

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة و الحياة
قسم علوم المادة



مذكرة ماستر

ميدان علوم المادة
فرع فيزياء
تخصص فيزياء طاقوية و الطاقات متجددة

رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالب:

لعمامرة فريال

عياضي عبد العزيز

يوم: 20/09/2020

حل معادلة شرودنجر في الفضاء المشوه لذرة الهيدروجين بطريقة نيكيفوروف-يوفاروف

لجنة المناقشة:

| | | | |
|-------|-------------------------|---------|--------------|
| رئيس | جامعة محمد خيضر - بسكرة | أ. د. | مومني مصطفى |
| مقرر | جامعة محمد خيضر - بسكرة | أ. مح أ | مختار فالتق |
| مناقش | جامعة محمد خيضر - بسكرة | أ. مح ب | بن صالح نجوى |

جدول المحتوى

1 مقدمة عامة

الفصل الأول : عموميات حول معادلة شرودنجر و طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

4 1. I مقدمة

5 2. I معادلة شرودنجر في ميكانيك الكم

5 1.2. I تعريف

6 2.2. I معادلة شرودنجر في الإحداثيات الكروية

7 3.2. I الزخم الزاوي

9 3. I طريقة نيكيفوروف - يوفاروف

10 1.3. I منهجية الطريقة

الفصل الثاني : حل معادلة شرودنجر العادية لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

12 1. II مقدمة

13 2. II تعريف

13 3. II حل معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين

13 1.3. II الجزء القطري

14 1.3.1. II طيف الطاقة

16 2.1.3. II دالة الموجة

17 2.3. II الجزء الزاوي

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

| | |
|----|--|
| 22 | III. 1. مقدمة |
| 22 | III. 2. فضاء دي سيتر و (ضد) دي سيتر |
| 22 | III. 1.2. التشوه في الفيزياء الكمية |
| 23 | III. 2.2. مراجعة لعلاقة ميكانيكا الكم المشوهة |
| 25 | III. 3. معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين في الفضاء المشوه |
| 27 | III. 1.3. فصل المتغيرات |
| 30 | III. 4. حل المعادلة القطرية |
| 30 | III. 1.4. الحلول في فضاء دي سيتر |
| 34 | III. 2.4. الحلول في فضاء (ضد) دي سيتر |
| 37 | III. 5. تأثير التشوه فيزيائيا |
| 37 | III. 1.5. تأثير التشوه على طاقة المدارات الفرعية S |
| 39 | III. 2.5. تأثير التشوه على طاقة المدارات الفرعية P, D, F |
| 44 | الخاتمة العامة |
| 45 | المرفق |
| 47 | قائمة المراجع البيبلوغرافية |

مقدمة عامة

ميكانيك الكم هي نظرية رياضية وفيزيائية تصف البنية والتطور في الزمان والمكان الظواهر الفيزيائية على المستوى الذري وما أدناه. تم اكتشافها عندما أراد الفيزيائيون وصف سلوك الذرات وتبادل الطاقة بين الضوء والمادة (1922-1927). على عكس ميكانيكا نيوتن [Newton], إلكتروديناميك ماكسويل [Maxwell] أو نسبية أينشتاين [Einstein] النظرية الكمية لم تخلق أو نتجت عن دراسة شاملة لشخص واحد. حتى أنه لا يوجد إجماع عام على ماهية مبادئها, كيف يجب تدريسها أو حتى حقيقة مالذي تعنيه. كل فيزيائي متمرس يمكن له أن يدرس ميكانيك الكم, لكن تبقى الأفكار والمعاني مختلفة من أحد لآخر. يقول ريتشارد فاينمان [Richard Feynman] (وهو أحد أعظم ممارسيها): " أعتقد أنه يمكنني القول بأمانة أنه لا يوجد أحد يفهم ميكانيك الكم. " [1].

تمثلت الخطوة الأولى في تطوير نظرية متسقة منطقيًا لميكانيكا الكم غير النسبية في إبتكار معادلة موجية يمكن لها أن تصف السلوك الخفي الشبيه بالموجة لجسيم كمي. هذه المعادلة سميت على إسم مبتكرها بمعادلة شرودنجر [Schrödinger].

دور هذه المعادلة في ميكانيكا الكم مماثل لدور قوانين نيوتن في الميكانيكا الكلاسيكية فكلاهما يصف الحركة. قانون نيوتن الثاني هو معادلة تفاضلية تصف كيف يتحرك الجسيم الكلاسيكي لخصت في قوانينه الثلاث في حين أن معادلة شرودنجر هي معادلة تفاضلية جزئية تصف دالة موجة الجسيم الكمي في نظام ذري. حيث في الحالة العادية تطبق معادلة شرودنجر المستقرة (مستقلة عن الزمن) على الأنظمة الذرية البسيطة كذرة الهيدروجين والتي كانت المنطلق الأساسي للدراسة الكمومية. أحيانا تبقى أنظمة لا يمكن حلها إلا عن طريق الطرق العددية و التقريبية.

تماشياً مع الدراسة الكمية و التحديثات التي تطرأ على الدراسات الفيزيائية الكلاسيكية, هناك فرضية تمدد (أو تقلص) الكون أو ما يسمى بتشوه الفضاء. تطبيق هذه الفرضية في ميكانيكا الكم يستلزم إجراء حسابات جديدة تمس المفاهيم المبدئية لدراسة نظام كمومي ما, سنحاول في هذه المذكرة تطبيق التشوه على ذرة الهيدروجين ذات الكمون المركزي (كمون كولوم, [coulomb]) مع حل المعادلة الجديدة المشوهة بطريقة رياضية حسابية تسمى بطريقة نيكيفوروف- يوفاروف (Nikiforov – Uvarov, 1988).

هذه المذكرة مقسمة إلى ثلاث فصول, مبنية كالاتي:

في الفصل الأول, سنقوم بضبط بعض المفاهيم الأساسية لمعادلة شرودنجر المستقرة في الحالة العادية وكتابة المعادلة في فضاء كروي ثلاثي الأبعاد ذو المتغيرات (r, θ, φ) . بالإضافة إلى وضع منهجية الطريقة الحسابية N-U. وهي طريقة رياضية مستخدمة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية من النوع الفوق الهندسي (hypergeometric) والتي أظهرت مؤخرًا نجاحًا كبيرًا في المعالجة التحليلية للعديد من مشاكل الكم النسبية والغير النسبية.

في الفصل الثاني, سوف نشرح بالتفصيل المراحل المختلفة من طريقة نيكيفوروف-يوفاروف لحل نظام ذرة الهيدروجين بكمون كولوم المركزي, حيث سنحاول إستخلاص منها عبارة طيف الطاقة E_n . وحل المعادلة القطرية, في الأخير إيجاد عبارة دالة الموجة $\Psi(r, \theta, \varphi)$.

في الفصل الثالث وهو موضوع عملنا الرئيسي, والذي سنحاول تطبيق نظرية التشوه على دراسة نظام ذرة الهيدروجين, حيث سنعرف فضائين دي سيتر (dS) و ضد دي سيتر (AdS), إيجاد عبارة المعادلة المشوهة و حلها بطريقة N-U. أين سنحاول إيجاد عبارة طيف الطاقة الجديدة في كلتا الحالتين مع عبارتي دالة الموجة. في الأخير سنقارن النتائج الخاصة بالطاقات مع الحالة العادية و نعطي تفسيراً لها.

الفصل الأول

عموميات حول معادلة شرودنجر
و طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

الفصل لأول:

عموميات حول معادلة شرودنجر و طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

1. I. مقدمة

ظل التركيب الذري الداخلي للمادة لغزا كبيرا داخل إطار الميكانيك الكلاسيكية التي تقتصر على دراسة النظم المجهرية. ولإنها غير كافية تماما للظواهر الذرية, فقد تم تطوير إطار مفاهيمي جديد للفيزياء. هذه النظرية الجديدة للكون المادي تسمى بـ "ميكانيكا الكم". والتي تم تصميمها بين عامي 1925 و 1930 على أيدي من الفيزيائيين مثل نيلز بور [Niels Bohr], لويس دي بروجلي [Luis De Broglie] فيرنر هايزنبرغ [Werner Heisenberg], إروين شرودنجر [Erwin Schrodinger]... وآخرون.

حيث افترض دي بروجلي في عام 1924, أنه إذا كان يمكن للموجة أن تكون جسيما, إذن يمكن أن يكون الجسيم أيضا موجة. حيث كانت هذه الفرضية "إزدواجية موجة جسيم" هي الأساس لظهور ميكانيكا الكم [2].

يمكن فهم خصائص الموجة للجسيمات في ميكانيكا الكم باستخدام معادلة شرودنجر [3]. حيث أن معادلة شرودنجر مفيدة جدًا لحل مشكلة الأنظمة المجهرية مثل الذرات [4]. لكن قبل التطرق للمعادلة وجب علينا التنكير في مبدأ الإرتياب لهايزنبرغ والذي سنصادفه في الفصل الثالث.

في عام 1927 صاغ العالم الألماني فيرنر هايزنبرغ مبدأ الإرتياب أو عدم التأكد. والذي ينص على أنه لا يمكن تحديد خاصيتين مقاستين من خواص جملة كمومية إلا ضمن حدود معينة من الدقة, ومعنى هذا الكلام أنه لا يمكن قياس إحداثي الجسم و زخمه في نفس اللحظة. ترجم هذا المفهوم في صيغة تكتب بالشكل:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.1)$$

إذ كانت اللادقة في تحديد موضع الجسيم هي Δx و في زخمه هي Δp . حيث نذكر أيضا علاقة الإستبدال في الحالة العادية لميكانيكا الكم:

$$[X_i, X_j] = 0 = [P_i, P_j] ; [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.2)$$

I. 2. معادلة شرودنجر في ميكانيك الكم

I. 1.2. تعريف:

معادلة شرودنجر هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تلتزم بفرضية دي بروجلي وقانون حفظ الطاقة [5]. إستنادا على خصائص معادلة شرودنجر, فهي مقسمة الى معادلة شرودنجر متعلقة بالزمن و معادلة مستقلة عن الزمن أي معادلة شرودنجر المستقرة. (موضوع دراستنا حول الحالة المستقرة). في شكلها العام وتكتب:

$$H\Psi = E\Psi \quad (1.3)$$

حيث يمثل كل من E و Ψ على الترتيب الطاقة ودالة الموجة للجسيم, حيث تعطى في الإحداثيات الكارتيزية $\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z)$. أما H فيمثل الطاقة الكلية, والمعرف في الفيزياء الكمية بالمؤثر الهاميلتوني ويكتب:

$$H = T + V(\vec{r}) \quad (1.4)$$

معادلة شرودنجر التي تتأثر فقط بالكومون (V) والموضع (r) هي معادلة شرودنجر الثابتة [6]. أغلب الكمونات التي يتم إستخدامها هي كمونات مركزية. تعرف بدالة متغير المسافة r بين الجسيم ونقطة المرجع $V(\vec{r}) = V(r)$.

تعطى الطاقة الحركية T لجسيم كتلته m له زخم P بالعبارة:

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (1.5)$$

لتصبح الهاميلوتينية (1.4):

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (1.6)$$

في الفيزياء الكمية. الزخم أيضا عبارة عن مؤثر كمي يكتب بالشكل:

$$\hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (1.7)$$

\hbar هو ثابت بلانك المنخفض, المؤثر نبلا $\vec{\nabla}$ المعرف في الإحداثيات الكارتيزية بـ: $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

بعد التعريف يمكن كتابة مؤثر الطاقة (الهاميلتونية) H لجسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير الطاقة الكامنة المركزية إختيارية $V(r)$ على النحو:

$$\hat{H} \rightarrow \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right) \quad (1.8)$$

بالتعويض في المعادلة (1.3):

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (1.9)$$

حيث المؤثر لابلاسيان Δ هو مربع المؤثر نابلا:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.10)$$

I 2.2. معادلة شرودنجر في الإحداثيات الكروية:

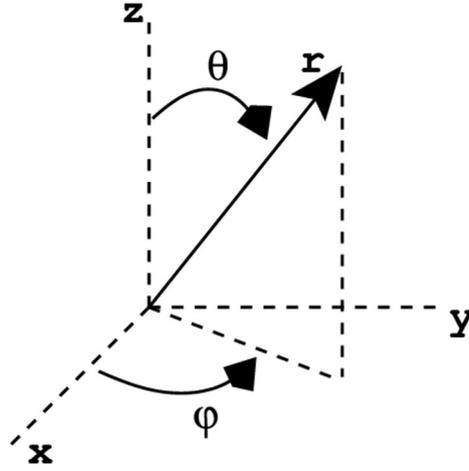
لتسهيل دراسة أي نظام كمومي تحول دراسته من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات كروية حيث تستعمل طريقة فصل المتغيرات والتي ستساعدنا لاحقا لحل معادلة شرودنجر.

