



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Department de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
DJOUAMA Mohammed Saddok

Le : mardi 16 juillet 2019

Comportement Mécanique des Tubes Sandwich Sous pression

Jury :

Dr	MASRI Tahar	MCB	Université de Biskra	Président
Pr	HECINI Mabrouk	Pr	Université de Biskra	Encadreur
Dr	SEDIRA Lakhdar	MCA	Université de Biskra	Examineur

Remerciements

*Je remercie avant tout, Dieu le tout puissant de m'avoir permis de réaliser ce
Travail avec patience, persévérance et volonté.*

*Je remercie mon encadreur Pr. HECINI Mabrouk pour son aide, ses
Conseils et ses remarques qui m'a permis de présenter ce travail dans sa
Meilleure forme.*

*Je remercie Dr. GUERIRA Belhi le chef du département de génie
mécanique,*

*Nos professeurs et tous les enseignants du département de génie mécanique
de*

L'université Mohamed Kheider.

*Je remercie Dr. MASRI Tahar pour avoir bien voulu accepter de
présider*

Le jury. Sincères remerciements.

*Je remercie Dr. SEDIRA Lakhdar maitre de conférences d'avoir
Accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre du jury. Sincères
Remerciements.*

*Je remercie aussi toute personne ayant collaboré de loin ou de près pour
Accomplir et améliorer ce travail.*

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail
A ma chère mère et mon chère père*

*A mes frères et mes sœurs
A toute ma famille*

A mon encadreur Pr HECINI Mabrouk

*A tous mes collègues surtout et
amis partout*

Sommaire

Remerciements	
Dédicaces	
Sommaire	
Liste des tableaux	
Liste des figures	
Nomenclature	
Introduction générale.....	1

Chapitre I

Généralité les Structure Sandwiches

I.1 Introduction	3
I.2 Définition des structures sandwiches	3
I.3 Constituants des structures sandwiches	3
I.4 peaux	4
I.4.1 Matrice.....	5
I.4.2 Renforts.....	6
I.4.3 Classifications de fibres.....	7
I.4.3.1 Fibre de carbone.....	7
I.4.3.2 Les avantages et les inconvénients des fibres de carbone.....	8
I.4.3.3 Fibre de verre.....	8
I.4.3.4 Les avantages et les inconvénients des fibres de verre	9
I.5 Cœur (âme)	9
I.5.1 Cœur Pleine	10
I.5.2 Cœur creuses.....	11
I.6 Les Adhésifs (interface)	12
I.7 Domaine d'application des structures sandwiches	13

Chapitre II

Comportement mécanique des structures sandwiches

II.1 Introduction	17
II.2 Comportement mécanique des matériaux composites stratifiés.....	17
II.2.1 Comportement élastique d'un matériau orthotrope.....	18
II.3 Champs des déplacements et des contraintes.....	20
II.3.1 Les hypothèses fondamentales	20

II.3.1.1 Champs des déplacements et des contraintes dans l'âme.....	21
II.3.1.2 Champs des déplacements et des contraintes dans les peaux.....	23
II.4 Equation constitutive Comportement mécanique des plaques sandwiches	26

Chapitre III

Comportement mécanique du tube sandwich sous pression

III.1 Introduction	28
III.2 Comportement mécanique de tube sandwich.....	28
III.3 Analyses et procédure	30
III.4 Condition aux limites	31

Chapitre IV

Programmation et résultats

IV.1 Introduction	34
IV.2 Paramètres d'entrée	34
IV.3 Paramètres de sortie	34
IV.4 Organigramme	35
IV.5 Cas d'application	37
IV.5.1 Les données	37
IV.5.2 Analyse du comportement du tube	38
IV.6 Interprétation.....	40
IV.6.1 Interpretation 1	40
IV.6.1 Interpretation 2.....	43
Conclusion générale	44
Références bibliographiques.....	45
Annexe	46
Résumé.....	49

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : structure sandwich.....	04
Figure I.2 :Matériaux pour les peaux.	04
Figure I.3 :Différentes familles de matrice.....	06
Figure I.4 : Matériaux des renforts.....	07
Figure I.5 : fibre carbone.	08
Figure I.6 fibre de verre.	10
Figure I.7 : Eléments constitutifs d'un panneau sandwich à âme pleine.	11
Figure I.8 : Eléments constitutifs d'un panneau sandwich à cœur creuse.	11
Figure I.9 : Matériaux pour les âmes	12
Figure I.10 : Avion militaire Britannique, Le Mosquito, en structure sandwich.	13
Figure I.11 : Train à grande vitesse.	14
Figure I.12 : Bateau transport de voyageur.	15
Figure I.13 : Quelques produits de Magreb pipe.....	16

Chapitre II

Figure II.1 Plaque composite hors axes d'orthotropie.	19
FigureII.2 : schéma d'une plaque sandwich.....	21

Chapitre III

Figure III.1 : relation entre le système de coordonnées matériau et le système de coordonnées cylindriques	29
Figure III.2 tube sandwich.....	30
Figure III.3 : Coupe transversale d'un tube sandwich composite.	33

Liste des figures

Chapitre IV

Figure IV.1 : Organigramme.....	35
Figure IV.2 Variation du Déplacement Radial dans L'épaisseur du Tube.	38
Figure IV.3 : variation de la contrainte radiale dans l'épaisseur du tube.	38
Figure IV.4 : variation de la contrainte circonférentielle dans l'épaisseur du tube 	39
Figure IV.5 : variation de la contrainte axiale dans l'épaisseur du tube.	39
Figure IV.6 : Variation de la Déformation Axiale en Fonction de l'Angle d'Orientation	40
Figure IV.7 : Variation du Déplacement dans l'épaisseur du Tube 	41
Figure IV.8 : Variation du Contrainte Radiale dans l'épaisseur du Tube 	42
Figure IV.9 : Variation du Contrainte Circonférentielle dans l'épaisseur du Tube 	42
Figure IV.10 : Variation du Contrainte Axiale dans l'épaisseur du Tube 	43

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1 : Des caractéristiques thermoplastiques.....	05
Tableau I.2 : Des caractéristiques de résines thermodurcissables.....	05
Tableau I.3 : Différents types de verres filables.	09
Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des verres types E, A, R, S et D mesurées sur filament vierge.	09

Nomenclatures

σ_{ij}	Tenseur de contrainte
ε_{ij}	Tenseur de déformation
C_{ij}	Coefficient de la matrice de rigidité [C]
E_x, E_y, E_z	modules d'élasticité
G_{zz}	Module de cisaillement
ν_{ij}	coefficients de contraction
V	Fraction volumique
$[T]$	Matrice de transformation
$[\bar{C}]$	matrice constitutive dans le système global
τ	Contrainte de cisaillement
γ	Déformation angulaire
x, y, z	coordonnées cartésiennes
r, θ, z	coordonnées cylindriques
r_0	rayon intérieur
r_a	rayon extérieur
P_0	Pression intérieure
$[T_\varepsilon], [T_\sigma]$	Les matrices du changement de base de la contrainte et la déformation

Introduction générale

Le développement des structures sandwichs en forme de tubes pour de nombreux produits industriels utilisant des véhicules a déjà fait l'objet d'une grande attention. Les tubes et les réservoirs sont utilisés dans divers domaines, notamment industriels et civils, pour le transport et le stockage de substances liquides et gazeuses. Les structures en acier sont confrontées aux problèmes liés à leur poids et leur durée de vie. Il s'agissait du problème de corrosion, conséquence des installations industrielles et des réseaux de transport de carburant.

Une solution a été trouvée dans la fabrication de tubes et de réservoirs en matériaux composites. Les avantages des matériaux composites sont leur durée de vie plus longue et leur poids léger. On remarque leur utilisation dans le domaine de la construction aéronautique et du transport de carburant. Ces matériaux hétérogènes sont constitués de fibres synthétiques (verre, carbone, ...) et d'une résine polymérique (polyester, époxy, ...). Ces tubes ou réservoirs peuvent être soumis à une pression interne en raison de leur fonction.

Des études du comportement mécanique des tubes sandwich soumis à la pression interne ont été menées par des chercheurs, pour analyser et pour exprimer les contraintes et les déplacements dans un tube sandwich sous pression interne.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement mécanique des tubes sandwich sous pression, pour exprimer le champ de déplacement, de déformation et de contrainte, à travers l'épaisseur en fonction de cette pression. une combinaison particulière des matériaux qui compose le tube est choisie, sous forme de trois couches, peau extérieure et intérieure en matériaux composites et le cœur en résine. Les modèles analytiques développés dans le cadre de cette étude seront programmés dans logiciel MATLAB.

Cet mémoire est présenté en quatre chapitres :

1^{er} chapitre est consacré à l'étude bibliographique, qui contient les définitions, les caractéristiques et les composants de la structure sandwich et les domaines d'utilisation.

2^{ème} chapitre est consacré à la formulation théorique du comportement mécanique des matériaux composites et des structures sandwichs. Il exprime généralement les lois de comportement du matériau orthotrope et isotrope dans le système des coordonnées cartésiennes pour les plaques.

INTRODUCTION GENERALE

3^{ème} chapitre présente les procédures analytiques pour exprimer le champ de déplacement, de déformation et de contrainte à travers l'épaisseur des tubes sandwich soumis à la pression intérieure.

4^{ème} chapitre présente le détail de la programmation de cette étude sous forme d'organigramme, Les résultats de cette étude sont présentés sous forme graphique avec les interprétations.

Enfin, une conclusion est présente le résumé des résultats obtenu.

I.1 Introduction

Les chercheurs et les industriels ont développé dans le domaine des matériaux légers, appelés matériaux composites, et qui développés en de nouveaux types et formes de composites, y compris les sandwiches. Dans ce chapitre, nous allons parler de ces matériaux.

Dès la seconde guerre Mondiale, les structures sandwichs sont apparues dans les structures de l'avion «Mosquito ».[1]

Parmi tous les concepts de conception possibles dans les structures composites, l'idée de sandwich dans la construction est devenue de plus en plus populaire en raison du développement de matériaux cellulaires artificiels en tant que matériaux centraux. [2]

Les sandwichs sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant un cœur de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté, et résistante. [3]

Par conséquent, leur utilisation est de plus en plus fréquente dans différents secteurs industriels tels que l'aéronautique, le transport, la construction etc. Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes. [4]

I.2 Définition structures sandwiches

Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques, collées sur un cœur réalisée avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques (figureI.1). L'objet d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. [5]

I.3 Constituants structures sandwiches

Une structure sandwich présente une solution de compromis permettant à la fois de rigidifier et d'alléger une structure. Elle est constituée généralement de trois composants de base possédant des propriétés différentes, mais complémentaires : les peaux, le cœur et l'interface (adhésif). [6]

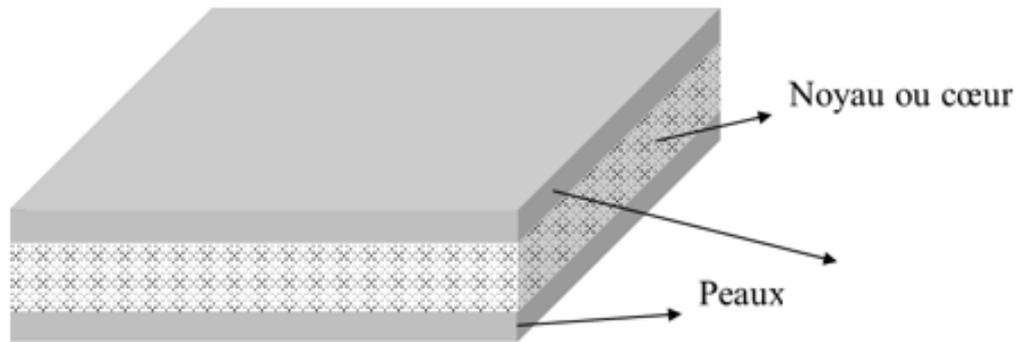


Figure I.1 : Structure sandwich. [5]

I.4 Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. [7]

- Pour les composites à moyennes et hautes performances, de stratifiés à matrice thermodurcissable (polyesters insaturés, époxydes ou thermoplastique polypropylène...) et d'un renfort fibreux (mat et tissu) de verre et de carbone ou d'aramide.
- Pour les structures portantes, de feuilles métalliques (aluminium, acier) .
- Pour des structures de faibles à moyennes performances, de bois, laminé, stratifié, contre-plaqué. [7]

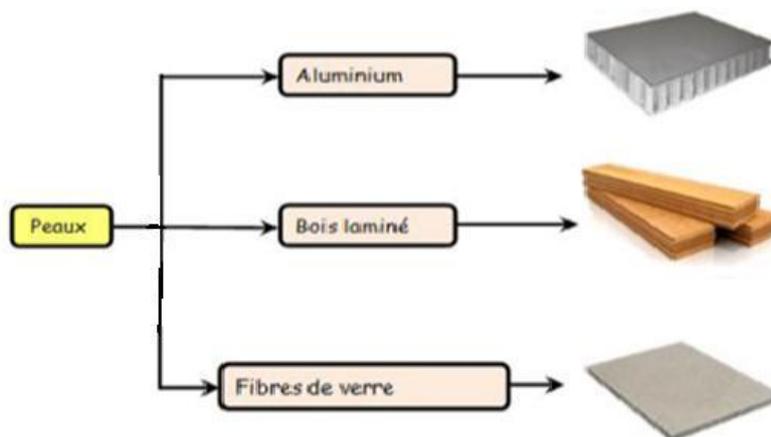


Figure I.2 : Matériaux pour les peaux. [7]

Peau en matériaux composites est constituée d'une matrice et d'un renfort. [8]

I.4.1 Matrice

La matrice a pour rôle de lier les fibres, répartir les contraintes encaissées, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit. [8]

-La structure des thermoplastiques

Se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.3.

