



## **SCHEMAS A CAPTURES DE CHOCS POUR LA SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE**

**KORICHI K.<sup>1</sup>, HAZZAB A.<sup>1</sup>, GHENAIM A.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Laboratoire de Modélisation et Méthodes de Calcul, Centre Universitaire de Saïda BP  
138 Ennasr Saïda 20002, ALGERIE

<sup>2</sup> Equipe de Recherche en Eau, Sol et Aménagement (ERESA), Institut National des  
Sciences Appliquées de Strasbourg, 24 boulevard de la victoire-67084  
Strasbourg, France

### **RESUME**

La présente étude est une contribution à la simulation des écoulements de surface en résolvant le système d'équations hyperboliques et non linéaires de *Saint-Venant*. En effet, la résolution analytique de ces équations paraît impossible, mais la résolution numérique est maintenant tout à fait courante grâce au développement de nouvelles méthodes numériques ainsi qu'à la capacité de plus en plus importante de la mémoire des calculateurs.

Pour des raisons de stabilité et de précision, la méthode des volumes finis a été appliquée au cours de la présente étude. Une classe de méthodes, basées essentiellement sur la résolution du problème de *Riemann*, a été retenue et concerne les schémas à capture de chocs.

Les tests d'applications aux écoulements permanents et transitoires par cette approche numérique confirment sa pertinence et sa stabilité.

**Mots clés :** Simulation d'écoulement à surface libre, *Saint-Venant*, volumes finis, problème de *Riemann*, Schéma de *Roe*, les limiteurs de flux, Schéma de *Godunov*.

### **INTRODUCTION**

La simulation numérique des phénomènes physiques complexes a acquis une importance considérable ces dernières années. Du point de vue mathématique, de tels phénomènes sont gouvernés par des lois de conservation qui sont présentées par des systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques et

non linéaires. Cette non linéarité présente des ondes de chocs et de détente. Au regard de l'importance de ces études, plusieurs approches de résolution ont été développées durant ces dernières décennies. Parmi ces approches, il y a lieu de citer celle basée sur les schémas à capture de choc (*shock capturing method*).

Après la présentation du modèle mathématique unidimensionnel de *Saint-Venant*, nous illustrons les différentes situations possibles pour la résolution analytique du problème de *Riemann* à savoir : les ondes de chocs ou de détente. Le traitement numérique est ensuite effectué en mettant en évidence les approches de *Godunov* et de *Roe*.

Enfin, une série de tests d'écoulements stationnaires et transitoires est effectuée en prenant pour exemples la rupture d'un barrage sur un fond sec et un fond mouillé, un écoulement sur un lit concave et une présentation en deux dimensions d'une rupture brusque d'un réservoir cylindrique.

### MODELE MATHEMATIQUE

Les écoulements à surface libre sont des écoulements qui s'opèrent sous l'effet de la gravité. Ils sont gérés par un système d'EDP appelé le système de *Saint-Venant*. Le modèle de *Saint-Venant* découle des deux principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement qui se traduisent respectivement par les relations suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{h^2}{2} \right) = gh(J_f - J_e) \tag{2}$$

où  $q$  est le débit spécifique,  $h$  est la hauteur d'eau,  $g$  est l'accélération de la gravité,  $J_e$  est la pente énergétique et  $J_f$  est la pente du lit.

Cette loi de conservation peut également s'écrire sous forme vectorielle, en une dimension, avec un terme source, soit :

$$q_t + f(q)_x = \psi(x,t) \tag{3}$$

Dans cette dernière relation,  $q$  est le vecteur des variables conservatives,  $f(q)$  est le vecteur du flux et  $\psi(x,t)$  est le vecteur des termes sources. Ces vecteurs sont donnés par :

$$q \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, f(q) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(J_f - J_e) \end{pmatrix}$$

$u$  est la vitesse moyenne d'écoulement.

Le système de *Saint-Venant* est un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques et non linéaires, puisque la *Jacobienne* :

$$J = f'(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix} \quad (4)$$

est diagonalisable avec des valeurs propres réelles et distinctes :

$$\lambda^{(1)} = u - \sqrt{gh}, \lambda^{(2)} = u + \sqrt{gh}$$

Il faut noter que pour la dérivation de cette loi de conservation, nous avons admis les points suivants :

- L'écoulement est unidimensionnel
- La répartition de la pression sur une verticale est hydrostatique
- La répartition des vitesses sur une verticale est uniforme
- La densité de l'eau est constante
- Les pertes de charges sont ceux présentés en régime permanent
- La pente du fond est faible
- Les variables dépendantes sont des fonctions continues et dérivables.

## RESOLUTION DES EQUATIONS DE SAINT-VENANT

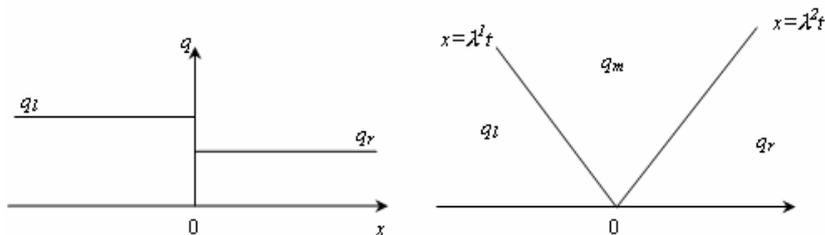
La résolution analytique du système d'équations de *Saint-Venant* est fastidieuse. La résolution du problème de *Riemann* demeure l'une des classes qui permet le traitement efficace des lois de conservations hyperboliques et non linéaires.

### Problème de *Riemann*

La particularité des systèmes hyperboliques, notamment celui de *Saint-Venant*, réside dans l'existence de solutions discontinues, en formant des ondes de chocs

ou même de détente. Plusieurs techniques sont utilisées pour traiter ces problèmes hyperboliques. Au cours de la présente étude, nous explorons celle qui se base essentiellement sur la résolution du problème du *Riemann*.