في الإحداثيات كروية يتم تعريف نقطة في الفضاء من حيث المسافة r ومن حيث زاويتين, زاوية السمات الرأسية θ و زاوية السمات φ . لهذا, يمكننا تحديد نقطة واحدة من الفضاء ثلاثي الأبعاد باستخدام التحويل الإحداثي الجديد $\Psi(\vec{r}) \rightarrow \Psi(r, \theta, \varphi)$. و من أجل تحديد مجموعة من الإحداثيات الكروية لكل نقطة يجب علينا تقييد نطاقاتهم. من الشائع تعطى كالتالي: $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

نذكر التحويل الإحداثي من النظام الكارتيزي (x, y, z) الى الكروي (r, θ, φ) , والتحويلات القطبية:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; 0 \leq r \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) ; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} ; 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (1.11)$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$



الشكل(1): يمثل نظام في الإحداثيات الكروية.

I. 3.2. الزخم الزاوي:

في الميكانيك الكلاسيكي الزخم الزاوي أو كمية الحركة الزاوية لجسيم له كتلة m , الزخم \vec{p} وشعاع الموضع \vec{r} . يتحرك دائريا حول محورا ما يكتب بالعلاقة:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (1.12)$$

يكون الزخم الزاوي في ميكانيكا الكم التي تعالج الأنظمة الذرية وما دونها قيمة كمومية. فيمكن أن تكون قيمته عددا صحيحا مضروبا في ثابت بلانك المخفض، ويزداد بمقدار أعداد صحيحة. يعبر عنه في الحسابات الرياضية في ميكانيكا الكم بمؤثر الزخم الزاوي:

$$\vec{L} = -i\hbar (\vec{r} \wedge \vec{\nabla}) \quad (1.13)$$

حيث تعطى مركباته في الإحداثيات الكروية بالشكل:

$$\begin{cases} L_x = -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (1.14)$$

بالإضافة إلى :

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1.15)$$

المؤثرات L_x, L_y, L_z و L^2 تتعلق فقط بالمتغيرات الزاوية θ و φ أي مستقلة عن الإحداثية القطرية r ما يعني أنها تبادلية مع أي دالة ذات المتغير r .

$$[L_x, f(r)] = [L_y, f(r)] = [L_z, f(r)] = [L^2, f(r)] = 0 \quad (1.16)$$

حيث القيم المحتملة التي يمكننا قياسها لمربع الزخم الزاوي المداري L^2 هي $\hbar^2 l(l+1)$:

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.17)$$

يعطى في الإحداثيات الكروية المؤثر لابلاسيان Δ الكروي بالشكل:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.18)$$

بالملاحظة. يمكن التعويض الحدود المتعلقة بالمتغيرات الزاوية بـ L^2 , لتصبح العبارة (1.18):

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (1.19)$$

بتعويض Δ في (1.9) نكتب معادلة شرودنجر في الفضاء الكروي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right) + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (1.20)$$

تعتمد الطاقة الكامنة للجسيم الذي يتحرك في مجال قوة مركزي متماثل كرويًا فقط على المسافة r بين الجسيم ومركز القوة. وبالتالي، يجب أن تكون الطاقة الكامنة $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$. التقنية الفعالة المستخدمة لحل المعادلة التفاضلية (1.20) هي طريقة الفصل المتغيرات [7]. عند استخدام طريقة فصل المتغير نفترض حل دالة الموجة $\Psi(r, \theta, \varphi)$ مزيج خطي من الدوال. دالة تعتمد على نصف القطر (r) ودالة تعتمد على زاوية (θ, φ) على النحو التالي:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) \quad (1.21)$$

حيث $R(r)$ هي دالة الموجة القطرية و $Y(\theta, \varphi)$ الدالة الزاوية. مع تعويض المعادلة (1.21) في المعادلة (1.20) نتحصل على :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} r^2 (E - V(r)) - C \right] R(r) = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} - C Y(\theta, \varphi) = 0 \quad (1.23)$$

حيث C ثابت. المعادلة (1.23) مستقلة عن الطاقة الإجمالية E والطاقة الكامنة $V(r)$. لذا يتم تحديد الإعتدال الزاوي لدالة الموجة من خلال خاصية التناظر الكروي، والحلول المقبولة للمعادلة صالحة لكل نظام متماثل كروي بغض النظر عن الشكل الخاص لدالة الكمون. يمكن العثور على حلول المعادلة (1.23) في أي نص من كتب ميكانيكا الكم والمعروفة باسم دوال التوافقات الكروية $Y_l^m(\theta, \varphi)$ [8]. حيث $C = l(l + 1)$ و ($l = 0, 1, 2, 3 \dots$) أعداد صحيحة موجبة. تسمى المعادلة الأولى (1.22) بالمعادلة القطرية. والمعادلة الثانية (1.23) بالمعادلة الزاوية.

I. 3. طريقة نيكيفوروف- يوفاروف:

مؤخرا كان هناك اهتمام متجدد في حل النظم الكمومية البسيطة في إطار الطريقة الرياضية نيكيفوروف-يوفاروف [Nikiforov-Uvarov] (N-U) [9]. هذه التقنية الجبرية هي بناء على حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية، التي تم استخدامها بنجاح لحل معادلات الموجة شرودنجر ديراك [Dirac] و كلاين- غوردون [Klein Gordon]. في وجود بعض الكمونات المعروفة المركزية وغير المركزية. بشكل عام طريقة N-U تحول المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية إلى النوع فوق الهندسي مع إحداثية التحويل مناسبة $s = s(r)$.

في ما يلي نوضح منهجية إستعمال و تطبيق الطريقة على المعادلات فوق الهندسية .

I. 1.3. منهجية الطريقة:

$$f''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} f'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} f(s) = 0 \quad (1.24)$$

$\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ كثيرات الحدود من الدرجة الثانية على الأكثر ودرجة كثيرة الحدود $\tilde{\tau}(s)$ هي أقل من 2 [10]. لإيجاد حل معين لـ (1.24). يمكن استخدام التحويل التالي: $f(s) = \phi(s)y(s)$ يؤدي إلى معادلة نوع فوق الهندسي:

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \Lambda y(s) = 0 \quad (1.25)$$

أين تكون العبارات :

$$\pi(s) = \sigma(s) \frac{d}{ds} (\ln \phi(s)) ; \tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (1.26)$$

حيث تعرف Λ بـ :

$$\Lambda_n + n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) = 0 , n = 0,1,2, \dots \quad (1.27)$$

النقطة الأكثر أهمية في هذه المرحلة هي مشتقة $\tau(s)$ في (1.26). التي يجب أن تكون سلبية لإعادة إنتاج قيم Λ_n إيجابية مقبولة فيزيائيا [11]. هذا الاختيار الإلزامي يقيد تطبيق النموذج على معادلة شرودنجر لبعض الدوال الخاصة ، وهو ما يعني أن N-U لا تعمل بكفاءة للجميع الكمونات القابلة للحل. ويتم حساب القيمة الذاتية للطاقة من المعادلة (1.27). حيث نحدد أولاً $\pi(s)$ و Λ من العلاقة:

$$k = \Lambda - \pi'(s) \quad (1.28)$$

حل المعادلة التربيعية لـ $\pi(s)$ مع (1.28)، نتحصل على:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (1.29)$$

$\pi(s)$ هو كثير حدود من الدرجة 1 على الأكثر. ولحسابه يجب تحديد الثابت k الذي من أجله يكون مميز العبارة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تحت الجذر معدوم ($\Delta = 0$).

لتحديد الحل كثير الحدود $y_n(s)$, نستعمل (1.26) وعلاقة رودريغز:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] \quad (1.30)$$

في العلاقة أعلاه, B_n يمثل ثابت التطبيع و $\rho(s)$ تمثل دالة الوزن والتي تحقق الشرط التالي:

$$\frac{d}{ds} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \quad (1.31)$$

الفصل الثاني

حل معادلة شرودنجر العادية لذرة الهيدروجين
باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

الفصل الثاني:

حل معادلة شرودنجر العادية لذرة الهيدروجين

باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

II. 1. مقدمة

إن دراسة الذرات والأيونات وحيدة الإلكترون تساعدنا على فهم المسائل المتعلقة بالتركيبية الذرية لذلك من المهم دراسة المسألة الأبسط والتي يمكن حلها حلا دقيقا دون اللجوء إلى طرق التقريب والتي هي مسألة ذرة الهيدروجين [12].

في الأدب العلمي إكتشاف الهيدروجين في شكل ذري عادة ما يكون منسوبا إلى العالم الفيزيائي كافندش [Cavendish]. ويرجع هذا إلى عام 1766, فمنذ إكتشافه. كانت تتميز بشكل رئيسي بخصائصها الفيزيائية الكيميائية من أجل الدراسة في تفاصيل سلوكها لردود فعل الاحتراق, بعد ذلك نشر أندرس أنغستروم [Anders Angstrom] نتائج تحقيقاته الطيفية على خط طيف الهيدروجين التي أجريت في عام 1852.

أصبحت ذرة الهيدروجين واحدة من أهم الموضوعات البحثية لفيزيائي العصر [13], مع بداية نفس القرن إكتشف علماء الفيزياء أن الضوء والمادة يمكنهما أن يتصرفا مثل الموجات أو الجسيمات حسب طبيعة التجربة المنجزة (تأثير كهروضوئي، مضاعف تجربة الشق، تأثير كومبتون [Compton] وغيرها من التجارب).

كان لدى دي بروجلي في أطروحة البكالوريوس الحدس لتسليط الضوء على التوازي بين معادلات الموجات الكهرومغناطيسية ومعادلات حركة الجسيمات المادية [14]. كان قادرا على صياغة شكلية رياضية حيث يمكن دراسة المادة باستخدام معادلات الموجة. هذا ما ساعد شرودنجر يصوغ معادلته الشهيرة التي ساهمت كثيرا في دراسة الأنظمة الكمومية بشكل عام. وتم تطبيق أول دراسة كمومية على ذرة الهيدروجين البسيطة.

II. 2. تعريف

مثلاً قدم النظام الشمسي أول اختبار ذي معنى للقوانين الميكانيكا الكلاسيك ، قدمت ذرة الهيدروجين أول اختبار ذي معنى لقوانين ميكانيكا الكم. ذرة الهيدروجين أبسط أنواع الأنظمة الذرية. تتكون من إلكترون ذو الشحنة $-q$ يدور حول النواة (بروتون) شحنتها $+q$ تفصل بينهما المسافة r . وتعطى الطاقة الكامنة للإلكترون في مجال الطاقة الكامنة كولوم [Coulomb]:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (2.1)$$

حيث $e = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$ ، ϵ_0 السماحية في الفراغ.

تتكون ذرة الهيدروجين من إلكترون يتحرك في كمون كروي بشكل جيد، بسبب جاذبية كولوم للبروتون. حيث يمكن تحويل هذا النظام المكون من جزأين (إلكترون وبروتون) إلى نظام جسيم واحد. باعتبار حركة الإلكترون بالنسبة للبروتون في مركز كتلة الجسيمين وفقاً لمبادئ الميكانيكا الكلاسيكية. في هذا الإطار، يمكننا إستبدال كتلة الإلكترون بجسيم ذو كتلة المنخفضة μ يتحرك نسبياً نحو البروتون:

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e \quad (2.2)$$

II. 3. حل معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين

II. 1.3. الجزء القطري:

بداية نكتب معادلة شرودنجر بتعويض العلاقتين السابقتين في العلاقة (1.22) مع الضرب في $\left(\frac{1}{r^2}\right)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu e^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (2.3)$$

لحل المعادلة (2.3) فإننا نقترح تغيير الدالة $R(r) = \frac{1}{r} f(r)$ ما يعطينا كالاتي :

$$\frac{dR(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2} f(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \frac{1}{r} f''(r) - \frac{2}{r^2} f'(r) + \frac{2}{r^3} f(r) \quad (2.4)$$

بتعويض العبارات (2.4) في (2.3) :

$$f''(r) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2\mu E r^2}{\hbar^2} + \frac{2\mu e^2 r}{\hbar^2} - l(l+1) \right] f(r) = 0 \quad (2.5)$$

لتسهيل الحساب نضع: $\alpha = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$, $\beta = -\frac{2\mu e^2}{\hbar^2}$, $\gamma = l(l+1)$. تصبح المعادلة (2.5) بالشكل:

$$f''(r) + \frac{1}{r^2} (-\alpha r^2 - \beta r - \gamma) f(r) = 0 \quad (2.6)$$

هذه المعادلة من الشكل الفوق الهندسي. حيث يمكن حلها باستعمال طريقة N-U. مع التحويل الإحداثي المناسب