On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques renforcés de fibres courtes se développe fortement. [8]

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (kg/m ³)	$\epsilon_f^R(\%)$	σ_f^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

Tableau I.1 : Caractéristiques de résines thermoplastiques.[15]

- La structure des thermodurcissables

A la forme d'un réseau tridimensionnel, se ponté (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'unéchauffement. La transformation est donc irréversible. [8]

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\epsilon_f^R(\%)$	σ_f^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

Tableau I.2 : Caractéristiques de résines thermodurcissables.[15]

- La résine époxy

polyesters insaturés sont les plus utilisés comme des résinesthermodurcissables. Une grande série de propriétés physiques et mécaniques peut être obtenue en utilisant ces résines. Les propriétés mécaniques de la matrice dépendent de sa composition chimique. Le produit chimique de la matrice contrôle les propriétés mécaniques tandis que ledurcissement chimique

GENERALITE SUR DES STRUCTURES SANDWICH

contrôle la densité et la longueur du réseau formé. Le durcissement est généralement complété par un programme impliquant la chaleur et gardant la résine à un ou plusieurs niveaux de température à un temps donné. [8]

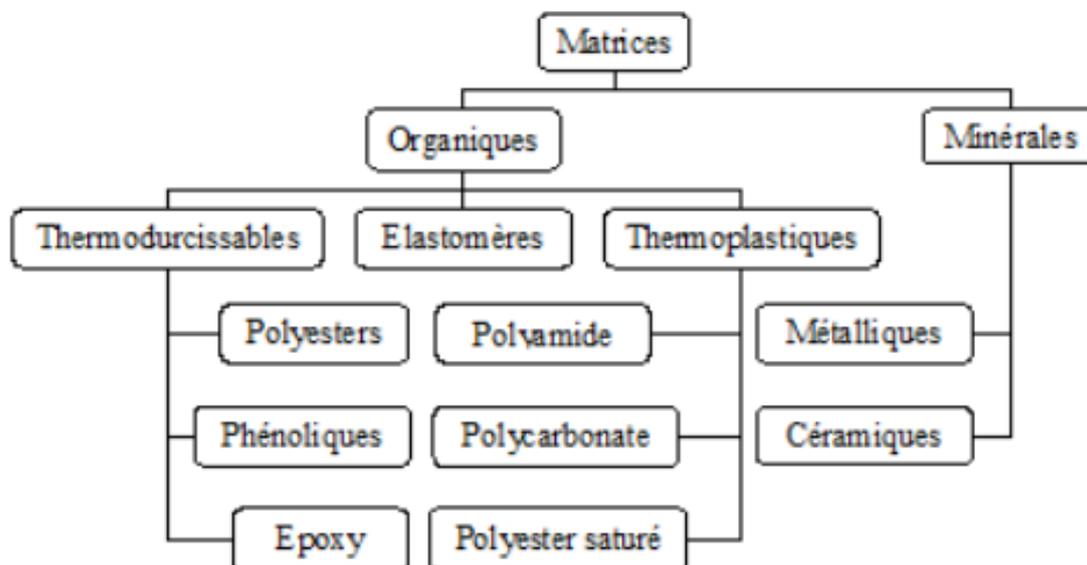


Figure I.3 : Différentes familles de matrice. [8]

I.4.2 Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite. Un grand nombre des fibres sont disponibles sur le marché fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

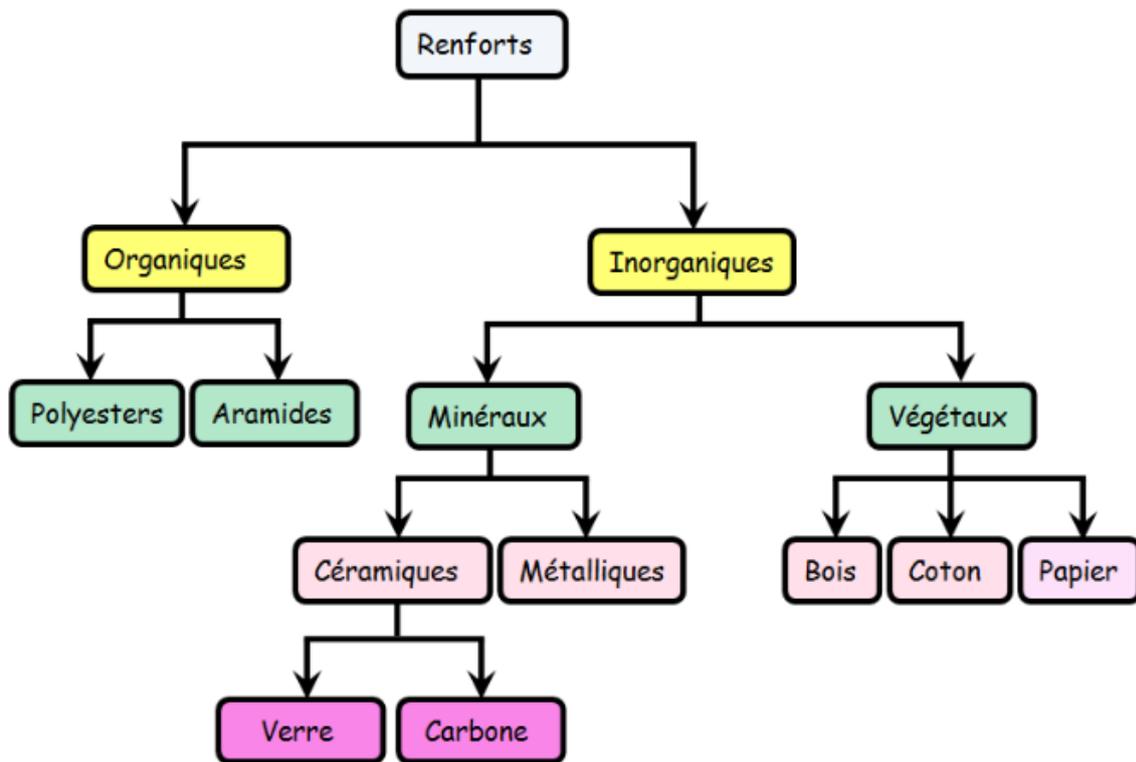


Figure I.4 : Matériaux des renforts. [12]

I.4.3 Classifications de fibres

Cette figure résume les différents types de fibre utilisés dans la mise en œuvre des matériaux composites.

I.4.3.1 Fibre de carbone

Les fibres de carbone sont élaborées à partir d'un polymère de base appelé précurseur. Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques. (Fibre synthétique).

Le principe d'élaboration est de faire :

- Constitue d'une stabilisation d'oxydation contrôlée entre 200° et 300°
- Tirer simultanément le matériau pour induire l'orientation moléculaire de précurseur appropriée.
- Carbonisation sous une atmosphère d'azote une température comprise entre 1000° et 1500°
- Une graphitisation plus de 1800°
- Les fibres de carbone subissent, en général un traitement de surface. [9]

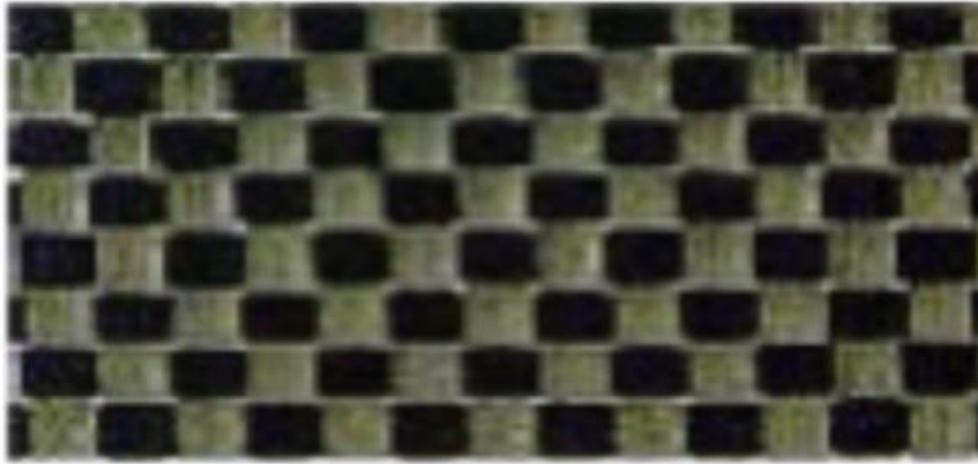


Figure I.5 :fibre de carbone.[9]

I.4.3.2 Les avantages et les inconvénients des fibres de carbone

a- Les avantages :

- faible densité.
- Haute résistance à la traction.
- Haut module d'élasticité longitudinal.
- haute conductivité électrique.

b- Les inconvénients :

- Réduction de la résistance au choc.
- Faible résistance à la compression.
- Coût élevé.

I.4.3.3 Fibre de verre

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques dizaines de micromètres), le verre perd ce caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécaniques. [9]

Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performance /prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites. [9]

- Il existe différents types de verres : le verre E, C, D, R ou S, de différentes propriétés dues à la différence de la composition du mélange de préparation.

GENERALITE SUR DES STRUCTURES SANDWICH

-Les verres de type E constituent la presque totalité du tonnage de verre textile produit actuellement .[9]

Type	Caractéristiques générales
E D A R, S	à usage général ; bonnes propriétés électriques hautes propriétés diélectriques haute teneur en alcali haute résistance mécanique

Tableau I.3 : Différents types de verres filables. [10]

Caractéristiques	Verre E	Verre A	Verre R ou S	Verre D
Masse volumique (kg/m ³)	2540	2460	2550	2160
Module d'Young (MPa)	72000	71000	86000	55000
Contrainte à la rupture (MPa)	3500	3100	4500	2500
Allongement à la rupture (%)	4.4	–	5.2	–

Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des verres types E, A, R, S et D mesurées sur filament vierge.[9]

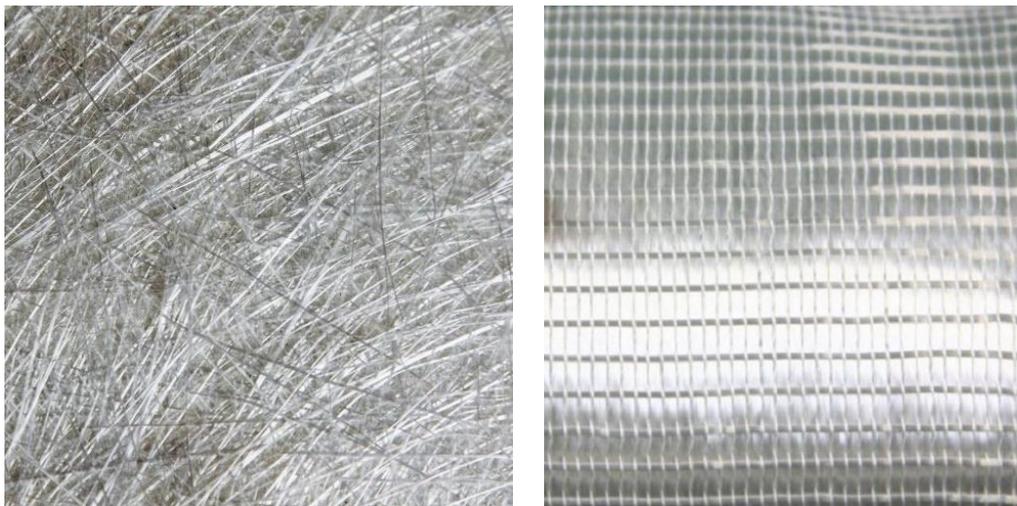


Figure I.6 fibre de verre. [11]

I.4.3.4 Les avantages et les inconvénients des fibres de verre [9]

a- Les avantages :

- Haute résistance à la traction et à la compression.
- Faible coût par rapport à d'autres fibres.
- Haute résistance chimiques.
- Haute résistance au feu.

b- Les inconvénients :

- Module d'élasticité réduite.
- Haute densité.
- Sensibilité à l'abrasion.
- Sensibilité aux températures élevées.
- Faible résistance à la fatigue.

I.5 Cœur (âme)

Le cœur est l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Il a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite aux mouvements de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion .

L'âme est souvent épaisse et de faible masse volumique. D'après les exigences de performance, de nombreux matériaux sont utilisés comme des âmes (figure I.3) .[6]

Parmi les différents types d'âmes qui existent sur le marché on trouve :

I.5.1 Cœur Pleine

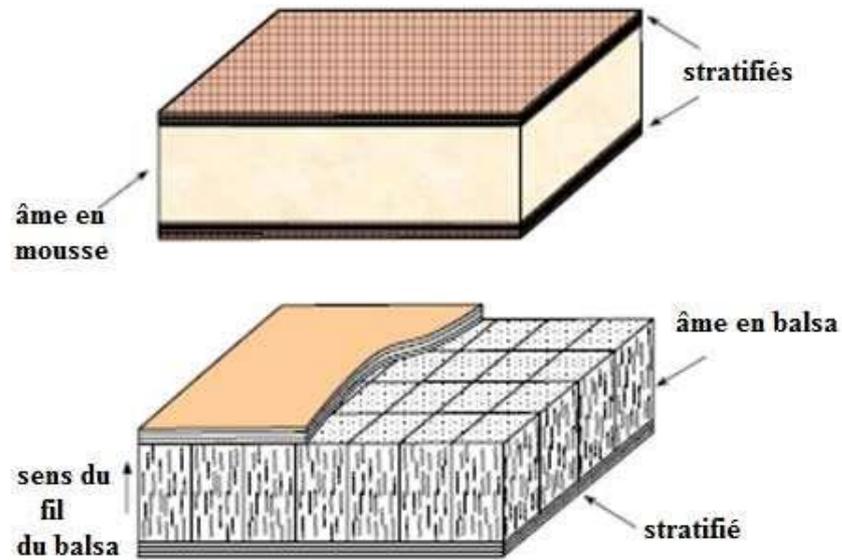


Figure I.7 : Eléments constitutifs d'un panneau sandwich à âme pleine.[4]

- le balsa ou bois cellulaire.
- diverses mousses cellulaires.
- des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques.