Un problème de *Riemann* correspond tout simplement à un système d'EDP avec des conditions initiales spéciales. Elles sont spéciales du fait qu'elles sont constantes de part et d'autre de la discontinuité (Figure 1), localisée à  $x = 0$ .



**Figure 1 :** Schématisation du problème du *Riemann*

En négligeant le terme source, le problème de *Riemann* se traduit par :

$$q_t + f(q)_x = 0$$

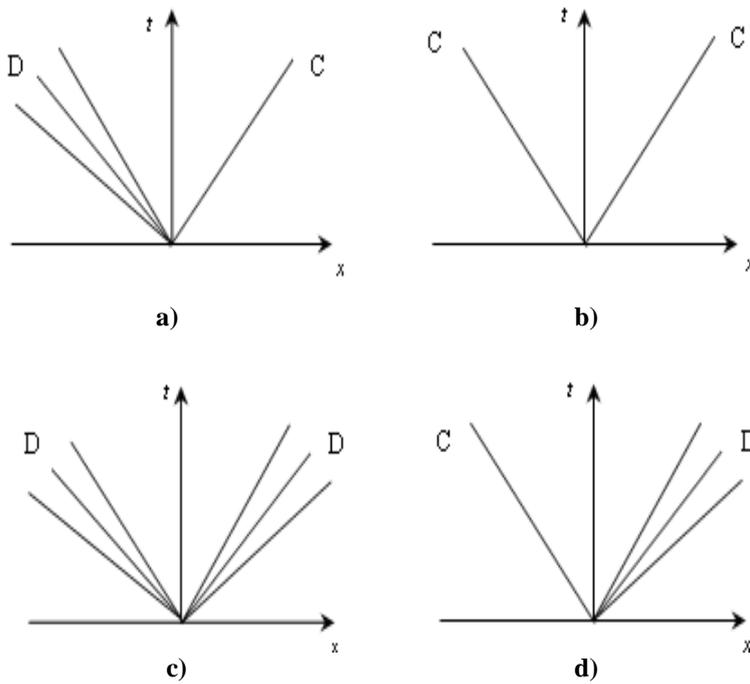
avec :

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_l & \text{si } x < 0 \\ q_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

La résolution du problème de *Riemann* consiste donc à trouver un état intermédiaire  $q_m$  entre l'état gauche  $q_l$  et droit  $q_r$ .

Pour le système de *Saint-Venant*, quatre configurations sont possibles et sont illustrées sur la figure 2.

- a) Une onde de détente qui se propage vers la gauche et une onde de choc vers la droite, ce qui représente la configuration d'une rupture d'un barrage.
- b) Deux ondes de choc centrées, émanant de l'origine, ce qui correspond à une rencontre de deux ondes.
- c) Deux ondes de détente centrée, ce qui correspond à une séparation de deux ondes.
- d) Une onde de choc qui se propage vers la gauche et une autre de détente vers la droite, ce qui représente une configuration d'un ressaut hydraulique.



**Figure 2 :** Configurations possibles de la solution du problème de *Riemann* pour le système d'équations de *Saint-Venant*.

Le premier cas (deux ondes de chocs) correspond aux solutions du système de *Saint-Venant* avec les conditions initiales :

$$h(x, 0), u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < 0 \\ u_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{avec } u_l > 0$$

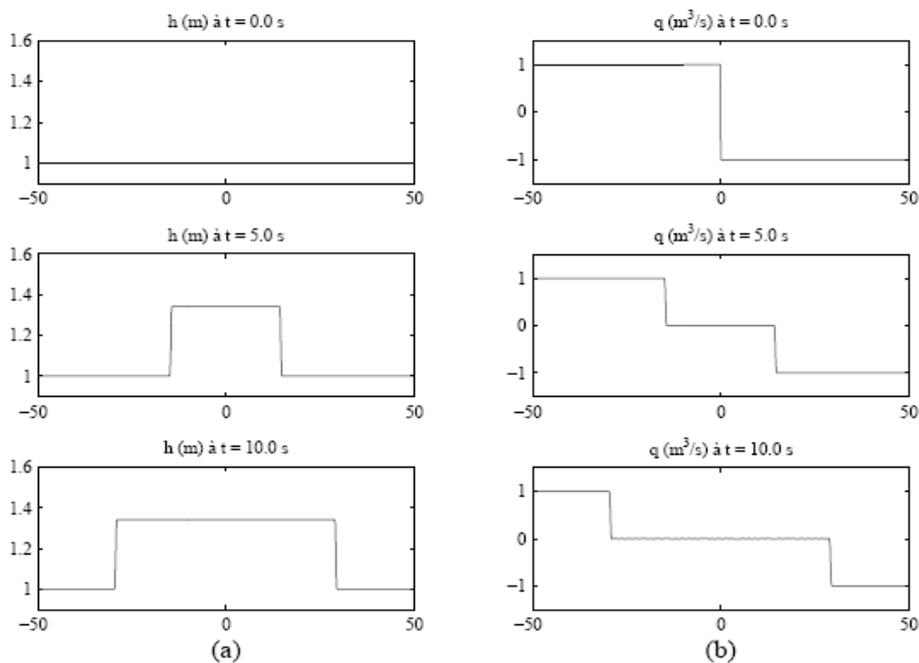
La solution est représentée par deux ondes de chocs émanant de l'origine, ce qui va créer un état intermédiaire stationnaire (Figure 3). La détermination de cet état intermédiaire est réalisée en appliquant la condition de saut de *Rankine-Hugoniot* :

$$s(q^* - q) = f(q^*) - f(q) \tag{6}$$

Ceci mène à un système à deux équations qui sont :

$$s(h_* - h) = h_* u_* - hu \tag{7}$$

$$s(h_* u_* - hu) = h_* u_*^2 - hu^2 + \frac{1}{2} g (h_*^2 - h^2)$$



**Figure 3 :** Solution du problème du *Riemann* dans le cas où  $u_l = -u_r > 0$  et  $h = 1 m$

Graphiquement, cet état représente l'intersection des deux courbes de *Hugoniot*, tracées à partir des états gauches et droites (figure 4).