$s = s(r)$ و بمقارنتها مع المعادلة (1.24) نتحصل على عبارات كثيرات الحدود التالية :

$$\sigma(s) = s; \quad \tilde{\sigma}(s) = -\alpha s^2 - \beta s - \gamma; \quad \tilde{\tau}(s) = 0 \quad (2.7)$$

II. 1.1.3. طيف الطاقة:

تطبيق الطريقة سمح لنا بتعريف كثير الحدود $\pi(s)$. إنطلاقاً من العبارة (1.29):

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha s^2 + (k + \beta)s + \gamma + \frac{1}{4}} \quad (2.8)$$

يمكن العثور على قيمة k بوضع مميز المعادلة تحت الجذر التربيعي مساوياً للصفر:

$$\Delta = (k + \beta)^2 - 4\alpha \left(\frac{1}{4} + \gamma \right) = 0 \quad (2.9)$$

بتعويض $\gamma = l(l+1)$ في العبارة نجد:

$$k_{\pm} = -\beta \pm 2\sqrt{\alpha} \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad (2.10)$$

تصبح المعادلة (2.8) من أجل كل قيمة k :

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \pm \begin{cases} 2\sqrt{\alpha s} + \left(l + \frac{1}{2}\right) & \text{من أجل } k_+ = -\beta + 2\sqrt{\alpha} \left(l + \frac{1}{2}\right) \\ 2\sqrt{\alpha s} - \left(l + \frac{1}{2}\right) & \text{من أجل } k_- = -\beta - 2\sqrt{\alpha} \left(l + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (2.11)$$

نحسب كثير الحدود $\tau(s)$ من العلاقة (1.26) مع العلم سابقا $\tilde{\tau}(s) = 0$:

$$\tau(s) = 2\pi'(s) \quad (2.12)$$

مشتق العلاقة (2.12) يجب أن يكون سالبا ($\dot{\tau}(s) < 0$) كما ذكرناه سابقا (الفصل الأول [11]).

$$\tau(s) = 2[(l+1) - \sqrt{\alpha s}] \quad (2.13)$$

من أجل تحديد القيم الذاتية نستعمل العلاقة (1.28):

$$\Lambda = -\beta - 2\sqrt{\alpha}(l+1) \quad (2.14)$$

من جهة أخرى و من العلاقة (1.27) نستخرج قيم Λ_{n_r} :

$$\Lambda_{n_r} = 2n_r\sqrt{\alpha} \quad (2.15)$$

بالمساواة بين العبارتين السابقتين $\Lambda_{n_r} = \Lambda$. نستخرج القيم الذاتية لعبارة مستويات الطاقة $E_{n_r, l}$ والمتعلقة بالجزء القطري من معادلة شرودنجر (2.3):

$$E_{n_r, l} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_r + l + 1)^2}, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

حيث نعرف عددا صحيحان. $n = n_r + l + 1$ ويسمى بالعدد الكمي الرئيسي والعدد الكمي l . مع تحقيق الشرط $0 \leq l \leq n - 1$ ومنه تصبح العبارة (2.16):

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

II. 2.1.3. دالة الموجة:

نبحث الآن عن الدالة الذاتية للمعادلة القطرية (2.3). الحل كثير الحدود للدالة الفوق الهندسية $y_n(s)$ يعتمد على تحديد دالة الوزن $\rho(s)$. لكن أولاً نحدد الدالة $\phi(s)$ من العبارة (1.26):

$$\phi(s) = s^{l+1} e^{-\sqrt{\alpha}s} \quad (2.18)$$

إنطلاقاً من العبارة (1.31):

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\tau(s) - \sigma'(s)}{\sigma(s)} \quad (2.19)$$

وبعد الحساب نجد:

$$\rho(s) = e^{-2\sqrt{\alpha}s} s^{2l+1} \quad (2.20)$$

بالتعويض في علاقة رودريغز (1.30). الدوال الذاتية $y_n(s)$ تعطى بالشكل:

$$y_n(s) = B_n s^{-(2l+1)} e^{2\sqrt{\alpha}s} \frac{d^n}{ds^n} [s^{n+2l+1} e^{-2\sqrt{\alpha}s}] \quad (2.21)$$

يتم التعبير عن $y_n(s)$ في المعادلة (2.21) بكثير الحدود لاجير المتعامد المرتبط [15]. ويعطى:

$$L_{n_r}^{2l+1}(2\sqrt{\alpha}s) = \frac{1}{n!} e^{2\sqrt{\alpha}s} s^{-(2l+1)} \frac{d^n}{ds^n} (s^{n+2l+1} e^{-2\sqrt{\alpha}s}) \quad (2.22)$$

حيث $B_n = \frac{1}{n!}$ هو ثابت التطبيع. من العلاقتين السابقتين يمكن الإستنتاج:

$$y_n(s) = L_{n_r}^{2l+1}(2\sqrt{\alpha}s) \quad (2.23)$$

بضرب كثير الحدود لاجير مع $\phi(s)$ وباستخدام العلاقة $f(s) = \phi(s)y(s)$ تعطى دالة الموجة القطرية بالشكل:

$$f(s) = N_{n,l} s^{l+1} e^{-\sqrt{\alpha}s} L_{n_r}^{2l+1}(2\sqrt{\alpha}s) \quad (2.24)$$

حيث $N_{n,l}$ ثابت التقنين (التطبيع) و يحسب من العلاقة $\int_0^\infty |f(s)|^2 ds = 1$ حيث:

$$\int_0^{\infty} N_{n,l}^2 s^{2l+2} e^{-2\sqrt{\alpha}s} (L_{n_r}^{2l+1})^2 (2\sqrt{\alpha})^2 ds = 1 \quad (2.25)$$

نضع: $z = 2\sqrt{\alpha}s$; $dz = 2\sqrt{\alpha} ds$

$$N_{n,l}^2 (2\sqrt{\alpha})^{-2l-1} \int_0^{\infty} z^{2l+2} e^{-z} (L_{n_r}^{2l+1})^2 dz = 1 \quad (2.26)$$

نذكر علاقة التطبيع (التقنين) المرتبطة بكثير الحدود لاجير [Laguerre]:

$$\int_0^{\infty} z^{2l+2} e^{-z} (L_{n_r}^{2l+1})^2 dz = \frac{2n[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} \quad (2.27)$$

من العلاقة (2.17) التي ذكرناها سابقا $n_r = n - l - 1$ وبتعويض (2.27) في (2.26) نجد :

$$N_{n,l} = \left[(2\sqrt{\alpha})^{2l+1} \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

بالتعويض في العلاقة (2.24). مع التحويل $R_{n,l}(r) \leftarrow f_{n,l}(s)$. نكتب عبارة دالة الموجة القطرية :

$$R_{n,l}(r) = \left[(2\sqrt{\alpha})^{2l+1} \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{\frac{1}{2}} r^{l+1} e^{-\sqrt{\alpha}r} L_{n-l-1}^{2l+1} (2\sqrt{\alpha}r) \quad (2.29)$$

تعتمد دالة الموجة القطرية لذرة الهيدروجين على العدد الكمي الأساسي n والعدد الكمي المداري l .

II. 2.3. الجزء الزاوي:

إن حلول المعادلة (1.23) هي الدوال التوافقية الكروية. الثابت l الذي يستعمل للفصل في المتغيرات للعبارة (1.21) هو في الواقع نفس الثابت المؤشر l في التوافقيات الكروية. وهو العدد الكمي للزخم الزاوي . حيث يمكن الفصل في التوافقيات الكروية:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (2.30)$$

تصبح المعادلة الزاوية (1.23) بعد الضرب في $\sin^2 \theta$:

$$\frac{\sin \theta}{\theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \theta(\theta) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.31)$$

في هذه العبارة الجزئين الأوليين يعتمدان فقط على θ ، أما الطرف الآخر فيعتمد على φ فقط. هناك حل وحيد بحيث يكون المجموع صفرًا. إذا كانت الأجزاء التي يعتمد كل منها على متغير واحد تساوي نفس الثابت. حيث أختير رياضيا الثابت m^2 .

$$\frac{\sin \theta}{\theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \theta(\theta) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) = -m^2 \quad (2.33)$$

وهذه هي الطريقة التي يتم بها إدخال العدد الكمي للعزم المغناطيسي m . حيث حل المعادلة (2.33) هو:

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (2.34)$$

يضاف المنخفض m إلى Φ لأنه أصبح من الواضح الآن أن هناك العديد من الحلول عند كل قيمة من القيم المسموح بها لـ m .

حل المعادلة (2.32) كالاتي :

$$\left[\sin^2 \theta \frac{d^2}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{d}{d\theta} + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \theta(\theta) \right] = 0 \quad (2.35)$$

نقوم بتغيير المتغير ونضع $\cos \theta = x$. حيث تصبح عبارة المشتقات بدلالة المتغير الجديد :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(\theta)}{d\theta} &= \frac{d\theta(\theta)}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\theta(x)}{dx} \\ \frac{d^2\theta(\theta)}{d\theta^2} &= -\cos \theta \frac{d\theta(x)}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

بالتعويض في العلاقة (2.35) مع $\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$ نتحصل على :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - 2x \frac{d\theta(x)}{dx} + l(l+1)\theta(x) - \frac{m^2}{1-x^2} \theta(x) = 0 \quad (2.37)$$

تخفض (2.37) إلى معادلة لاجندر [Legendre] عند $m=0$ وتعطى بالشكل العام :

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + l(l+1)f(x) - \frac{m^2}{1-x^2}f(x) = 0 \quad (2.38)$$

تصبح معادلة لاجندر عند $m=0$:

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + l(l+1)f(x) = 0 \quad (2.39)$$

حلول المعادلة هي كثيرات الحدود لاجندر المشتركة حيث تعطى :

$$P_{l,m}(x) = (-1)^m \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.40)$$

حيث $P_l(x)$ هي كثير الحدود لاجندر. و التي تعرف بصيغة رودريغز:

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l \quad (2.41)$$

عند $m=0$, $P_{l,0}(x) = P_l(x)$, لكي تكون صيغة رودريغز منطقية، يجب أن يكون l عددًا صحيحًا غير سالب و $|m| > l$. العلاقة (2.38) تضمن $P_{l,m}(x) = 0$. فبالتالي قيم m و l المقبولة فيزيائيا هي:

$$l = 0,1,2, \dots ; m = -l, -l+1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, l-1, l \quad (2.42)$$

باستخدام صيغة رودريغز. يمكن إثبات أن دوال لاجندر المشتركة $P_{l,m}(x)$ متعامدة مع بعضها البعض :

$$\int_{-1}^1 P_{l,m}(x) P_{l',m}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'} \quad (2.43)$$

الحلول الفيزيائية للمعادلة (2.32) تعطى كالتالي :

$$\theta_{l,m}(\theta) = \begin{cases} (-1)^m \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_{l,m}(\cos \theta), & m > 0 \\ (-1)^m \theta_{l,|m|}(\theta) & m < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

الفصل الثاني: حل معادلة شرودنجر العادية لذرة الهيدروجين باستخدام طريقة نيكيفوروف – أوفاروف

يمكننا الآن كتابة حل معادلة (2.30) فتعطي حلول تُعرف باسم التوافقيات الكروية :

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} P_{l,m}(\cos \theta) e^{im\varphi}, & m > 0 \\ (-1)^m Y_{l,|m|}^*(\theta, \varphi) & m < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

الشكل العام لدالة الموجة لذرة الهيدروجين تعطى بالعلاقة :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \left[(2\sqrt{\alpha})^{2l+1} \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{\frac{1}{2}} \times r^{l+1} e^{-\sqrt{\alpha}r} L_{n-l-1}^{2l+1}(2\sqrt{\alpha}r) \times Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (2.46)$$

الفصل الثالث

حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين
باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

الفصل الثالث:

حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

III. 1. مقدمة

تاريخياً ، من المعروف جيداً المفهوم الفيزيائي الفلكي الزمكان في النسبية العامة ، حيث توصف الجاذبية بأنها خاصية هندسة الزمكان. بالنسبة للكون ، وُجد أن الكتلة التي فيه تسبب إنحناء الزمكان 4D (رباعي البعد، ثلاث أبعاد المكان + الزمن) وينتج عن ذلك قوة جاذبة تميل إلى تقريب الكون من بعضه (تميل لإبطاء معدل التوسع العالمي).

يمكن أن يكون هناك سبب آخر لانحناء الزمكان ، وهو ما يسمى الثابت الكوني. هذا جزء من مصطلح آخر في معادلة حقل أينشتاين للجاذبية التي تم إعتبارها بشكل عام حتى عام 1998. لتكون صفر. وهكذا ، حتى قبل 20 عاماً أو نحو ذلك، تم حذفها بشكل عام من أي حسابات نسبية عامة. لكن الملاحظات الفلكية منذ ذلك الوقت كشفت أن هذا المصطلح ليس صفرًا، وكانت النتيجة الأرض إهتزازا للفيزياء وعلم الكونيات.

