoulements permanents d'air ayant des structures cellulaires sous forme de croissant ou d'haricot. En poursuivant cette recherche expérimentale, Scanlan *et al.*[3] Ont étudié l'influence du nombre *Pr* (*Pr* variant de 4.7 à 4148), de ΔT (Différence de température entre les deux sphères), de l'épaisseur de l'espace sphérique $\eta\left(\frac{r_0}{r_i}\right)$, allant de 1.09 à 2.81. Les autres se sont préoccupés seulement des caractéristiques du transfert de chaleur. Pour plus d'informations sur l'écoulement, Scanlan et al.[4] complètent les premières études expérimentales, en essayant de visualiser l'écoulement laminaire de l'eau et l'air. Le rapport $\frac{r_0}{r_i}$ allant de 1.09 à 2.17, les structures de l'écoulement sont photographiées pour les valeurs de Ra variant de $1.7.10^3$ à $1.5.10^7$. Les divers types de figures d'écoulement stationnaires, formes de croissant ou d'haricot, pour l'air et pour $\frac{r_0}{r_i} = 1.78$, l'écoulement permanent reste non perturbé jusqu'à une valeur critique de Grashof égale à $2.46.10^5$ Où l'écoulement devient instable transitoire.

Des efforts considérables ont été fournis pour approcher numériquement le problème de la convection naturelle dans une géométrie sphérique. Des modèles numériques ont été élaborés dans ce but. Caltagirone et al. [5] ont simulé par la méthode des différences finies le problème de la convection naturelle dans un fluide convectant entre deux sphères isothermes où une différence de température ΔT est maintenue. Le fluide répond au modèle de Boussinesq et est soumis à la force gravitationnelle verticale. Les autres présentent leurs résultats en termes de fonction de courant et distribution de température pour des valeurs de Ra variant de 100 à 10^6, pour une épaisseur donnée de l'espace. Ils trouvent deux structures d'écoulement différentes pour une épaisseur donnée de paramètres, une structure unicellulaire et une autre multicellulaire pour l'air $(Pr = 7), \frac{r_0}{r_1} = 2$, et $Ra = 5.10^4$. Les autres pensent que cette diversité des solutions est dûe à l'hypothèse de l'écoulement axisymétrique qui parait restrictive. J.L.Wright et al. [6] ont traité par la méthode des perturbations le problème de la convection naturelle dans une cavité sphérique relativement étroite, la surface extérieure étant la plus chaude. Ils établissent l'influence apparente des nombre de $Pr, Gr, \frac{r_0 - r_i}{r_i}$ et la présence d'une source de chaleur volumétrique interne, sur la distribution de température et l'écoulement. La variation de $Pr(0.01; 0.1, \dots)$ influe sur l'allure des isotherme. Les courbures indiquent une favorisation de la convection. Pour un Pr et $\frac{r_0 - r_i}{r_i}$ donnés, l'augmentation du Ra se traduit par la multiplicité cellulaire. Pour un $\frac{r_0 - r_i}{r_i}$ relativement petit, la convection est faible, tandis que la variation de la source de chaleur affecte seulement les isothermes où des courbures prononcées sont observées, la structure cellulaire n'est pas influencée. David .R. Gardner et al. [7] ont étudié la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide admettant un écoulement de base axisymétrique permanent dont ils déterminent les caractéristiques. Le problème de bifurcation initial qui correspond à une transition d'un régime stable (Grashof faible) à un autre instable (au Grashof critique), est résolu en considérant le problème linéarisé des équations des perturbations. Les solutions sont approchées à l'aide de la méthode spectrale. Elles sont étroitement liées à l'épaisseur de l'espace et du nombre Pr du fluide convectant$(0 \text{ à } 0.7)$. Pour $\eta = 0.9$, et pour un ensemble de valeurs de Pr allant de 0 à 0.7, les auteurs calculent les valeurs critiques de Ra, la partie imaginaire du complexe σ, le nombre d'onde m et le nombre de Nusselt Nu. Ils trouvent que pour $0 \leq Pr < 0.31$, la bifurcation est axisymétrique et dépend périodiquement du temps. Elle est stationnaire et tridimensionnelle pour $Pr > 0.31$. Douglass et al. [8] ont présenté une analyse de l'effet du nombre de Pr, allant de l à 100 sur la stabilité des perturbations axisymétiques. Pour un Pr donné, la valeur de Ra critique croit quand les sphères sont rapprochées. Il y a une décroissance du Ra critique pour les valeurs élevées de Pr (la diffusivité thermique diminue). Garg et al. [9] présentent des résultats d'écoulement et de température pour un rapport $\frac{r_o}{r_i}$ égale à 2, pour des valeurs de Pr égales à 0.02 (métal liquide), 0.7(air), 6(eau) en variant le nombre de Ra ($Ra = 9.10^4, 2.10^5$). La discrétisation du modèle mathématique est faite par différences finies en bidimensionnel en utilisant la formulation de fonction de courant et vorticité. Deux structures d'écoulement sont possibles, le modèle passe de la forme d'un croissant à la forme d'un haricot (ou rein) quand Ra augmente. Les auteurs précisent la formation de cellules secondaires en bas de l'espace annulaire (dans la région stagnée).Hsin-sen chu et al. [10] ont résolu numériquement le problème de transition et axisymétrique de la convection laminaire dans l'air confiné entre deux sphères concentriques, la sphère intérieure étant la plus chaude. En formulant le modèle mathématique à l'aide de la vorticité et fonction de courant, les équations globales sont discrétisées grâce aux différences finies et sont résolues par la technique des sur-relaxations successives de Gauss (S.O.R). Les résultats de calcul sont donnés pour des rapports de rayons égales à 1.2, 1.5, et 2. L'écoulement et les caractéristiques du transfert thermique sont déterminés graphiquement pour des valeurs de Ra de $10^3, 10^5$,et 5.10^5, la solution initiale correspond au régime de conduction pure. Les courbures d'isothermes et le déplacement des vortex vers le haut de l'enceinte illustrent d'une façon remarquable la dominance du régime convectif.

Le phénomène de la convection naturelle en milieu sphérique a stimulé largement la recherche dans les sciences géophysiques et astrophysiques. La motivation principale de la recherche dans cet horizon réside particulièrement dans le procéssus de la convection dans le manteau terrestre et dans d'autres planètes, telles que Mars et Vénus [11]. La tectonique des roches, le visage changeant de la terre, les études séismiques, et aussi la génération du champ magnétique ont poussé à fond les recherches dans le domaine fertile de la convection laminaire en cavité sphérique. Dans la littérature, des modèles mathématique ont été élaborés pour approcher la convection dans un fluide soumis à un potentiel gravitationnel radial S.Chandrasekhar [1] établit les bases de la théorie linéaire des perturbations du phénomène de la convection naturelle dans un fluide sphérique et dans un fluide confiné entre deux sphères concentriques, soumis à un champ gravitationnel radial. La chaleur est générée par une source volumétrique uniforme. Il démontre que l'instabilité thermique a lieu pour une valeur critique de Rayleigh qu'il calcule pour η donnée. Il établit aussi l'influence de la géométrie et des conditions aux limites de surfaces rigides et libres sur les valeurs critiques de Ra. Busse et al. [12], par une étude analytique, analysant des perturbations infinitésimales à l'aide de la méthode spectrale, donnent les solutions du problème linéarisé correspondant à l'état perturbé. En tenant compte des effets non linéaires qui ont été négligés dans la théorie de Chandrasekhar [1], et ceci dans le but de lever la dégénérescence, Busse dérive une condition de solvabilité. Des solutions stationnaires indépendantes sont calculées pour les premières valeurs paires du nombre d'onde l (degré de l'harmonique sphérique). Dans la deuxième partie, Busse et al. [13] déterminent les modèles d'écoulement du problème linéaire de la convection naturelle en se basant sur les solutions correspondant aux valeurs impaires de $l(1,2,3)$ Ils discutent la stabilité des solutions en résolvant le problème aux valeurs propres σ (amplitude des perturbations). Le mode correspondant $l = 3$ est étudié en détail, il lui correspond trois modèles d'écoulement parmi lesquels un écoulement axisymétrique mais instable un autre tridimensionnel à symétrie tétrahydrique. Par l'analyse de stabilité, ce dernier s'avère stable. Il est à noter que la seule restriction remarquable dans cette étude est qu'elle est faite pour les valeurs de Ra proche de Ra critique.

En géophysique, le modèle de la convection naturelle dans un fluide à Pr infini (fluide extrêmement visqueux) a été intensivement étudiée. En effet, Zebib et al. [14-17] ont étudié le problème axisymétrique permanent de la convection dans un fluide newtonien répondant au modèle de Boussinesq. En adoptant la technique de Galerkin (méthode spectrale), ils déterminent les valeurs critiques de Ra pour lesquelles démarre la convection ainsi que les structures pour différents modes de chauffement du fluide convectant, dans l'état perturbé. La détermination des solutions est suivie par une étude de stabilité de ces dernières envers des perturbations tridimensionnelles. Ces auteurs ont trouvé qu'il y avait deux classes de solutions pour le modèle d'écoulement : des solutions dites 'paires', qui sont des cellules symétriques par rapport au plan équatorial et des solutions 'impaires', dont correspond des cellules non symétriques. L'analyse de stabilité démontre que les solutions impaires sont les préférables et ceci pour leur stabilité. Bercovici et al. [18-19] présentent les solutions du modèle tridimensionnel de la convection naturelle dans un fluide à Pr infini, dans un champ gravitationnel radial (cas du manteau terrestre). Ils déterminent les structures de l'écoulement perturbé (perturbations à amplitudes finies), à symétrie cubique et tétrahydrique, pour les valeurs de Ra égales à cent fois la valeur critique. Les auteurs comparent les résultats de deux codes différents, l'un conforme au modèle de Boussinesq et l'autre suit un modèle approximant l'écoulement compressible, proche du cas réel.

Dans ce présent travail, on introduit dans le premier chapitre une recherche bibliographique sur les travaux déjà publiés dans le domaine de la convection naturelle dans une géométrie sphérique aussi bien pour un champ gravitationnel radial (cas géophysique) que pour un champ bidimensionnel. On présente dans le deuxième chapitre des notions de base de mécanique de fluide et de transfert de chaleur. Une étude théorique est consacrée dans le troisième chapitre à la théorie des perturbations infinitésimales. Par une analyse du problème de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide confiné dans une sphère, on établit le principe d'échange de stabilité. Dans le quatrième chapitre, une fois que le principe d'échange de stabilité est validé càd qu'il y a réellement une instabilité thermique, on calcule les valeurs critiques de Ra par la résolution du problème aux valeurs propres. Le but principal est de déterminer ces valeurs critiques où se manifeste l'instabilité thermique. Le système est soumis à un champ gravitationnel radial comme dans le phénomène de la convection dans le manteau terrestre.

CHAPITREII

NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

II-1. INTRODUCTION:

La mécanique des fluides (**M.D.F.**) est la partie des sciences physiques qui étudie le comportement des fluides au repos ou en mouvement. Elle est d'une grande importance dans de nombreux domaines: l'aéronautique, la chimie, le génie civil, la mécanique, la météorologie, la construction navale et l'océanographie.

Les principes de la mécanique des fluides sont appliqués dans la propulsion à réaction, dans les turbines, les compresseurs et les pompes. En ingénierie, lorsque l'on utilise les pressions de l'eau et de l'huile, on suit les principes de l'hydraulique.

La mécanique des fluides peut être divisée en deux grandes catégories: la statique des fluides, ou hydrostatique, qui modélise les fluides au repos, et la dynamique *des* fluides, qui étudie les fluides en mouvement. Le terme hydrodynamique s'applique à l'écoulement des liquides ou des gaz à faible vitesse. Dans ce cas, le gaz est considéré comme incompressible: sa masse volumique est constante. L'aérodynamique, ou dynamique des gaz, s'intéresse au comportement des gaz lorsque les changements de vitesse et de pression sont trop importants pour pouvoir négliger la compressibilité des gaz.

La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de température des hautes vers les basses températures. La chaleur pénètre, comme la gravité, les substances de l'univers et concourt à tous ses phénomènes. L'unité de la chaleur dans le système international est le joule (J).