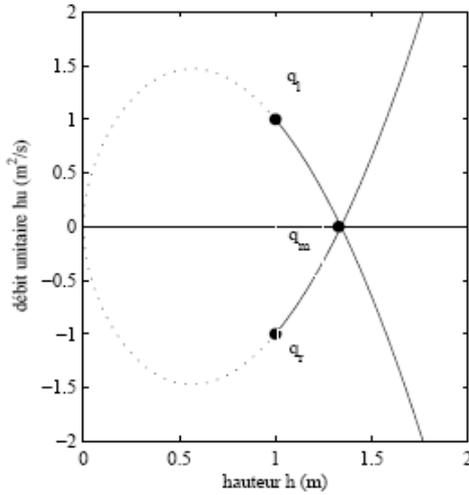


Figure 4 : Construction de la solution deux-chocs du problème de Riemann pour les équations de Saint-Venant.

Pour l'autre cas (deux ondes de détente), le problème est posé avec les conditions initiales suivantes :

$$h(x,0), \quad u(x,0) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < 0 \\ -u_l & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ avec } u_l < 0$$

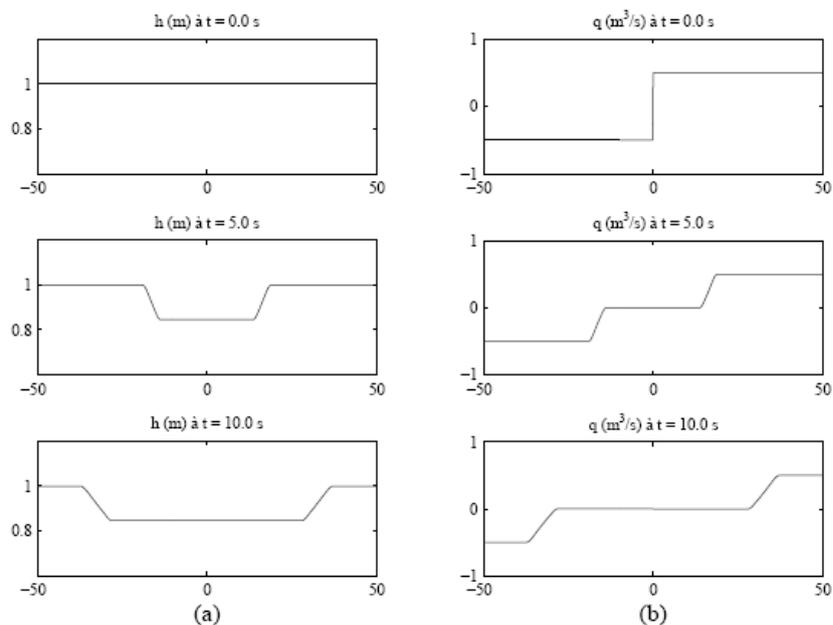
La solution est schématisée ainsi (figure 5) :

Cette solution est calculée en appliquant la relation qui caractérise les invariants de Riemann à savoir :

$$\begin{aligned} w^1 &= u + 2\sqrt{gh} \\ w^2 &= u - 2\sqrt{gh} \end{aligned} \quad (8)$$

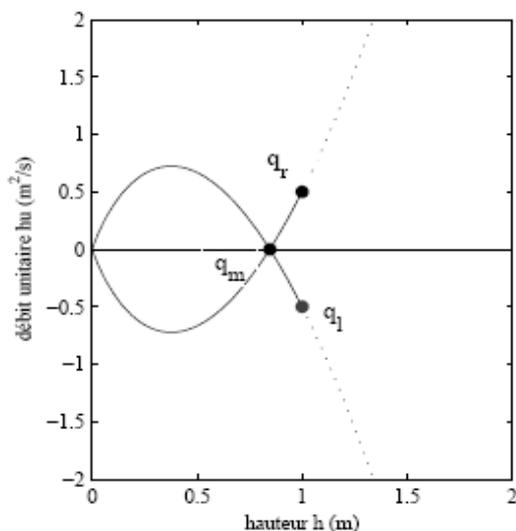
L'état intermédiaire est donné donc par la relation ;

$$\begin{aligned} u_m &= u_l + 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m}) \\ u_m &= u_l - 2(\sqrt{gh_r} - \sqrt{gh_m}) \end{aligned} \quad (9)$$



**Figure 5 :** Solutions du problème de *Riemann* pour les équations de *Saint-Venant* avec  $u_l = -u_r < 0$ .

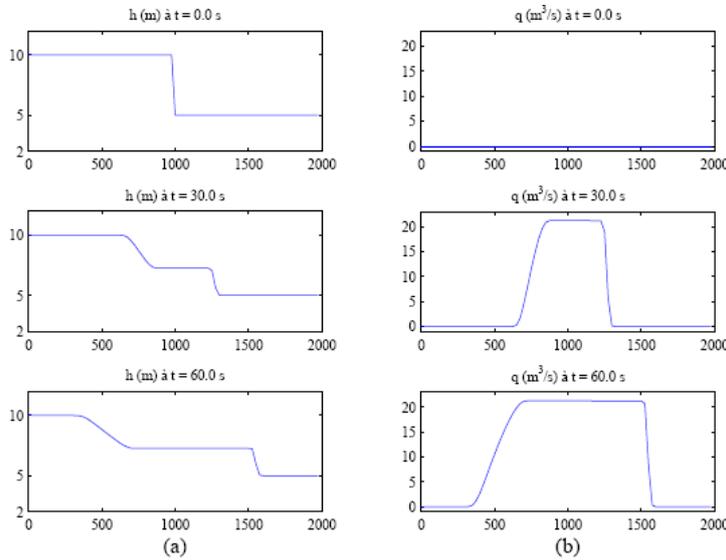
Graphiquement, la relation  $q=f(h)$  est appelée « courbes intégrales » et l'état intermédiaire sera bien sur l'intersection des deux courbes intégrales (figure 6).



