



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie  
Département des Sciences de la Matière

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière  
Filière de Physique  
Spécialité Physique des Matériaux

Réf. :

---

Présenté et soutenu par :

***Feryal Sadi et Imane Achi***

Le : 28-9-2020

## Détermination des états liés et des énergies au moyen de la Mécanique Quantique SuperSymétrique.

---

**Jury :**

<b>Mr</b>	<b>M. Falek</b>	<b>M . C . A</b>	<b>Université Med Khider Biskra</b>	<b>Président</b>
<b>Mme</b>	<b>N. Bensalah</b>	<b>M . C . B</b>	<b>Université Med Khider Biskra</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mme</b>	<b>O. Haïf Khaïf</b>	<b>M . C . B</b>	<b>Université Med Khider Biskra</b>	<b>Examineur</b>

Année universitaire : 2019/2020

## Dédicace

*Je dédie cette œuvre à l'homme de ma vie, mon idéal éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir mieux réussir, que Dieu te préserve dans son vaste paradis, à toi mon père.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur; Ma maman que j'adore.*

*A mes frères Samir, Salah et Karim, à mes sœurs Radhia, Nour Al-Hoda, Zahra et Siren, qui ont été très enrichissantes en m'encourageant et en me donnant de l'espoir chaque fois que je ressentais un échec.*

*Je demande à Dieu Tout-Puissant de vous offrir santé, bien-être et succès,  
Inchaa Allah.*

---

*Feryal Saadi*

# Dédicace

*Je dédie mon travail*

*à*

*Mes parents **Brahim** et **Rabaia** qui sont très chers pour moi.*

*A mon cher époux **Fares**.*

*A mon cher fils **Anas**.*

*A mon frère **Walid**, et mes sœurs **Ibtisseme**, **Chahinaze**, **Bouthaiana** .*

*A la famille de mon mari , à mon beau frère **Nourddine**.*

*Je vous aime énormément.*

*A toute ma famille et mes amis : **Feryal**, **Sabah**, **Warda**, **Yasmin**.*

*Vous tous ceux qui m'ont encouragé.*

*Et à tous mes collègues de ma promo de **Physique des Matériaux**.*

---

*Imane Achi*

## Remerciements

---

Tout d'abord, je remercie mon Dieu Tout-Puissant qui m'a aidé à réussir mon parcours universitaire et a éclairé mon chemin.

J'espère qu'il m'aidera dans cette vie et me donnera foi et volonté.

Je remercie mon père pour tous les efforts qu'il a déployé depuis ma naissance jusqu'à maintenant.

Je tiens à remercier sincèrement les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à mes humbles recherches,

Et tous mes remerciements et appréciations à mon humble enseignante et directrice de mémoire **N. Bensalah**, je vous envoie mille gracieuses salutations de respect et d'amour, car sans votre aide je n'aurais pas pu finir mon travail, que Dieu vous bénisse.

Nous remercions également à Mme **O. Haïf Khaïf**, Maitre de conférences à l'Université de Biskra, pour son grand intérêt à ce travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements à **Mr M. Falek**, Maitre de conférences à l'Université de Biskra pour son acceptation de siéger au jury.

Ces membres du jury étaient des interlocuteurs importants. Nous les remercions d'avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir examiné ces travaux avec beaucoup d'intérêt.

*Feryal Saadi*

## **Remerciements**

---

J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "DIEU" qui m'a donné le courage et la volonté de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de recherche, Madame **Nadjoua Bensalah**. Qui a pris tout le soin de nous orienter et nous faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribué à l'élaboration de ce mémoire. Mes remerciements vont aussi à tous les membres du jury qui ont bien accepté de lire ce modeste mémoire pour l'évaluer.

A tous les enseignants du département **PHYSIQUE** qui ont contribué à notre formation.

A tous ceux qui ont manqué aucun effort et ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail par leurs encouragements.