Le transfert de chaleur représente l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. C'est un phénomène que l'on trouve dans de nombreux secteurs de l'industrie et dans notre vie quotidienne. Les ingénieurs et les techniciens se trouvent confrontés à ce genre de problème et essayent de maximiser ou de minimiser ce phénomène selon les besoins de l'industrie et dans le souci d'économiser cette énergie qui revient chère. De ce fait, les transferts thermiques ont, aussi bien dans le domaine des sciences pures que dans celui des applications technologiques, un rôle souvent essentiel. Ce rôle devient même déterminant lorsqu'il est à l' origine des techniques utilisées, exemple: (échangeurs, moteurs thermiques, calorifugeage, isolation thermique…etc.). La connaissance des Lois physiques qui régissent ces modes de transferts thermiques est une chose essentielle et très importante, car elles nous permettent de maitriser la façon et la qualité de cet écoulement de chaleur suivant notre désir [20].

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, Ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système).Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps.

II-2. LES DIFFERENTS MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR:

L'échange de chaleur se fait selon trois modes différents: conduction, convection et rayonnement.

II-2.1 Transfert de chaleur par conduction:

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou L'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique.(gradient de température dans un milieu).Dans la plupart des cas on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection. La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La conduction s'effectue de proche en proche:

Si on chauffe l'extrémité d'un solide il y a transfert progressif.

Si on coupe le solide, on stoppe le transfert [20].

II-2.2 Transfert de chaleur par rayonnement:

Le rayonnement thermique peut être considéré comme un cas particulier du rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus simple est celui du rayonnement solaire.

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine: la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 $°K$.

Le rayonnement thermique est un phénomène de surface, La relation de base du Rayonnement est celle de STEFAN- BOLTZMAN selon laquelle la puissance Mo du rayonnement thermique émis par unité de surface d'un corps noir est directement proportionnelle à T^4.

$$Mo = \sigma T^4 [W.m^{-2}]$$

σ = constant de STEFAN-BOLTZMAN = 5.67*10-8 $Wm^{-2}K^{-4}$

Cette formule se déduit par intégration sur l'ensemble des longueurs d'onde de la relation fondamentale obtenue par PLANCK dans sa théorie de quanta [20]

II-2.3 Transfert de chaleur par convection:

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction de l'accumulation de d'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord, la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, l'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules.

Ensuite, ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement [21].

II-3 LES DIFFERENTS TYPES DE LA CONVECTION:

II-3.1 convection forcée:

Le mouvement de fluide est causé par l’action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l’intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide [22].

II-3.2 convection naturelle:

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur d’un milieu chaud vers un milieu froid, par un transport macroscopique de la matière (mouvement des particules fluides)généré par des effets de poussée d’Archimède lié à l’action du champ de pesanteur et à la présence d’un gradient de la température [22].

II-4 GRANDEURS SANS DIMENSION:

Une grandeur sans dimension (ou grandeur adimensionnelle) est une quantité permettant de décrire une caractéristique physique sans dimensions ni unité explicite d'expression. Elle est constituée du produit ou rapport de grandeurs à dimensions, de telle façon que le rapport des unités équivaut à un. Ces grandeurs sans dimension interviennent particulièrement en mécanique des fluides et pour la description de phénomène de transfert lorsqu'on utilise la similitude de modèles réduits ou théorie des maquettes et construit l'interprétation des résultats d'essais. Elles portent le nom de nombres sans dimension, nombres adimensionnels, ou encore des nombres caractéristiques. Les nombres adimensionnels les plus utilisés dans le domaine de la convection sont [21]:

II-4.1 Le Nombre de Reynolds Re:

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit comme suit:

$$R_e = \frac{LU}{\nu}$$

U**:** vitesse caractéristique du fluide [m/s]

L**:** dimension caractéristique [m]

ν**:** viscosité cinématique du fluide [m²/s]

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Avec:

ρ : masse volumique du fluide [kg/m^3]

μ : viscosité dynamique du fluide [kg / (m.s)]

II-4.2 Le Nombre de Prandtl Pr:

C'est le rapport de la viscosité cinématique ν et diffusivité thermique κ, il caractérise l'importance relative des effets thermique et visqueux, Ce nombre Porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un Prandtl faible indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

II-4.3 Le Nombre de Rayleigh Ra:

C'est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide: inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut le définir comme étant le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de Lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante: $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr} * \mathrm{Pr}$

II-5 VORTICITÉ:

La vorticité est définie comme étant le rotationnel de la vitesse. Elle est reliée à la circulation par le théorème du rotationnel:

$$\Gamma = \iint_s \omega \, ds$$

Où: S est une surface s'appuyant sur C, et d$\boldsymbol{S}$ un vecteur normal à S de norme dS proportionnelle à un petit élément de surface.

II-6 VISCOSITÉ:

Le fluide réel se caractérise, en opposition au fluide parfait, par deux propriétés importantes : La viscosité qui est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Elle est due à la combinaison des efforts de cohésion et d'agitation moléculaire s'opposant au déplacement relatif des couches liquides les unes par rapport aux autres. La viscosité dépend de la nature du fluide et varie considérablement d'un fluide à un autre. Pour un même fluide, elle dépend de la pression et de la température; pour les liquides incompressibles, elle est pratiquement invariante avec la pression. [23]

Viscosité dynamique:

Considérons deux couches de fluide contiguës distantes de Δz. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv, à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz: $F = \mu . S \frac{\Delta v}{\Delta Z}$

Le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Dimension**:** $[\mu] = M.L^{-1}.T^{-1}$. [23]

Viscosité cinématique:

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ.

Ce rapport est appelé viscosité cinématique**:**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dimension: $[\nu] = L^{-2}.T^{-1}$. [23]

II-7 ÉQUATIONS DE BASE DE LA MÉCANIQUE DU FLUIDE ET TRANSFERT DE CHALEUR :

II-7.1 L'équation de conservation de la masse:

Considérons un volume matériel $V_{m(t)}$. La masse contenue dans ce volume est:

$$M = \int_{V_m} \rho dV \tag{II.01}$$

Où: ρ est la masse volumique du milieu fluide

Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans $V_{m(t)}$ est constante et on peut écrire:

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_{V_{m(\mathrm{t})}} \rho dV = 0 \tag{II.02}$$

D'après le théorème de Leibnitz, elle s'écrit alors:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(\mathrm{t})}} \rho dV = \int_{V_{m(\mathrm{t})}} \partial_0 \rho dV + \int_{S_{m(\mathrm{t})}} \rho n_i v_i \, dS \tag{II.03}$$

Où: $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$

Et d'après l'équation(II.02), on peut écrire:

$$\int_{V_{m(\mathrm{t})}} \partial_0 \rho dV + \int_{S_{m(\mathrm{t})}} \rho n_i v_i \, dS = 0 \tag{II.04}$$

Si le volume V_m(t) ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface S_m(t) peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire:

$$\int_{S_{m(t)}} \rho n_i v_i \, dS = \int_{V_{m(t)}} \partial_i \rho v_i \, dV \qquad \text{(II.05)}$$

Où: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x} (i = 1)$

Dans ces conditions, l'équation(II.04) devient:

$$\int_{V_{m(t)}} (\partial_0 \rho + \partial_i \rho v_i) \, dV = 0 \qquad \text{(II.06)}$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrande doit être identiquement nul :

$$\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0 \qquad \text{(II.07)}$$

Où $\partial_i(\rho v_i)$ est écrit dans comme suit:

$$\partial_i(\rho v_i) = div(\rho \vec{V})$$

$$\partial_i(\rho v_i) = \partial_1(\rho v_1) + \partial_2(\rho v_2) + \partial_3(\rho v_3)$$

$$\partial_i(\rho v_i) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)$$

L'équation (II.07) est une équation exprimant la conservation de masse. Elle est applicable en tout point d'un fluide continu ne contenant pas de sources ou de puits.

L'équation(II.07) est souvent désignée sous le nom d'équation de continuité. On peut l'écrire sous une forme légèrement différente en développant $\partial_i \rho v_i$

$$\partial_i \rho v_i = \rho \, \partial_i v_i + v_i \, \partial_i \rho \qquad \text{(II.08)}$$

En substituant cette relation dans l'équation(II.07) on obtient:

$$\partial_0 + v_i \, \partial_i \rho + \rho \, \partial_i v_i = 0 \qquad \text{(II.09)}$$

Cette expression fait apparaitre la dérivée matérielle:

$$\frac{d}{dt}\rho = \partial_0\rho + v_i\partial_i\rho \tag{II.10}$$

Et on peut écrire l'équation(II.07) sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\partial_i v_i = 0 \tag{II.11}$$

Ou encore:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}\rho + \partial_i v_i = 0 \tag{II.12}$$

II-7.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement:

Considérons à nouveau un volume de contrôle $V_{m(\mathrm{t})}$ matériel; La quantité de mouvement contenue dans ce volume est:

$$\int_{\mathrm{V_m}(t)} \rho v dV \tag{II.13}$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'est autre que la loi de newton qui s'écrite dans ce cas:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v dV = F_{ext} \tag{II.14}$$

Où:F_{ext}est un résultante des forces extérieures exercées sur le volume $V_m(t)$.

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans V_m:

(1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme:

$$\int_{V_m(t)} \rho F dV$$

(2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface $A_m(t)$. Nous écrirons ce type de forces sous la forme:

$$\int_{A_m(t)} t(n) dA$$

Dans cette expression, n désigne la normale extérieure et: $\delta f = t(n)dA$

Représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dA de normale n et t(n) est le vecteur contrainte agissant sur dA.

L'expression de l'équation(II.14) peut donc s'écrire sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)}\rho v dV = \int_{V_m(t)}\rho F dV + \int_{A_m(t)} t(n) dA \qquad \text{(II.15)}$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique des fluides, nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)}\rho v_i dV = \int_{V_m(t)}\rho F_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(n) dA \qquad \text{(II.16)}$$

Dans cette expression, $t_i(n)$ désigne la projection sur l'axe i du vecteur contrainte. Pour continuer, il faut écrire $t_i(n)$ de façon plus explicite. On a besoin pour cela des résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à la surface A. cette analyse conduit taux résultats suivants:

$$t_i(n) = T_{ij} n_j \qquad \text{(La notation d'Einstein est utilisée ici)}$$

Et: $$T_{ij} = T_{ji} (i = 1,2,3 \quad et \quad j = 1,2,3) \qquad \text{(II.17)}$$

La première expression indique que la composante i du vecteur contrainte est donnée par le produit scalaire du tenseur des contraintes T dont les composantes sont T_{ij} et du vecteur normal n de composantes n_j . La seconde expression indique que le tenseur T_{ij} est symétrique.

Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous les expressions des trois composantes du vecteur contrainte sous forme totalement explicite:

$$\begin{aligned} t_1(n) &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ t_2(n) &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ t_3(n) &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3 \end{aligned} \qquad \text{(II.18)}$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte t en deux parties:

- La contrainte associée à la pression.

- La contrainte associée aux forces visqueuses.

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation de fluide. On peut écrire dans ces conditions:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{II.19}$$

T_{ij} : Tenseur des contraintes.

Où: $p\delta_{ij}$:Tenseur des contraintes associées à la pression.

τ_{ij} : Tenseur des contraintes visqueuses.

La projection du vecteur contrainte sur l'axe i est alors donnée par :

$$t_i(n) = \left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)n_j \tag{II.20}$$

Soit encore:

$$t_i(n) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \tag{II.21}$$

En clair cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned} t_1(n) &= -pn_1 + \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ t_2(n) &= -pn_2 + \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ t_3(n) &= -pn_3 + \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \tag{II.22}$$

En rapportant l'équation(II.20) dans l'équation(II.16), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho F_i dV + \int_{A_m(t)} \left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)n_j dA \tag{II.23}$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on peut écrire encore:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho F_i dV + \int_{V_m(t)} \frac{d}{dx_j}\left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)dV \tag{II.24}$$

Soit encore

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho F_i dV - \int_{V_m(t)} \frac{dp}{dx_i} dV + \int_{V_m(t)} \frac{d\tau_{ij}}{dx_j} dV \tag{II.25}$$

D'après le théorème de Leibnitz, l'équation devient:

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_m(t)} \left(\rho F_i - \frac{dp}{dx_i} + \frac{d\tau_{ij}}{dx_j} \right) dV \qquad \text{(II.26)}$$

Le volume de contrôle $V_m(t)$ est arbitraire et les intégrantes apparaissant dans les deux membres doivent être identiques:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(II.27)}$$

La signification physique de cette équation apparait clairement :

$$\left\{ \begin{matrix} Quantité \\ d'accélération \\ par\ unité \\ de\ volume \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} Forces\ associées \\ à\ la\ pression\ par \\ unité\ de \\ volume \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} Forces \\ de\ volume \\ par\ unité \\ de\ volume \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} contraintes \\ visqueuses \\ par\ unité \\ de\ volume \end{matrix} \right\} \qquad \text{(II.28)}$$

Où: τ_{ij} = tenseur de contraintes, pour un fluide newtonien, s'écrit:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\partial_k v_k + 2\mu\partial_i v_j$$

Donc:

$$\rho(\partial_0 v_i + v_j\partial_j v_j) = \rho F_i - \partial_i p + 2\mu\partial_j(\partial_i v_j) - \frac{2}{3}\mu\partial_j(\partial_i v_i) \qquad \text{(II.29)}$$

Les équations précédentes sont celles de Navier Stokes de conservation de quantités de mouvement.