**Figure 6 :** Construction de la solution deux-détentes du problème de *Riemann* pour les équations de *Saint-Venant*.

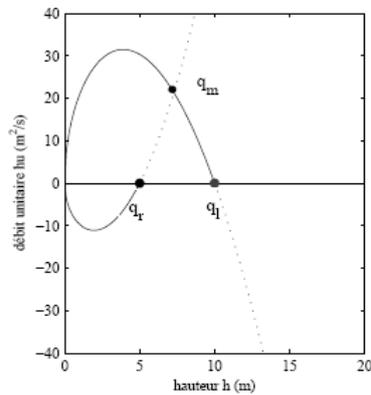
Pour le cas général (une onde de détente et une autre de choc) qui illustre une rupture d'un barrage avec les conditions initiales suivantes :

$$h(x,0) = \begin{cases} h_l & \text{si } x < 0 \\ h_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ avec } (u,0) = 0$$



**Figure 7 :** Solutions du problème de *Riemann* pour une rupture d'un barrage.

Une onde de choc se propage vers la droite et une autre de détente se propage vers la gauche (figure 7), donc la solution est obtenue en appliquant la relation de *Rankine-Hugoniot* pour l'onde de choc en plus la relation des invariants de *Riemann* pour l'onde de détente (figure 8).

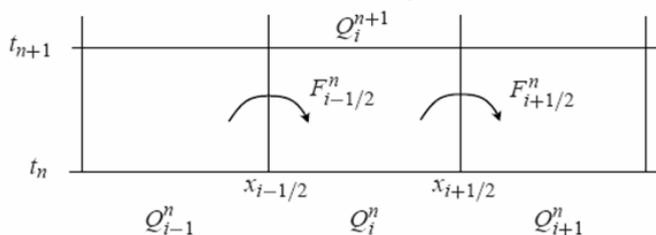


**Figure 8 :** Construction de la solution détente-choc du problème de *Riemann* pour le cas d'une rupture d'un barrage.

Le traitement du problème de *Riemann* est rendu plus souple grâce aux méthodes numériques spécifiques. Ce sont les méthodes à captures de chocs présentées ci-après.

### Présentation de la Méthode des Volumes Finis

La résolution analytique du problème de *Riemann* non linéaire est impossible. Ceci impose l'application d'une technique numérique. Parmi toutes les techniques numériques, la méthode des volumes finis est bien adaptée à des problèmes conservatifs, hyperboliques et non linéaires tels que le modèle de *Saint-Venant*. Cette méthode est basée sur la discrétisation à partir de la forme intégrale des équations en subdivisant ainsi le domaine en un nombre de volumes finis. Dans chaque cellule, les relations d'intégrales sont appliquées localement et la conservation exacte dans chaque cellule est réalisée (figure 9).



**Figure 9 :** Illustration du principe de la méthode des volumes finis

Une cellule est définie par :

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$$

Comme il est indiqué dans la figure 2, la valeur  $Q_i^n$  représente l'approximation de la valeur moyenne sur l'intervalle (i) au temps  $t_n$  :

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \quad (10)$$

Après l'intégration de l'équation (10) dans le temps et suite à un réarrangement, on abouti à la forme générale de la méthode des volumes finis pour les lois de conservations discutées ci avant, à savoir ;

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (11)$$

dont  $F_{i-1/2}^n$  est une approximation du flux à  $x=x_{i-1/2}$ .

$$F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt \quad (12)$$

La formulation 11 est nommée schéma à décomposition de flux ou FVS (*Flux Vector Splitting*). On remarque ainsi que l'approximation de la loi de conservation montre que la valeur approchée pour l'étape suivante égale à celle pour l'étape courante plus une différence de flux à travers l'interface de la cellule. Pour les problèmes hyperboliques non linéaires, l'information (l'onde) se propage avec une vitesse déterminée. Donc il est raisonnable comme supposition d'obtenir  $F_{i-1/2}^n$  à partir des valeurs  $Q_{i-1}^n$  et  $Q_i^n$  c'est à dire les deux moyennes pour les cellules de part et d'autre l'interface  $x=x_{i-1/2}$ , on écrit donc :

$$F_{i-1/2}^n = F(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \quad (13)$$

où  $F$  est la fonction du flux numérique. Le schéma 11 devient :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - F(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \right) \quad (14)$$

L'utilisation de la formulation citée au-dessus dépend de la réponse d'une seule question : comment choisir la fonction du flux  $F$  ? Car la manière dont on approche les flux numériques en fonction de l'inconnue discrète, détermine la nature du schéma numérique. En générale, un schéma de ce type est un schéma explicite basé sur trois points (schéma à trois points), où  $Q_i^{n+1}$  est obtenu à partir de  $Q_{i-1}^n$ ,  $Q_i^n$  et  $Q_{i+1}^n$ .

### Schéma de Godunov

L'approche de *Godunov* est basée sur les trois étapes suivantes :

- Approximation de la solution par une fonction  $\tilde{q}^n(x, t_n)$  constante par morceaux sur chaque intervalle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ .
- Résoudre à chaque interface  $x_{i+1/2}$  le problème de *Riemann* correspondant à la discontinuité.
- Faire évoluer la solution en écrivant :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right]$$

Cette opération est alors répétée à chaque pas du temps. Les trois étapes sont appelées "algorithme REA" (Reconstruct-Evolve-Average). Ce dernier a été proposé par Godunov (1959) comme une des méthodes permettant la résolution des équations d'Euler non linéaires de la dynamique des gaz, où le problème de Riemann est résolu à chaque interface des cellules (figure 10).