*Imane Achi*

---

*La vraie science est une ignorance qui se sait.*

# Table des matières

<b>List of Figures</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction</b>	<b>x</b>
<b>1 La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Pourquoi la supersymétrie ? . . . . .	3
1.3 L’algèbre de supersymétrie . . . . .	6
1.4 Formalisme . . . . .	9
1.4.1 La SUSY pour l’étude de potentiels à une dimension . . . . .	10
1.4.2 La SUSY pour les potentiels de n-dimensions . . . . .	26
1.4.3 Brisure de la Supersymétrie . . . . .	28
<b>2 Exemples d’utilisation de la MQSUSY</b>	<b>30</b>
2.1 Oscillateur harmonique quantique . . . . .	30
2.1.1 Définition . . . . .	30

*Table des matières*

2.1.2	Importance physique . . . . .	31
2.1.3	Les partenaires supersymétriques et le superpotentiel . . . . .	33
2.2	Exemple de construction d'un partenaire supersymétrique [44]. . . . .	34
2.3	Potentiels périodiques auto-isospectraux et MQSUSY . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Détermination des énergies et des états liés au moyen de la MQ-</b>	
	<b>SUSY</b>	<b>42</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Etude analytique . . . . .	43
3.3	Les partenaires supersymétriques . . . . .	44
3.3.1	L'hamiltonien $H_1$ et le superpotentiel $W_1$ . . . . .	44
3.3.2	La Factorisation de l'hamiltonien $H_1$ . . . . .	48
3.3.3	La fonction d'onde $U_1^{(1)}$ correspondante à l'énergie $E_1^{(1)}$ . . . . .	53
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>57</b>
	<b>References</b>	<b>60</b>

# Table des figures

1.1	Corrections quantiques à une boucle à la masse-carrée du Higgs. (a) boucle de fermion, (b) boucle de boson scalaire. . . . .	4
1.2	Action des opérateurs $A$ et $A^+$ [28] . . . . .	16
1.3	Spectres de deux partenaires supersymétriques. . . . .	21
1.4	Les diverses possibilités de spectres superpartenaires. . . . .	22
1.5	Les différents types de superpotentiels. . . . .	24
1.6	Correspondance entre les états propres supertenaires . . . . .	26
2.1	Comparaison pour une molécule diatomique entre la courbe de potentiel « réelle », représentée par le potentiel de Morse et celle d'un oscillateur harmonique. . . . .	33
2.2	Puit de potentiel infini de largeur $L$ . . . . .	34
3.1	$U_0^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(1)} = -9.5841 \times 10^{-2}$ . . . . .	47
3.2	$U_0^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(1)} = -0.28837$ . . . . .	47
3.3	$U_0^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(1)} = -3.617$ . . . . .	48

*Table des figures*

3.4	$U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 1.6008$	. . . . .	51
3.5	$U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 4.0551$	. . . . .	52
3.6	$U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 4.5283$	. . . . .	52
3.7	$U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 7.7485$	. . . . .	53
3.8	$U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 1.6008$	. . . . .	55
3.9	$U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 4.0551$	. . . . .	55
3.10	$U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas $E_0^{(2)} = 4.5285$	. . . . .	56

# Introduction

Depuis longtemps, plusieurs physiciens tentent de construire une théorie unique qui serait capable de décrire l'univers dans son ensemble. Cette théorie serait l'aboutissement à l'unification de la mécanique quantique et de la relativité générale ; une quête à laquelle Einstein s'était consacré durant les dernières années de sa vie [1].

Dans ce contexte Gel fond et Likhtman [2], Ramond [3], Neveu et Schwartz [4] donnèrent naissance, au début des années soixante dix, à la théorie de la SUPER-SYMETRIE, qui constitue l'une des hypothèses les plus prometteuses, vue que les symétries occupent une place privilégiée en physique, notamment en physique des particules.

C'est justement en 1974 que Julius Wess et Bruno Zumino [5] apportèrent une réponse à la question de savoir s'il est possible de lier les bosons et les fermions, en construisant une théorie permettant de rendre compte des relations profondes entre bosons et fermions grâce à l'action d'une nouvelle symétrie : la supersymétrie.