II-7.3 L'équation de conservation d'énergie:

Pour établir une équation exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique, pour un volume matériel $V_m(t)$.

L'énergie contenue dans le volume $V_m(t)$ a pour expression:

$$\int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV$$

Le taux de variation de cette énergie est donné par:

$$\int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = W + Q \qquad \text{(II.30)}$$

Le travail par unité de temps W qui apparait au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume:

$$W = \int_{V_m(t)} \rho F.vdV + \int_{A_m(t)} t_i(n).vdA \tag{II.31}$$

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par q le flux de chaleur par conduction. Ainsi, $-$q.n représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle $A_m(t)$.

$$Q = -\int_{A_m(t)} \mathrm{q.n}dA \tag{II.32}$$

En substituant les expressions(II.31) et (II.32) dans l'équation(II.30) on obtient:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV = \int_{V_m(t)} \rho F.vdV + \int_{A_m(t)} t(n).vdA + \int_{A_m(t)} \mathrm{q.n}dA \tag{II.33}$$

Pour déduire une équation de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

D'après le théorème de Leibnitz et Green Ostrogradsky, elle devient:

$$\int_{V_m(t)} \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV = \int_{V_m(t)} \rho F_i.v_i dV + \int_{V_m(t)}\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(pv_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}v_i)\right]dV - \int_{V_m(t)}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV \tag{II.34}$$

Où:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV = \int_{V_m(t)} \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV$$

Et:

$$\int_{A_m(t)} t(n).vdA = \int_{A_m(t)} t_i(n).v_i dA = \int_{V_m(t)}\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(pv_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}v_i)\right]dV$$

Et:

$$\int_{A_m(t)} \mathrm{q.n}dA = \int_{V_m(t)}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV$$

Le volume$V_m(t)$ est arbitraire et par conséquent:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{1}{2}v^2\right) = \rho F_i.v_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(pv_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}v_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{II.35}$$

Donc en notation indicielle:

$$\partial_0\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\right]+\partial_j\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\right]=-\partial_i q_i+\partial_i\left(\tau_{ij}v_j\right)+\rho F_i.v_i-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \qquad \text{(II.36)}$$

La signification physique de cette équation apparait clairement :

$$\begin{Bmatrix} Taux\ d'ccroiss \\ de\ l'énérgie \\ par\ unité \\ de\ volume \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} terme \\ convectif \end{Bmatrix}$$

$$=-\begin{Bmatrix} Flux \\ de \\ chaleur \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} Puissance \\ des\ forces \\ visqueuses \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} Puissance \\ des\ forces \\ volumiques \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} Puissance \\ des\ forces \\ pression \end{Bmatrix}$$

L'équation d'énergie peut être écrite sous d'autres formes:

1. L'équation d'énergie mécanique:

Elle est dérivée à partir de l'équation de quantité de mouvement, au multipliant par $\vec{V}$. En rotation symbolique:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}V^2\right)+\nabla^2\left(\rho\vec{V}\frac{1}{2}V^2\right)=-\vec{V}\vec{\nabla}p+\vec{V}\vec{\nabla}\vec{\tau}+\rho\,\vec{V}\vec{F} \qquad \text{(II.37)}$$

Ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}V_i^{\,2}\right)+\partial_j\left(\rho V_j\frac{1}{2}V^2\right)=-V_i\partial_i p+V_i\partial_j\tau_{ij}+\rho\,V_iF_i \qquad \text{(II.38)}$$

Où:

$$\vec{V}.\vec{\nabla}=V_j\partial_j=V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}$$

2. L'équation d'énergie thermique:

C'est l'équation résultant de la différence de l'énergie totale et de l'énergie mécanique:

$$\partial_0(\rho e)+\partial_j\left(\rho v_j e\right)=\ -p\partial_j v_j+\tau_{ij}\partial_j v_i-\partial_i q_i \qquad \text{(II.39)}$$

On a : $e=c_V T$ $\quad$ $(équation\ de\ l'état\ calorifique\ ou\ energie\ interne)$

Et en tenant compte de l'équation de continuité:

$$\rho\partial_0(c_V T)+\rho v_j\partial_j(c_V T)=-\partial_i q_i+\tau_{ij}\partial_j v_i-p\partial_j v_j \qquad \text{(II.40)}$$

Où:

$$\tau_{ij}\partial_i v_j=\tau_{ij}\left(\partial_i v_j\right)=\left[-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\partial_i v_i+2\mu\left(\partial_j v_i\right)\right]\left(\partial_i v_j\right)$$

$$\phi_V = \tau_{ij}\partial_i v_j = -\frac{2}{3}\mu(\partial_i v_i)^2 + 2\mu{\partial_j}^2 v_i$$

τ_{ij} est un tenseur contraint visqueuses

μ est une viscosité dynamique

Le transfert de chaleur le plus dominant est la conduction:

$$q_i = -k\partial_i T$$

Enfin, les équations $(\mathrm{II}.07)$, $(\mathrm{II}.29)$ et (II.40) sont les équations de base d'un écoulement compressible, visqueux et newtonien. [24], [25]

II-8 L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ:

Elle est appliquée aux situations physiques où la densité du fluide et les autres propriétés thermodynamiques subissent de faibles variations pour de faibles variations de température (de l'ordre de 10°) et où le coefficient d'expansion α et petit. Alors, les propriétés thermodynamiques sont prises constantes sauf dans le terme gravitationnel (ρF_i) qui ne peut être igoré relativement au terme d'inertie. La variation de ρ en fonction de la température est donnée comme suit

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \qquad \text{(II.41)}$$

Où:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{\delta\rho}{\Delta T}$$

T_0: Température de référence, pour notre cas T_0=T_c (température de la paroi froide).

α : Le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

ρ_0 : Masse volumique du fluide à T_0.

Et :$\rho - \rho_0 = \delta\rho$

Variation petite .Avec cette approximation de Boussinesq, les équations de base sont simplifiées, en effet :

L'équation de continuité devient:

$$\partial_i(\rho v_i) = 0 \quad \text{(II.42)}$$

$$\partial_i v_i = 0 \quad \text{(II.43)}$$

Où: $\mathrm{div}\vec{V} = 0$ (deux indices se répètent : c'est une somme)

Les équations de mouvement de Navier –Stoks deviennent:

$$\rho\left(\partial_0 v_i + v_j\partial_j v_i\right) = \rho F_i - \partial_i p + 2\mu\partial_j\left(\partial_j v_i\right) - \frac{2}{3}\mu\partial_j(\partial_i v_i) \quad \text{(II.44)}$$

Où:$\partial_i v_i = 0$ (continuité)

En remplacement dans l'équation de mouvement (terme gravitationnel) :

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

Et dans les autres termes ρ par ρ_0:

$$\rho_0\left(\partial_0 v_i + v_j\partial_j v_i\right) = -\partial_i p + (\rho_0 + \delta\rho)F_i + \nu\nabla^2 v_i \quad \text{(II.45)}$$

Où: $$\partial_j\partial_j = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$$

ν est viscosité cinématique.

μ est viscosité absolu ou dynamique.

Donc:

$$\rho_0\left(\partial_0 v_i + v_j\partial_j v_i\right) = -\partial_i \frac{p}{\rho_0} + \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)F_i + \nu\nabla^2 v_i \quad \text{(II.46)}$$

L'équation d'énergie devient :

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = \rho c_V(\partial_0 T + v_i\partial_i T) = \partial_j\left(k\partial_j T\right) - p\partial_j v_j + \phi_V \quad \text{(II.47)}$$

ici: $\phi_V = 2\mu{\partial_j}^2 v_i$

donc:

$$\partial_0 T + v_j\partial_j T = C\nabla^2 T + \phi_V \quad \text{(II.48)}$$

Où: $C = \frac{k}{\rho c_V}$

La dissipation visqueuse, dans l'approximation de Boussinesq et en comparaison avec le terme conductif, peut être ignorée.

Ainsi, l'équation de conduction de chaleur devient:

$$\frac{DT}{Dt} = \partial_0 T + v_j \partial_j T \; = \; C\nabla^2 T \tag{II.49}$$

Enfin, les équations $(\text{II}.43)(\text{II}.46)$ et(II.49) sont les équations de base de boussinesq instantanées.

CHAPITRE III:

THÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

CHAPITRE III: THÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

III-1. INTRODUCTION:

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un milieu sphérique a été présentée par Chandrasekhar(1961) [1].Il établit ses fondations théoriques et ses concepts de base. Dans cette analyse, on démontre en premier, la validité du principe d'échange de stabilité et par suite la résolution du problème aux valeurs propres. Il détermine les valeurs critiques du paramètre Rayleigh Ra pour lesquelles se manifeste la première bifurcation. On parle de théorie de stabilité linéaire car en fait, elle traite des perturbations qui sont infinitésimales comparées à l'état initial du système linéaire, elle n'est valable et appliquable que dans un domaine restreint du paramètre Ra. En effet, ces perturbations qui augmentent exponnentiellement avec le temps, dans les conditions favorables, atteignent rapidement une amplitude telle que le produit de ces termes cessent d'être négligé. Dans le problème linéaire, les produits des termes des perturbations infinitésimales d'un ordre supérieur à un seront négligeables. Ainsi, les équations des perturbations seront linéarisées. En revanche, dans la théorie non linéaire, les perturbations ont une amplitude finie et les effets non linéaires sont pris par conséquence en considération.

La théorie de stabilité linéaire de la convection naturelle nécessite la connaissance de quelques concepts de base essentiels. Un système hydrodynamique est dans un état stable si toutes les variables physiques le décrivant sont indépendantes du temps, dans le cas contraire, il est y instable. Un système soumis à des perturbations infinitésimales relativement à ses variables physiques dans son état de base est dit stable, si ces fluctuations disparaissent graduellement. Il est instable si leurs amplitudes progressent dans le temps, et le système ne revient plus à son état initial.

On définit un état de stabilité neutre séparant les deux états stable et instable. Le passage de l'état stable à l'état instable se fait à travers cet état neutre, quand le paramètre variable Ra atteint une certaine valeur critique. On dira que l'instabilité est établie à cette valeur critique. Les perturbations peuvent évoluer périodiquement, alors l'écoulement présentera des cellules stationnaires. Dans le cas où elles évoluent par des oscillations croissantes ou décroissantes, les mouvements sont alors oscillatoires avec des fréquences caractéristiques définies. Chandrasekhar [1] démontre que la convection naturelle dans une cavité sphérique, dans un champ gravitationnel radial, présente une structure cellulaire stationnaire.

III-2. NATURE DU PROBLEME PHYSIQUE:

Un fluide newtonien, obéissant à l'approximation de Boussinesq, visqueux est confiné dans un espace annulaire sphérique. Un gradient de température est y maintenu par une source de chaleur uniforme, le fluide étant soumis seulement au champ gravifique. Si la distribution de la densité était régulière, la force de pesanteur appliquée à un élément de volume extrait du fluide serait équilibrée par la force d'Archimède d'expulsion et pourrait ne pas être prise en compte. Cependant, à cause du gradient de température maintenu dans le fluide, la distribution de la densité est irrégulière, en d'autre terme, la densité dépend de la température du fluide. L'action de la pesanteur n'étant pas alors équilibrée par la force d'Archimède. Par expansion thermique, le fluide sera le siège d'une circulation à courant ascendant dans la partie la plus chaude et à courant descendant dans la partie de l'espace à température la plus basse. Ces deux courants s'expliquent par l'effet du potentiel gravitationnel, le fluide le plus léger et donc le plus chaud monte tandis que le fluide dans la partie froide et donc lourd, aura tendance à se redistribuer lui-même pour combler le manque de masse provoqué par le fluide chaud. Ainsi, le principe de conservation de masse n'est pas violé. Cependant, cette tendance naturelle est contrôlée par la viscosité du fluide. Ceci conduit à dire que le gradient de température maintenu par la source de chaleur devrait atteindre une certaine valeur avant que l'instabilité ou la convection ne se manifeste.