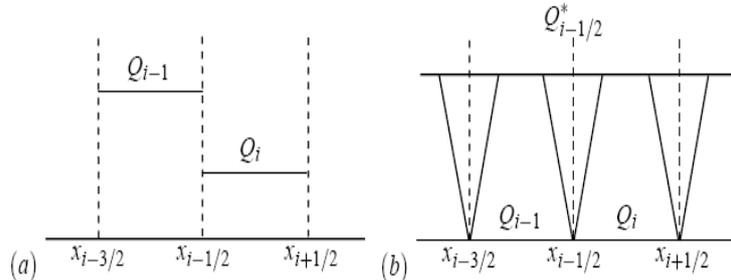


Figure 10 : Schématisation du principe du Godunov

### Schémas à haute résolution

La méthode proposée par Godunov est conservative. Elle respecte la condition d'entropie, mais elle est du premier ordre et nécessite une résolution itérative à chaque pas de temps. Cette méthode a été rendue plus attractive par une extension au second ordre de précision par Van Leer (1979), puis par le développement d'autres solveurs de Riemann approchés comme celui de Lax Friedrich (1973), Lax Wendroff (1960), Roe (1981).

### Solveur de Roe

Le solveur de Riemann le plus connu et le plus utilisé est celui de Roe. Ce solveur consiste à résoudre le problème de Riemann de manière approchée en remplaçant la matrice Jacobienne du système de Saint-Venant exacte dans chaque intervalle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  par une matrice Jacobienne constante, en calculant ainsi certains paramètres utiles pour la résolution. Ces paramètres représentent les variables dépendantes  $(h, u)$  que Roe a proposées, à savoir :

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i) \text{ et } \hat{u} = \frac{\sqrt{h_{i-1}}u_{i-1} + \sqrt{h_i}u_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}} \quad (15)$$

Roe détermine la matrice Jacobienne par :

$$\hat{A}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{u}^2 + g\bar{h} & 2\hat{u} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Le schéma de *Roe* s'accorde avec la formule 11 dont le flux numérique de *Roe* est donné par :

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2} [f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{1}{2} |\hat{A}_{i-1/2}| (Q_i - Q_{i-1}) \quad (17)$$

Ce dernier représente une moyenne arithmétique plus un terme correcteur.

### **Les limiteurs**

Les schémas du premier ordre présentent des solutions stables mais moins précises. Cependant, les schémas du deuxième ordre présentent des solutions précises mais ils oscillent aux niveaux des discontinuités. L'idée est donc de combiner les avantages des deux schémas en appliquant les limiteurs. Cette idée a pour but d'améliorer le comportement des schémas d'ordre élevé. Elle est apparue au début des années 70 dans le schéma hybride de *Harten* et de *Zwas*. Le processus des limiteurs est compliqué du fait que la solution à un système hyperbolique se compose typiquement d'une superposition des ondes pour différentes familles caractéristiques. Certains de ces ondes, passant par un point à un temps indiqué, peuvent être continues tandis que d'autres sont discontinues. On applique ainsi les limiteurs de telle façon que la partie discontinue de la solution reste non oscillatoire, tandis que la partie continue reste précise. Les termes de correction peuvent être calculés en se basant sur les ondes surgissant de la solution de *Riemann*, dont chaque onde est limitée indépendamment des autres. Plus généralement, on peut combiner n'importe quelle formule de flux d'ordre un  $F_L(Q_{i-1}, Q_i)$  (tel que le flux décentré) et d'ordre élevé  $F_H(Q_{i-1}, Q_i)$  (tel que *Lax-Wendroff*) pour obtenir un schéma de type limiteur de flux (pente), à savoir :

$$F_{i-1/2}^n = F_L(Q_{i-1}, Q_i) + \Phi_{i-1/2}^n [F_H(Q_{i-1}, Q_i) - F_L(Q_{i-1}, Q_i)]$$

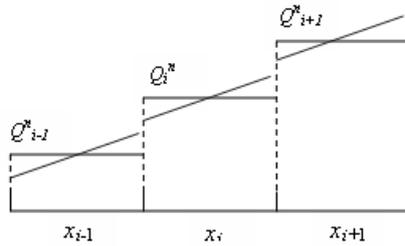
- Si,  $\Phi_{i-1/2}^n = 0$  c'est le schéma d'ordre 1
- Si  $\Phi_{i-1/2}^n = 1$ , on obtient le schéma d'ordre élevé

Le limiteur prend la forme d'une fonction  $\Phi(\theta)$  où  $\theta$  désigne la pente de la variable dans chaque cellule (figure 11).

### **Schéma à limiteurs de pentes**

Les schémas à limiteurs de pentes sont basés sur la reconstruction linéaire par morceaux. La variable est considérée comme étant une fonction linéaire par morceaux ayant bien sur une pente dans la cellule considérée (figure 11) :

$$\tilde{q}_i^n(x,t) = Q_i^n + (x-x_i)\theta_i^n \tag{18}$$



**Figure 11 :** Schéma qui montre la pente d'une variable

Selon l'évaluation de la fonction de la pente  $\theta_i^n$ , on propose les différents schémas, à savoir :

<b>Minmod:</b>	<b>Superbee:</b>
$\phi(\theta) = \min \text{mod}(1, \theta)$	$\max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$
<b>Monotonie centrale MC:</b>	<b>van Leer:</b>
$\max(0, (\min(1, \theta) / 2, 2, 2\theta))$	$\phi(\theta) = \frac{\theta +  \theta }{1 +  \theta }$

**Traitement du terme source**

Lorsque les effets du terme source ne sont pas négligeables (l'influence du frottement et de la pente du fond sur la nature d'écoulement est considérable), on introduit ainsi le vecteur des termes source dans la loi de conservation. On parle ainsi d'une loi d'équilibre et on écrit ;

$$q_t + f(q)_x = \psi(q, x, t)$$

où :

$$\psi(q, x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(J_f - J_e) \end{pmatrix}$$

**Schémas des pas fractionnés**

Plusieurs schémas numériques sont utilisés pour traiter ces lois d'équilibre. À titre d'exemple, le schéma quasi-stationnaire et celui des pas fractionnés qui consiste à décomposer la loi d'équilibre en deux équations ;

- La loi de conservation homogène :

$$q_t + f(q)_x = 0$$

- L'équation à dérivée ordinaire ;

$$dq / dt = \psi(q, x)$$

et on alterne entre la résolution de ces deux équations pour chaque pas du temps.