Depuis, la supersymétrie ne cesse de connaître du succès, notamment en théorie des champs. Ainsi, plusieurs théories de supersymétrie vont voir le jour ; elles seront toutes rassemblées sous l'acronyme SUSY. Parmi elles, on cite :

- La théorie des supercodes qui est une théorie de cordes obéissant aux lois de la symétrie, dont le but est l'unification de toutes les particules et forces

## *Introduction*

fondamentales de la nature.

- La théorie de la supergravité qui est une théorie des champs de Maxwell, combinant supersymétrie et relativité générale. C'est l'une des théories des champs de la gravité, candidate à l'unification de la mécanique quantique avec la relativité générale.
- La théorie de jauge supersymétrique qui est aussi une théorie des champs possédant plusieurs supersymétries et incorporant une symétrie de jauge et la théorie de jauge ordinaire.

La mécanique quantique supersymétrique (MQ SUSY), en anglais (SUSY QM), a été initiée par Witten [5] qui a introduit pour la première fois en mécanique quantique non relativiste les concepts de symétrie relatifs à la théorie des champs, ses travaux seront ensuite repris et développés par d'autres physiciens [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

Pour résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension tout en se basant sur la méthode de factorisation élaborée auparavant par Schrödinger [18] lui-même et généralisée par Hull et Infeld [19].

La méthode supersymétrique connaîtra un énorme succès suite à la découverte fondamentale en 1983 du concept d'invariance de forme [8], par le russe Gendshstein, conduisant à une démarche algébrique élégante permettant la résolution exacte de l'équation de Schrödinger relative aux potentiels vérifiant cette propriété, dits aussi invariants de forme.

Une introduction historique complète peut être trouvée dans le livre de Weinberg [20, chap. 24]. Kane a écrit un livre de vulgarisation sur l'histoire et les motivations de la supersymétrie [21].

Le chapitre 1 est consacré justement à une illustration de cette méthode, en suivant les

## *Introduction*

différentes étapes allant d'un bref aperçu de l'algèbre supersymétrique puis de la factorisation de l'hamiltonien jusqu'à l'obtention du spectre énergétique et des fonctions d'ondes.

Nous évoquerons dans le chapitre 2 les principaux résultats de quelques exemples de potentiels qui ont été traités avec la MQSUSY

Le chapitre 3 est réservé à appliquer cette technique qui est la MQSUSY sur un potentiel central bien défini pour obtenir les énergies et les états liés correspondants.

# Chapitre 1

## La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

### 1.1 Introduction

Premièrement on définit qu'est-ce que la supersymétrie, la supersymétrie est tout simplement une nouvelle symétrie, l'effet d'une transformation supersymétrique est de transformer un état bosonique en un état fermionique et vice-versa, avec  $\Delta S = \pm 1/2$  où  $S$  est le spin. Si nous appelons  $Q$  le générateur de la supersymétrie qui réalise la transformation, alors très schématiquement.