III-3. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DES PERTURBATIONS:

III-3.1 Formulation mathématique de l'écoulement de base:

Le traitement mathématique du problème de la stabilité de la convection naturelle dans un milieu sphérique passera par les étapes suivantes:

i-Déterminer l'écoulement de base du fluide dans son état initial, les équations de base étant les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie.

ii-L'état initial est soumis à de faibles perturbations, mathématiquement parlant, des quantitées infinitésimales seront ajoutées aux variables physiques indépendantes décrivant l'écoulement telles que la vitesse, la température et la pression. Les équations régissant l'écoulement et le transfert de chaleur sont réecrites pour cet état perturbé. L'étude analytique de la stabilité de la convection naturelle dans une enceinte sphérique ou dans un espace annulaire sphérique fait intervenir des notions mathématiques d'un niveau supérieur. D'ailleurs, l'intéret de la recherche dans ce domaine réside aussi dans ces mathématiques appliquées. Pratiquement, on assume que la perturbation est une superposition de certains modes et la stabilité du système sera examiné envers chaque mode. Ainsi, la stabilité du système dépend en particulier de sa stabilité envers toutes les perturbations infinitésimales en termes de modes normaux.

Pour le fluide newtonien visqueux, confiné dans l'espace sphérique une distribution de chaleur est supposée maintenue par une source de chaleur volumétrique uniforme notée ε , dans un état initial. Le fluide est suposé au repos, le champ d'écoulement est alors nul. Dans la littérature [7 - 8], le fluide, initialement, peut être en mouvement, autrement dit, il admet un écoulement de base non nul, qu'on se doit de calculer, ce qui s'avère encore plus compliqué. Pour l'analyse de la stabilité, les perturbations s'ajouteront aux valeurs moyennes de l'écoulement calculé.

Les équations de mouvement de l'état statique pour un élement de fluide soumis à une seule force de volume qui est la pesanteur en plus des forces de viscosité et de pression, sont écrites en notation tensorielle[1]. On a opté pour cette formulation mathématique pour les simplifiquations qu'elles peuvent engendrer grâce à certaines propriétés des tenseurs. Dans ce qui suivra, l'analyse se fera dans un cadre général pour ce qui est de la viscosité du fluide convectant. On ne fera pas allusion à la valeur de Prandtl, qu'elle soit finie ou infinie, et donc pas de restrictions.

Le fluide n'étant soumis qu'à une seule force de masse qui est la force gravitationnelle radiale, les équations de mouvement projetées sur les axes de coordonnées en notation tensorielle sont réduites à :

$$\partial_i p = \rho X_i \tag{III.01}$$

Ou

$$\partial_\mathrm{i}\mathrm{p} = -\rho \mathrm{g(r)} \qquad \mathrm{i} = 1,2,3 \tag{III.02}$$

La distribution de température est donnée par l'équation de conduction de chaleur en régime stationnaire où la dissipation visqueuse est négligeable:

$$\kappa \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r^2}\right) = -\varepsilon \qquad \text{(III.03)}$$

Où $\kappa = \frac{k}{\rho c_P}$est la diffusivité thermique.

L'équation(III.03) admet comme solution exacte dans un système de coordonnées sphériques:

$$T(r) = \beta_0 - \beta_2 r^2 + \frac{\beta_1}{r} \qquad \text{(III.04)}$$

Où β_0 et $\beta_1$sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites et:

$$\beta_2 = \frac{\varepsilon}{6\kappa} \qquad \text{(III.05)}$$

Le champs de température ne dépend que de la position radiale. Les variations de température n'étant pas large, l'approximation de Boussinesq est appliquée, en prenant la densité du fluide constant excépté dans le terme gravitationnel. La densité du fluide est approchée par un développement en séries de Taylor en fonction de la température:

$$\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0) \qquad \text{(III.06)}$$

α étant l'expansion thermique du fluide à pression constante exprimée par:

$$\alpha = \left|\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_P \qquad \text{(III.07)}$$

ρ_0 étant la densité du fluide correspondant à une température de référence T_0.

Les propriétés thermodynamiques telles que la viscosité, la chaleur spécifique, la diffusivité… sont considérées constantes.

III-3.2 Equation de l'écoulement perturbé:

Dans cet état perturbé, comme il a été déjà signalé, chaque variable physique moyenne subit une perturbation infinitésimale. En notant par u_i', T', p'et ρ'la vitesse, la température, la pression et la densité du fluide dans l'état perturbé et par $u_i, \theta, \delta p,$ et $\delta\rho$ les quantités infinitésimales des perturbations de vitesse, de température, de pression et de densité, alors:

$$u_i' = v_i + u_i \tag{III.08}$$

$$T' = T + \theta \tag{III.09}$$

$$p' = p + \delta p \tag{III.10}$$

$$\rho' = \rho + \delta\rho \tag{III.11}$$

Où:

$$\rho' = \rho(1 + \alpha\theta) \tag{III.12}$$

Avec ces nouvelles variables, on réécrit les équations régissant l'écoulement de l'état perturbé.

L'équation de conservation de masse:

$$\partial_i(v_i + u_i) = 0 \tag{III.13}$$

Qui devient: $$\partial_i(u_i) = 0 \tag{III.14}$$

L'équation de conservation de mouvement:

$$\rho'\{\partial_0(v_i + u_i) + (v_j + u_j)\partial_j(v_i + u_i)\} =$$

$$- \partial_i(p + \delta p) + (\rho + \delta\rho)F_I + \mu\nabla^2(v_i + u_i) \tag{III.15}$$

Par application de l'approximation de Boussinesq et en développant:

$$\partial_0 u_i + u_j\partial_j(u_i) + \partial_0 v_i + v_j\partial_j v_i =$$

$$-\partial_i\left(\frac{p}{\rho}\right) - \partial_i\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) + \left(\frac{\rho+\delta\rho}{\rho}\right)F_i + \nu\nabla^2 v_i + \nu\nabla^2 u_i \tag{III.16}$$

On peut remplacer ρ par ρ_0 sauf dans le terme gravitationnel. En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient l'équation suivante:

$$\partial_0 u_i + u_j\partial_j u_i = -\partial_i\left(\frac{\delta p}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)F_i + \nu\nabla^2 u_i \tag{III.17}$$

Où $u_j\partial_j u_i = 0$ sont termes non linéaires.

L'évolution de la densité $\delta\rho$ causée par la perturbation θ de la température est donnée par:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\alpha\theta$$

Et: $F_i = -ge_i$

Où: e_i est un vecteur unitaire dans la direction de la force gravitationnelle.

Ainsi, les équations de mouvement des perturbations linéaires sont :

$$\partial_0 u_i = -\partial_i\left(\frac{\delta p}{\rho_0}\right) + \alpha\theta g e_i + \nu\nabla^2 u_i \qquad \text{(III.18)}$$

L'équation de conservation d'énergie:

$$\partial_0 T + \partial_0\theta + v_j\partial_j T + v_j\partial_j\theta + u_j\partial_j T = C\nabla^2 T + C\nabla^2\theta \qquad \text{(III.19)}$$

En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient alors:

$$\partial_0\theta = -u_j\partial_j T + C\nabla^2\theta - v_j\partial_j\theta \qquad \text{(III.20)}$$

Où: $v_j\partial_j\theta = 0$ $\quad car$ lestermes non linéaires sont négligeables.

Donc:

$$\partial_0\theta = -u_j\partial_j T + C\nabla^2\theta \qquad \text{(III.21)}$$

Finalement, les équations (III.14), (III.18) et(III.21) sont les équations de perturbation gouvernant la convection dans le fluide.

III-3.3 Analyse de l'instabilité thermique d'un fluide dans une sphère:

Pour étudier la stabilité de cet état initial, on rapportant ces variables dans les équations de base et tenant compte de l'approximation de boussinesq, on ignore les produits du premier ordre et plus des perturbations. On obtient les équations suivantes pour cet état perturbé, dans l'espace sphérique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) + \alpha g(r)x_i\theta + \nu\nabla^2 u_i \qquad \text{(III.22)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -u_i\frac{\partial T}{\partial x_i} + \kappa\nabla^2\theta \qquad \text{(III.23)}$$

ici $x_i g(r)$ est l'accélération terrestre.

$x_i$représente une des coordonnées spatiales sphériques; dans le terme exprimant la force ascentionnelle, $x_i$est r.

On a:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2\left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3}\right) r \tag{III.24}$$

Ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2\left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3}\right) x_i \tag{III.25}$$

Soit: $\beta(r) = \beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3}$

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2\beta(r) x_i \tag{III.26}$$

En rapportant $\frac{\partial T}{\partial x_i}$dans l'équation de conduction et en écrivant:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) + \gamma(r) x_i \theta + \nu \nabla^2 u_i \tag{III.27}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 2\beta(r) u_i x_i + \kappa \nabla^2 \theta \tag{III.28}$$

Où:

$$\gamma(r) = \alpha g(r) \tag{III.29}$$

Il est plus commode d'éliminer les termes de pression $(\frac{\delta p}{\rho})$ et d'obtenir les équations de mouvement en termes de vorticité. En prenant le rotationnel de l'équation$(\mathrm{III}.27)$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k\right) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \gamma(r) \theta x_k + \nu \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \tag{III.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i = \gamma(r) \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta x_k + \nu \nabla^2 \omega_i \tag{III.31}$$

(j et k : indices de sommation).

ω_i est la composante de la vorticité définie par:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{V} \tag{III.32}$$

En notation tensorielle, la composante ω_i est:

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \tag{III.33}$$

Le tenseur ε_{ijk} est le tenseur unitaire alternateur antisymétrique défini par:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{Bmatrix} 1 & si \quad ijk = 123{,}231{,}312 \\ 0 & si\ deux\ indices\ sont\ \text{é}\ gaux \\ -1 & si \quad ijk = 321{,}213{,}132 \end{Bmatrix}$$

Un résultat important est obtenu en prenant le rotationnel une seconde fois de l'équation(III. 22):

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{u_m}\right) = \varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}} \gamma(\mathrm{r})\, \partial_{\mathrm{l}} \theta x_m + \nu \nabla^2 (\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{u_m}\ ) \tag{III.34}$$

Sachant que:

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}} \varepsilon_{\mathrm{klm}} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \tag{III.35}$$

Où le terme de gauche devient:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{u_m}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\partial_j \partial_i u_i - \partial_j \partial_j u_i\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i \tag{III.36}$$

Car: $\partial_i u_i = 0$

Et après développement:

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}} \gamma(\mathrm{r})\, \partial_l \theta x_m = \partial_{\mathrm{j}} \gamma(\mathrm{r}) \left(x_j\, \partial_{\mathrm{i}} \theta - x_i\, \partial_{\mathrm{j}} \theta\right) \tag{III.37}$$

Et:

$$\nu \nabla^2 \left(\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \partial_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{u_m}\right) = -\nu \nabla^4 u_i \tag{III.38}$$

Ainsi, l'équation (III. 31) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = \partial_{\mathrm{j}} \gamma(\mathrm{r}) \left(x_j\, \partial_{\mathrm{i}} \theta - x_i\, \partial_{\mathrm{j}} \theta\right) + \nu \nabla^4 u_i \tag{III.39}$$

Et en se servant des propriétés du tenseur alternateur, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u_i = -O_i\theta + \nu\nabla^4 u_i \qquad (\text{III}.40)$$

Où : $O_i$est un opérateur différentiel défini par:

$$O_i = \partial_\mathrm{j}\gamma(\mathrm{r})\big(x_j\,\partial_\mathrm{i} - x_i\,\partial_\mathrm{j}\big) \qquad (\text{III}.41)$$

L'opérateur (O_i)après développement s'écrit:

$$O_i = \gamma(r)\big(\partial_i + \partial_i x_j\partial_j - x_i\nabla^2\big) + \frac{1}{r}\frac{\partial\big(\gamma(r)\big)}{\partial r}\big(r^2\partial_i - x_i x_j\partial_j\big) \qquad (\text{III}.42)$$

Où: $\frac{1}{r}\frac{\partial\big(\gamma(r)\big)}{\partial r} = \frac{1}{x_j}\partial_\mathrm{j}(\gamma(r))$ du fait que $\gamma \equiv \gamma(r)$ seulement, donc x_j correspond ici r.