III. 2. فضاء دي سيتر و (ضد) دي سيتر

يتم تعريف الزمكان دي سيتر [de Sitter] (dS) بأنه كون فارغ ليس به مادة، ولكن له ثابت كوني إيجابي. بسببه، لديه إنحناء إيجابي. يتسبب في توسيع المساحة بمعدل متزايد ، أي أنه يتسارع. لديه سلوك الزمكان المتميز وغير العادي.

مثل dS ، الزمكان ضد- دي سيتر أو دي سيتر المضاد [anti-de Sitter] (AdS). فضاء لا يحتوي على مادة. و من ناحية أخرى الزمكان AdS هو عكس الزمكان dS . له ثابت كوني سالب، والذي ينتج عنه إنحناء سلبي للزمكان. سيؤدي هذا إلى تباطؤ عالم AdS الأخذ في الاتساع [16] .

III. 1.2. التشوه في تافيزياء الكمية:

تمديدا لنظرية المجال الكمومي إلى الزمكان المنحني الذي يمكن إعتباره أول تقريب للجاذبية الكمية. فقد اجتذب إهتماماً كبيراً نظراً لوجود دوافع قوية لإمتصاص اللانهاية الكامنة في نظريات المجال القياسية. في مثل

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

هذه الحالة من الزمكان المنحني، نتعامل مع هيكل مضطرب من قبل مجال الجاذبية. هذه التعديلات يمكن العثور عليها أيضا في نموذج سنايدر [Snyder] حيث القياسات في ميكانيك الكم الغير تبادلية يمكن أن يحكمها مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) [17]. حيث يعترف هذا النموذج بمقياس طول أساسي من المفترض أن يكون من رتبة طول بلانك، وهذا يعادل الحد الأدنى من عدم اليقين في قياس الموضع [18-20]. نظراً لوجود العديد من الحجج التي تبين أن الجاذبية الكمية تنطوي أيضاً على حد أدنى من الطول القابل للقياس وفقاً لترتيب طول بلانك [Planck] ، فإن قدرًا كبيرًا من الجهود تم تخصيصها لتمديد دراسة ميكانيكا الكم إلى الزمكان المنحني عبر مبدأ عدم اليقين الممتد (EUP) [21].

فيما يتعلق بذرة الهيدروجين وبسبب الفيزياء التي تأتي من الدراسة وفهم مثل هذا النظام ، كان هناك إهتمام متزايد بدراسة الحلول الدقيقة من هذا النوع من المشاكل في الحالة العادية [22-26] وكذلك في سياق ميكانيك الكم المشوه على أساس GUP، ونستشهد هنا دراسة معادلة شرودنجر لكمون كولوم مع الحد الأدنى للطول في ثلاثة أبعاد.

في هذا العمل، سنحاول أن نوضح بدقة آثار الجاذبية التي يحكمها مبدأ عدم اليقين الممتد EUP للفضاء المشوه على مستويات الطاقة والدوال الموجية، لكمون كولوم الغير النسبي لذرة الهيدروجين. باستعمال طريقة N-U.

III 2.2. مراجعة لعلاقة ميكانيكا الكم المشوهة:

في الفضاء ثلاثي الأبعاد ، يتم تعريف جبر هايزنبرغ المشوه المؤدي إلى EUP بواسطة علاقات الإبدال التالية [28,27] :

$$[X_i, X_j] = 0 , [P_i, P_j] = i\hbar\tau\lambda\epsilon_{ijk}L_k$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} - \tau\lambda X_i X_j ; \tau = -1, +1 \quad (3.1)$$

حيث λ هي معامل التشوه وهي صغيرة جدًا لأنه في سياق الجاذبية الكمية ، يتم تحديد معامل EUP كثابت أساسي مرتبط مع عامل مقياس الكون الممتد ويتناسب مع ثابت الكون $\frac{3\tau}{a^2} = \Gamma$ حيث a هو نصف قطر dS [29]. L_k هو مكون الزخم الزاوي المعبر عنه بواسطة :

$$L_k = \epsilon_{ijk} X_i P_j \quad (3.2)$$

ما يحقق في علاقات الجبر العادي :

$$[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k \quad [L_i, X_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}X_k \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad (3.3)$$

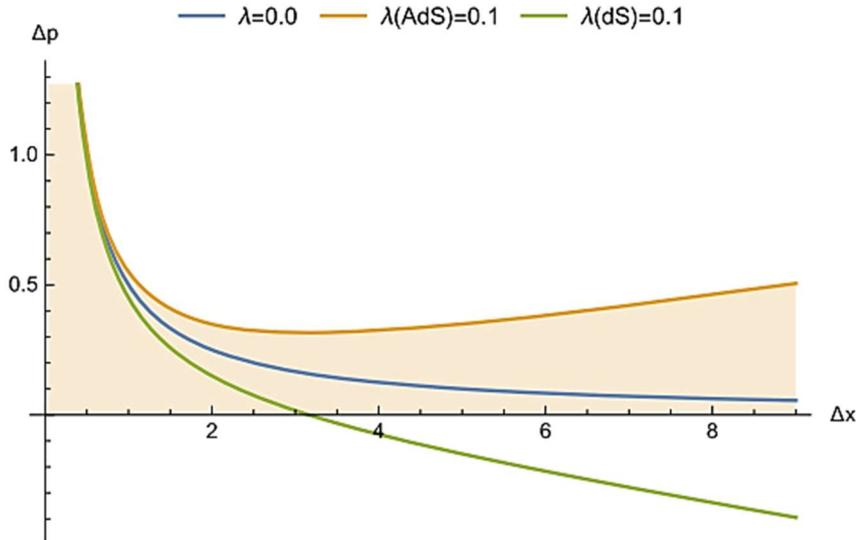
كما هو الحال في ميكانيكا الكم العادية ، تؤدي علاقة الاستبدال (3.1) إلى علاقة عدم اليقين لهايزنبرغ :

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2} (1 - \tau\lambda(\Delta X_i)^2) \quad (3.4)$$

وفقاً لقيمة τ ، نميز بين نوعين من الجبر الفرعي. عند $\tau = -1$ ، فإن الجبر المشوه يتميز بوجود حد أدنى من عدم اليقين في الزخم ويسمى نموذج AdS [30]. من أجل التبسيط ، نفترض عدم اليقين المتناحي $X_i = X$ وهذا يسمح لنا بكتابة الحد الأدنى من عدم اليقين للزخم في نموذج AdS.

$$(\Delta P_i)_{\min} = \hbar\sqrt{\tau\lambda} \quad (3.5)$$

بالنسبة لنموذج dS حيث $\tau = +1$ ، العلاقة (3.4) لا تعني قيمة دنيا غير صفرية لعدم اليقين في الزخم.



الشكل (2): رسم HUP و EUP في كل من الحالتين dS و AdS.

في الشكل (2)، تم رسم علاقات عدم اليقين وفقاً للعلاقة المعدلة في (3.4). حيث المنطقة الملونة هي المنطقة الممنوعة للموضع وقياسات الزخم في مساحة فضاء AdS.

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

المؤثران الغير المتوافقين x_i و p_i بالجبر المعدل (3.1) ، الذي يعطي علاقة عدم اليقين المعدلة (3.3) في فضاء الزخم. من أجل دراسة بالضبط حلول معادلة شرودنجر المشوهة ، نعيد صياغة المؤثرين كدوال من المؤثران x_i و p_i التي تحقق العلاقات القانونية العادية. بعد التحويلات التالية :

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1 + \tau\lambda r^2}} \quad (3.6)$$

$$P_i = -i\hbar \sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \partial x_i \quad (3.7)$$

إذا كانت $\tau = -1$ ، يختلف المتغير r في المجال $\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{-\sqrt{\lambda}} \right]$.

III. 3. معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين في الفضاء المشوه

نقوم بدراسة تأثير الفضاء المشوه لمعادلة شرودنجر و الذي يطرأ على قيم الطاقة الذاتية و الدوال الذاتية لذرة الهيدروجين في سياق ميكانيك الكم في حالة فضاء ثلاثي الأبعاد. نعتبر معادلة شرودنجر المستقرة مع تفاعل من نوع كولوم :

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + \frac{e^2}{r} \right] \Psi(r) = E\Psi(r) \quad (3.8)$$

من أجل تضمين تأثير EUP على معادلة شرودنجر المذكورة أعلاه ، نستخدم التحويلات السابقة حيث من العلاقة (3.7) :

$$\begin{aligned} p_x &= -i\hbar \sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial x} \\ p_y &= -i\hbar \sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial y} \\ p_z &= -i\hbar \sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

مع العلم أن عبارة مربع الزخم تحسب بالعلاقة $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. ومنه نقوم بالحسابات التالية :

$$\begin{aligned}
 p_x^2 &= \left(-i\hbar\sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \\
 &= \left(-i\hbar\sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar\sqrt{1 + \tau\lambda r^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
 &= -\hbar^2 \left[(1 + \tau\lambda r^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \tau\lambda x \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

بنفس طريقة الحساب نجد كل من :

$$\begin{aligned}
 p_y^2 &= -\hbar^2 \left[(1 + \tau\lambda r^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \tau\lambda y \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
 p_z^2 &= -\hbar^2 \left[(1 + \tau\lambda r^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \tau\lambda z \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

ومنه نجد :

$$\begin{aligned}
 p^2 &= -\hbar^2 \left[(1 + \tau\lambda r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \tau\lambda \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \quad (3.12) \\
 &= -\hbar^2(1 + \tau\lambda r^2)\Delta + \hbar^2\tau\lambda \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$

بالتعويض (3.6) و(3.7) في المعادلة (3.8) :

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[(1 + \tau\lambda r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right) - \tau\lambda r \frac{\partial}{\partial r} \right] - \frac{e^2\sqrt{1 + \tau\lambda r^2}}{r} \right] \Psi(r, \theta, \varphi) \\
 &= E \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

III. 1.3. فصل المتغيرات:

من أجل فصل المتغيرات، نكتب الحل $\Psi(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$. حيث نكتب الحل القطري $f(r) = r^{-1/2} R(r)$, لنتحصل على معادلتين أحدهما زاوية والأخرى قطرية. و تصبح المعادلة (3.13) كالتالي:

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[(1 + \tau\lambda r^2) \left(\frac{d^2}{dr^2} r^{-1/2} R(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} r^{-1/2} R(r) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{l(l+1)}{r^2} r^{-1/2} R(r) \right) - \tau\lambda r \frac{\partial}{\partial r} r^{-1/2} R(r) \right] \\ & \times Y_{l,m}(\theta, \varphi) - Y_{l,m}(\theta, \varphi) \frac{e\sqrt{1 + \tau\lambda r^2}}{r} r^{-1/2} R(r) \\ & = E r^{-1/2} R(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

كما عرفنا في الفصل الثاني فإن حل المعادلة الزاوية يسمى بالتوافقيات الكروية (2.45). لذلك نحن مهتمون فقط بحل المعادلة القطرية. مع العلم:

$$L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (3.15)$$

لتبسيط العبارة القطرية نقوم بالحساب التالية:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (f(r)) &= -\frac{1}{2} r^{-3/2} R(r) + r^{-1/2} \frac{dR(r)}{dr} \\ \frac{d^2}{dr^2} (f(r)) &= \frac{3}{4} r^{-5/2} R(r) - \frac{1}{2} r^{-3/2} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{1}{2} r^{-3/2} \frac{dR(r)}{dr} \\ &+ r^{-1/2} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

بالتعويض (3.16) في المعادلة (3.17)، مع ضرب العلاقة في $\frac{1}{r^{-1/2}}$:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[(1 + \tau\lambda r^2) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{l(l+1) + \frac{1}{4}}{r^2} \right) \right) - \frac{1}{2} \tau\lambda \right. \right. \\ \left. \left. + \tau\lambda r \frac{d}{dr} \right] - \frac{e\sqrt{1 + \tau\lambda r^2}}{r} \right] R(r) = ER(r) \quad (3.17)$$

مع العلم :

$$\left((1 + \tau\lambda r^2) \frac{dR(r)}{dr} \right)^2 = (1 + \tau\lambda r^2) \frac{d^2R(r)}{dr^2} + \tau\lambda r \frac{dR(r)}{dr} \quad (3.18)$$

نضع : $\chi \equiv \sqrt{1 + \tau\lambda r^2}$. فتصبح العبارة (3.17) من الشكل :

$$\left[\left(\chi \frac{d}{dr} \right)^2 + \frac{\chi^2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(l(l+1) + \frac{1}{4})\chi^2}{r^2} + \frac{2\mu e^2 \chi}{\hbar^2 r} \right] R(r) \\ = - \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{\tau\lambda}{2} \right) R(r) \quad (3.19)$$