I.5.2 Cœur creuses

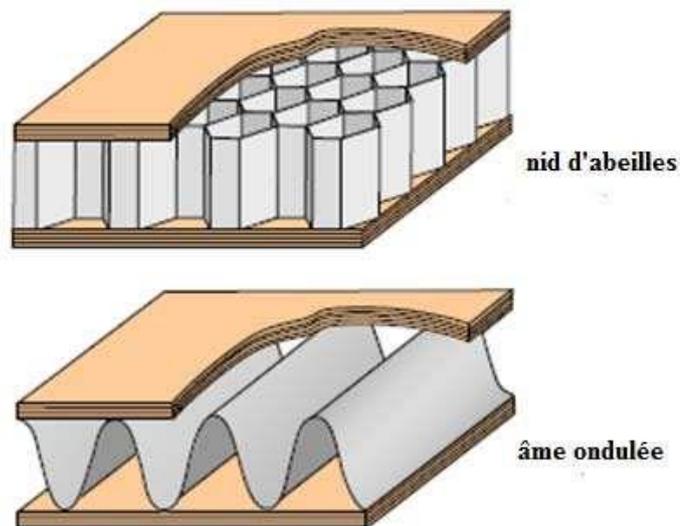


Figure I.8 : Eléments constitutifs d'un panneau sandwich à cœur creuse.[4]

Sous forme cellulaire tel que le nid d'abeille, ou sous forme ondulée tel que les tôles ondulées. (Figure I.8).[6]

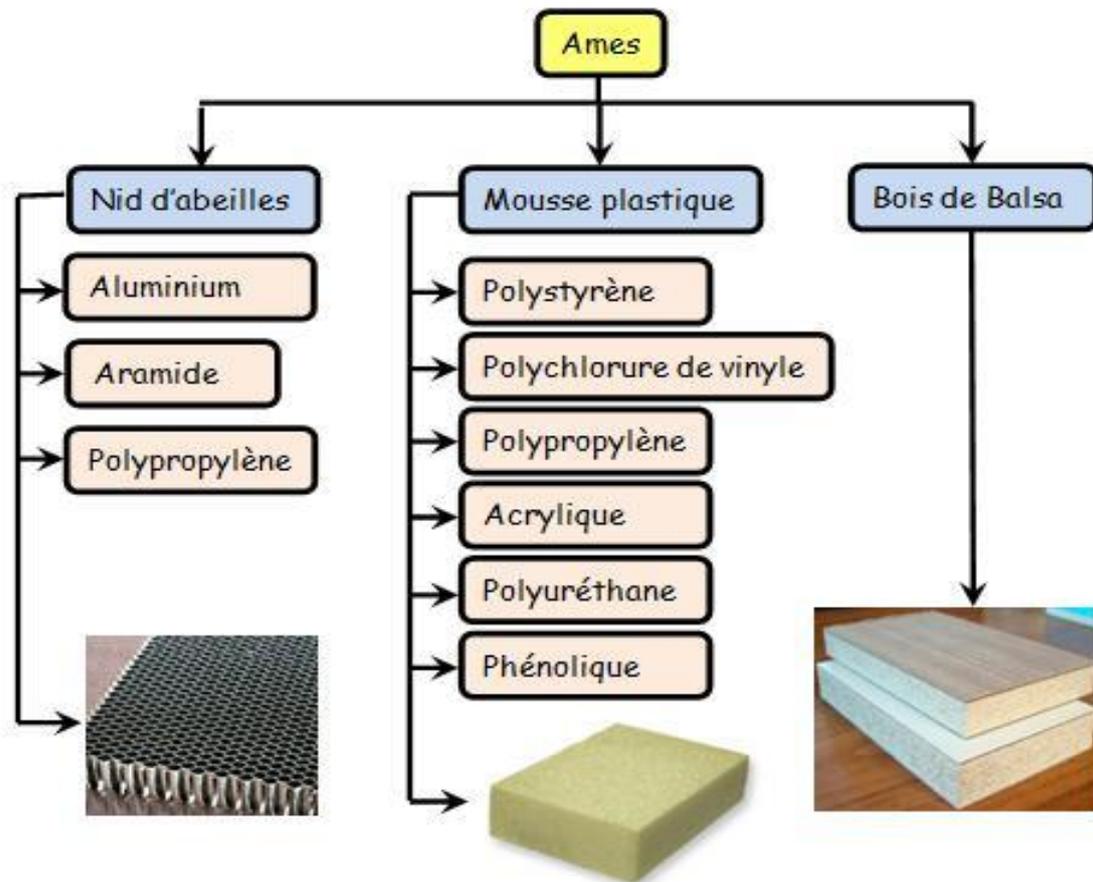


Figure I.9 : Matériaux pour les âmes. [12]

I.6 Les Adhésifs (interface)

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite. Le choix d'un adhésif est principalement guidé par la recherche de performance de la structure par le biais d'une bonne adhésion entre l'âme et les peaux.[6]

I.7 Domaine d'application des structures sandwichs

- Domaine d'Aérospatiale

En effet, l'une des premières applications de la construction en sandwich est la fabrication d'un avion militaire britannique de la Seconde Guerre Mondiale, le Mosquito (voir figure I.10). Contrairement aux structures métalliques, sa structure en panneaux sandwichs avec des peaux de placage en bois et une âme en balsa, lui confère une grande légèreté et par voie de conséquence une vitesse plus élevée. Cette structure permettra également de le rendre plus difficilement détectable par les radars.

Au cours des années 1940, l'apparition de nouveaux matériaux d'âme a encouragé les principaux constructeurs d'avions militaires à utiliser davantage les composites sandwichs.

En effet, en 1943, la base aérienne américaine Wright-Patterson (WPAFB) a commencé à utiliser des structures sandwich avec des peaux stratifiées en résine polyester renforcée de fibres de verre liées entre elles par une âme de faible densité (balsa ou nid d'abeille en fibres de verre) pour fabriquer le fuselage de leur VULTEE BT-15. [6]



Figure I.10 : Avion militaire Britannique, Le Mosquito, en structure sandwich.

Ces dernières années, la plupart des avions civils ont également adopté cette construction pour de nombreux composants. Par exemple, les planchers de l'avion Boeing 747 sont fabriqués à partir d'un panneau sandwich de balsa et de feuille d'aluminium.[6]

- **Domaine de Ferroviaire**

Dans le secteur ferroviaire, la technique de construction en sandwich a été sélectionnée pour la fabrication des cabines de trains à grande vitesse (TGV) (Figure I.11.). Les propriétés exceptionnelles de ces structures en font le matériau idéal pour palier aux problèmes de la propagation des ondes de pression lors de croisement de deux trains dans un tunnel. De plus, la bonne résistance au feu et la grande résistance à des températures très élevées de certaines mousses thermoplastiques, ont permis par exemple la conception du train allemand «Transrapid». Grâce à une structure en matériaux sandwichs, ce dernier peut atteindre des vitesses supérieures à 550 Km/h.[6]



Figure I.11 : Train à grande vitesse.

- **Domaine de la construction navale**

Dans le domaine de la construction navale, les caractéristiques de légèreté et surtout d'absence de corrosion des structures sandwich, lorsque les divers constituants ne sont pas métalliques, commencent à susciter de l'intérêt. ont mené une étude expérimentale et analytique sur l'utilisation des panneaux sandwichs possédant une âme en acier ondulé dans la construction des superstructures de navires. Ils ont démontré que le remplacement d'une construction en acier conventionnelle par une construction en sandwich peut apporter des gains de masse jusqu'à 40 à 50%. L'utilisation de construction sandwich à âme en nid d'abeille pour la fabrication des voiliers a pour conséquence de diminuer la masse de la structure de 70% comparativement à la construction traditionnelle en composite à base de fibres de graphite (carbone). De nos jours, pratiquement tous les bateaux de plaisance américains de moins de 43 mètres sont construits en sandwichs composites en fibres de verre. [6]



Figure I.12 : Bateau transport de voyageur. [13]

- Domaines d'application des tubes :

Maghreb Pipe Industries fabrique et livre des systèmes de tuyaux PRV pour des applications dans les domaines suivants [9] :

- Distribution de l'eau urbaine et industrielle.
- Réseaux d'égouts urbains et industriels.
- Transport d'eaux brutes.
- Réseaux d'irrigation.
- Réseaux de drainage.
- Prises d'eau pour les systèmes d'eau de refroidissement.



Figure I.13 : Quelques produits de Magreb pipe [9]

II.1 Introduction

Les différents matériaux et structures au cours des expériences sont sujets à des déformations et des contraintes appelées comportement mécanique. Pour exprimer ce comportement, il existe des lois qui permettent de calculer les paramètres liés à ces phénomènes mécaniques.

II.2 Comportement mécanique des matériaux composites stratifiés

La relation d'élasticité à partir de la loi de Hooke généralisée est donnée par la forme suivante :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (\text{II. 1})$$

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (\text{II. 2})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Avec :

C_{ij} : Tenseur de rigidité du matériau.

ε_{ij} : Tenseur de déformation.

σ_{ij} : Tenseur de contrainte.

La matrice inverse de la matrice [C] nous permet d'obtenir la matrice de souplesse [S]

$$[S] = [C]^{-1} \quad (\text{II. 3})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

En tenant compte de la symétrie des termes S_{ij} et C_{ij} ($i \neq j$) les matrices de rigidité et de souplesse sont caractérisées chacune par 21 constantes élastiques indépendantes. Ce cas correspond à un matériau anisotrope ne possédant aucune propriété de symétrie.

II.2.1 Le comportement élastique d'un matériau orthotrope

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope est décrit en introduisant soit les constantes de rigidité C_{ij} soit les constantes de souplesse S_{ij} .

Loi de comportement mécanique matériau orthotrope s'écrit comme suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le nombre des constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9 constantes de rigidité C_{ij} .

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}, \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \\ S_{11} &= \frac{1}{E_{11}}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}}, & S_{33} &= \frac{1}{E_{33}}, \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{33}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}. \quad (\text{II.9})$$

CHAPITRE II : COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES

Afin de l'exprimer dans les axes du matériau x et y , on fait appel aux matrices de transformation de base T_σ et T_ε (figure I.1)

$$\{T_\sigma\} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$\{T_\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Avec

$$C' = T'_\sigma C T_\varepsilon \quad (\text{II.12})$$

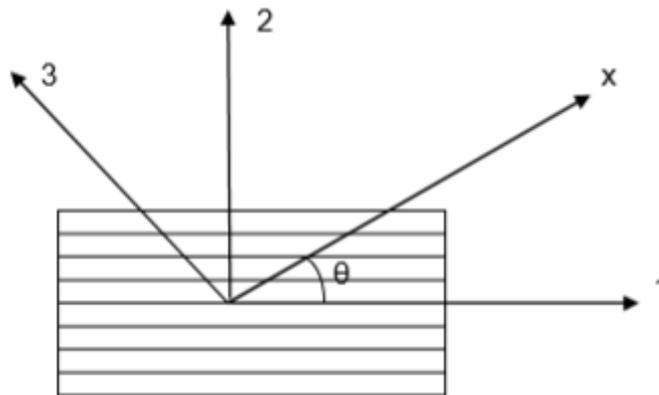


Figure II.1 Plaque composite hors axes d'orthotrope.

D'où l'équation de comportement transformées :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Avec C'_{ij} sont les constantes de rigidité d'un matériau orthotrope :

$$C'_{11} = C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 C'_{13} &= C_{13} \cos^2\theta + C_{23} \sin^2\theta \\
 C'_{14} &= 0 \\
 C'_{15} &= 0 \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin\theta \cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3\theta \cos\theta \\
 C'_{22} &= C_{11} \sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{22} \cos^4\theta \\
 C'_{23} &= C_{13} \sin 2\theta + C_{23} \cos 2\theta \\
 C'_{24} &= 0 \\
 C'_{25} &= 0 \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3\theta \cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \\
 C'_{33} &= C_{33} \\
 C'_{34} &= 0 \\
 C'_{35} &= 0 \\
 C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \sin\theta \cos\theta \\
 C'_{44} &= C_{44} \cos^2\theta + C_{55} \sin^2\theta \\
 C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin\theta \cos\theta \\
 C'_{55} &= C_{44} \sin^2\theta + C_{55} \cos^2\theta \\
 C'_{46} &= 0 \\
 C'_{56} &= 0 \\
 C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{66} (\sin^4\theta + \cos^4\theta)
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

II.3 Champs des déplacements et des contraintes dans une plaque sandwich

II.3.1 Les hypothèses fondamentales [10]

Les hypothèses fondamentales utilisées pour étudier le comportement mécanique des éléments constituant du matériau sandwich sont :

- 1- L'épaisseur de le cœur est bien plus élevée que celle des peaux $h \gg h_1, h_2$
- 2- Les déplacements de l'âme suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z.
- 3- Les déplacements dans l'épaisseur des peaux suivant les directions x et y sont uniformes.