Et: $\partial_i x_j\partial_j = x_j\partial_i\partial_j - \big(\partial_i x_j\big)\partial_j$

On a aussi: $x_i x_i = x_j x_j = r^2$

En revenant à l'équation de vorticité et en multipliant l'équation $(\text{II}.31)$ par la coordonnée spatiale x_i , on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i\omega_i) = \gamma(r)\varepsilon_{ijk}\partial_j\theta x_k x_i + \nu x_i\nabla^2\omega_{\ i} \qquad (\text{III}.43)$$

Sachant que le produit d'un tenseur symétrique et antisymétrique est identiquement nul, l'équation$(\text{III}.43)$est réduite à:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i\omega_i) = \nu x_i\nabla^2\omega_{\ i} \qquad (\text{III}.44)$$

On démontre que le champs de vorticité étant solénoïdale $(div\omega_i = 0)$alors:

$$x_i\nabla^2\omega_i = \nabla^2(x_i\omega_i) \qquad (\text{III}.45)$$

On a alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i\omega_i) = \nu\nabla^2(x_i\omega_i) \qquad (\text{III}.46)$$

C'est en fait l'équation de transport de vorticité.

L'équation(III. 40)peut être réduite sous une autre forme. En multipliant les deux membres de l'équation(III. 40)par x_i , un résultat important est obtenu, en effet:

$$\nabla^2\left(\nu\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)(x_i u_i)=\gamma x_i O_i \theta \qquad (\mathrm{III.}\,47)$$

Où:

$$x_i O_i=\gamma\left(x_i\,\partial_\mathrm{i}-x_i\,\partial_\mathrm{i} x_j\,\partial_\mathrm{j}-r^2\nabla^2\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\gamma(r)\left(r^2 x_i\partial_i-r^2 x_j\partial_j\right) \qquad (\mathrm{III.}\,48)$$

Et qui devient:

$$x_i O_i=\gamma\left(x_i\,\partial_\mathrm{i}-x_i\,\partial_\mathrm{i} x_j\,\partial_\mathrm{j}-\mathrm{r}^2\nabla^2\right) \qquad (\mathrm{III.}\,49)$$

Donc

$$x_i O_i=\gamma L^2 \qquad (\mathrm{III.}\,50)$$

On définit l'opérateur cinétique du carré du moment angulaire par:

$$L^2=x_i\,\partial_\mathrm{i}-x_i\,\partial_\mathrm{i} x_j\,\partial_\mathrm{j}-\mathrm{r}^2\nabla^2 \qquad (\mathrm{III.}\,51)$$

En coordonnés sphériques(r,θ,φ),L^2 devient alors:

$$L^2=\mathrm{r}\frac{\partial}{\partial r}+r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{r}^2\nabla^2 \qquad (\mathrm{III.}\,52)$$

Ou encore:

$$L^2=\mathrm{r}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\nabla^2\right)$$

Sachant que:

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (\mathrm{III.}\,53)$$

L'équation (III. 47) devient alors:

$$\nabla^2\left(\nu\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)(x_i u_i)=\gamma L^2\theta \qquad (\mathrm{III.}\,54)$$

On voudrait éliminer la perturbation de température de l'équation (III. 54)en multipliant à gauche par l'opérateur $\left(\kappa\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)$déduit de l'équation d'énergie(III. 28).On obtient alors:

$$\left(K\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma^{-1}\nabla^2\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(x_i u_i) = -2L^2\beta(r)u_i x_i \qquad (III.55)$$

Finalement, les équations développées (III. 28), (III. 46), et(III. 55) forment l'ensemble du problème de l'écoulement perturbé.

III-3.3.1 Les conditions aux limites du problème considéré:

Les conditions aux limites sont celles des surfaces imperméables, les particules fluides ne peuvent traverser les frontières, donc leur impulsion normale à la frontière est nulle ($u_r = 0$). Cette condition est imposée pour tout type de frontière, qu'elle soit rigide ou libre. Une équation correspondant à ce cas, est dérivée à partir de l'équation de continuité. Celle-ci étant:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r}\cot g\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (III.56)$$

Sur la surface rigide : la surface sphérique(r=constante) u_θ est u_φ sont nulles, c'est une condition de non glissement. Étant donné que $u_\theta = u_\varphi = 0$:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (III.57)$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \qquad (III.58)$$

Sur une surface libre: les contraintes tangentielles s'annulent, ici: $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{r\varphi}$ sont nulles.

En cordonnées sphériques, ces contraintes s'écrivent:

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] = 0 \qquad (III.59)$$

$$\tau_{r\varphi} = \mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right] = 0 \qquad (III.60)$$

Puisque en: r = constante, $u_r = 0$ alors:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right]u_\theta = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = 0 \qquad (III.61)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right]u_{\varphi}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi}}{r}\right)=0 \qquad \text{(III. 62)}$$

En revenant à l'équation de continuité et en appliquant l'opérateur $(r\frac{\partial}{\partial r})$ sur l'équation, et en tenant compte des conditions(III. 61)et(III. 62), on aura après développement des calculs:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru_r)=0 \qquad \text{(III. 63)}$$

Aussi, sur les frontières du système sphérique, il n'y a pas de perturbations de température, les surfaces sont isothermes.

III-4: ANALYSE DES PERTURBATIONS EN MODES NORMAUX:

On assume qu'une perturbation est une superposition de certains modes. La stabilité du système sera examinée envers chaque mode. En observant les équations déjà établies des perturbations, l'opérateur L^2, carré du moment angulaire, admet comme fonctions propres des fonctions harmoniques sphériques.
En effet, l'opérateur L^2est défini par:

$$\mathrm{L}^2=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(III. 64)}$$

Les harmoniques sphériques, notés par $Y_l^m(\theta,\varphi)$, indépendantes de r, sont définies par:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad m\leq l \qquad \text{(III. 65)}$$

Les fonctions $P_l^m(\cos\theta)$ sont les polynômes de Legendre, de degré l , et d'ordre m, associés à Y_l^m,$e^{im\varphi}$ est la dépendence azimuthale, caractérisée par le nombre d'onde m. Les valeurs proposées de l'Opérateur L^2 sont telles que:

$$\mathrm{L}^2Y_l^m(\theta,\varphi)=l(l+1)\ Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad \text{(III. 66)}$$

$l(l+1)$ étant la valeur propre, l est un entier $(l=(1,2,3,\dots.)$

Les fonctions harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sont normalisées et la norme est définie comme suit:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\ Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta\ \partial\theta\ \partial\varphi = N_l^m \qquad (\mathrm{III}.67)$$

Où

$$N_l^m = \frac{4\pi \quad (l-m)\,!}{(2l+1)(l-m)!} \qquad (\mathrm{III}.68)$$

Les solutions indépendantes du problème linéaire des perturbations formulé par les équations $(\mathrm{III}.28), (\mathrm{III}.46), (\mathrm{III}.54)$ et $(\mathrm{III}.55)$ sont représentées par les formes suivantes, dans le système de coordonnées sphériques:

$$x_i\omega_i \equiv r\omega_r = Z(r)\ \ Y_l^m(\theta,\varphi)e^{pt}$$

$$x_iu_i\ \equiv ru_r = W(r)\ Y_l^m(\theta,\varphi)e^{pt}$$

$$\theta = \theta(r)\ \ Y_l^m(\theta,\varphi)e^{pt}$$

$Z(r)$, $W(r)$et $\theta(r)$ sont des fonctions exprimant la dépendance radiale de la vorticité, de la vitesse et de la température.

p est un nombre complexe dépendant des variables de l'écoulement de base, c'est aussi le taux d'amplification des perturbations.

Il reste maintenant à rapporter ces expressions dans les équations gouvernant les perturbations déjà établies.

En rapportant les expressions de $x_i\omega_i$, x_iu_i et θ dans les équations du problème:

L'équation $(\mathrm{III}.28)$devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta(r)\ \ Y_l^m e^{pt}) = 2\beta(r)W(r)\ \ Y_l^m e^{pt} + \kappa\nabla^2\theta(r)e^{pt}\ Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (\mathrm{III}.69)$$

Sachant que:

$$\nabla^2\ \ Y_l^m(\theta,\varphi)f(r) = \ \ Y_l^m(\theta,\varphi)D_l f(r) \qquad (\mathrm{III}.70)$$

Où D_l est un opérateur indépendant de θ etφ , déduit de l'expression de L^2 tel que:

$$D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \qquad (\mathrm{III}.71)$$

Donc l'équation$(\mathrm{III}.28)$devient:

$$\theta(r)\ Y_l^m\, pe^{pt} = 2\beta(r)W(r)\ Y_l^m e^{pt} + \kappa\, D_l\theta(r)e^{pt}\ Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (\mathrm{III}.72)$$

Et qui devient:

$$\left(D_l - \frac{p}{\kappa}\right)\theta(r) = 2\,\frac{\beta(r)}{\kappa}W(r) \qquad (\mathrm{III}.73)$$

En prenant l'unité de mesure de longueur R_1(rayon de la sphère) et en multipliant l'équation par R_1^2 où:

$$D_l = \frac{d^2}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{r}{R_1}\right)}\frac{d}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)} - \frac{l(l+1)}{\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} \qquad (\mathrm{III}.74)$$

Et encore:

$$D_l = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \qquad (\mathrm{III}.75)$$

Où $R = \frac{r}{R_1}$

Et l'équation $(\mathrm{III}.73)$ devient:

$$\left(D_l - \frac{p}{\kappa}R_1^2\right)\theta(r) = -2\,\frac{\beta(r)}{\kappa}R_1^2 W(r) \qquad (\mathrm{III}.76)$$

En multipliant et en divisant par ν:

$$(D_l - \sigma Pr)\theta(r) = -\left(\frac{2\,\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right)W(r) \qquad (\mathrm{III}.77)$$

Ici $\sigma = \frac{p}{\nu}R_1^2$ est un nombre complexe exprimant, comme p, le taux de progression ou de diminution des perturbations.

Et Pr : nombre de Prandtl étant défini par: $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

D’où, L'équation $(\mathrm{III}.46)$de vorticité devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Z(r)\ Y_l^m(\theta,\varphi)\, e^{pt}\right) = \nu\nabla^2\left(Z(r)\ Y_l^m(\theta,\varphi)e^{pt}\right) \qquad (\mathrm{III}.78)$$

$$pZ(r) = \nu D_l Z(r) \qquad (\mathrm{III}.79)$$

$$\left(D_l - \frac{p}{\nu}{R_1}^2\right)Z(r) = 0 \qquad (\mathrm{III}.80)$$

$$(D_l - \sigma)Z(r) = 0 \qquad \text{(III. 81)}$$

L'équation (III. 54)s'écrit encore:

$$\nabla^2\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(W(r)\ \ Y_l^m e^{pt}) = \gamma L^2[\theta(r)\ \ Y_l^m e^{pt}] \qquad \text{(III. 82)}$$

Et:

$$D_l(\nu D_l - p)W(r) = \gamma l(l+1)\theta(r) \qquad \text{(III. 83)}$$

$$D_l\left(D_l - \frac{R_1^2 p}{\nu}\right)W(r) = \gamma\frac{R_1^4}{\nu}l(l+1)\theta(r) \qquad \text{(III. 84)}$$

Et enfin

$$D_l(D_l - \sigma)W(r) = \gamma\frac{R_1^4}{\nu}l(l+1)\theta(r) \qquad \text{(III. 85)}$$

L'ensemble des équations(III. 77), (III. 81), (III. 85)adimensionnelles, décrit l'état perturbé en termes de fonctions $W(r), Z(r), \theta(r)$.