لحل المعادلة (3.19) نستخدم التحويل التالي : $s = \frac{\sqrt{1 + \tau\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda r}}$. و نحسب التغيير في المتغير :

$$\frac{d}{dr} = \frac{ds}{dr} \frac{d}{ds}$$

$$ds = - \frac{1}{\sqrt{\lambda r^2} \sqrt{1 + \tau\lambda r^2}} dr \Rightarrow \frac{ds}{dr} = - \frac{1}{\sqrt{\lambda r^2} \sqrt{1 + \tau\lambda r^2}}$$

$$\frac{d}{dr} = - \frac{1}{\sqrt{\lambda r^2} \sqrt{1 + \tau\lambda r^2}} \frac{d}{ds} \quad (3.20)$$

باستخدام التحويل السابق وبالتعويض (3.20) في العبارة (3.19). نكتب عبارة المعادلة القطرية $R(s)$:

$$\left[\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda r^2} \frac{d}{ds} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda r^2} s \lambda \frac{d}{ds} \right) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 s^2 \lambda + \frac{2\mu e^2 s^2 \sqrt{\lambda}}{\hbar^2} \right] R(s)$$

$$= - \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{\tau \lambda}{2} \right) R(s) \quad (3.21)$$

لدينا: $-\frac{1}{\lambda r^2} = \tau - s^2$ وبالقسمة على λ تصبح المعادلة (3.21) من الشكل:

$$\left[\left((1 - \tau s^2) \frac{d}{ds} \right)^2 + (1 - \tau s^2) s \tau \frac{d}{ds} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 s^2 + \frac{2\mu e^2 s^2}{\hbar^2 \sqrt{\lambda}} \right] R(s)$$

$$= - \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2 \lambda} + \frac{\tau}{2} \right) R(s) \quad (3.22)$$

ولنا أيضا:

$$\left((1 - \tau s^2) \frac{d}{ds} \right)^2 = (1 - \tau s^2)^2 \frac{d^2}{ds^2} - 2\tau s (1 - \tau s^2) \frac{d}{ds} \quad (3.23)$$

نعوض في المعادلة (3.22) نجد:

$$\left[(1 - \tau s^2)^2 \frac{d^2}{ds^2} - \tau s (1 - \tau s^2) \frac{d}{ds} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 s^2 + \eta s + \varepsilon \right] R(s)$$

$$= 0 \quad (3.24)$$

$$\text{حيث: } \eta = \frac{2\mu e^2}{\hbar^2 \sqrt{\lambda}} \quad \text{و} \quad \varepsilon = \frac{2\mu E}{\lambda \hbar^2} + \frac{\tau}{2}$$

هذه المعادلة هي المعادلة القطرية المشوهة. نحاول تطبيق طريقة N-U عليها وإستخلاص عبارتي طيف الطاقة و دالة الموجة.

III. 4. حل المعادلة القطرية

المعادلة القطرية المبسطة (3.24) من نوع الدالة الفوق الهندسية إذن يمكن تطبيق طريقة N-U عليها في كل من فضاء dS و AdS .

III. 1.4. الحل في فضاء دي سيتر:

كما نعلم أن الفضاء dS يعرف بـ $\tau = +1$, ومنه نعوض قيمة τ بما تساوي في معادلة (3.24) مع القسمة على $(1 - s^2)^2$. و تصبح من الشكل :

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} - \frac{s}{(1-s^2)} \frac{d}{ds} - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 s^2 + \eta s + \varepsilon}{(1-s^2)^2} \right] R_{ds}(s) = 0 \quad (3.25)$$

بمقارنتها مع المعادلة (1.24) نتحصل على عبارات كثيرات الحدود التالية :

$$\sigma(s) = (1 - s^2), \tilde{\tau}(s) = -s, \tilde{\sigma}(s) = -\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 s^2 + \eta s + \varepsilon \quad (3.26)$$

لإيجاد الحلول الأربع الممكنة لكثير الحدود $\pi(s)$. نبحث عن قيم k الموافقة لها وذلك بالتعويض (3.26) في (1.29) ونكتب :

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - k\right) s^2 - \eta s - \varepsilon + k} \quad (3.27)$$

المعادلة تحت الجذري معادلة من الدرجة الثانية. حيث يكتب مميزها Δ بدلالة k من الشكل :

$$\Delta = \eta^2 + 4 \left[k^2 + \left(\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon\right) k - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon \right] = 0 \quad (3.28)$$

العبرة أعلاه هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية, يمكن حساب المميز Δ الخاص بها :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{1}{4} + \varepsilon + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{\eta^2}{4} + \frac{1}{4} \varepsilon - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon \right) \\ &= \left[\varepsilon - \left(\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right]^2 - \eta^2\end{aligned}\quad (3.29)$$

ومنه تكتب قيم k بالشكل :

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \pm \sqrt{\Delta} \right] \quad (3.30)$$

ونكتب الحلول الممكنة لـ $\pi(s)$:

$$\begin{aligned}\pi_{1,2} &= \left(-\frac{1}{2} \pm \delta_1 \right) s \mp \frac{\eta}{2\delta_1} \text{ من أجل } k_1 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{\Delta} \right] \\ \pi_{3,4} &= \left(-\frac{1}{2} \pm \delta_2 \right) s \mp \frac{\eta}{2\delta_2} \text{ من أجل } k_2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \sqrt{\Delta} \right]\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\text{حيث : } \delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - k_{1,2}}$$

نحسب كثير الحدود $\tau(s)$ مع تحقيق الشرط $(\tau'(s) < 0)$. بعد إجراء عدة حسابات من أجل نتيجة مقبولة فيزيائيا إختارنا القيمة التالية :

$$\pi_1 = \left(-\frac{1}{2} + \delta_1 \right) s - \frac{\eta}{2\delta_1} \text{ من أجل } k_1 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{\Delta} \right] \quad (3.32)$$

مع تكبير $-s = \tilde{\tau}(s)$. نعوض قيمة π_1 المختارة لنجد:

$$\tau(s) = 2(\delta_1 - 1)s - \frac{\eta}{\delta_1} \quad (3.33)$$

مع تحقيق الشرط [11]. نستخرج القيم الذاتية من العلاقتين (1.27) و (1.28) لنجد :

$$\Lambda_n = n_r(n_r + 1 - 2\delta_1) \quad (3.34)$$

$$\Lambda = k_1 - \frac{1}{2} + \delta_1 \quad (3.35)$$

من العلاقتين نتحصل على عبارة الطاقة لذرة الهيدروجين في الفضاء dS :

$$E_{n,l} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} - \frac{\lambda \hbar^2}{2\mu} (n^2 - l(l+1) + 1) \quad (3.36)$$

حيث $n = n_r + l + 1$ هو العدد الكمي الأساسي .

نلاحظ أن عبارة الطاقة تحتوي على مصطلح عبارة الطاقة لذرة الهيدروجين المعتادة (2.18) و مصطلح التصحيح يتناسب مع معامل التشوه λ ، لذلك نقوم باسترداد طاقات بور عند اختفاء التشوه. الشرط الأول من عبارة الطاقة يتناسب مع n^2 و بالتالي فهو يعادل طاقة جسيم كمي غير نسبي يتحرك في مربع بئر كمومي حدوده توضع في $\pm \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$. أما الشرط الثاني في التصحيح يحتوي على العدد الكمي الزاوي ويزيل الانحلال $(2l+1)$ للمستويات الطاقوية. حيث يؤثر التصحيح على جميع المستويات الطاقوية باستثناء المستوى الأساسي $n=1$ الذي لا يتأثر بالتشوه حتى بالنسبة لقيم λ الكبيرة .

إيجاد الدوال الذاتية الموافقة للمعادلة القطرية (3.25). بأخذ عبارة $\pi_1(s)$ (3.32), نكتب كثير الحدود $\phi(s)$ على النحو التالي :

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \delta_1\right)s - \frac{\eta}{2\delta_1}}{(1-s^2)} \quad (3.37)$$

بالتبسيط و إجراء التكامل نجد :

$$\phi(s) = (1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1-\frac{\eta}{\delta_1}\right)} (1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)} \quad (3.38)$$

إنطلاقاً من العبارة $\sigma(s) = (1-s^2)$ نكتب عبارة رودريغز (1.30) :

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [(1-s^2)^n \rho(s)] \quad (3.39)$$

حيث من العلاقة (1.31) :

$$(1 - s^2)\dot{\rho} = \left(2(\delta_1 - 1)s - \frac{\eta}{\delta_1} + 2s\right)\rho \quad (3.40)$$

بالتبسيط و اجراء التكامل نجد:

$$\rho(s) = (1 + s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} (1 - s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} \quad (3.41)$$

بالتعويض في علاقة رودريغز:

$$y_n(s) = B_n (1 + s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} (1 - s)^{\left(\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} \times \frac{d^n}{ds^n} \left((1 - s^2)^n (1 + s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} (1 - s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} \right) \quad (3.42)$$

يتم التعبير عن العلاقة (3.42) بكثير الحدود لجاكوبي [Jacobi] :

$$y_n(s) \equiv P_{n_r} \left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1} \right) (s) \quad (3.43)$$

وبالتالي ، يمكن كتابة $R_{ds}(s)$ المعادلة القطرية في الفضاء المشوه dS :

$$R_{ds}(s) = C_n (1 + s)^{\frac{1}{4}\left(1 - 2\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} (1 - s)^{\frac{1}{4}\left(1 - 2\delta_1 + \frac{\eta}{\delta_1}\right)} P_{n_r} \left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1} \right) (s) \quad (3.44)$$

نكتب الآن الشكل العام للدالة الموجية لذرة الهيدروجين بالمتغيرات r, φ, θ و ذلك بتحويل $s \leftarrow r$ في الفضاء المشوه dS :

$$\Psi_{n_r}(r, \theta, \varphi) = C_n \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \lambda r^2}}{\sqrt{\lambda r}} \right)^{\frac{1}{4}\left(1 - 2\delta_1 - \frac{\eta}{\delta_1}\right)} \times \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \lambda r^2}}{\sqrt{\lambda r}} \right)^{\frac{1}{4}\left(1 - 2\delta_1 + \frac{\eta}{\delta_1}\right)} \times P_{n_r} \left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1} \right) \times \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda r^2}}{\sqrt{\lambda r}} \right) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (3.45)$$

الفصل الثالث: حل معادلة شروونجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

حيث يحسب ثابت التقنين C_n من العلاقة $\int_0^\infty R_{ds}(s)ds = 1$. (هنا تعذر علينا حساب الثابت لأننا لم نجد كثير الحدود المناسب لعلاقة التقنين وذلك لضيق الوقت).

III 2.4. الحلول في فضاء (ضد) دي سيتز:

بتعويض $\tau = -1$ في المعادلة (3.24) و القسمة على $(1 + s^2)^2$ نحصل على المعادلة القطرية في الفضاء المشوه AdS :

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{s}{(1+s^2)} \frac{d}{ds} - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 s^2 + \eta s + \varepsilon}{(1+s^2)^2} \right] R_{AdS}(s) = 0 \quad (3.46)$$

المعادلة من الشكل فوق الهندسي وبتطبيق طريقة N-U مع المقارنة بـ (1.24) نتحصل على العبارات التالية:

$$\sigma(s) = (1 + s^2), \tilde{\tau}(s) = s, \tilde{\sigma}(s) = -\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 s^2 + \eta s + \varepsilon \quad (3.47)$$

بعد تحديد عبارات كثيرات الحدود في المعادلة (3.46) نطبق الطريقة بنفس الخطوات السابقة. حيث نقوم بتعويض (3.47) في (1.29) لتتوصل على عبارة كثير الحدود $\pi(s)$:

$$\pi(s) = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + k\right) s^2 - \eta s - \varepsilon + k} \quad (3.48)$$

المعادلة تحت الجذر هي معادلة من درجة الثانية حيث مميزها يكتب بدلالة k :

$$\Delta = \eta^2 + 4 \left(-k^2 + \left(-\frac{1}{4} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \varepsilon \right) k + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon \right) = 0 \quad (3.49)$$

معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية, يمكن حساب المميز $\hat{\Delta}$ الخاص بها حيث :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \left(-\frac{1}{4} + \varepsilon - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\eta^2}{4} + \frac{1}{4} \varepsilon + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon \right) \\ &= \left(\varepsilon + \left(\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)^2 + \eta^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

نتحصل على :

$$k'_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon - \frac{1}{4} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \pm \sqrt{\Delta} \right] \quad (3.51)$$

ومنه نكتب الحلول الممكنة لـ $\pi(s)$:

$$\begin{aligned} \pi_{1,2} &= \left(\frac{1}{2} \pm \delta_1 \right) s \mp \frac{\eta}{2\delta_1} \text{ من أجل } k_1 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon - \frac{1}{4} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \sqrt{\Delta} \right] \\ \pi_{3,4} &= \left(\frac{1}{2} \pm \delta_2 \right) s \mp \frac{\eta}{2\delta_2} \text{ من أجل } k_2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon - \frac{1}{4} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{\Delta} \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

حيث: $\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + k_{1,2}}$ هنا نختار القيمة المناسبة لتتصل على :

$$\tau(s) = 2(1 - \delta_1)s + \frac{\eta}{\delta_1} \quad (3.53)$$

مع تحقق الشرط $(\tau'(s) < 0)$. نستخرج القيم الذاتية من العلاقتين (1.27) و (1.28) فنجد :

$$\Lambda_n = n_r(-n_r - 1 + 2\delta_1) \quad (3.54)$$

$$\Lambda = k_1 + \frac{1}{2} - \delta_1 \quad (3.55)$$

بالمساواة بين عبارتين :

$$k_1 + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + k_1} = -n_r \left(+n_r + 1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + k_1} \right)$$

مع التعويض بقيمة k_1 نجد عبارة الطاقة لذرة الهيدروجين في الفضاء AdS :

$$E_{n,l} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} + \frac{\lambda \hbar^2}{2\mu} (n^2 - l(l+1) - 1) \quad (3.56)$$

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

بنفس الملاحظة السابقة بالنسبة لمعادلة الطاقة في الفضاء dS , باستثناء الشرط الثاني في هذه الحالة تتناسب مصطلحات التصحيح عكسيا مع معامل التشوه λ , حيث تكون الزيادة في الطاقات بزيادة قيم λ وتصبح الحالات المقيدة في فضاء AdS محدودة من حالة الفضاء dS بنفس قيم λ في (3.36) و(3.56). في كلتا الحالتين، تختلف التصحيحات الطيفية بسبب EUP نوعيا عن تلك المرتبطة GUP [31].