- 4- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} , σ_{yz} mais les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- 5- Les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} , σ_{yz} sont négligées dans les peaux.

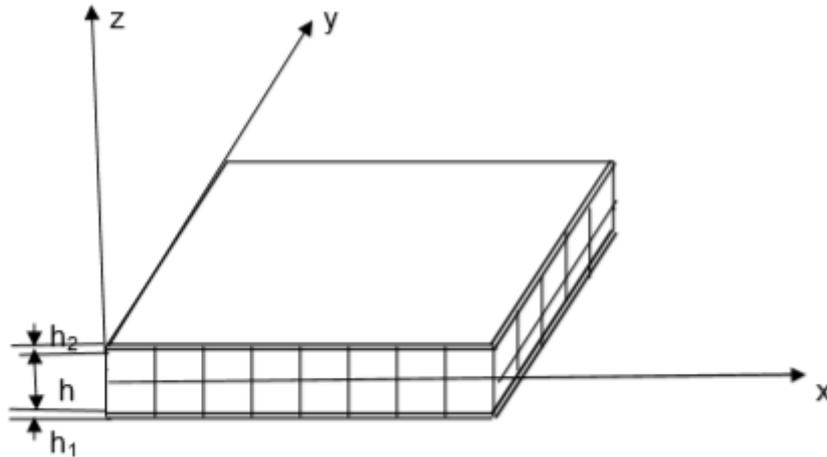


Figure II.2 : schéma d'une plaque sandwich

II.3.1.1 Champs des déplacements et des contraintes dans l'âme

- **Le Champ des déplacements dans l'âme**

L'hypothèse 2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Avec

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0), \\ v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0), \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation (II.15) a, le champ des déformations dans l'âme est de la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, \\ \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\ \gamma_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{II.16}$$

Champ de déformation en membrane-flexion

Dans ce cas le champ des déformations en membrane – flexion exprimé par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \varepsilon_{xy}^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix},\tag{II.17}$$

Le champ des déformations en cisaillement transverse

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix},\tag{II.18}$$

- **Le champ des contraintes dans l'âme :**

Le champ des contraintes dans l'âme est déduit de l'hypothèse 4 :

$$\sigma_{xx}^a = \sigma_{yy}^a = \sigma_{xy}^a = \sigma_z^a = 0.$$

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{Bmatrix},\tag{II.19}$$

Les coefficients C'_{ij}^a s'expriment dans ce cas en fonction des coefficients C_{ij}^a rapportés aux axes principaux de l'âme suivante :

$$\begin{aligned}C'_{44} &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta, \\ C'_{45} &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta, \\ C'_{55} &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta,\end{aligned}\tag{II.20}$$

Avec

$$C_{44}^a = G_{23}^a, \quad C_{55}^a = G_{13}^a.$$

Où θ est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec les axes de référence de la plaque sandwich.

II.3.1.2 Champs des déplacements et des contraintes dans les peaux

➤ **Peau inférieure :**

La continuité des déplacements aux interfaces âme – peaux permet d'écrire le champ des déplacements dans la peau intérieure par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y), \\ v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II. 21})$$

Les champs des déformations s'écrivent comme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^1 &= 0, \\ \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (\text{II. 22})$$

Les déformations en cisaillement transverse γ_{yz}^1 et γ_{xz}^1 dans la peau sont négligées on peut récrire le champ des déformations sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 23})$$

On considérant le cas général d'une peau orthotrope, les contraintes agissant dans la $k^{\text{ème}}$ couche de la peau inférieure sont donc reliées aux déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{Bmatrix}, \quad (\text{II. 24})$$

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

➤ **Peau supérieur**

Dans ce cas et en utilisant la même procédure suivie précédemment pour la peau intérieure les déplacements dans la peau extérieure s'expriment par :

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y), \\ v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_y(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II. 26})$$

Les champs des déformations s'écrivent comme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^2 &= \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^2 &= 0, \\ \gamma_{yz}^2 &= \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz}^2 &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right). \quad (\text{II. 27})$$

Les déformations en cisaillement transverse γ_{yz}^2 et γ_{xz}^2 dans la peau sont négligées on peut récrire le champ des déformations sous la forme suivante :

CHAPITRE II : COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \varepsilon_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 28})$$

Les contraintes agissant dans la $k^{\text{ème}}$ couche de la peau extérieure sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \varepsilon_{xy}^2 \end{Bmatrix}, \quad (\text{II. 29})$$

avec θ est l'angle d'orientation des fibres par rapport l'axe principal du composite (ox), et Q_{ij} sont les coefficients de rigidité qu'ils sont définies par les formules suivantes :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}},$$

$$Q_{66} = G_{TT},$$
(II. 30)

L'hypothèse 5 implique que les contraintes en cisaillement transverse sont nulles dans toutes les couches k dans les peaux intérieure ou extérieure $\sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = 0$.

Equation constitutive :

L'équation constitutive des plaques sandwiches fait intervenir les résultantes et moment

Les résultats en membrane :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz + \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{II. 31})$$

Les moments en flexion-torsion :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad (\text{II. 32})$$

Les résultantes en cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz. \quad (\text{II. 33})$$

II.4 Equation constitutive des plaques sandwiches

En substituant les expressions des contraintes (II.19) à (II.24), (II.28) dans les expressions précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{II. 34})$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \\ B_{ij} &= \frac{h}{2}(A_{ij}^2 - A_{ij}^1), \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \\ D_{ij} &= \frac{h}{2}(C_{ij}^2 - C_{ij}^1), \end{aligned} \quad (\text{II. 35})$$

Et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(\frac{h}{2}+h1)}^{-h/2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n1} \int_{hk-1}^{hk} (Q'_{ij})_k dz \quad (\text{II. 36})$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(\frac{h}{2}+h1)}^{-h/2} z(Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n1} \int_{hk-1}^{hk} z(Q'_{ij})_k dz \quad (\text{II. 37})$$

$$A_{ij}^2 = \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n2} \int_{hk-1}^{hk} (Q'_{ij})_k dz \quad (\text{II. 38})$$

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h2} z(Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n2} \int_{hk-1}^{hk} z(Q'_{ij})_k dz \quad (\text{II. 39})$$

$$F_{ij} = hC_{ij}'^a \quad (\text{II. 40})$$

Les coefficients de rigidité A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} seront déduits par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} \\ B_{ij} &= h/2 (A_{ij}^{(2)} - A_{ij}^{(1)}) \\ C_{ij} &= C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{II. 41})$$

CHAPITRE II : COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES

$$D_{ij} = h/2 \left(C_{ij}^{(2)} - C_{ij}^{(1)} \right)$$

Dans le cas de plaques sandwichs symétrique, les peaux intérieure et extérieure sont identiques, d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, C_{ij}^1 = -C_{ij}^2 \quad (\text{II. 42})$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^2, D_{ij} = hC_{ij}^2 \\ B_{ij} &= 0, C_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II. 43})$$

III.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente des modèles théoriques (Analyses et procédure) du comportement mécanique des tubes sandwich soumis à la pression intérieure. Il s'agit de déterminer les contraintes, les déplacements et les déformations en un point de cylindre en fonction des charges appliquées, les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites.

La température n'est prise en compte.

III.2 Comportement mécanique de tube sandwich

Pour les composites à fibres à orientation unidirectionnelle, les distributions de fibres sont très similaires dans les directions y et z .

En supposant une isotropie, les propriétés équivalentes dans le plan y - z nous obtenons :

$$E_{yy} = E_{zz},$$

$$G_{yy} = G_{zz},$$

$$\nu_{zx} = \nu_{yx}$$

où x et y font référence aux axes principaux des matériaux le long de la fibre et des directions transversales, respectivement.

La conversion des constantes d'ingénierie en module les éléments de la matrice sont obtenus à partir de

$$\begin{aligned} C_{xx} &= (S_{yy}S_{zz} - S_{yz}^2)/\Delta, \quad C_{xy} = (S_{xy}S_{yz} - S_{xy}S_{zz})/\Delta, \\ C_{yy} &= (S_{xx}S_{zz} - S_{xz}^2)/\Delta, \quad C_{xz} = (S_{xy}S_{yz} - S_{xz}S_{yy})/\Delta, \\ C_{zz} &= (S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2)/\Delta, \quad C_{yz} = (S_{xy}S_{xz} - S_{xx}S_{yz})/\Delta, \end{aligned} \quad (III.1)$$

Où

$$\begin{aligned} S_{xx} &= 1/E_x, \quad S_{xy} = -\nu_{yx}/E_x, \\ S_{yy} &= 1/E_y, \quad S_{xz} = -\nu_{yx}/E_x, \\ S_{zz} &= 1/E_z, \quad S_{yz} = -\nu_{zy}/E_y, \end{aligned} \quad (III.2)$$

Et

$$\Delta = S_{xx}S_{yy}S_{zz} + 2S_{xy}S_{yz}S_{xz} - S_{xx}S_{yz}^2 - S_{zz}S_{xy}^2 \quad (III.3)$$

CHAPITRE III : COMPORTEMENT MECANQUES DE TUBE SANDWICH SOUS PRESSION

Les constantes de rigidité hors axe dans Eq (III.7), $\{\bar{C}_{ij}^{(k)}\}$ peuvent être calculées à partir des constantes de rigidité sur l'axe, $\{C_{ij}^{(k)}\}$ en utilisant une matrice de transformation de rigidité $[A_{ij}]$ écrit comme :

$$\{\bar{C}_{ij}^{(k)}\} = [A_{ij}]\{C_{ij}^{(k)}\} \quad (\text{III. 4})$$

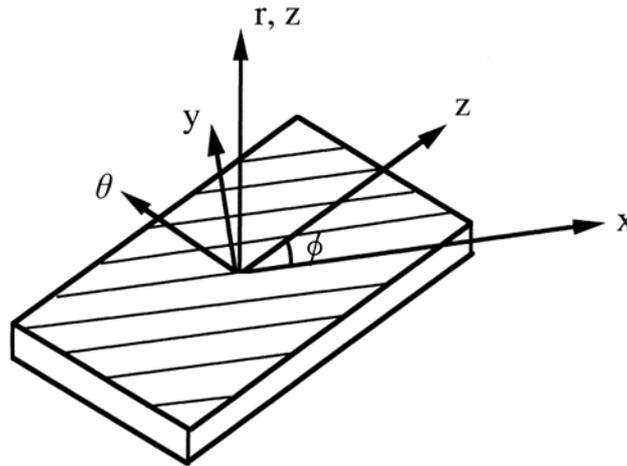
Où

$$\begin{aligned} \{\bar{C}_{ij}^{(k)}\} &= \{\bar{C}_{33}^{(k)}, \bar{C}_{23}^{(k)}, \bar{C}_{13}^{(k)}, \bar{C}_{22}^{(k)}, \bar{C}_{12}^{(k)}, \bar{C}_{11}^{(k)}\} \\ \{C_{ij}^{(k)}\} &= \{C_{xx}^{(k)}, C_{yy}^{(k)}, C_{zz}^{(k)}, C_{xy}^{(k)}, C_{xz}^{(k)}, C_{yz}^{(k)}, G_{zz}^{(k)}\}^T \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

La matrice de transformation de rigidité $[A_{ij}]$ pour les coordonnées de système entre l'axe cartésien et l'axe cylindrique représenté sur la la fig.III.1 est donne par :

$$[A_{kl}] = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 0 & 2m^2n^2 & 0 & 0 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & 0 & m^4 + n^4 & 0 & 0 & -4m^2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2 & n^2 & 0 \\ n^4 & m^4 & 0 & 2m^2n^2 & 0 & 0 & 4m^2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n^2 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.6})$$

Ou $m = \cos \phi$ et $n = \sin \phi$ et ϕ l'angle cylindrique des filaments par apport à l'axe du tube.



(x,y,z) cordonnée cartésien.

(r,θ,z) cordonée cylindrique

Féigure III.1 relation entre le système de coordonnées du matériau et le système de coordonnée cylindrique.

III.3 Analyses et procédure

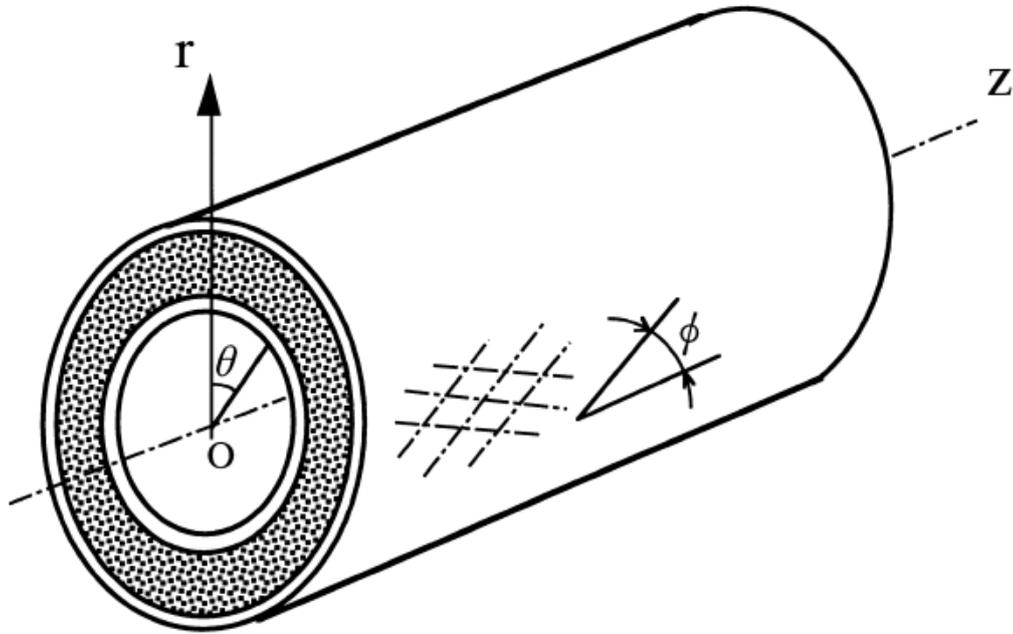


Figure III.2 tube sandwich.