## TESTS NUMERIQUES

Le but essentiel de ces tests est tout d'abord de vérifier la validité du code utilisé et de comparer les différents schémas : schéma de *Godunov* du premier ordre et du deuxième ordre (avec ou sans limiteurs de pente). Cette comparaison permet de déterminer le schéma le plus pertinent en matière de précision et de stabilité.

L'étude comparative comporte l'examen des écoulements non permanents (rupture d'un Barrage). De même pour la discrétisation du terme source où on applique un test d'écoulement sur un lit concave. De même, on présente, en deux dimensions, une rupture d'un réservoir cylindrique.

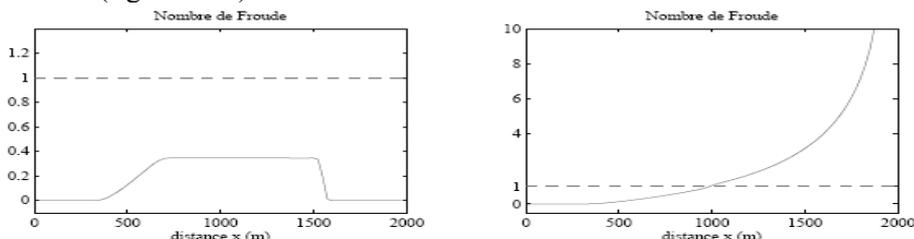
Tous les tests sont exécutés en se servant du code de calcul "Clawpack" (Conservation Law Package). À la fin de chaque test on propose une autre comparaison avec des résultats obtenus par la méthode des éléments finis schéma CDG (Caractéristique dissipative de *Galarkine*), et qui fait partie d'une étude précédente réalisée dans le même contexte par notre équipe (*Atallah*, 2005).

### Rupture d'un barrage

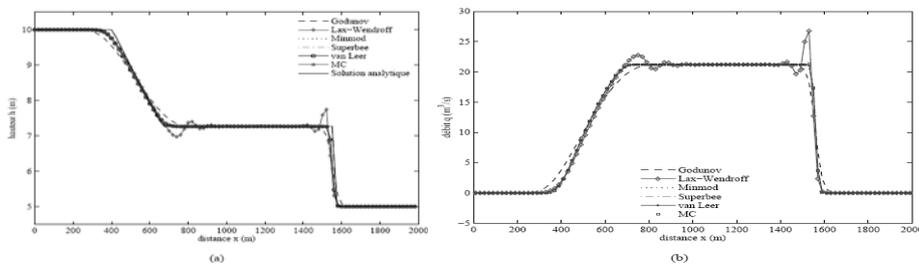
Le premier test est une examination d'une rupture d'un barrage dans un canal lisse et horizontale, pour deux situations : sur un fond mouillé et un fond sec. L'exécution est faite à un pas de temps  $\Delta t=0,1s$  pour une durée de 60s. La longueur du domaine est  $x=2000m$ . Le point de rupture est localisé à  $x=1000m$ . La hauteur amont est initialement fixée à  $h_l=10m$ , alors que la hauteur à l'aval est initialement  $h_r=5m$  pour le cas d'écoulement sur un fond mouillé et  $h_r=0,0001m$  pour le cas d'écoulement sur un fond sec. Le débit à l'état initial est nul,  $q_l=q_r=0m^3/s$ .

L'analyse du nombre de Froude indique que pour l'écoulement sur un fond mouillé, le régime est partout fluvial, tandis que sur un fond sec, le régime d'écoulement est transcritique, puisqu'il passe d'un régime fluvial à un régime torrentiel (figure 12).

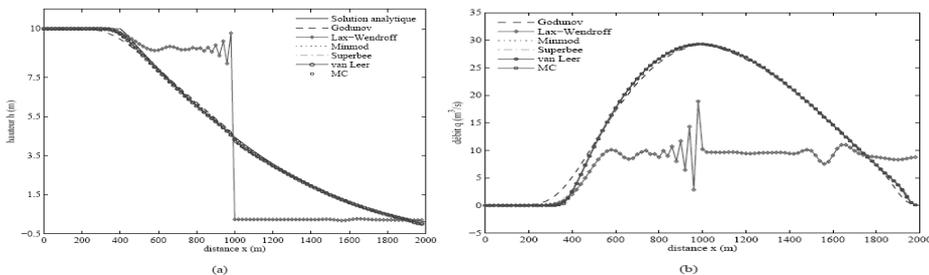
Après un temps  $t=60s$  on remarque que le schéma de *Godunov* diffuse près des discontinuités, alors que le schéma de *Lax-Wendroff* oscille près de l'onde de chocs et de détente (figure 13.1). Pour le cas d'une rupture d'un barrage sur un fond sec, le schéma de *Lax-Wendroff* échoue totalement (figure 13.2). En comparant avec le schéma CDG, le schéma MC présente plus de stabilité et de précision (figure 13.3).



**Figure 12 :** Nombre de Froude correspondant à l'écoulement (a) fluvial et (b) transcritique.

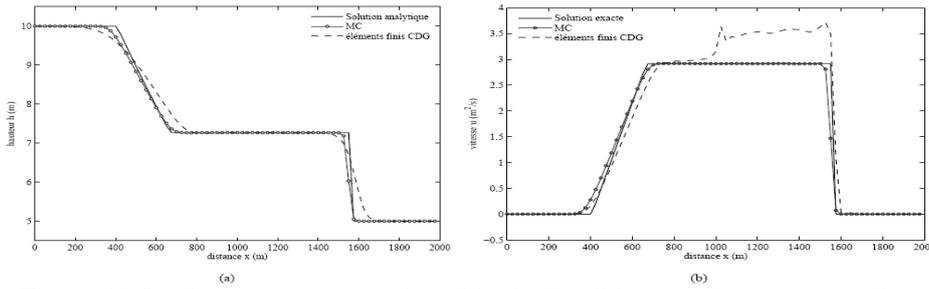


**Figure 13.1 :** Comparaison des différents schémas -rupture d'un barrage sur un fond mouillé-( $t = 60 s$ ) (a) hauteur, (b) débit.