نبحث الآن عن الدالة الموجية, بأخذ عبارة $\pi_2(s)$ (3.41). يتم تحديد كثير الحدود $\phi(s)$ على النحو التالي:

$$\phi(s) = (1 + s^2)^{\frac{1}{2}(1-\delta_1)} e^{\frac{-\eta}{2\delta_1} \tan^{-1}(s)} \quad (3.57)$$

بالتعويض في علاقة رودريغز (1.30):

$$y_n(s) = \hat{B}_n (1 + s^2)^{+\delta_1} e^{\frac{-\eta}{\delta_1} \tan^{-1}(s)} \frac{d^n}{ds^n} \left((1 + s^2)^{n-\delta_1} e^{\frac{\eta}{\delta_1} \tan^{-1}(s)} \right) \quad (3.58)$$

العلاقة (3.51) تمثل كثيرات الحدود رومانوفسكي [Romanovski] $R_n^{(-\delta_1, \frac{\eta}{\delta_1})}(s)$ [32]. نعطي أيضا

$\rho(s) = (1 + s^2)^{-\delta_1} e^{\frac{\eta}{\delta_1} \tan^{-1}(s)}$ كالتالي:

$$y_n(s) = \frac{\hat{B}_n}{(1 + s^2)^{-\delta_1} e^{\frac{\eta}{\delta_1} \tan^{-1}(s)}} \frac{d^n}{ds^n} \left((1 + s^2)^{n-\delta_1} e^{\frac{\eta}{\delta_1} \tan^{-1}(s)} \right) \quad (3.59)$$

بناء على ذلك، يتم التعبير عن R_{AdS} على النحو التالي :

$$R_{AdS}(s) = \hat{C}_n (1 + s^2)^{\frac{1}{2}(1-\delta_1)} \exp\left(\frac{-\eta}{2\delta_1} \tan^{-1}(s)\right) R_n^{(-\delta_1, \frac{\eta}{\delta_1})}(s) \quad (3.60)$$

يتم التعبير عن دالة الموجة Ψ بالمتغيرات θ, r و φ بواسطة التحويل $r \leftarrow s$ على النحو التالي :

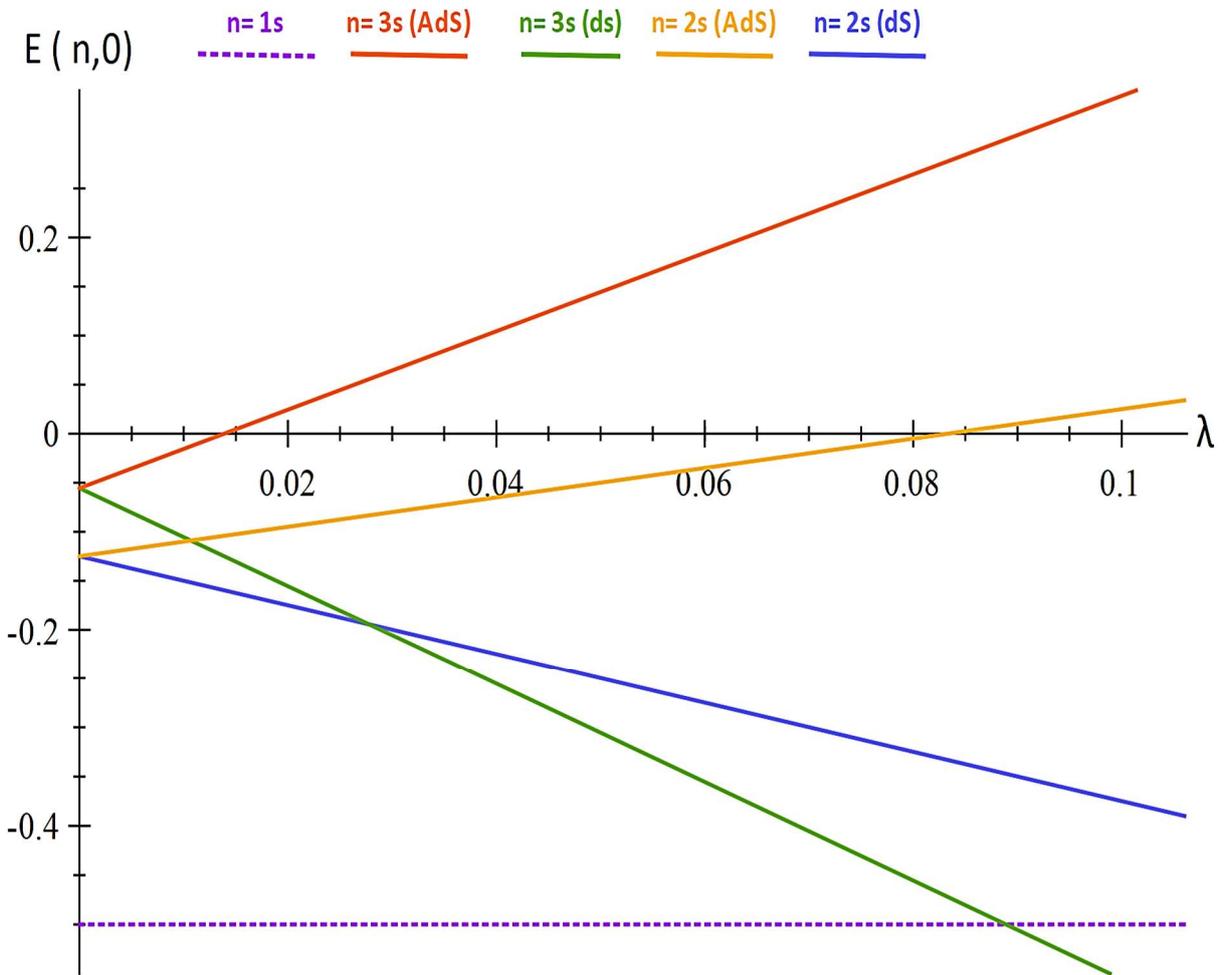
$$\begin{aligned} \Psi_n(r, \theta, \varphi) &= \hat{C}_n (\sqrt{\lambda} r)^{\left(-\frac{1}{2} + \delta_1\right)} \times \exp\left(\frac{-\eta}{2\delta_1} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right)\right) \\ &\times R_n^{(-\delta_1, \frac{\eta}{\delta_1})}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.61)$$

حيث C_n يمثل ثابت التطبيق. (تعذر علينا حسابه)

III. 5. تأثير التشوه فيزيائيا

III. 1.5. تأثير التشوه على طاقة المدارات الفرعية S:

لدراسة آثار جبرهايزنبرغ المشوه على الحالات المقيدة لكمون كولوم في الأنظمة الكمومية الغير النسبية نرسم كمثال مستويات الطاقة $E_{n,0}$ للمدار الفرعي الأول s مقابل معاملات التشوه λ عند قيم n مختلفة . للتسهيل نستعمل وحدات هارتري [Douglas Hartree] الذرية حيث : $\mu = \hbar = e = 4\pi\epsilon_0 = 1$.



الشكل (3): قيم الطاقات $E_{n,0}(\lambda)$ للمستويات $n = 1,2,3$ في الحالتين AdS و dS.

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

مقارنة مع قيمة الطاقة في الحالة العادية (2.17) والعلاقة (3.49) في الشكل (3) فمن الواضح أن التشوه يزيد من قيم الطاقات في حالة AdS بالمقابل يخفض من طاقات الحالة dS. وهكذا نصل إلى نقطة حرجة حيث يلغي معامل التشوه الحالة المقيدة أي $E_{n,l} = 0$:

$$\lambda_c(n, l) = \frac{1}{n^2(n^2 - l(l+1) - 1)} \quad (3.62)$$

يمكن تفسير هذه القيمة الحرجة لمعامل التشوه على أنها رنين النقطة لأن الحالة المقابلة للنظام الذري تتأين. حيث نعطي في الجدولين التاليين بعض القيم الحرجة $\lambda_c(n, l)$ المقابلة للمستويات الأولى:

| $\lambda_c(n, l)$ | $l = 0$ | $l = 1$ | $l = 2$ | $l = 3$ | $l = 4$ |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n=2$ | 0.250 | 0.750 | - | - | - |
| $n=3$ | 0.111 | 0.148 | 0.444 | - | - |
| $n=4$ | 0.063 | 0.072 | 0.104 | 0.313 | - |
| $n=5$ | 0.040 | 0.044 | 0.053 | 0.080 | 0.240 |

الجدول (1): القيم الحرجة $\lambda_c(n, l)$ للمستويات $n = 2, 3, 4, 5$ في حالة AdS.

من علاقة الطاقة (3.36) والشكل (3) لفضاء dS يظهر لنا أن التشوه يمكن أن يعكس في ترتيب الطاقات حيث أن التصحيح يعتمد على العدد الكمي الرئيسي. نأخذ على سبيل المثال المستوى $n=3$ فنلاحظ أنه ينخفض أسرع من المستوى الثاني وبهذا يصبح أدنى. ويواصل إنخفاضه ليصبح أدنى من مستوى الأول حيث لا يصبح هناك للمستوى الأساسي. قيمة التي تسبب التعاكس بين المستويات العليا و المستوى الأساسي تحسب من (3.36):

$$\lambda_f(n, l) = \frac{n^2 - 1}{n^2(n^2 - l(l+1) - 1)} \quad (3.63)$$

نعطي في الجدول التالي بعض القيم الرقمية لـ $\lambda_f(n, l)$:

| $\lambda_c(n, l)$ | $l = 0$ | $l = 1$ | $l = 2$ | $l = 3$ | $l = 4$ |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n=2$ | 0.0833 | 0.2500 | - | - | - |
| $n=3$ | 0.1389 | 0.0185 | 0.0556 | - | - |
| $n=4$ | 0.0042 | 0.0048 | 0.0069 | 0.0208 | - |
| $n=5$ | 0.0017 | 0.0018 | 0.0022 | 0.0033 | 0.0100 |

الجدول (2): القيم الحرجة $\lambda_f(n, l)$ للمستويات $n = 2, 3, 4, 5$ في حالة dS.

باستعمال (3.5) نلاحظ أن الميزة الأساسية لطيف الهيدروجين في مقياس AdS (3.56) هي وجود تصحيح إيجابي إضافي يتناسب مع الحد الأدنى من الإرتياب الغير صفري .

$$E_{n,l} = -\frac{\mu k^2 e^2}{2\hbar^2 n^2} + \frac{\Delta P^2_{\min}}{2\mu} (n^2 - l(l+1) - 1) \quad (3.64)$$

يمكن استعمال هذه العلاقة للحصول على الحد الأعلى لمعامل التشوه λ في EUP في الإعتبارات المطيافية. نختار خط الإنتقال $2s - 1s$:

$$\frac{E_{2s} - E_{1s}}{E_{1s}} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m^2 k^2 e^4} \Delta P^2_{\min} \quad (3.65)$$

بالأخذ بالنتائج التجريبية لهذا الإنتقال لذرة الهيدروجين أين الدقة من الرتبة $10^{-15} \approx \varepsilon$ [33]. إذا طبقنا هذا الخطأ على تصحيح EUP نكتب :

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m^2 k^2 e^4} \Delta P^2_{\min} \quad (3.66)$$

لهذا يعطى الحد الأعلى للحد الأدنى من الإرتياب $\Delta P_{\min} \sim 10^{-32} \text{ Js } m^{-1}$.