Les conditions aux limites s'écrivent avec ces nouvelles variables:

$$\mathrm{W}(r) = 0, \frac{\partial W(r)}{\partial r} = 0 \qquad \text{à } r = \eta, 1 \ si\ les\ surfaces\ sont\ rigides$$

$$\mathrm{W}(r) = 0, \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{à } r = \eta, 1 \ si\ les\ surfaces\ sont\ libres$$

III-5: PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE:

Par l'analyse des perturbations, on voudrait démontrer qu'il y a réellement échange de stabilité à travers un état de stabilité neutre. En effet, dans l'expression des solutions du problème, et plus précisément dans la fonction temporelle exponentielle, c'est la valeur du nombre complexe $\boldsymbol{\sigma}$ qui détermine si l'état du fluide est stable, neutre ou instable. En particulier, il y a échange de stabilité si la partie imaginaire du taux d'amplification des perturbations $\boldsymbol{\sigma}$ est nulle. Dans ce qui suivra, on considère le cas d'une source de chaleur uniforme et accélération gravitationnelle telles que:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta(r) = \dfrac{\epsilon}{6\kappa} = constante \\ \gamma(r) = \alpha g(r) = constante \end{array}\right\}$$

On considère les équations de l'énergie, de vorticité et de mouvement, déjà établies en termes de $\theta(r), W(r)$et Z(r):

$$(D_l - \sigma Pr)\theta(r) = -(\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa})W(r) \tag{III.86}$$

$$(D_l - \sigma\ )Z(r) = 0 \tag{III.87}$$

$$D_l(D_l - \sigma)W(r) = \gamma\frac{R_1^4}{\nu}l(l+1)\theta(r) \tag{III.88}$$

En éliminant la température entre l'équation $(\mathrm{III}.86)$ et $(\mathrm{III}.88)$ en appliquent l'opérateur $(D_l - \sigma Pr)$ sur l'équation$(\mathrm{III}.89)$:

$$(D_l - \sigma Pr)D_l(D_l - \sigma)W(r) = \gamma\frac{R_1^4}{\nu}l(l+1)(D_l - \sigma Pr)\theta(r) \tag{III.89}$$

$$D_l(D_l - \sigma Pr)(D_l - \sigma)W(r) = \gamma\frac{R_1^4}{\nu}l(l+1)\left(-\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right)W(r) \tag{III.90}$$

L'équation devient:

$$D_l(D_l - \sigma Pr)(D_l - \sigma)W(r) = -l(l+1)Ra_lW(r) \tag{III.91}$$

Les valeurs Ra_l (nombre de Rayleigh) sont définies par:

$$Ra_l = \frac{2\beta(r)R_1^6\gamma}{\kappa\nu} \tag{III.92}$$

L'indice l met en évidence la dépendance de Ra avec le mode de perturbation. Pour chaque valeur de l, correspond une valeur de Ra_l. Tout de même, la valeur de l qui sera prise en considération est celle qui correspondra à la valeur minimale de Ra_l ou valeur critique.

Dans l'équation$(\mathrm{III}.85)$, On pose:

$$F = l(l+1)\frac{\gamma R_1^4}{\nu}\theta(r) \tag{III.93}$$

Où: F est une fonction proportionnelle à $\theta(r)$

L'équation$(\mathrm{III}.85)$devient:

$$D_l(D_l - \sigma)W(r) = F \tag{III.94}$$

En rapportant l'équation (III. 94)dans l'équation (III. 86)on obtient:

$$(D_l - \sigma Pr)F = -l(l+1)Ra_l W(r) \qquad \text{(III. 95)}$$

La fonction F est radiale et s'annule aux frontières comme $W(r)$ (frontières imperméables).

Soit F^* le conjugué complexe de F. en multipliant l'équation(III. 95) r^2F et en intégrant sur le domaine des valeurs de r, de η à 1(η étant le rapport des rayons), on obtient:

$$\int_\eta^1 r^2\, F^*(D_l - \sigma Pr)F dr = -l(l+1)Ra_l \int_\eta^1 r^2\, F^* W(r) dr \qquad \text{(III. 96)}$$

$$\int_\eta^1 (r^2\, F^* D_l F - r^2 F^* F \sigma Pr) dr = -\, l(l+1)Ra_l \int_\eta^1 r^2\, F^* W(r) dr \qquad \text{(III. 97)}$$

Avant de calculer ces intégrales, on est amené à développer certaines propriétés de l'opérateurD_l .

Soit $\psi(r)$ et $\phi(r)$des fonctions quelconques ne dépendant que de r. Sur un intervalle$[a, b]$:

$$\int_b^a r^2\, \phi(r) D_l \psi(r) dr = \int_b^a r^2\, \phi(r) \left\{\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\psi(r)\right\} dr \qquad \text{(III. 98)}$$

On met:

$$\mathrm{I} = \int_b^a \left\{\phi(r)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right) - l(l+1)\phi(r)\psi(r)\right\} dr \qquad \text{(III. 99)}$$

En intégrant par partie:

$$\mathrm{I} = \left| r^2 \phi(r)\frac{d\psi(r)}{dr}\right|_b^a - \int_b^a \left\{r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} + l(l+1)\phi(r)\psi(r)\right\} dr \qquad \text{(III. 100)}$$

$$\mathrm{I} = r^2\left|\phi(r)\frac{d\psi(r)}{dr}\right|_b^a - r^2\left|\psi(r)\frac{d\phi(r)}{dr}\right|_b^a + \int_b^a \psi(r) r^2 \left(\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\phi(r)\right) dr$$

(III. 101)

$$\mathrm{I} = r^2\left|\phi(r)\frac{d\psi(r)}{dr}\right|_b^a - \left|\psi(r)\frac{d\phi(r)}{dr}\right|_b^a + \int_b^a r^2 \psi(r) D_l \phi(r) dr \qquad \text{(III. 102)}$$

L'équation(III. 100)et l'équation(III. 102)sont des résultats importants, en effet, si ψ et ϕ sont des fonctions de r seulement et s'annulant aux limites($a\ et\ b$), alors:

$$\mathrm{I} = -\int_b^a \left\{ r^2 \frac{d\psi(r)}{dr}\frac{d\phi(r)}{dr} + l(l+1)\phi(r)\psi(r) \right\} dr \qquad (\mathrm{III}.103)$$

Et:

$$\mathrm{I} = \int_b^a r^2\, \phi(r) D_l \psi(r) dr = \int_b^a r^2 \psi(r) D_l \phi(r) dr \qquad (\mathrm{III}.104)$$

L'équation$(\mathrm{II}.104)$indique que l'opérateur D_l, appliqué sur des fonctions de r seulement et s'annulant aux bornes est un opérateur hermétique et plus particulièrement, si

$$\psi(r) = \phi^*(r)$$

$\phi^*(r)$ étant le complexe conjuguée de $\phi(r)$

On a : $$\int_b^a r^2\, \phi^*(r) D_l \phi(r) dr = -\int_b^a \left\{ r^2 \left| \frac{d\phi(r)}{dr} \right|^2 + l(l+1)|\phi(r)|^2 \right\} dr \qquad (\mathrm{III}.105)$$

En appliquant ces propriétés à l'équation$(\mathrm{III}.97)$on obtient:

$$\int_\eta^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dF}{dr} \right|^2 + l(l+1)|F|^2 + r^2 \sigma Pr |F|^2 \right\} dr = l(l+1) Ra_l \int_\eta^1 r^2\, F^* W(r) dr \qquad (\mathrm{III}.106)$$

On a:

$$\int_\eta^1 r^2\, F^* W(r) dr = \int_\eta^1 r^2 W(r) {D_l}^2\, W^*(r) - \sigma^* \int_\eta^1 r^2 w(r)\, D_l W^*(r) dr \qquad (\mathrm{III}.107)$$

On met:

$$\mathrm{I}_1 = \int_\eta^1 r^2\, D_l\big(D_l W^*(r)\big) dr = \left[-r^2 \frac{dw}{dr} D_l W^*(r) \right]_\eta^1 + \int_\eta^1 r^2\, [D_l W(r)]^2 dr \qquad (\mathrm{III}.108)$$

$$\mathrm{I}_2 = -\sigma^* \int_\eta^1 r^2 w(r)\, D_l W^*(r) = \sigma^* \int_\eta^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2 \right\} dr \qquad (\mathrm{III}.109)$$

En revenant à I_1Où:

$$|D_l W^*(r)|_\eta^1 = \left| \frac{d^2}{dr^2} W^*(r) \right|_\eta^1 + \left| \frac{2}{r}\frac{d}{dr} W^*(r) \right|_\eta^1 - \left| \frac{l(l+1)}{r^2} W^*(r) \right|_\eta^1 \qquad (\mathrm{III}.110)$$

Si, la limite est rigide, alors:

$$\frac{d}{dr} w(r) = 0$$

Et tout le terme: $\left[-r^2 \frac{d}{dr} w(r) D_l W^*(r)\right]_\eta^1 = 0$

Si non, la limite est libre et:

$$\frac{d^2}{dr^2} W^*(r) = 0$$

Ainsi:

$$|D_l W^*(r)|_\eta^1 = \left|\frac{2}{r}\frac{d}{dr} W^*(r)\right|_\eta^1$$

Et donc:

$$\mathrm{I}_1 = -2\left[r\left|\frac{d}{dr} w(r)\right|^2\right]_\eta^1 + \int_\eta^1 r^2\,|W(r)|^2 dr \qquad (\mathrm{III}.111)$$

L'équation $(\mathrm{III}.106)$devient:

$$\int_\eta^1 \left\{r^2\left|\frac{dF}{dr}\right|^2 + l(l+1)|F|^2 + r^2\sigma Pr|F|^2\right\} dr - \ l(l+1)Ra_l\{-2\left[r\left|\frac{dw}{dr}\right|^2\right]_\eta^1$$

$$+ \int_\eta^1 r^2\,|W(r)|^2 dr + \sigma^* \int_\eta^1 \left\{r^2\left|\frac{dw}{dr}\right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2\right\} dr\} = 0 \qquad (\mathrm{III}.112)$$

σ^*étant le complexe conjugué de σ.

Le membre de gauche de l'équation$(\mathrm{III}.112)$ est un nombre complexe qui ne s'annule que si ses parties réelle et imaginaire sont nulles simultanément, la partie imaginaire étant:

$$\mathrm{Imag}(\sigma)\left\{Pr\int_\eta^1 r^2|F|^2 dr + l(l+1)\,Ra_l\int_\eta^1\left\{r^2\left|\frac{dw}{dr}\right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2\right\}dr\right\} = 0 \quad (\mathrm{III}.113)$$

Les termes entre les grandes accolades étant la somme de carrées (positifs), l'équation $(\mathrm{III}.113)$ est vérifiée que si:

$$\mathrm{Imag}(\sigma) = 0 \qquad (\mathrm{III}.114)$$

Le taux d'amplification des perturbations est ainsi réel. On a prouvé qu'avec les conditions du problème, fluide newtonien répondant à l'approximation de Boussinesq, confiné dans un espace sphérique soumis à une distribution de chaleur volumétrique uniforme, il y a possibilité d'échange de stabilité ou convection. (il y a instabilité).

CHAPITRE IV

CALCUL DES VALEURS CRITIQUES DE Ra

IV-1 INTRODUCTION:

Le principe d'échange de stabilité étant validé, on se propose de déterminer les valeurs critiques et minimales pour lesquelles se manifeste la convection. Le fluide convectant homogène est confiné dans une sphère de rayon R_1, les conditions aux limites sont les même qu'auparavant.

L'instabilité se manifeste à travers un état de stabilité neutre (état marginal).

Les équations de perturbation gouvernant cet état correspondant à $\sigma = 0$ (état stationnaire):

$$D_l Z(r) = 0 \qquad \text{(IV.01)}$$

$$D_l^2 W(r) = F\,(r) \qquad \text{(IV.02)}$$

$$D_l\, F(r) = -l(l+1)Ra_l W(r) \qquad \text{(IV.03)}$$

Le Laplacien ne permet pas d'avoir des solutions non nulles et qui s'annulent sur les frontières fermées

En r = 1 ou η , Z = 0.

L'équation$(\mathrm{IV.01})$ doit avoir pour solution Z = 0 (indentiquent nulle), le champ de vitesse $\vec{u}$ étant un champ poloidal.

Les équations$(\mathrm{IV.02})$et$(\mathrm{IV.03})$avec les conditions aux limites précisées déjà, constituent un problème à valeur caractéristique Ra_l.

En effet, pour une valeur donnée de l, on doit déterminer la valeur caractéristique de Ra_lminimale : c'est la valeur critique où se manifeste l'instabilité.