Le tube est soumis à une charge interne (fig III.2) axisymétrique, le déplacement circonférentiel $u_{\theta}^{(k)}$ est nul. Les contraintes et les déformations sont indépendantes de θ

En utilisant le système de coordonnées cylindriques les relations des contraintes et déformations de la couche (k) avec le matériau orthotrope à couches alternées est donne par :

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \bar{C}_{11}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{12}^{(k)} \varepsilon_{\theta}^{(k)} + \bar{C}_{13}^{(k)} \varepsilon_0 \\ \sigma_{\theta}^{(k)} &= \bar{C}_{12}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{22}^{(k)} \varepsilon_{\theta}^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \varepsilon_0 \\ \sigma_z^{(k)} &= \bar{C}_{13}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \varepsilon_{\theta}^{(k)} + \bar{C}_{33}^{(k)} \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (III.7)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent en forme vectorielle :

$$div(\vec{\sigma}) + \vec{f} = 0 \quad (III.8)$$

En négligeant les forces de volume et projetant sur les trois axes, l'équation d'équilibre pour le axisymétrique actuel peut être exprime comme suite :

$$\frac{d\sigma_r^{(k)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_{\theta}^{(k)}}{r} = 0. \quad (III.9)$$

CHAPITRE III : COMPORTEMENT MECANQUES DE TUBE SANDWICH SOUS PRESSION

Les déformations radiales et circonférentiels, $\varepsilon_r^{(k)}$ et $\varepsilon_\theta^{(k)}$ peut être donnés en fonction du déplacement radial $u_r^{(k)}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad } u + \text{grad}^t u) \quad (\text{III.10})$$

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{du_r^{(k)}}{dr} \text{ et } \varepsilon_\theta^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r} \quad (\text{III.11})$$

Substituer les expression pour le contrainte dans Eq (III.9) et en utilisant Eq (III.11) nous obtenons

$$\frac{d^2 u_r^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^{(k)}}{dr} - \frac{\bar{C}_{22}^{(k)}/\bar{C}_{11}^{(k)}}{r^2} u_r^{(k)} = \frac{\alpha^{(k)} \varepsilon_0}{r} \quad (\text{III.12})$$

ou

$$\alpha^{(k)} = \left(\bar{C}_{23}^{(k)} - \bar{C}_{13}^{(k)} \right) / \bar{C}_{11}^{(k)} \quad (\text{III.13})$$

Quand $\bar{C}_{22}^{(k)}/\bar{C}_{11}^{(k)} > 0$, $\beta^{(k)} = \sqrt{\bar{C}_{22}^{(k)}/\bar{C}_{11}^{(k)}}$, si la solution pour l'équation différentielle (III.12) peuvent être obtenus sous le condition suivante :

Si $\beta^{(k)} \neq 1$ qui est anisotrope

$$u_r^{(k)} = A^{(k)} r^{\beta^{(k)}} + B^{(k)} r^{-\beta^{(k)}} + \frac{(\alpha^{(k)} \varepsilon_0 r)}{1 - (\beta^{(k)})^2} \quad (\text{III.14})$$

Si $\beta^{(k)} = 1$ qui est isotrope

$$u_r^{(k)} = \frac{\alpha^{(k)} \varepsilon_0 r}{2} \ln r + A^{(k)} r + B^{(k)} / r \quad (\text{III.15})$$

Où $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ sont des constantes d'intégration inconnues, à déterminer à partir des conditions aux limites et des conditions de contact à chaque interface entre le cœur et les couches de la peau.

III.4 Condition aux limites

Les constantes d'intégration inconnues dans les équations (III.14) et (III.15) peuvent être déterminées en considérant les conditions aux limites suivantes.

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r_0) &= -p_0 \\ \sigma_r^{(n)}(r_a) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

CHAPITRE III : COMPORTEMENT MECANQUES DE TUBE SANDWICH SOUS PRESSION

ou r_0 et r_a sont les rayons intérieur et extérieur, comme indiqué dans (fig.III.3), respectivement.

Les conditions de continuité pour les déplacements et les contraintes dans les interfaces conduisent à :

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r_k) &= u_r^{(k+1)}(r_k) & k &= 1, 2, \dots, n, \\ \sigma_r^{(k)}(r_k) &= \sigma_r^{(k+1)}(r_k) & k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Pour un cylindre aux extrémités fermées, l'équilibre axial est satisfait par la relation suivante :

$$2\pi \sum_{k=1}^n \int_{r_{k-1}}^{r_k} \sigma_z^{(k)}(r) r dr = \pi r_0^2 p_0. \quad (\text{III.18})$$

Les équations (III.14)-(III.15) peuvent donner un ensemble d'équations pour déterminer les constantes inconnues $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, et contrainte axiale ε_0 dans Eq. (III.14). L'équation simultanée, pour le tube en sandwich ($n=3$) illustré à la (fig.III.3), s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \\ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Où k_{ij} et d_j ($i, j = 1; \dots; 7$) avec la condition de $\bar{C}_{22}^{(k)} / \bar{C}_{11}^{(k)} > 0$ sont données à l'annexe A

Après résolution de l'équation (III.19), les déformations, les contraintes et les déplacements sont donc déterminés à partir des équations (III.11), (III.7), (III.14).

CHAPITRE III : COMPORTEMENT MECANQUES DE TUBE SANDWICH SOUS PRESSION

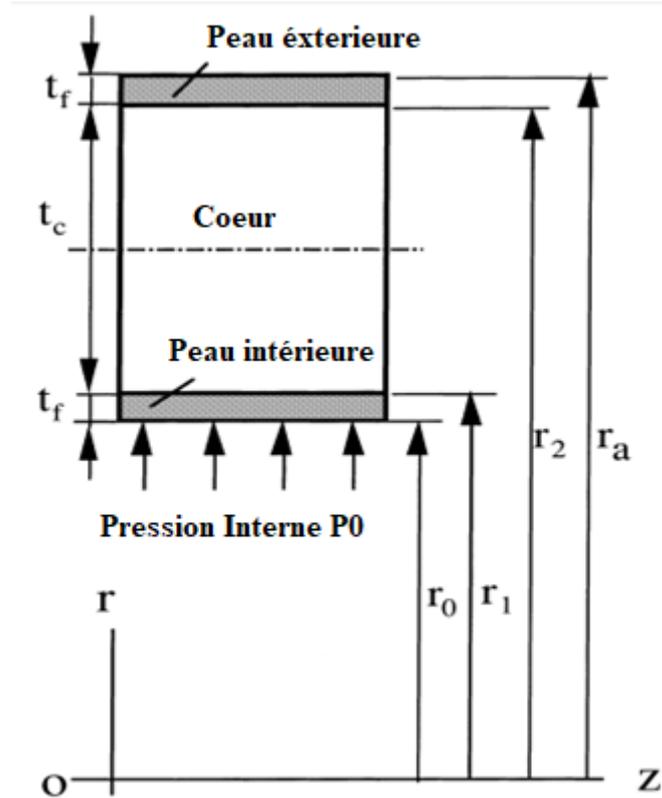
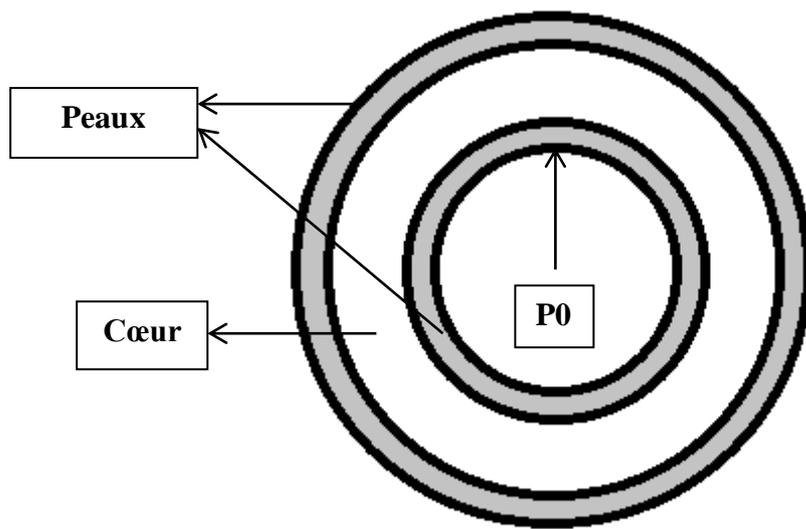


Figure III.3 Coupe transversale d'un tube sandwich composite. [14]

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, le programme est mis en œuvre, qui calcule les contraintes et les déplacements et les déformations dans l'épaisseur du tube sandwich sous l'influence de la pression interne.

L'analyse de la procédure au chapitre III est programmée à l'aide de l'outil de calcul MATLAB.

IV.2 Paramètres d'entrée

Les caractéristiques géométriques :

- Rayon intérieur du tube
- Epaisseur de la peau intérieure
- Epaisseur du cœur
- Epaisseur de la peau extérieure

Les caractéristiques des matériaux cœur et peau

Les peaux (orthotrope à isotropie transverse) :

- les modules d'Young (E_x, E_y , [GPa]).
- les coefficients de Poisson (ν_{xy}, ν_{yz}).
- les modules de cisaillement (G_{zz} [GPa]).

Cœur (isotrope) :

- les modules d'Young (E [GPa]).
- les coefficients de Poisson (ν).
- les modules de cisaillement (G [GPa]).

Configuration (angle) : φ

Les charges appliquées :

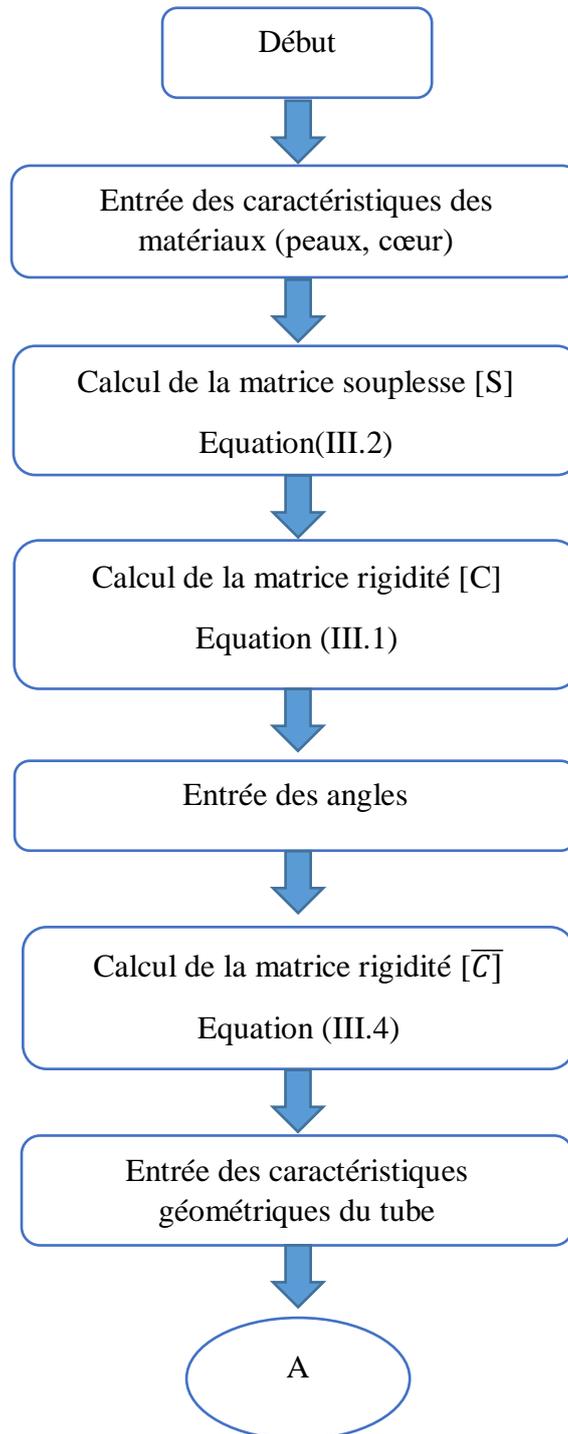
- pression intérieure (P_0 [GPa]).