**Figure 13.2 :** Comparaison des différents schémas -rupture d'un barrage sur un fond sec-( $t = 60 s$ ) (a) hauteur, (b) débit

*Schémas à captures de chocs pour la simulation numérique des écoulements à surface libre*



**Figure 13.3 :** Comparaison avec la méthode des éléments finis -rupture d'un barrage sur un fond mouillé ( $t = 60$  s) (a) hauteur, (b) vitesse.

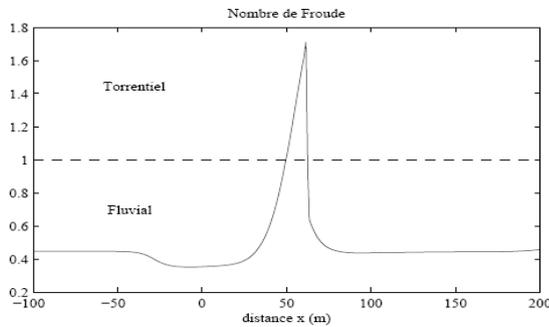
**Écoulement sur un lit concave**

Pour ce test, on néglige l'effet des frottements. Le lit est déterminé par une fonction  $b(x)$ , à savoir ;

$$b(x) = \begin{cases} 0.25 \exp\left(-33.75(x/100-0.5)^2\right) & \text{si } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (19)$$

La hauteur est fixée initialement à  $h=0,8m$ . Le débit de départ est évalué à  $q=1m^3/s$ . Le temps de simulation est  $t=60s$ , le canal est horizontal de longueur  $L=200m$  dont le pas d'espace égale à  $\Delta x=1m$ . À la fin du temps, on remarque qu'un ressaut hydraulique s'est formé à l'aval de la bosse.

L'analyse du nombre de Froude montre que le régime d'écoulement est ainsi transcritique puisqu'il passe d'un régime fluvial à un régime torrentiel (figure 14.1).



**Figure 14.1 :** Variation du nombre de Froude à ( $t=60$  s).

En utilisant la méthode des pas fractionnés comme méthode de discrétisation du terme source et en comparant le schéma de *Godunov* avec celui de MC, on remarque que le schéma de *Godunov* présente une diffusion numérique, cependant la solution débit fait un saut numérique artificiel (figure 14.2).

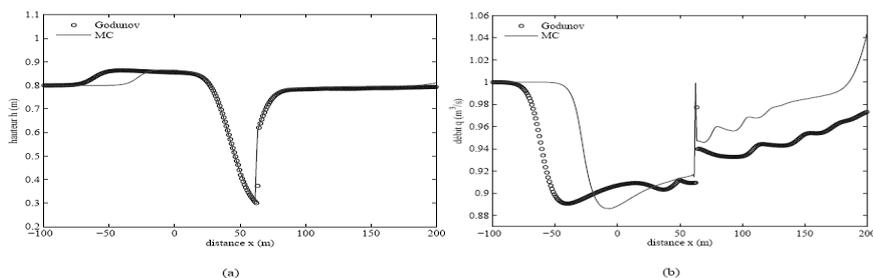


Figure 14.2 : Comparaison des schémas *Godunov* et *MC*. (a) hauteur, (b) débit à  $t = 60$  s

### Rupture d'un réservoir cylindrique

Le dernier test représente une configuration en deux dimensions d'une rupture d'un réservoir cylindrique de diamètre égale à  $\varnothing=10$ m. La hauteur à l'intérieur est égale à  $h_i=10$ m. À l'extérieur, elle est de  $h_e=5$ m (figure 15.1). Le domaine de simulation est pris  $(125\text{m} \times 125\text{m})$ , dont la maille a une surface de  $\Delta x=\Delta y=0,4$ . Le pas du temps initial est  $\Delta t=0,1$ s, le temps de simulation est  $t=2$ s.

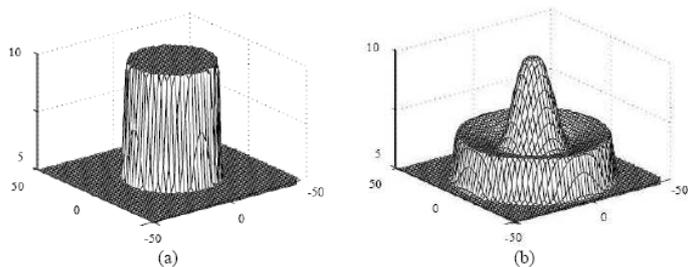


Figure 15.1 : Illustration de la rupture du réservoir (rayon=5 m).

La comparaison entre les différents schémas volumes finis (figure 15.2) confirme les oscillations provoquées par le schéma de *Lax-Wendroff*. La figure 15.3 illustre l'évolution des contours de la masse d'eaux dans un temps de 2s.