IV-2 DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES DE RAYLEIGH:

En posant $\sigma = 0$ dans l'équation (III.112), on obtient :

$$l(l+1)Ra_l = \frac{\int_\eta^1 \left\{ r^2 \left| \frac{\partial F}{\partial r} \right|^2 + l(l+1)F^2 \right\} dr}{-2\left[r\left(\frac{\partial w(r)}{\partial r} \right)^2 \right]_\eta^1 + \int_\eta^1 r^2 \left(D_l\, W(r) \right)^2 dr} \qquad \text{(IV.04)}$$

Par le principe variationnel, on démontre que la valeur minimale de Ra_l est le minimum absolue de la quantité du membre de droite de l'équation$(\mathrm{IV.04})$.

On a pour une harmonique sphérique d'ordre l(pour un mode normal, qui crée l'instabilité), la solution radiale F peut-être écrite comme suit :

$$F = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j \, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \tag{IV.05}$$

A_jÉtant des coefficients constants.($\sqrt{r}$Vient d'un changement de variable).

La fonction F est un développement en séries de fonctions de Fourier-Bessel du premier type.

$J_{l+\frac{1}{2}}$ est la fonction de Bessel du premier type d'ordre$(l+\frac{1}{2})$

$\alpha_{l,j}$ étant la $j^{éme}$ racine de $J_{l+\frac{1}{2}}$; pour j = 1,2,….

Toute cette étude se fera pour un l donné (un mode normal de perturbation).

La solution F ainsi écrite vérifie la condition au limite en r = 1, F = 0.

En effet, en r = 1, $F = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j \, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) = 0$

Car: $J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) \equiv 0$

On démontre que les $J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)$ forment une base orthogonale et:

$$\int_0^1 r \; J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) . \, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr = \frac{1}{2} \delta_{jk} [J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})]^2 \tag{IV.06}$$

δ_{jk} est le symbole de cronecker= $\begin{Bmatrix} 1 & si\ k = j \\ 0 & si\ k \neq j \end{Bmatrix}$.

L'équation $(\mathrm{IV}.02)$devient:

$$D_l^2 W(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j \, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \tag{IV.07}$$

Où: j varie en principe de 1 à∞, mais physiquement on ne prend que quelques valeurs.

La solution W de cette équation peut elle aussi être prise comme combinaison linéaire de fonctions W_j telle que:

$$\mathrm{W(r)} = \sum_\mathrm{j} \mathrm{A_j W_j} \tag{IV.08}$$

Les W_j sont solutions de l'équation:

$$D_l^2 W_j(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \qquad \text{(IV.09)}$$

Et qui satisfont les conditions aux limites du problème.

On démontre que:

$$D_l\left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}}\right) = -\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \qquad \text{(IV.10)}$$

$$D_l\big(D_l W_j(r)\big) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \qquad \text{(IV.11)}$$

Et encore:

$$D_l\big(D_l W_j(r)\big) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}{}^2}\left(-\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)\right) \qquad \text{(IV.12)}$$

En utilisant le résultat précédent dans l'équation$(\mathrm{IV.}10)$:

$$D_l\left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}}\right) = -\,\alpha_{l,j}^2 D_l\big(D_l W_j(r)\big) \qquad \text{(IV.13)}$$

$$\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{\,l,j} r)}{\sqrt{r}} = -\,\alpha_{l,j}^2 D_l W_j(r) \qquad \text{(IV.14)}$$

Et donc:

$$D_l W_j(r) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}^2}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} \qquad \text{(IV.15)}$$

Ou encore:

$$D_l W_j(r) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \qquad \text{(IV.16)}$$

Et:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} \qquad \text{(IV.17)}$$

Une solution complémentaire à $W_j(r)$ est $B^{(j)} r^l + C^{(j)} r^{(l+2)}$.

Ainsi:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)}r^l + C^{(j)}r^{(l+2)} \tag{IV.18}$$

Où:$B^{(j)}$et$C^{(j)}$sont déterminés par les conditions aux limites.

En effet: en r = 1, $W_j(r) = B^{(j)} + C^{(j)} = 0$

C'est à dire $B^{(j)} = -\,C^{(j)}$

Et donc:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)}\left(r^l - r^{(l+2)}\right) \tag{IV.19}$$

Et :

$$\frac{dW_j(r)}{dr} = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\frac{d}{dr}\left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}}\right) + B^{(j)}\left(l\,r^{l-1} - (l+2)r^{(l+1)}\right) \tag{IV.20}$$

Sur la surface rigide: $\left(\frac{dW_j(r)}{dr} = 0\right)$(à r = 1), on obtient :

$$\frac{1}{\alpha_{l,j}^4}\left[\frac{1}{\sqrt{r}}\alpha_{l,j}\frac{d}{d(\alpha_{l,j}r)}\,J_{l+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2r^{3/2}}\,J_{l+\frac{1}{2}}\right]\Big|_{r=1} + B^{(j)}(l-l-2) = 0 \tag{IV.21}$$

Ou encore

$$\frac{1}{\alpha_{l,j}^3}J'_{\,l+\frac{1}{2}} - 2B^{(j)} = 0 \tag{IV.22}$$

Donc:

$$B^{(j)} = -\frac{1}{2\alpha_{l,j}^3}J'_{\,l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) \tag{IV.23}$$

Sur la surface libre, $\left(\frac{d^2W_j(r)}{dr^2} = 0\right)$(en r = 1), on obtient :

$$B^{(j)} = -\frac{1}{(2l+1)}\frac{J'_{\,l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \tag{IV.24}$$

Soit donc:

$$B^{(j)} = -\frac{1}{4}q\frac{J'_{\,l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \tag{IV.25}$$

Tel que:

$$q = \begin{cases} 2 & pour\ surface\ rigide\ en\ r = 1 \\ -\frac{4}{2l+1} & pour\ surface\ libre\ en\ r = 1 \end{cases} \tag{IV.26}$$

On rapporte le tout dans l'équation:

$$D_l\, F(r) = -l(l+1)Ra_l W(r)$$

On obtient:

$$D_l\, \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) = \sum_j A_j D_l\, \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} \tag{IV.27}$$

Ou encore

$$\sum_j A_j D_l\, \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} = \sum_j A_j \left(-\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \right) \tag{IV.28}$$

Et donc

$$\sum_j A_j \frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) = -\, l(l+1) Ra_l \sum_j A_j \left\{ \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)}(r^l - r^{l+2}) \right\} \tag{IV.29}$$

On multiplie l'équation de part et d'autre par $r^{3/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,K} r)$et on intègre sur [0,1]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_j A_j \alpha_{l,j}^2 r\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r)\, dr \\ = l(l+1) Ra_l \Bigg\{ \int_0^1 A_j \frac{r}{\alpha_{l,j}^4}\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr \\ + \int_0^1 \sum_j A_j B^{(j)} r^{3/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r)(r^l - r^{l+2})\, dr \Bigg\} \end{aligned} \tag{IV.30}$$

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, on trouve:

$$\alpha_{l,k}^2 A_k \frac{1}{2} \left[J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) \right]^2 \Big|_0^1 =$$

$$l(l+1) Ra_l \left\{ \frac{1}{2} A_k \frac{1}{\alpha_{l,k}^4} \left[J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \right]^2 + \sum_j A_j \int_0^1 B^{(j)}\, J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) \left(r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}} \right) dr \right\} \tag{IV.31}$$

On pose:

$$\left(\frac{k}{j}\right) = B^{(j)} \int_0^1 \left(r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}}\right) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr \tag{IV.32}$$

Où: $\left(\frac{k}{j}\right)$ est un élement de la matrice à k lignes et j colonnes.

$$\sum_j A_j \left(\frac{k}{j}\right) = \sum_j A_j B^{(j)} \int_0^1 \left(r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}}\right) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr \tag{IV.33}$$

Dans l'évaluation de l'élément de matrice $\left(\frac{k}{j}\right)$, le groupe intégral $\left(\frac{k}{j}\right)$ peut être apparent si les diverses relations récursives validées par la fonction de Bessel sont utilisées de manière appropriée. On a :

$$\left(\frac{k}{j}\right) = 2B^{(j)} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k})}{\alpha_{l,k}^2} \tag{IV.34}$$

Relations de récurrence reliant les fonctions de Bessel*:*

a) $J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z)$

b) $-J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J'_\nu(z)$

c) $J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2 J'_\nu(z)$

d) $J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_\nu(z)$

En utilisant davantage les relations de récurrence satisfaites par les fonctions de Bessel et en se rappelant que $\alpha_{l,k}$ est un zéro de $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$, on trouve que:

$$J_{l+\frac{5}{2}}(\alpha_{l,k}) = \frac{2\left(l+\frac{3}{2}\right)}{\alpha_{l,k}} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha_{l,k}) \tag{IV.35}$$

Et encore
$$J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) = -\frac{2\left(l+\frac{3}{2}\right)}{\alpha_{l,k}} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \tag{IV.36}$$

Et donc, l'élément $\left(\frac{k}{j}\right)$ s'écrit:

$$\left(\frac{k}{j}\right) = \frac{2B^{(j)}}{\alpha_{l,k}^2} \left(\frac{-2\left(l+\frac{3}{2}\right)}{\alpha_{l,k}} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k})\right) \tag{IV.37}$$

Ou encore :

$$\left(\frac{k}{j}\right) = -4\,\frac{\left(l+\frac{3}{2}\right)}{\alpha_{l,k}^{3}}\; J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right) B^{(j)} \tag{IV.38}$$

Et

$$B^{(j)} = \frac{1}{4}\,q\;\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,j}^{3}} \tag{IV.39}$$

Donc:

$$\left(\frac{k}{j}\right) = -q\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right) J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,k}^{3}\alpha_{l,j}^{3}} \tag{IV.40}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right)\right]^{2}\alpha_{l,k}^{2}A_{k} &= l(l+1)Ra_{l}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left[J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right)\right]^{2}}{\alpha_{l,k}^{4}}A_{k}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{j}\left(-q\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right) J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,k}^{3}\alpha_{l,j}^{3}}\right)A_{j}\right\}\end{aligned} \tag{IV.41}$$

Qui est manifestement symétrique en k et j. On divise l'équation (IV.30) par $l(l+1)Ra_l$et on réutilise δ_{jk}.Onobtient:

$$\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,j}^{3}}\sum_{j}\left\{\frac{1}{2}J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,k}\right)\left(\frac{\alpha_{l,k}^{5}}{l(l+1)Ra}-\frac{1}{\alpha_{l,k}}\right)\delta_{jk}+q\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,j}^{3}}\right\}A_{j}=0 \tag{IV.42}$$

On divise l'équation (IV.42) par$q\left(l+\frac{3}{2}\right)$, on aura:

$$\sum_{j}\left\{\left(\frac{\alpha_{l,k}^{8}}{q(2l+3)l(l+1)Ra_{l}}-\frac{\alpha_{l,k}^{2}}{q(2l+3)}\right)\delta_{jk}+1\right\}\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,j}^{3}}A_{j}=0 \tag{IV.43}$$

On pose:

$$\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{l,j}\right)}{\alpha_{l,j}^{3}}A_{j}=\mathcal{A}_{j}$$

On aura:

$$\sum_j \left\{ \left(\frac{\alpha_{l,k}^8}{q(2l+3)} \right) \left[\frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{\alpha_{l,k}^6} \right] \delta_{jk} + 1 \right\} \mathcal{A}_j = 0 \qquad \text{IV.44)}$$

Un élement de la diagonale (j = k):

$$\left\{ \left(\frac{\alpha_{l,k}^8}{q(2l+3)} \right) \left[\frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{\alpha_{l,k}^6} \right] + 1 \right\} \qquad \text{(IV.45)}$$

On obtient ainsi un problème aux valeurs propres qui impose un déterminant nul pour éviter la solution triviale nulle.

La première approximation de la valeur de Ra_l est obtenue en définissant l'élément (1,1) de la matrice .Le déterminant se réduit donc à un seul élément égale à zéro. C'est-à-dire:

$$\frac{\alpha_{l,1}^8}{q(2l+3)} \left[\frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{\alpha_{l,1}^6} \right] + 1 = 0 \qquad \text{(IV.46)}$$

Donc:

$$l(l+1)Ra_l = \frac{\alpha_{l,1}^8}{\alpha_{l,1}^2 - q(2l+3)} \qquad \text{(IV.47)}$$

Où: $\alpha_{l,1}$ est une première racine de $J_{l+\frac{1}{2}}$

Mais avant de calculer la valeur de Ra_l, il faudrait déterminer approximativement les premières racines $\alpha_{l,j}$, il est très utile d'user des relations de récurrence et des propriétés de dérivation des fonctions de Bessel. On approche numériquement les racines pour chaque modèle.