IV.3 Paramètres de sortie

- Le déplacement radial dans l'épaisseur du tube (u_r).
- La contrainte radiale σ_r .
- La contrainte circonférentielle σ_θ .
- La contrainte axiale σ_z
- La déformation axiale ε_z

IV.4 Organigramme

L'organigramme de ce programme est présenté :



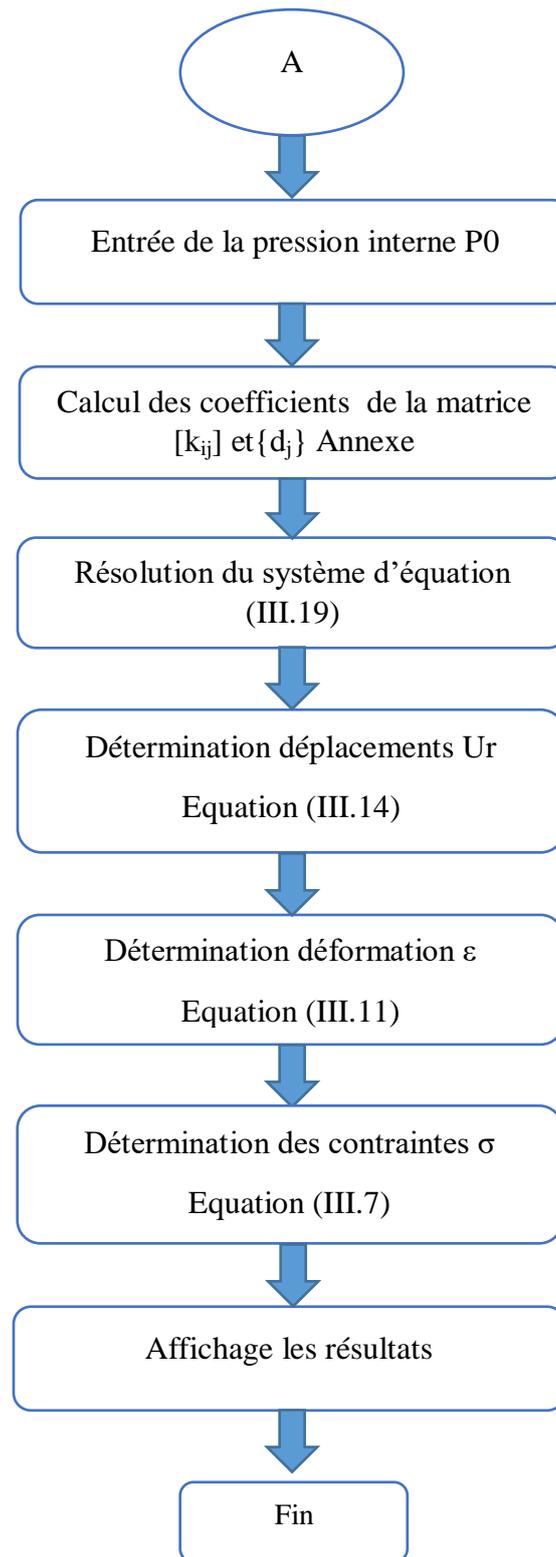


Figure IV.1 : Organigramme.

IV.5 Cas d'application

IV.5.1 Les données

- Caractéristiques géométriques du tube
 - Rayon intérieur du tube $r_0 = 50$ mm
 - Epaisseur de la peau intérieur $t_f = 2$ mm
 - Epaisseur du cœur (résine) $t_c = 20$ mm
 - Epaisseur de peau extérieur $t_f = 2$ mm
- Caractéristiques mécaniques du matériau composite (T300/934) des peaux
 - $E_x = 141.6$ GPa
 - $E_y = 10.7$ GPa
 - $\nu_{yx} = 0.268$
 - $\nu_{zy} = 0.495$
 - $G_{zz} = 3.88$ GPa
- Caractéristiques mécaniques du Cœur (résine)
 - $E_x = 1.2$ GPa
 - $\nu_{yx} = 0.3$
 - $G_{zz} = 0.46$ GPa
- Les angles des peaux [0...90]
- Charge appliqué $P_0 = 0.1$ GPa

IV.5.2 Analyse du comportement du tube

a- Les résultats

Déplacement $u_r(r)$

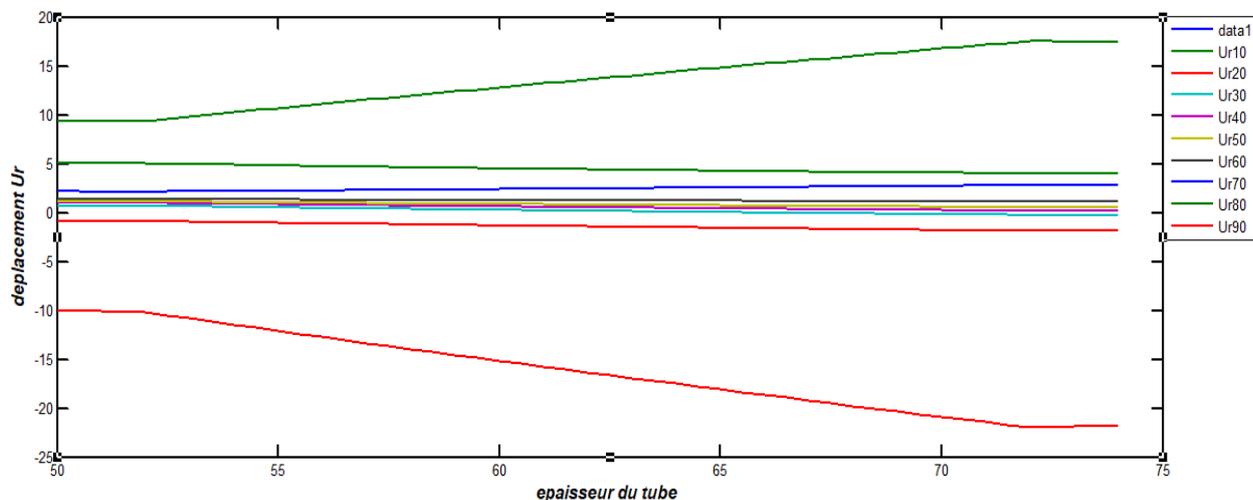


Figure IV.2 : Variation du déplacement radial dans l'épaisseur du tube .

Contrainte radiale σ_r :

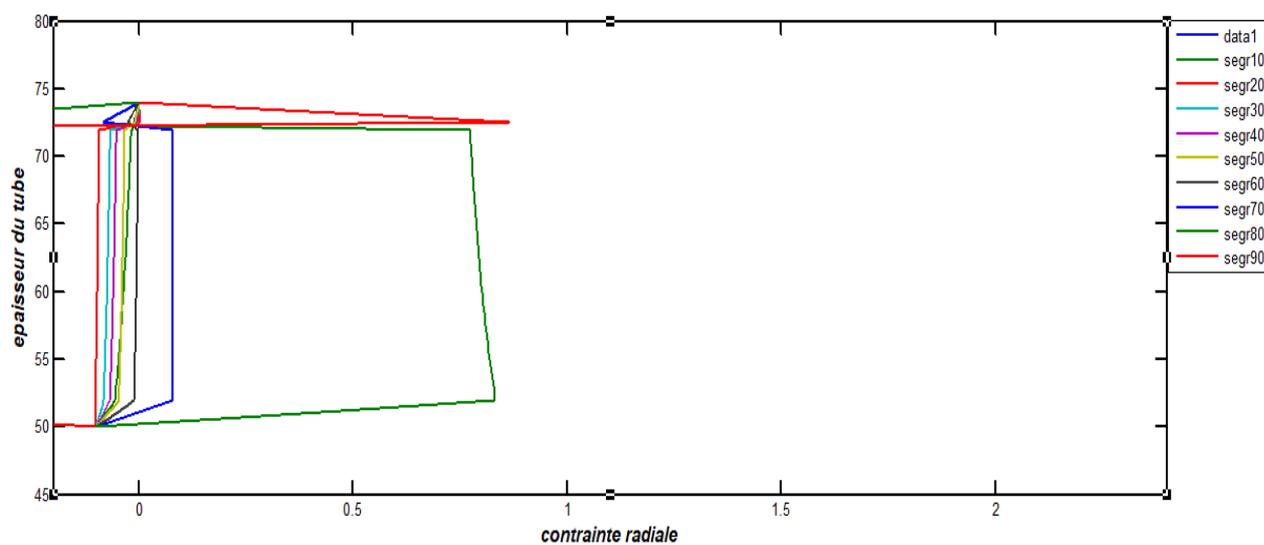


Figure IV.3 : Variation de la contrainte radiale dans l'épaisseur du tube.

Contrainte circonférentielle σ_θ :

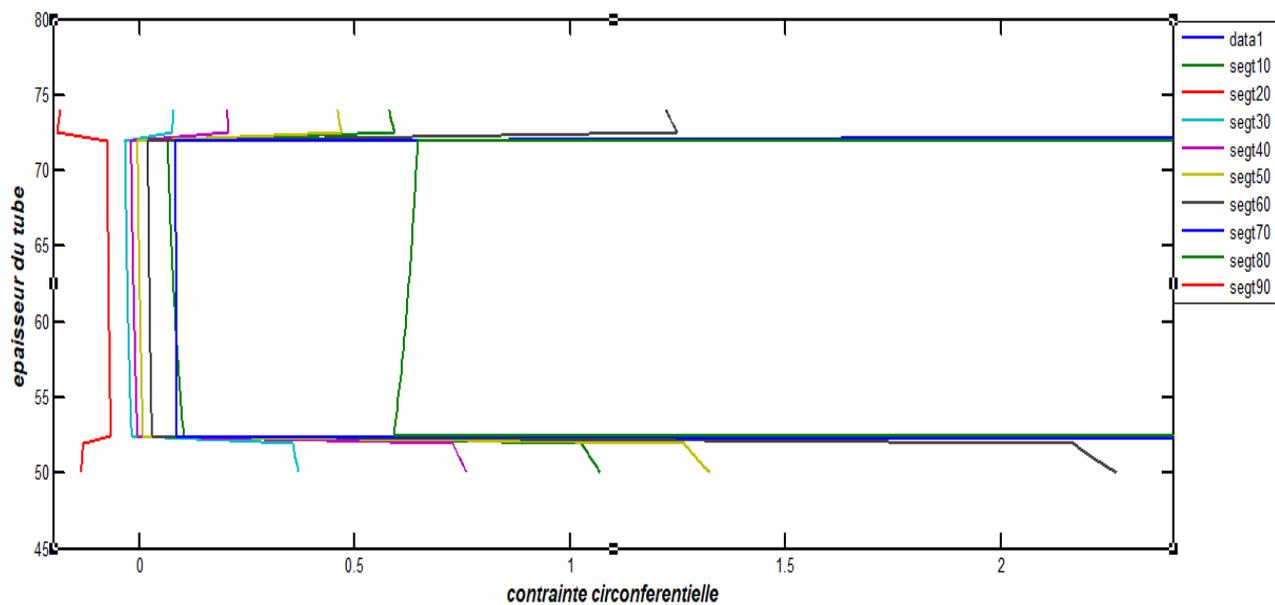


Figure IV.4 : Variation de la contrainte circonférentielle dans l'épaisseur du tube.

Contrainte axiale σ_z :

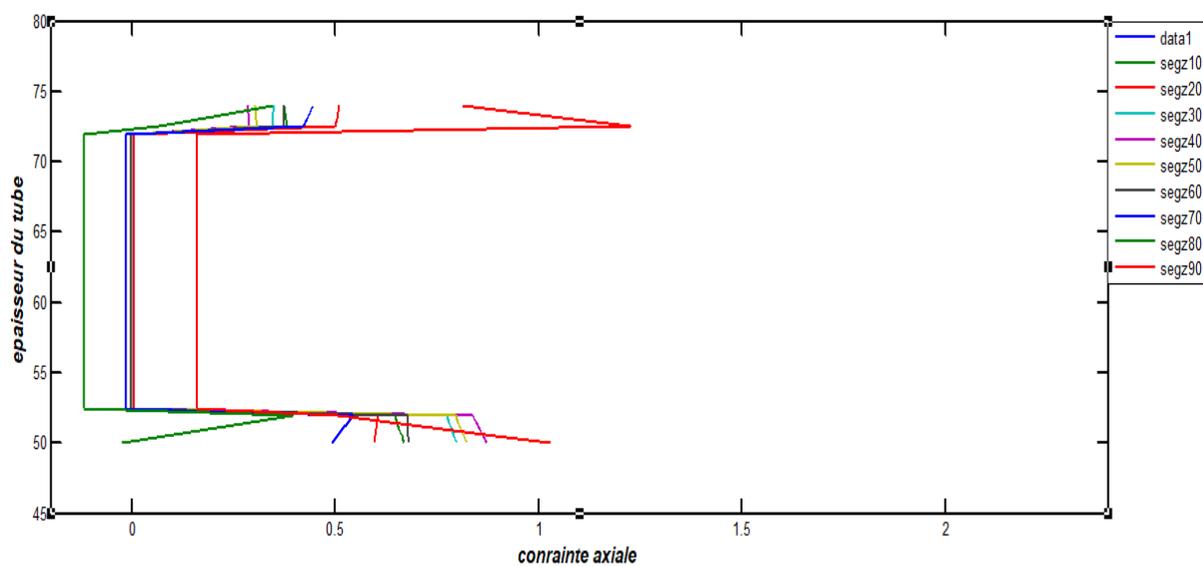


Figure IV.5 : Variation de la contrainte axiale dans l'épaisseur du tube.