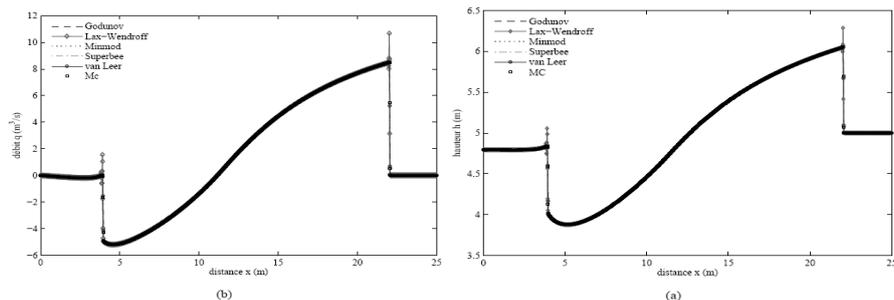
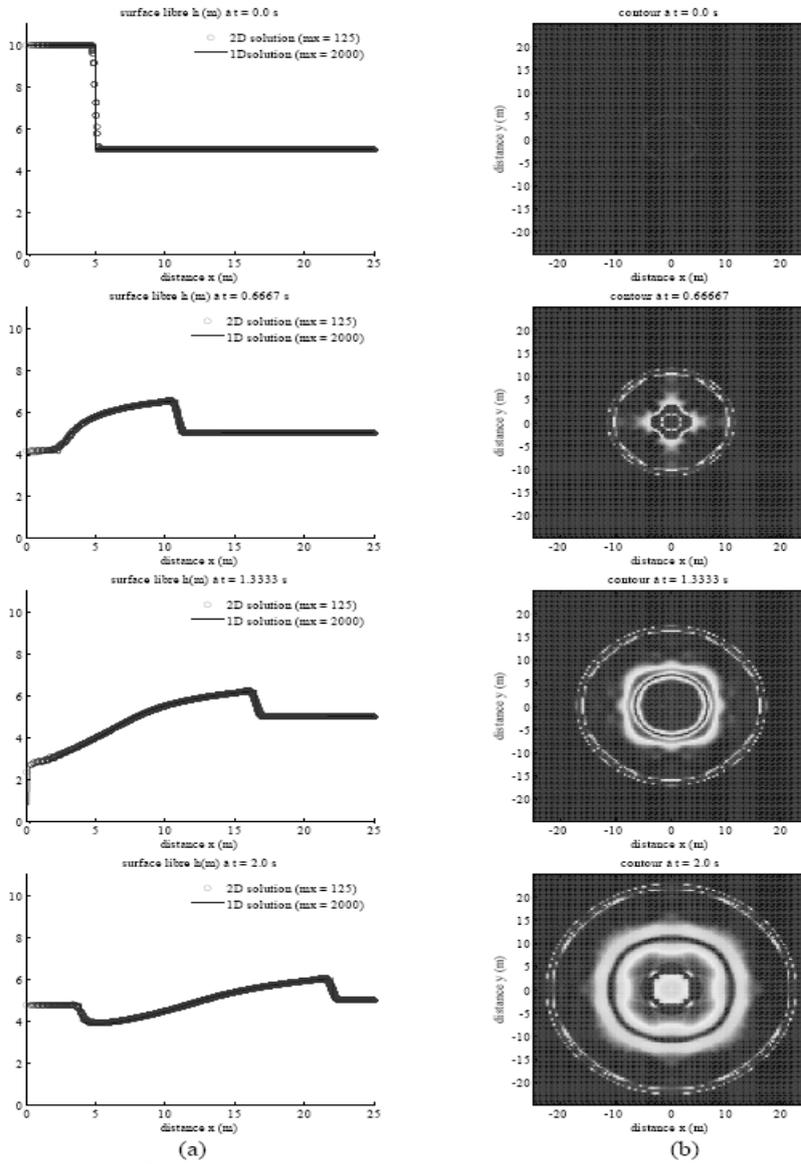


Figure 15.2 : Comparaison des différents schémas -rupture d'un réservoir cylindrique- à  $t = 2$  s (a) hauteur, (b) débit.

*Schémas à captures de chocs pour la simulation numérique des écoulements  
à surface libre*



**Figure 15.3 :** Évolution d'une rupture d'un réservoir cylindrique en deux dimensions (rayon= 5 m) ( $t = 2$  s) (schéma MC) (a) hauteur, (b) contours.

## CONCLUSION

En conclusion, on peut constater que le modèle de *Saint-Venant* représente une loi de conservation d'un système d'EPD hyperbolique et non linéaire. Une telle catégorie mène à des solutions discontinues. La résolution analytique passe par le traitement du problème de *Riemann* qui représente le système d'EDP avec des conditions initiales constantes de part et d'autre de la discontinuité. Cette opération est fastidieuse, ce qui impose l'implantation d'une technique numérique. Pour notre cas, le choix de la méthode des volumes finis est dicté par la nature conservative du modèle de *Saint-Venant*.

Dans cette étude on a exploré les schémas du premier ordre, celui de *Godunov* ; les schémas du deuxième ordre sans limiteur tels que le schéma de *Lax-Wendroff* et enfin les schémas du deuxième avec les limiteurs de pentes, à savoir *Minmod*, *Superbee*, *Van Leer* et le schéma à Monotonie Centrale MC. A partir de l'analyse des tests numériques pour les écoulements transitoires et stationnaire, on constate que les schémas à limiteurs de pente sont les plus avantageux quant à la précision et la stabilité. Comme perspective, il reste à développer le code pour examiner des cas réels en introduisant l'effet du frottement.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ATALLAH, M. -*Modélisation et simulation numérique par éléments finis des écoulements à surface libre*. Thèse (Master), Centre universitaire Mustapha Stambouli de Mascara, 217 pages, Octobre 2005.
- AUDUSSE, E. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. Thèse (PhD), université paris VI pierre et marie curie, Septembre 2004.
- CUNGE, J. ; HOLLY, F. et VERWEY, A. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Publishing Ltd, 1980, 420 pages.
- FABRE, J. *ONDES*. juillet 2001, 155 pages.
- GONCALVÈS, E. *résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles*. Institut national polytechnique de Grenoble, avril 2004.
- HENDERSON, F. M. *Open Channel Flow*. MacMillan Publishing Co. NewYork, N. Y, 1966, 522 pages.
- KORICHI, Kh. Application de la méthode des volumes finis pour la simulation des écoulements à surface libre. Thèse (Master), C.U de Mascara, 200 pages, Décembre 2006.
- LEVEQUE, R. J. *Finite volume method for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2004, 580 p