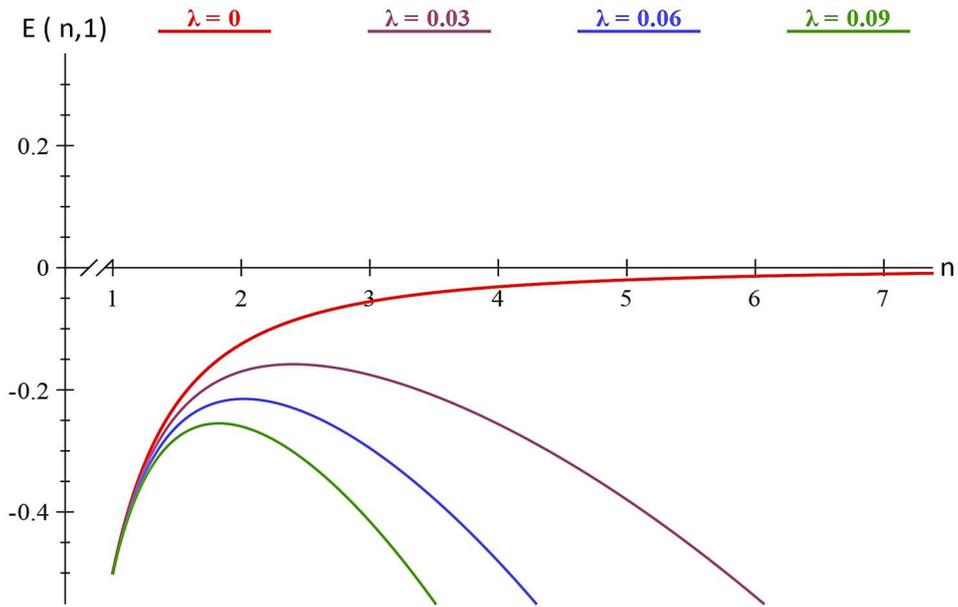
III 2.5. تأثير التشوه على طاقة المدارات الفرعية P, D, F:

ندرس الآن تأثير معامل التشوه λ على المدارات الفرعية الثلاث الأولى p, d, f ونلاحظ تأثيره في كل من الفضائين dS و AdS. حيث نبين في المنحنيات التالية مدى تأثير التشوه على قيم طاقات المدارات الفرعية مقارنة مع قيمة طاقة المدار في الحالة العادية ($\lambda = 0$). فمثلا عند المدار p ($n \geq 2$) و بنفس

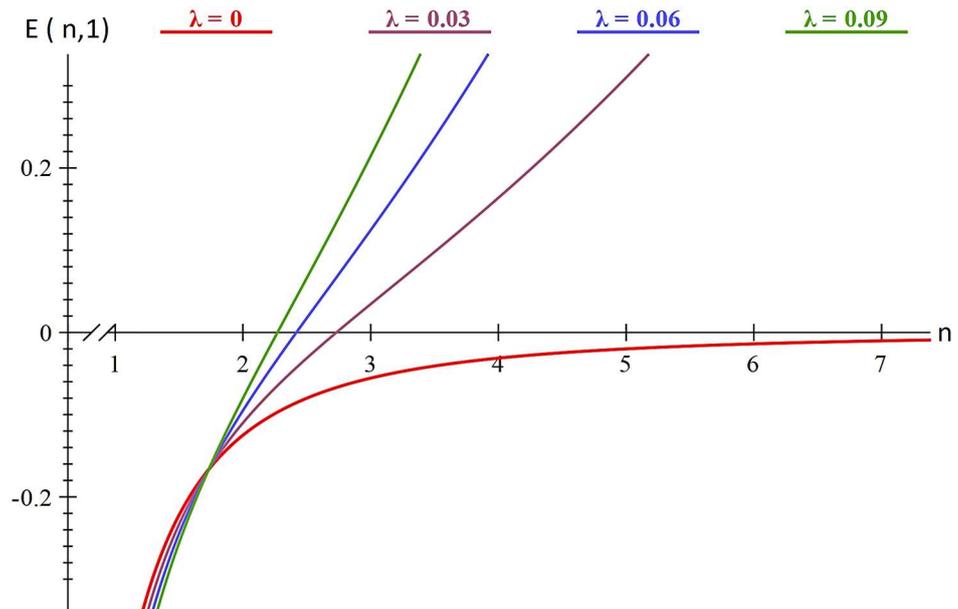
الفصل الثالث: حل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستخدام طريقة نيكيفوروف – يوفاروف

الملاحظة في الشكل (3)، هناك زيادة في قيم الطاقة للمدار الفرعي تناسباً مع كل زيادة في قيمة معامل التشوه λ . بالنسبة للفضاء AdS و إنخفاض عكسي في الفضاء dS، ما يفسر أن التشوه يمس المدارات الفرعية بنفس التأثير الذي تتأثر به المدارات الرئيسي.

المدار الفرعي p ($n \geq 1$):

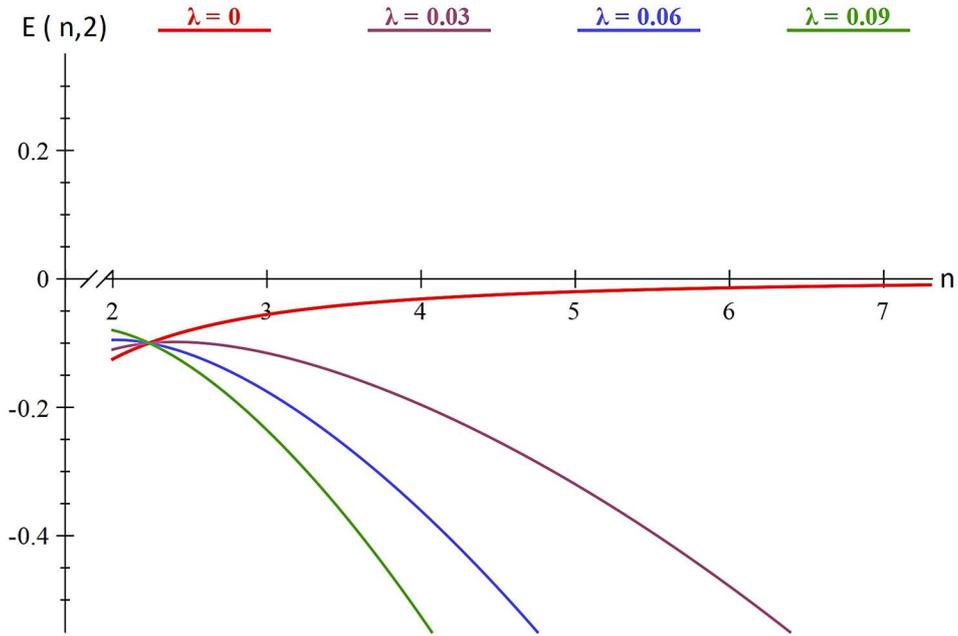


الشكل (4.1): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,1}(dS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.

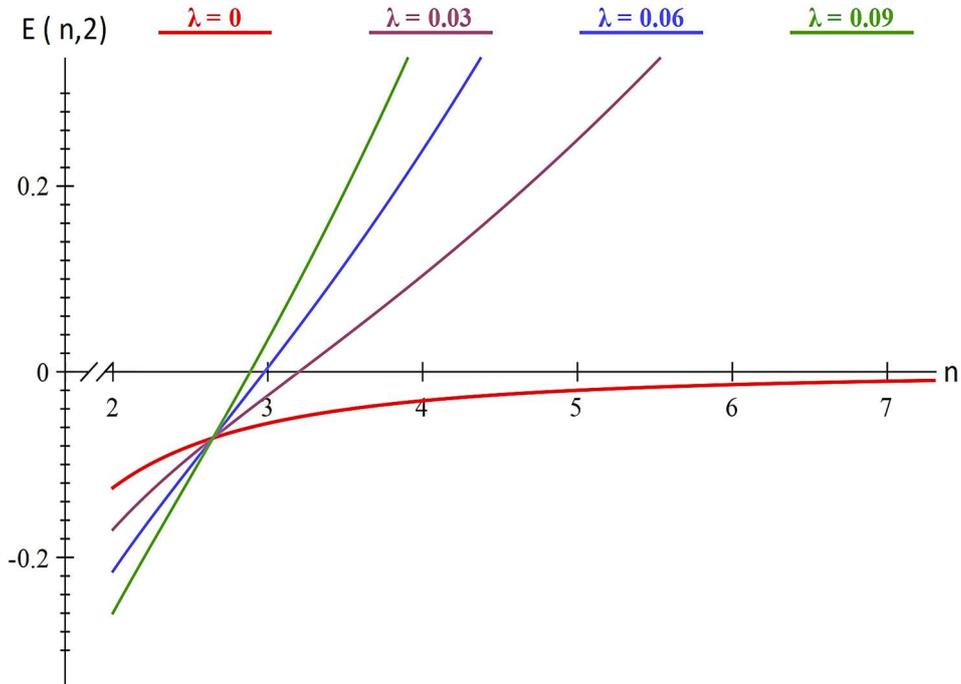


الشكل (4.2): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,2}(AdS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.

المدار الفرعي d ($n \geq 2$):

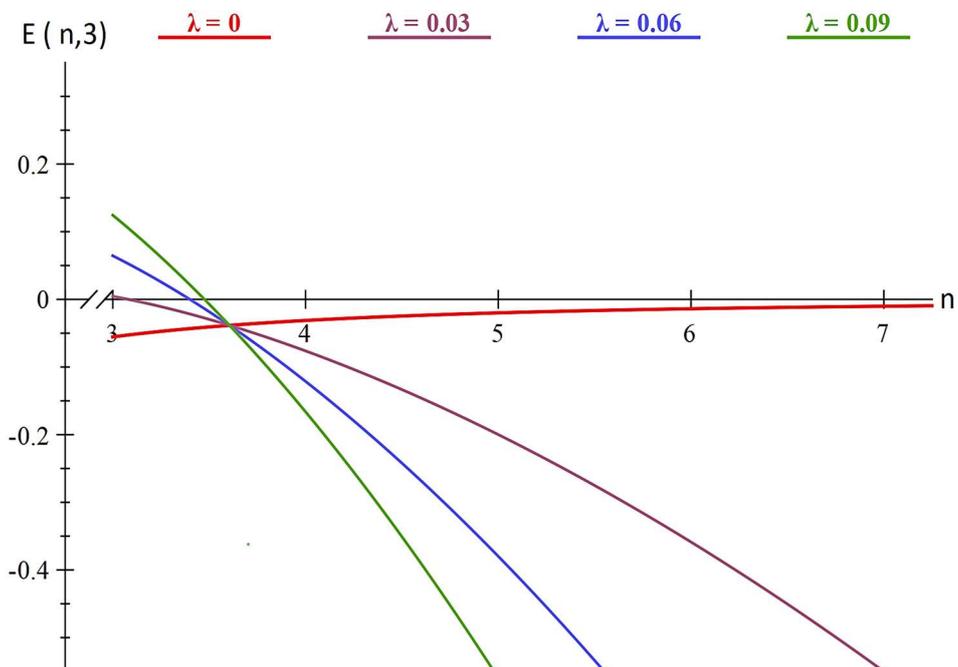


الشكل (5.1): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,2}(dS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.

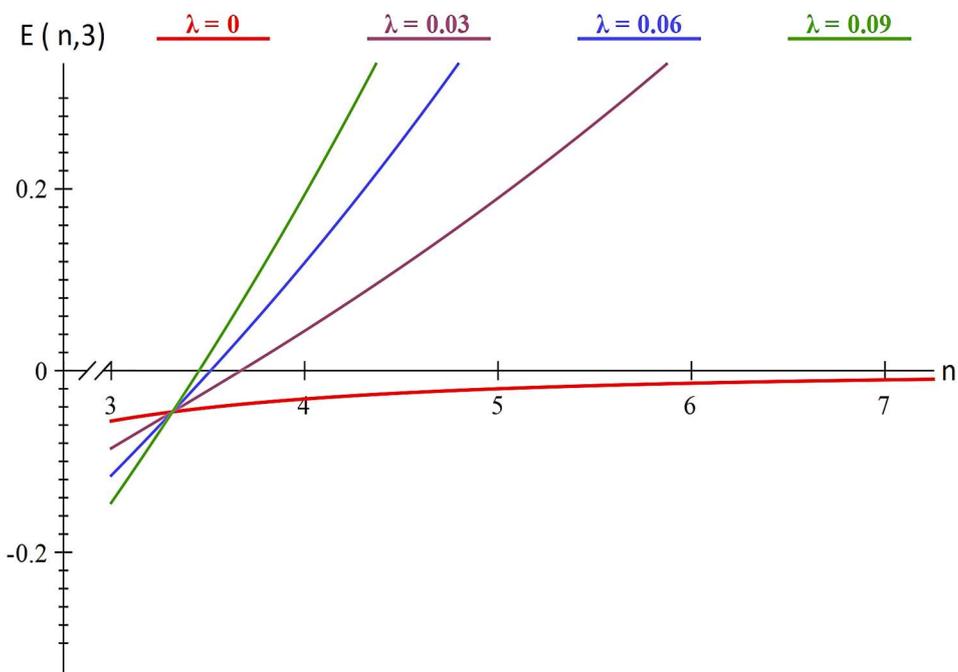


الشكل (5.2): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,2}(AdS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.