Déformation ε_z par rapport l'angle :

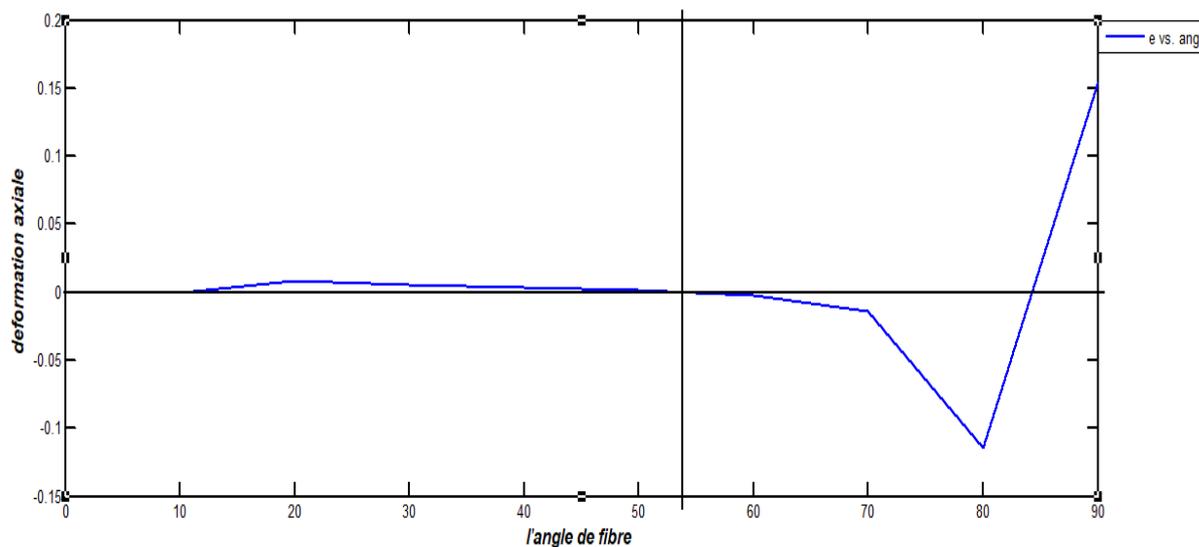


Figure IV.6 : Variation de la Déformation Axiale en Fonction de l'Angle d'Orientation.

IV.6 Interprétation

IV.6.1 Interprétation

La Figure IV.2 : montre la variation du déplacement radiale dans l'épaisseur du tube

- Aux angles 10° et 30°, 40° => 80° le déplacement est positif.
- À l'angle 80° le déplacement est constant dans l'épaisseur de la peau, et dans l'épaisseur du cœur il s'augmente légèrement, Au niveau de la peau extérieure le déplacement est constant.
- Aux angles 30° et 40°, 50°, 60° le déplacement presque constant. A l'angle 10°, dans l'épaisseur du tube le déplacement diminue légèrement. à l'angle 70 le déplacement augmenté légèrement. Le déplacement négatif dans les angles 20° et 90°.

La Figure IV.3 : montre variation du contrainte radial dans l'épaisseur du tube

- À angle 80°, la contrainte est positive dans la peau intérieure ; elle augmente et constante à valeur (0.7 GPa) dans l'épaisseur du cœur. Dans l'épaisseur de la peau extérieure la contrainte est négative.
- Même remarque dans l'angle 70° mais valeur inférieure (0.1 GPa).
- Dans les angles [10° => 60°] la contrainte est négative.
- Dans l'angle 90° la contrainte dans le cœur et la peau intérieure est négative, l'extérieure positive.

CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DESCUTIONS

La Figure IV.4 montre la variation du contrainte circonférentielle dans l'épaisseur du tube

- A l'angle 20° la contrainte est négative dans l'épaisseur du tube
- Dans les angles 30° et 40° la contrainte est négative dans l'épaisseur de cœur.
- Aux les angles 10° et $[30^\circ \Rightarrow 80^\circ]$ la contrainte est positive dans l'épaisseur du tube.

La Figure IV.5 : montre variation du contrainte axiale dans l'épaisseur du tube

- Aux les angles $[10^\circ \Rightarrow 90^\circ]$ la contrainte est positive dans l'épaisseur des peaux intérieure et extérieure
- Aux les angles 60° et $70^\circ, 80^\circ$ la contrainte est négative dans l'épaisseur de cœur
- Aux les angles $[10^\circ \Rightarrow 40]$ la contrainte est positive dans l'épaisseur de cœur, l'angle 50° est nulle.

La Figure IV.6 montre la déformation axiale pour les angles de 0° à 90°

- Aux les angles $[10^\circ \Rightarrow 50^\circ]$ et 90° la déformation est positive.
- Au les angles $[60^\circ \Rightarrow 80^\circ]$ la déformation est négative.
- La déformation est nulle a peut près dans l'angle 55° .

Après détermination l'angle optimal ($\theta=55^\circ$) on calcul les contraintes et les déplacements pour cette angle :

Déplacement u_r :

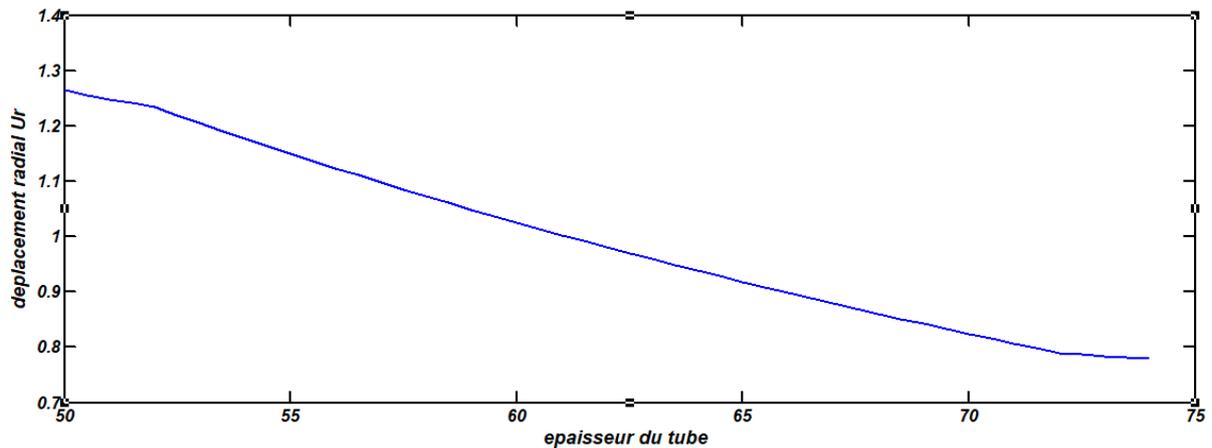
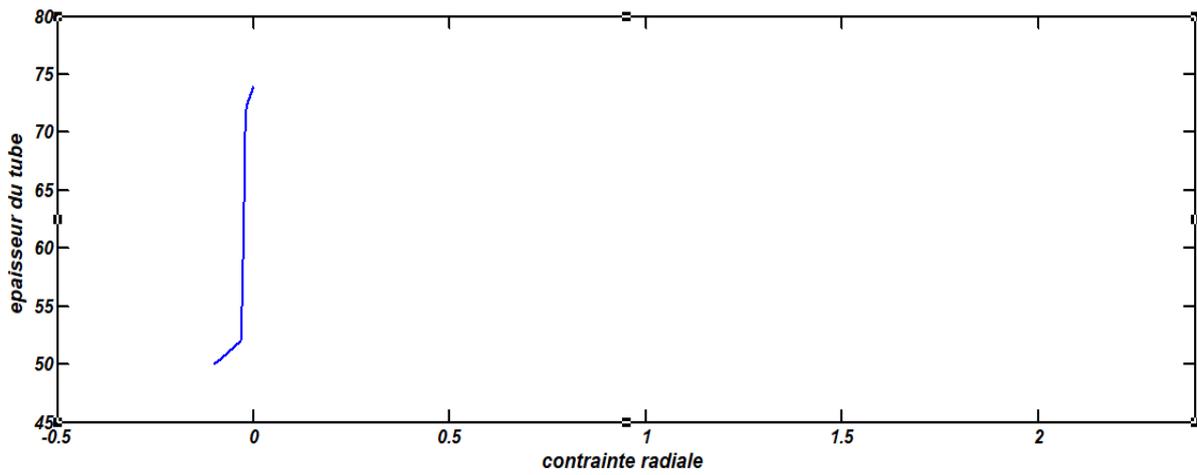


Figure IV.7 :Variation du Déplacement dans l'épaisseur du Tube.

Contrainte radiale σ_r :



Contrainte radiale σ_r

Figure IV.8 : Variation du Contrainte Radiale dans l'épaisseur du Tube .

Contrainte circonférentielle σ_θ :

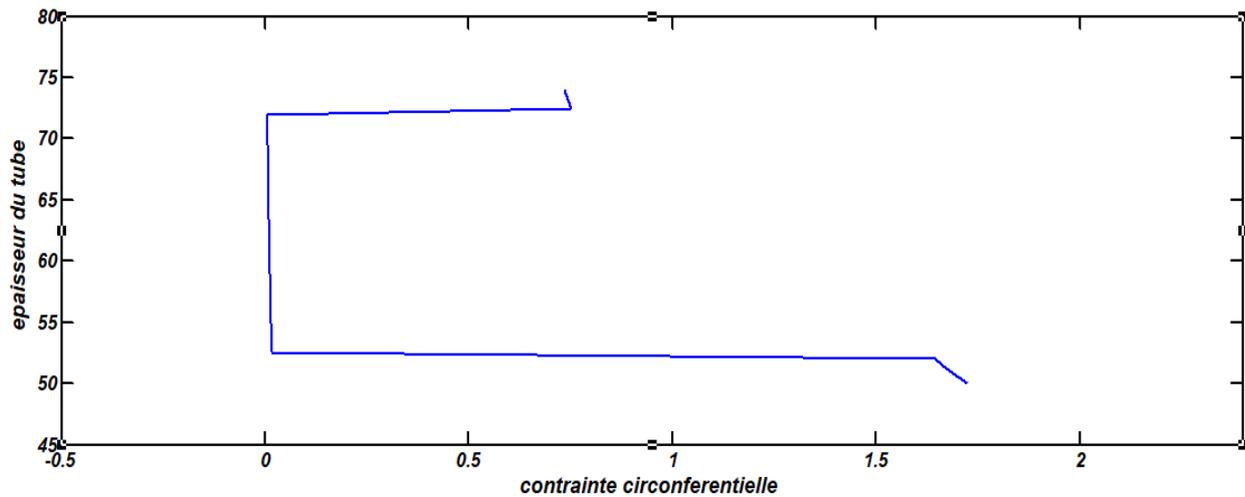


Figure IV.9 : Variation du Contrainte Circonférentielle dans l'épaisseur du Tube .

Contrainte axiale σ_z :

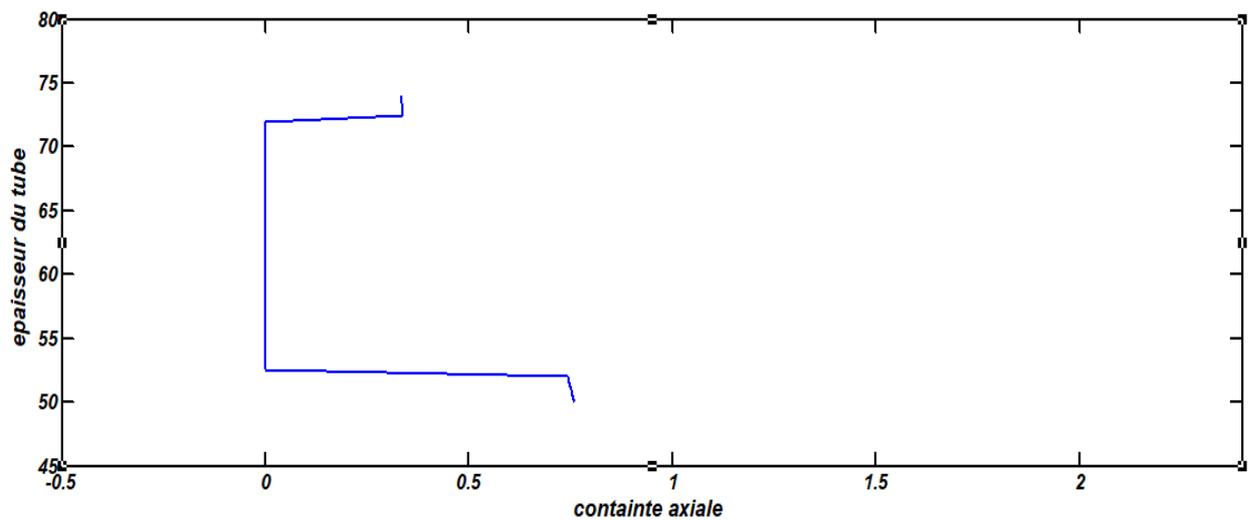


Figure IV.10 : Variation du Contrainte Axiale dans l'épaisseur du Tube .

IV.6.2 Interprétation 2

Après avoir trouvé l'angle optimal, nous avons choisi un angle des fibres 55° pour les couches (peaux) intérieure et extérieure, en raison du fait que la déformation axiale (ϵ_z), lorsque l'angle de les fibres 55° est proche de l'angle optimal la déformation axiale (ϵ_z) est très petit.

Après le choisi de l'angle des fibres 55° :

La Figure IV.6 montre la variation du déplacement radiale dans l'épaisseur de tube

- Le déplacement diminue dans l'épaisseur du tube de l'intérieure vers l'extérieure

La Figure IV.7 montre la variation du contrainte radiale dans l'épaisseur du tube

- Dans l'épaisseur du tube la contrainte est négative.

La Figure IV.8 donne variation du contrainte circonférentielle dans l'épaisseur de tube

- Dans l'épaisseur des peaux intérieure et extérieure la contrainte est positive.
- Dans l'épaisseur de cœur la contrainte est nulle.

La Figure IV.9 montre la variation du contrainte axiale dans l'épaisseur de tube

- Dans l'épaisseur des peaux intérieure et extérieure la contrainte est positive.
- Dans l'épaisseur de cœur la contrainte est nulle.