Par exemple, on a pour $l = 1$:

$$2Ra_1 = \frac{\alpha_{1,1}^8}{\alpha_{1,1}^2 - q(2+3)} \qquad \text{(IV.48)}$$

$\alpha_{1,1}$ est la première racine de $J_{\frac{3}{2}}(x)$, où:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x} \right)$$

Les relations de récurence utilisées pour la détermination des fonctions de Bessel appropriées sont:

$$J_0(x) = \frac{sin\ x}{x}$$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2\ x}{\pi}}\ J_l(x)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2\ \pi}{x}}\ J_0(x)$$

Dans le cas $l = 2$:

$$6Ra_2 = \frac{\alpha_{2,1}^8}{\alpha_{2,1}^2 - q(4+3)} \tag{IV.49}$$

$\alpha_{2,1}$est la première racine de$J_{\frac{5}{2}}(x)$, où:

$$J_{\frac{5}{2}}(x) \ = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{x} J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Et dans le cas $l = 3$

$$12Ra_2 = \frac{\alpha_{2,1}^8}{\alpha_{2,1}^2 - q(4+3)} \tag{IV.50}$$

$\alpha_{3,1}$est la première racine de $J_{\frac{7}{2}}(x)$, où:

$$J_{\frac{7}{2}}(x) \ = \frac{2\left(\frac{5}{2}\right)}{x} J_{\frac{5}{2}}(x) - J_{\frac{3}{2}}(x)$$

Les valeurs du nombre Ra sont rapportées dans les tableaux suivants selon le type de frontiére considérée.

Tableau 1: les valeurs critiques de Rayleigh pour le cas de surface libre:

l	1	2	3
Ra	3.0940×10^3	5.2274×10^3	8.7786×10^3

Tableau 2: les valeurs critiques de Rayleigh pour le cas de surface rigide:

l	1	2	3
Ra	8.1540×10^3	1.0559×10^4	1.5368×10^4

On note que la valeur Ra_l critique est la valeur minimale .Dans notre cas, c'est celle qui correspond à $l = 1$.

Les valeurs de Ra_l critiques pour les cas de la surface libre sont inférieures à celles de la frontière rigide. Ceci méne à dire que les surface rigides freinent le mouvement convectif.

IV-3 INTRODUCTION AU CALCUL DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE LA CONVECTION PAR LA MÉTHODE SPECTRALE :

Dans cette étude analytique, il a été question surtout de calculer les valeurs critiques de Rayleigh correspondant au début de l'instabilité thermique dans un milieu sphérique où la force de poussée est radiale. Une étude complète des perturbations devrait fournir les solutions pour les champs de vitesse et de température. Cependant, la connaissance de l'écoulement perturbé implique la détermination de toutes les composantes du champ de vitesse, ce qui fait quatre inconnues à déterminer. Pour remédier à cette complication, une représentation mathématique convenable du champ de vitesse est sollicitée pour réduire le nombre d'inconnues. En effet, le champ de vitesse étant solénoïdal($div\vec{V} = 0$), il peut être représenté par une combinaison linéaire de deux champs, l'un poloidal et l'autre toroïdal tel que:

$$\vec{V} = \vec{S} + \vec{T}$$

Ou encore:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \Phi \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{\nabla} \wedge \Psi \frac{\vec{r}}{r}$$

Φ et Ψ sont les scalaire de définition des champs poloidal et toroïdal respectivement, où:

$$\Psi = T(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$\Phi = S(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Ainsi, connaitre $\vec{V}$ c'est déterminer les fonctions de définition Φ et Ψ.

Une autre simplification est encore obtenue, en fait, le problème de la convection pour les valeurs de Rayleigh proches de celles de Ra critique étant linéaire et à symétrie sphérique, on démontre que le champ de vitesse est pûrement poloidal, le scalaire de définition Ψest alors identiquement nul [12]. Les composantes du champ de vitesse poloidal s'écrivent:

$$S_r = \frac{1}{r^2} L^2 \Phi$$

$$S_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}$$

$$S_\varphi = \frac{1}{rsin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi}$$

Les solutions $\Phi(r,\theta,\varphi)$ et $\Theta(r,\theta,\varphi)$ (perturbation de la température) qui satisfont les équations des perturbations peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = f(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\Theta(r,\theta,\varphi) = g(r) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$Y_l^m(\theta,\varphi)$ étant la fonction harmonique déjà vue, $f(r)$ et $g(r)$ représentent la dépendance radiale des solutions. Les composantes du champ poloidal s'écrivent encore:

$$S_r = \frac{l(l+1)}{r^2} f(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$S_\theta = \frac{1}{r} \frac{d\, f(r)}{dr} \frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial \theta}$$

$$S_\varphi = \frac{1}{rsin\theta} \frac{d\, f(r)}{dr} \frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial \varphi}$$

Les solutions indépendantes quand elles existent, dépendent principalement de l'ordre de troncature l et du nombre d'onde m. Elles dépendent effectivement des fonctions radiales $f(r)$ et $g(r)$. Ces fonctions selon certains auteurs (Zebib et al.) sont des fonctions connues telles que les fonctions de Chebychev. Elles doivent satisfaire les conditions aux limites (surtout les plus compliquées). En fait, ceci n'est qu'une introduction au calcul des solutions du problème de la convection en milieu sphérique par la méthode spectrale, qui s'appuit sur des mathématiques appliquées approfondies. Dans cette technique de résolution, il arrive que des solutions convergentes soient dégénérées [3], c'est-à-dire que pour une même valeur de l, on ait plus d'une solution satisfaisant le modèle mathématique. Pour lever la dégénérescence des solutions et déterminer laquelle est la meilleure du point de vue physique, il faut, pour ce faire étudier la stabilité de ces solutions vis-à-vis des perturbations axisymétriques ou tridimentionnelles. On a déjà fait allusion à cette théorie de stabilité en termes de nombre complexe σ . On rappelle qu'une solution est stable si la partie réelle, $Re(\sigma) \leq 0$, elle est instable dans le cas contraire.

CONCLUSION

CONCLUSION

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans une géométrie sphérique remplie d'un fluide visqueux soumis à un champ gravitationnel radial a été présentée. L'intérêt majeur de cette étude réside dans les mathématiques approfondies et dans la modélisation du problème de la convection naturelle dans le manteau terrestre et plus généralement eu géophysique.

En premier lieu, on démontre à l'aide de la théorie de la stabilité, la possibilité d'échange de stabilité dans le fluide où la chaleur est générée par une source volumétrique interne. Puis, on détermine les valeurs critiques du nombre adimensionnel approprié Ra pour lesquelles se manifeste la première bifurcation. Dans cette analyse, on démontre que l'instabilité dépend de la nature de la frontière. (Conditions aux limites).

.

BIBLIOGRAPHIE.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.Chandrasekhar, 'hydrodynamique and hydromagnetic stability', ch.II and ch.VI. Clarendon press, Oxford (1961).

[2] E.H.Bishop, R.S.Koflat, L.R.Mach J.A. Scanlan, 'Convection heat transfer between concentric spheres', Proc.1964, Heat transférer fluid Mech. Inst., Berkley, p.69-80(1964).

[3] J.A.Scanlan, E. Bishop, 'Natural convection heat transfer between concentric spheres', J. Heat Transfer, 13, p.1857-1872(1970).

[4] J.A.Scanlan, S.H.Yin, R.E.Powe and E.H.Bishop, 'Natural convection flow patterns in spherical annuli', J. Heat Mass Transfer, 16, p.1785-1795(1973).

[5] J.P.Caltagirone, M.Combarnous, M. Mojtabi, 'Natural convection between tow concentric spheres :Transition toward a multicellular flow', J. Numerical heat transfer, 3, p.107-119(1980).

[6] J.L.Wright, R.W.Douglass, 'Natural convection in narrow-gap spherical annuli', Int. J. Heat Mass Transfer, 29, p.725-739(1986).

[7] David R.Gardner, R.W. Douglass, 'Linear stability of natural convection in spherical annuli', J. Fluid Mechanics, 221, p. 105-129(1990).

[8] Rod. W. Douglass, Steven.A.Trogdon and David R.Gardner, 'Prandtl number effects on the stability of natural convection between spherical shells', Int. Heat Mass Transfer, 33, N°11, p.2533-2544(1990).

[9] Vijay.k.Garg, 'Natural convection between concentric spheres', Int.J. Heat Mass Transfer, 35, N°8, p.1935-1945(1992).

[10] Hsin Sen Chu and Tzong Shing Lee, 'Transient natural convection heat transfer between concentric spheres ', Int.J. Heat Mass Transfer, 36, N°13, p.3159-3170(1993).

[11] G. Schubert, D. Bercovici and G.A.Glatzmairer, , 'Mantle dynamics in mars and Venus: Influence of an immobile lithosphere on three-dimensional mantle convection', J. Geophysical research, 95, N°B9, p.105-129(1990).

[12] F.H.Busse, 'Patterns of convection in spherical shells', J. Fluid Mech, 72, p.67-85(1975).

[13] F.H.Busse and M.Riahi, 'Patterns of convection in spherical shells', J. Fluid Mech, 123, p.283-301(1980).

[14] A.Zebib and G. Schubert, 'Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shells', J. Fluid Mech. 97, p.259-277(1980).

[15] A.Zebib and G. Schubert, 'Thermal convection of a internally heated infinite Prandtl number fluid in a spherical shells', Geophys. Astrophy. Fluid Dyn. 15, pp.65-90(1980).

[16] A.Zebib and G. Schubert, 'Character and stability of axisymetric thermal convection in spheres and spherical shells', Geophys. Astrophy. Fluid Dyn. 23, p.1-42(1983).

[17] A.Zebib and Atulk. Goyal, 'convection motions in spherical shells', J. Fluid Mech. 152, p.39-48(1985).

[18] D.Bercovici, G.Schubert, G.A.Glatzmairer and A.Zebib, 'Three dimensional thermal convection in a spherical shells', J. Fluid Mech. 206, p.75-104(1989).

[19] D.Bercovici, G.Schubert, and G.A.Glatzmairer, 'Three dimensional thermal convection of an infinite Prandtl number, compressible fluid in a basally heated spherical shells', J. Fluid Mech. 239, p.683-719(1992).

[20] S. Boughali, ' Transfert de chaleur par conduction ', Mémoire. Université de Bejaia. (2013/2014).

[21] H. Salhi, 'Etude Numérique de la convection naturelle dans les enceintes nanofluide', Mémoire. Université de Batna. (2015).

[22] D. Manacer, ' Etude Numérique de la convection mixte dans des cavités phénomène de bifurcation', Mimoire. Université Mentouri-constantine (2012).

[23] R. Younsi, ' simulation Numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux fluides et poreux', Mémoire. Université des sciences et de la technologies Houari Boumediene, Alger. (2002).

[24] S.Candel, ' mécanique des fluides', (1990).

[25] P. Chassaing, ' Mécanique des fluides', (2000).

Résumé

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle est présentée pour un fluide répondant au modèle de Boussinesq, soumis au champ gravitationnel radial, dans une géométrie sphérique et en présence d'une source de chaleur interne. Par la théorie des perturbations infinitésimales, on démontre qu'il y a instabilité thermique. On se propose de calculer les valeurs critiques du nombre adimensionnel Ra qui correspondent au seuil de démarrage de la convection dans le fluide confiné dans une sphère. On trouve que ces valeurs critiques dépendent de la nature de la frontière qu'elle soit rigide ou libre.

ملخـــــص

قدمت أولا دراسة تحليلية للإستقرار الخطي للحمل الطبيعي في وسط مائع نيوتوني متواجد داخل كرة ، تحت تأثير الجاذبية المتغيرة بدلالة القطر فقط. إذ قمنا بحساب قيم عدد Rayleigh ، التي من أجلها تتغير صفة إنتقال الحرارة من الوصول الى الحمل واستنتاج الدور الإستقراري للغلاف الصلب. نجد أن هذه القيم الحرجة تعتمد على طبيعة الحدود سواء كانت صلبة أو حرة.