المدار الفرعي f ($n \geq 3$):



الشكل (6.1): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,3}(dS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.



الشكل (6.2): قيم طاقات المدارات الفرعية $E_{n,3}(AdS)$ عند $\lambda = 0, 0.03, 0.06, 0.09$.

الخاتمة العامة

الخاتمة العامة :

في هذه المذكرة. قمنا بحل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين في مجال الميكانيك الكمية الغير النسبية باستعمال الطريقة الرياضية نيكيفوروف-يوفاروف [N-U], حيث قدمنا:

في الفصل الأول تذكيراً عاماً حول معادلة شرودنجر العادية ومنهجية الطريقة المستعملة N-U .

في الفصل الثاني طبقنا طريقة N-U على معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين (كمون كولوم) وإستخلصنا منها عبارتي طيف الطاقة الكمومية و دالة الجزء القطري. (قمنا بحساب الجزء الزاوي بالطريقة العادية لعدم إمكانية استعمال الطريقة الأولى). في الأخير وصلنا الى عبارة دالة الموجة.

في الفصل الثالث، قمنا بدراسة معادلة شرودنجر في ثلاثي أبعاد (r, θ, φ) لذرة الهيدروجين في فضائي دي سيتر (dS) و ضد دي سيتر (AdS) باستعمال جبر مبدأ الإرتياب الممتد (EUP) وطريقة N-U. في الحالتين، تحصلنا على عبارتي طيف الطاقة و دالة الموجة الجديتين المشوهين. حيث وجدنا أن الجزء القطري يعبر عنه بكثيرات الحدود المشتركة لجاكوبي [Jacobi] في حالة فضاء dS وكثير الحدود لرومانوفسكي [Romanovski] في حالة AdS. توصلنا إلى كتابة عبارة طيف الطاقة المشوه كحد كولوم المعتاد مضاف إليه حد التصحيح و الذي يلغي إنحطاط العدد الكمي l لطاقات بور. أيضاً لاحظنا أن التأثير الأساسي لمعامل التشوه λ هو الزيادة في الطاقات بالنسبة لفضاء AdS و إنخفاض لنفس الطاقات في فضاء dS. في حالة فضاء AdS, بسبب الزيادة في الطاقات مع الزيادة في قيم λ , وصلنا إلى النقطة الحرجة أين الحالة المقابلة لم تعد ملزمة وهكذا تصبح مؤبنة.

القيم الحرجة $\lambda_c(n, l)$ تتناسب عكسياً مع الأعداد الكمية n و l , لذلك تتأين المستويات الأعلى واحدة تلو الأخرى مع إزدياد λ , حتى مرحلة أين النظام الذري يحتوي على المستويات الأساسية فقط. حتى في الحالة العادية المستويات العليا أسهل للتأين. من جهة أخرى في حالة dS, كل مستويات الطاقة مقيدة أكثر نسبياً مع معامل قيم EUP. لأن الطاقات المقيدة تتزايد مع λ في هذه الحالة.

التشوه يمكن أن يسبب عكسا في ترتيب المستويات. حيث طاقة المستويات العليا تُقلص لتصبح أقل من المستويات الأساسية. ولروية أثر التشوه على الأنظمة الفيزيائية, قارنا دراستنا مع النتائج التجريبية لذرة الهيدروجين الغير النسبية و حددنا قيمة للحد الأعلى للحد الأدنى من الإرتياب في الزخم لفضاء AdS.

المرفق:

معادلات أساسية

معادلة شرودنجر العامة:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

معادلة شرودنجر المستقرة (مستقلة عن الزمن):

$$H\Psi = E\Psi, \Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$

الهاملتونية:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

مبدأ الإرتياب المعمم:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right|^2$$

مبدأ الإرتياب لهايزنبرغ:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{\hbar}{2}$$

المبدل الأساسي:

$$[x, p] = i\hbar$$

الزخم الزاوي:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_y, L_z] = i\hbar L_x, [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

ثوابت

| | |
|---|---------------------------------------|
| $\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J s}$ | : ثابت بلانك (Planck's constant) |
| $c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s}$ | : سرعة الضوء |
| $m_e = 9.10939 \times 10^{-31} \text{ kg}$ | : كتلة الإلكترون |
| $m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$ | : كتلة البروتون |
| $-e = -1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}$ | : شحنة الإلكترون |
| $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{J m}$ | : السماحية في الفراغ |
| $k_p = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ | : ثابت بولتزمان (Boltzmann 'constant) |

ذرة الهيدروجين

| | |
|--|------------------------|
| $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137.036$ | : ثابت الخلية α |
| $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ m}$ | : نصف قطر بور |
| $E_n = E_1/n^2 (n = 1,2,3, \dots)$ | : طاقة الحالة الأساسية |
| $E_1 = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = \alpha^2 m_e c^2/2 = -13.6057 \text{ eV}$ | : طاقات بور |
| $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^3}} e^{-r/\alpha}$ | : دالة الموجة |

قائمة المراجع الببليوغرافية

- [1] Griffiths, David Jeffrey, *Introduction to quantum mechanics*, Upper Saddle River, New Jersey (USA) 07458, 1994.
- [2] Sullivan. D.M, *Quantum Mechanics for Electrical Engineers*, (Canada: John Wiley & Sons, Inc), 2012.
- [3] McMahon. D, *Quantum Mechanics Demystified*, (United States of America: The McGraw-Hill Companies, Inc) 13, 2006.
- [4] Bransden. B. H and Joachain C. J, *Physics of Atoms and Molecules*, (United States of America: John Wiley & Sons, Inc) 128, 1995.
- [5] Krane. K, *Modern Physics Third Edition*, (United States of America: John Wiley & Sons, Inc) 102, 2012.
- [6] Supriadi. B, Prastowo. S. H. B, Bahri. S, Ridlo. Z. R and Prihandono.T, *J. Phys: Conf. Ser* 997 012045, Indonesia, 2018.
- [7] Nagle. R. K, Saff. E. B and Snider. A. D, *Fundamentals of Differential Equations*, (United States of Canada: Pearson Education) 605, 2008.
- [8] H. H. Erbil, *Part I: A simple general solution of the radial Schrödinger equation for spherically symmetric potential*, TURKEY, 2003.
- [9] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel, 1988.
- [10] H. Egrifes, D. Demirhan, F. Buyukkiliç, *Exact solutions of the Schrödinger equation for two “deformed” hyperbolic molecular potentials*, *Phys. Scripta* 59, 195–198, 1999.
- [11] B. Gönül and K. Köksal, *A search on the Nikiforov-Uvarov formalism*, Turkey, 2006.

- [12] Philips. A. C, *Introduction to Quantum Mechanics*, Wiley and Sons. USA, 2000.
- [13] A. J. Angstrom, *Recherches sur le Spectre Solaire, Spectre Normal du Soleil*, Atlas de Six Planches, Upsal, W. Schultz, Imprimeur de l'université, Berlin, Ferdinand.
- [14] L. de Broglie, *Ann. De Phys. 10e série, t. III*, Janvier-Février 1925.
- [15] W. W. BELL, *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. VAN NOSTRAND COMPANY LTD, London, 1968.
- [16] Bob. Klauber, *Simplified Guide to de Sitter and Anti-de Sitter Spaces* (Minor Revision), May 2, 2018.
- [17] H.S. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev.71, 38–41, 1947.
- [18] A. Kempf, *Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry*. J. Math. Phys. 35, 4483–4496, 1994.
- [19] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, *Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation*. Phys. Rev. D 52, 1108–1118, 1995.
- [20] R. Vilela Mendes, *The geometry of noncommutative space-time*. Int. J. Theor. Phys. 56, 259–269, 2017.
- [21] W.S. Chung, *The new type of extended uncertainty principle and some applications in deformed quantum mechanics*. Int. J. Theor. Phys 58, 2575–2591, 2019.
- [22] J.A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, *1D Schrödinger equations with Coulomb-type potentials*. J. Phys. A: Math. Gen. 32, 2017–2025, 1999.
- [23] Y. Ran, L. Xue, S. Hu, R.-K. Su, *On the Coulomb-type potential of the one-dimensional Schrödinger equation*. J. Phys. A: Math. Gen. 33, 9265–9272, 2000.
- [24] A.N. Gordeyev, S.C. Chhajlany, *One-dimensional hydrogen atom: a singular potential in quantum mechanics*. J. Phys. A: Math. Gen. 30, 6893–6909, 1997.

- [25] I. Tsutsui, T. Fulop, T. Cheon, *Connection conditions and the spectral family under singular potentials*. J. Phys. A: Math. Gen. 36, 275–287, 2003.
- [26] H.N.N. Yopez, C.A. Vargas, A.L.S. Brito, *The one-dimensional hydrogen atom in momentum representation*. Eur. J. Phys. 8, 189–193, 1987.
- [27] S. Mignemi, *Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space*. Class. Quant. Grav. 29, 215019, 2012.
- [28] M.M. Stetsko, *Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder-de Sitter algebra*. J. Math. Phys. 56, 012101, 2015.
- [29] B. Bolen, M. Cavaglià, *(Anti-)de Sitter black hole thermodynamics and the generalized uncertainty principle*. Gen. Relativ. Gravit. 37, 1255–1262, 2005.
- [30] Mokhtar Falek, Nouredine Belghar, Mustafa Moumni, *Exact solution of Schrödinger equation in (anti-)de Sitter spaces for hydrogen atom* Eur.Phys. J. Plus 135:335 (2020)
- Department of Matter Sciences, University of Biskra, Biskra, Algeria, 2020.
- [31] F. Brau, *Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom*. J. Phys. A 32, 7691–7696, 1999.
- [32] A.P. Raposo, H.J. Weber, D.E. Alvarez-Castillo, M. Kirchbach, *Romanovski polynomials in selected physics problems*. Cent. Eur. J. Phys. 5, 253–284, 2007.
- [33] A. Matveev et al, *Precision measurement of the hydrogen 1S–2S frequency via a 920-km fiber link*. Phys. Rev. Lett. 110, 230801, 2013.

الملخص:

في هذه العمل, قمنا بحل معادلة شرودنجر المشوهة لذرة الهيدروجين باستعمال طريقة نيكيفوروف- يوفاروف. أولا قدمنا تذكير عام لمعادلة شرودنجر والطريقة المستعملة, ثانيا قمنا بدراسة ذرة الهيدروجين و إستخلصنا منها عبارتي طيف الطاقة و دالة الموجة. أخيرا أدخلنا التشوه و قمنا بنفس الدراسة لنجد نتائج مغايرة للحالة العادية حيث عرفنا المعامل المضاف, قارنا وفسرنا نتائج عبارات الطاقة.

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنجر, ذرة الهيدروجين, التشوه (ضد)دي ستر, طريقة نيكيفوروف- يوفاروف.

Abstract:

In this work, we solve the deformed Schrödinger equation for the hydrogen atom using the Nikiforov-Uvarov method. First, we provided a general reminder of the Schrödinger equation and the N-U method. Second, we studied the hydrogen atom and extracted from it the terms of the energy spectrum and the wave function. Finally, we introduced the deformation and did the same study to find a different result from the normal case. We knew the added parameter, compared and interpreted the results of the energy expressions.

Keywords: Schrödinger equation, The hydrogen atom, Deformation (anti) de Setter Nikiforov-Uvarov method.

Résumé :

Dans ce travail, nous résolvons l'équation de Schrödinger déformée pour l'atome d'hydrogène en utilisant la méthode Nikiforov-Uvarov. Tout d'abord, nous avons fourni un rappel général de l'équation de Schrödinger et de la méthode N-U. Deuxièmement, nous avons étudié l'atome d'hydrogène et en avons extrait les termes du spectre d'énergie et de la fonction d'onde. Enfin, nous avons introduit la déformation et fait la même étude pour trouver un résultat différent du cas normal. Nous connaissons le paramètre ajouté, comparions et interprétons les résultats des expressions énergétiques.

Mots clés : équation de Schrödinger, l'atome d'hydrogène, Déformation (anti) de Setter Méthode Nikiforov-Uvarov.