Conclusion Générale

Cette étude consiste à décrire le comportement mécanique de tube sandwich constitué de la peau intérieure et la peau extérieure et de le cœur. Les deux peaux sont de même matériau est composite (époxy-fibre) et de faible épaisseur et haut résistance. Le cœur est une résine épaisseur relativement important et de faible résistance. L'intérêt principal de telles structures et de réduire le poids et d'augmenter la résistance. Ce tube soumis. à la pression intérieure. Il s'agit dans ce travail d'exprimer le champ de déplacement, de déformation et la contrainte à travers l'épaisseur du tube en fonction de cette pression et de la configuration du matériau. Ce travail a été commencé par une étude bibliographique sur les matériaux qui composent le tube en général.

La deuxième partie a été dédié à l'étude la formulation théorique du comportement mécanique des structures sandwiches. Cette partie concerne généralité sur le champ des déplacements, des déformations et des contraintes des plaques sandwiches.

La troisième partie est une procédure d'analyse utilisés pour prédire le champ de déformation, de déplacement et de contrainte permettant d'atteindre les équations de comportement mécanique des couches en considérant les conditions aux limites.

La Quatrième partie présente l'organigramme de programmation qui permet de saisir les paramètres géométriques et les propriétés des matériaux pour le cœur et les peaux et la pression interne. Le programme peut calculer la contrainte et la déformation et le déplacement de tube sandwich. La procédure est appliquée à un exemple de composite tube sandwich avec une couche de cœur isotrope et couches de peaux orthotropes. La programmation a été effectuée sous le logiciel de calcul MATLAB et les résultats sont obtenus sous forme graphique. Ils concernent les courbes des déplacements, des déformations et des contraintes.

L'angle de direction a un effet significatif sur le comportement mécanique. Plusieurs angles de direction ont été appliqués, les résultats ont montré que l'angle 55 est une valeur importante où la déformation axiale est la valeur la plus basse possible, c'est-à-dire presque nulle. Cette angle a donné les meilleurs résultats pour la résistance les contraintes et les déformations.

Références Bibliographiques

- [1] A.CHEMAMI, Etude de la Performance des Matériaux Composites Sandwichs - Application en Fatigue, Mémoire doctorat Université Badji Mokhtar – Annaba 2012.
- [2] Achilles Petras Design of Sandwich Structures, Dissertation of Doctorat Cambridge University Engineering Department, December 1998.
- [3] N.KAUCHE, Prise en Compte Du Vieillissement et De L'endommagement Dans Le Dimensionnement De Structures En Matériaux Composites, Mémoire Magister Université Oran Mohamed Boudiaf 2017.
- [4] A.CHERIF MOUAKI, 'comportement mécanique d'un matériau composite sandwich, Mémoire de Master Université Mohamed Kheider-Biskra 2017.
- [5] F.BOUROUIS, 'Etude Du Comportement Mécanique De Structures Sandwiches a Différents Matériaux De Revêtements, Mémoire de Magister, ' Université Mntouri – Constantine.
- [6] A.GUERMITE, 'Etude expérimentale des structures sandwiches à base des bio-sources, Mémoire de master Université Mohamed Kheider-Biskra 2018.
- [7] K.BENFADEL, 'Élaboration et caractérisation de panneaux Sandwichs à matrice cimentaire destinés à la construction, Mémoire de Magister, 'Université M'hamed Bougara-Boumerdes 2015.
- [8] H.DJEMAI, 'Contribution à l'étude de l'endommagement dans les matériaux composites sandwiches, Mémoire Doctorat, ' Université Mohamed Kheider-Biskra 2017.
- [9] M.MOUSSAOUI, ' Analyse de la rupture des tubes en matériaux composites sous pression, Mémoire de Master Université Mohamed Kheider-Biskra 2018.
- [10] J.M. Bertholot, " Mécanique des Matériaux et Structures Composites" ISMANS Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés, Le Mans, France, Septembre 2013.
- [11] www.castrocompositesshop.com 08/07/2019
- [12] A.LACHGUER, M.AKYOUD, 'les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales,' Ecole Des Mines De Douai, 2013.
- [13] www.spi-groupe.com, 08/07/2019
- [14] M. Xia, K. Kemmochi, H. Takayanagi, 'Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading,' Composite Structures 51 (2001) 273-283 article.
- [15] Laurent.Gornet, 'Généralités sur les matériaux composites', 2008

Annexe

Les paramètres

$$k_{11} = \left(\beta^{(1)} \bar{C}_{11}^{(1)} + \bar{C}_{12}^{(1)} \right) r_0^{\beta^{(1)}-1},$$

$$k_{14} = \left(-\beta^{(1)} \bar{C}_{11}^{(1)} + \bar{C}_{12}^{(1)} \right) r_0^{-\beta^{(1)}-1},$$

$$k_{17} = \frac{\alpha^{(1)}}{1 - (\beta^{(1)})^2} \left[\bar{C}_{11}^{(1)} + \bar{C}_{12}^{(1)} \right] + \bar{C}_{13}^{(1)},$$

$$k_{12} = k_{13} = k_{15} = k_{16} = 0,$$

$$k_{21} = r_1^{\beta^{(1)}}, \quad k_{22} = -r_1, \quad k_{23} = 0,$$

$$k_{24} = r_1^{-\beta^{(1)}}, \quad k_{25} = -1/r_1, \quad k_{26} = 0,$$

$$k_{27} = \frac{\alpha^{(1)} r_1}{1 - (\beta^{(1)})^2} - \frac{\alpha^{(2)} r_1}{2} \ln r_1,$$

$$k_{31} = 0, \quad k_{32} = r_2, \quad k_{33} = -r_2^{\beta^{(3)}},$$

$$k_{34} = 0, \quad k_{35} = 1/r_2, \quad k_{36} = -r_2^{-\beta^{(3)}},$$

$$k_{37} = \frac{\alpha^{(2)} r_2}{2} \ln r_2 - \frac{\alpha^{(3)} r_2}{1 - (\beta^{(3)})^2},$$

$$k_{41} = \left(\beta^{(1)} \bar{C}_{11}^{(1)} + \bar{C}_{12}^{(1)} \right) r_1^{\beta^{(1)}-1},$$

$$k_{42} = -\left(\bar{C}_{11}^{(2)} + \bar{C}_{12}^{(2)} \right),$$

$$k_{44} = \left(-\beta^{(1)} \bar{C}_{11}^{(1)} + \bar{C}_{12}^{(1)} \right) r_1^{-\beta^{(1)}-1},$$

$$k_{45} = -\left(\bar{C}_{12}^{(2)} - \bar{C}_{11}^{(2)} \right) / r_1^2,$$

$$k_{45} = -\left(\overline{C}_{12}^{(2)} - \overline{C}_{11}^{(2)}\right) / r_1^2,$$

$$k_{47} = \frac{\alpha^{(1)}}{1 - (\beta^{(1)})^2} \left[\overline{C}_{11}^{(1)} + \overline{C}_{12}^{(1)} \right] + \overline{C}_{13}^{(1)} \\ - \frac{\alpha^{(2)} \ln r_1 \left[\overline{C}_{11}^{(2)} + \overline{C}_{12}^{(2)} \right] + \alpha^{(2)} \overline{C}_{11}^{(2)} + 2\overline{C}_{13}^{(2)}}{2},$$

$$k_{43} = k_{46} = 0,$$

$$k_{51} = k_{54} = 0,$$

$$k_{52} = \overline{C}_{11}^{(2)} + \overline{C}_{12}^{(2)},$$

$$k_{53} = \left[\beta^{(3)} \overline{C}_{11}^{(3)} \sin(\beta^{(3)} \ln r_2) - \overline{C}_{12}^{(3)} \cos(\beta^{(3)} \ln r_2) \right] / r_2,$$

$$k_{55} = \left(C_{12}^{(2)} - C_{11}^{(2)} \right) / r_2^2,$$

$$k_{56} = -\left[\beta^{(3)} \overline{C}_{11}^{(3)} \cos(\beta^{(3)} \ln r_2) + \overline{C}_{12}^{(3)} \sin(\beta^{(3)} \ln r_2) \right] / r_2,$$

$$k_{57} = \frac{\alpha^{(2)} \ln r_2 \left[\overline{C}_{11}^{(2)} + \overline{C}_{12}^{(2)} \right] + \alpha^{(2)} \overline{C}_{11}^{(2)} + 2\overline{C}_{13}^{(2)}}{2} \\ - \frac{\alpha^{(3)}}{1 + (\beta^{(3)})^2} \left[\overline{C}_{11}^{(3)} + \overline{C}_{12}^{(3)} \right] + \overline{C}_{13}^{(3)},$$

$$k_{61} = k_{62} = k_{64} = k_{65} = 0,$$

$$k_{63} = \left(\beta^{(3)} \overline{C}_{11}^{(3)} + \overline{C}_{12}^{(3)} \right) r_a^{\beta^{(3)} - 1},$$

$$k_{66} = \left(-\beta^{(3)} \overline{C}_{11}^{(3)} + \overline{C}_{12}^{(3)} \right) r_a^{-\beta^{(3)} - 1},$$

$$k_{67} = \frac{\alpha^{(3)}}{1 - (\beta^{(3)})^2} \left[\overline{C}_{11}^{(3)} + \overline{C}_{12}^{(3)} \right] + \overline{C}_{13}^{(3)},$$

$$k_{71} = \frac{2(\beta^{(1)}\overline{C}_{13}^{(1)} + \overline{C}_{23}^{(1)})}{1 + \beta^{(1)}} \left[r_1^{\beta^{(1)}+1} - r_0^{\beta^{(1)}+1} \right],$$

$$k_{72} = \left(\overline{C}_{13}^{(2)} + \overline{C}_{23}^{(2)} \right) (r_2^2 - r_1^2),$$

$$k_{73} = \frac{2\left(\beta^{(3)}\overline{C}_{13}^{(3)} + \overline{C}_{23}^{(3)}\right)}{1 + \beta^{(3)}} \left[r_a^{\beta^{(3)}+1} - r_2^{\beta^{(3)}+1} \right],$$

$$k_{74} = \frac{2\left(-\beta^{(1)}\overline{C}_{13}^{(1)} + \overline{C}_{23}^{(1)}\right)}{1 - \beta^{(1)}} \left[r_1^{-\beta^{(1)}+1} - r_0^{-\beta^{(1)}+1} \right],$$

$$k_{75} = 2\left(\overline{C}_{23}^{(2)} - \overline{C}_{13}^{(2)}\right) \ln(r_2/r_1),$$

$$k_{76} = \frac{2\left(-\beta^{(3)}\overline{C}_{13}^{(3)} + \overline{C}_{23}^{(3)}\right)}{1 - \beta^{(3)}} \left[r_a^{-\beta^{(3)}+1} - r_2^{-\beta^{(3)}+1} \right],$$

$$\begin{aligned} k_{77} = & \left[\frac{\alpha^{(1)}\left(\overline{C}_{13}^{(1)} + \overline{C}_{23}^{(1)}\right)}{1 - (\beta^{(1)})^2} + \overline{C}_{33}^{(1)} \right] (r_1^2 - r_0^2) \\ & + \alpha^{(2)}\left(\overline{C}_{13}^{(2)} + \overline{C}_{23}^{(2)}\right) \left[(r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1)/2 - (r_2^2 - r_1^2)/4 \right] \\ & + \left[\alpha^{(2)}\overline{C}_{13}^{(2)}/2 + \overline{C}_{33}^{(2)} \right] (r_2^2 - r_1^2) \\ & + \left[\frac{\alpha^{(3)}\left[\overline{C}_{13}^{(3)} + \overline{C}_{23}^{(3)}\right]}{1 - (\beta^{(3)})^2} + \overline{C}_{33}^{(3)} \right] (r_a^2 - r_2^2), \end{aligned}$$

$$d_1 = -P_0,$$

$$d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 0,$$

$$d_7 = P_0 r_0^2.$$

الملخص

تعتبر الأنابيب والخزانات من الوسائل المستخدمة في نقل السوائل والغازات وبنطاق واسع، وعادة ما تكون مصنوعة من الحديد الصلب، ومشكلة الحديد الصلب تكمن في التآكل والصدأ مع مرور الزمن وتعتبر المشكل الرئيسي في المنشآت الصناعية.

ومع تطور العلم والأبحاث، وجد حل واعد لهذه المشكل، حيث يتم صناعة هذه الأنابيب والخزانات من مواد مركبة شكل شظيرة، وهي مطلوبة بشكل كبير في مجال النقل والصناعي. هدف عمل هذه المذكرة هو دراسة سلوك الميكانيكي للأنابيب المعرضة للضغط الداخلي. واعتمدت هذه الدراسة على تحديد حالات التشوهات والإجهادات والتشريد عبر سمك الأنبوب، إن تحديد التشوهات في سمك الأنبوب جعل من الممكن إيجاد الزاوية التي تكون فيها قيمة التشوه الحوري صغيرة جدا. اعتمد النموذج التحليلي في هذه الدراسة على السلوك الميكانيكي للطبقات والشروط الحدية، وتم برمجة هذا النموذج في برنامج الحساب MATLAB.

Résumé :

Les tubes et les réservoirs sont largement utilisés pour le transport de liquides et de gaz et sont généralement en acier. Le problème de l'acier solide est la corrosion et le poids.

Avec le développement de la science et de la recherche, une solution prometteuse à ce problème a été trouvée. Ces tubes et réservoirs sont fabriqués à partir de matériaux composites en forme de sandwich et sont très demandés dans les domaines du transport et de l'industrie.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement mécanique des tubes exposés à la pression interne.

Cette étude était basée sur l'identification de déformations, de contraintes et de déplacements dans l'épaisseur du tube, permettant ainsi de trouver l'angle où la valeur de la déformation est très faible.

Le modèle analytique utilisé dans cette étude était basé sur le comportement mécanique des couches et des conditions aux limites. Ce modèle a été programmé dans l'outil de calcul MATLAB.