$$Q |Boson\rangle = |Fermion\rangle \tag{1.1}$$

$$Q |Fermion\rangle = |Boson\rangle \tag{1.2}$$

## *Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.*

On cherchait à combiner les symétries externes (d'espace-temps, comme les translations) et internes (surtout globales) c'est-à-dire à étendre le groupe de Poincaré par des transformations internes. Il y a eu plusieurs essais dans les années 1960 mais en 1967, Coleman et Mandula montrèrent de façon formelle qu'il est impossible de combiner les deux types de symétries. C'est leur fameux théorème no-go. En fait, il était sous-entendu que c'était impossible en utilisant des générateurs bosoniques (donc de spin entier) habituels. Mais en 1971, Golfand et Likhtman réussirent l'extension du groupe de Poincaré en utilisant des charges fermioniques, donc de spin demi-entier. C'est la supersymétrie. La même année, Neveu, Schwarz puis Ramond proposèrent des modèles supersymétriques à 2 dimensions pour obtenir des cordes supersymétriques qui expliqueraient l'origine des baryons. Quelques années plus tard, en 1973, Volkov et Akulov appliquèrent la supersymétrie aux neutrinos (ils voulaient en faire le fermion de Goldstone) mais il fut montré un peu plus tard que leur théorie, à 4 dimensions, du neutrino ne décrivait pas correctement les interactions de basse énergie observées expérimentalement. La même année, Wess et Zumino proposèrent la première théorie des champs supersymétrique à 4 dimensions de vrai intérêt du point de vue phénoménologique. Puis, ensemble avec Iliopoulos et Ferrara, ils montrèrent que la supersymétrie permettait de supprimer beaucoup de divergences des théories des champs usuelles. Ceci a rendu la supersymétrie très attractive et pendant un temps donné, elle fut beaucoup utilisée pour tenter d'unifier les bosons et les fermions. Par exemple pour unifier les particules de matière de spin  $1/2$  avec les particules de jauge de spin 1, ou les particules de matière et les champs de Higgs, dans les mêmes supermultiplets. Puis en 1976, deux groupes découvrirent que la supersymétrie locale (la transformation de supersymétrie dépend alors des coordonnées dans l'espace-temps) incluait une description de la gravitation. C'est ce que l'on a appelé la supergravité.

## 1.2 Pourquoi la supersymétrie ?

L'importance croissante des symétries internes en physique des particules dans les années 1960 ont conduit naturellement les physiciens à se poser la question de combiner de façon non triviale le groupe de symétrie d'espace-temps de Poincaré et les groupes de symétrie interne de la matrice de diffusion en théorie quantique des champs. Les efforts déployés trouvèrent leur épilogue dans un théorème no-go démontré par Coleman et Mandula , le résumé de l'article original [22] :

Nous prouvons un nouveau théorème sur l'impossibilité de combiner espace-temps et symétries internes d'une manière triviale. Le théorème est une amélioration par rapport aux groupes de paramètres infinis, plutôt qu'au seuls groupes de Lie cette amélioration est obtenue en utilisant des informations sur le  $S$  matrice ; les investigations précédentes utilisaient uniquement des informations sur le spectre des particules simples. Nous définissons un groupe de symétrie de la matrice  $S$  comme un groupe d'opérateurs unitaires qui transforment les états à plusieurs particules comme s'il étaient des produits tensoriels et commutent avec la matrice  $S$ .

Soit  $G$  un groupe de symétrie connecté du  $S$  matrice, et admettons les cinq conditions suivantes :

1.  $G$  contient un sous-groupe localement isomorphe au groupe de poincaré.
2. Pour tout  $M > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini d'états à une particule avec une masse inférieure à  $M$ .
3. Les amplitudes de diffusion élastique sont des fonctions analytiques de  $s$  et  $t$  [les variables de mandelstam], dans un voisinage de la région physique.
4. La matrice  $S$  n'est pas triviale en ce sens que deux états momentum à une particule se dispersent (en quelque chose), sauf peut-être à des valeurs isolées de  $s$ .

- les générateurs de  $G$ , écrits comme des opérateurs intégraux dans l'espace de moment, ont des distributions pour leur noyaux. ensuite, nous montrons que  $G$  est nécessairement localement isomorphe au produit direct d'un groupe de poincaré

Le théorème de Coleman–Mandula montre donc que l'algèbre de Lie des symétries de la matrice de diffusion  $S$  en théorie quantique des champs contient uniquement l'algèbre de Poincaré (générateurs de Lorentz  $M_{\mu\nu}$  et générateurs des translations  $P_{\mu\nu}$ ) et un ensemble fini de générateurs  $T_A$  invariants de Lorentz d'une algèbre de Lie  $A$  [22].

En effet, la supersymétrie apporte quelque chose de très important dans les théories des champs. Dans les corrections radiatives à la masse du Higgs. Quand nous calculons la contribution d'une boucle fermionique comme celle de la figure (1.1 a), nous obtenons :

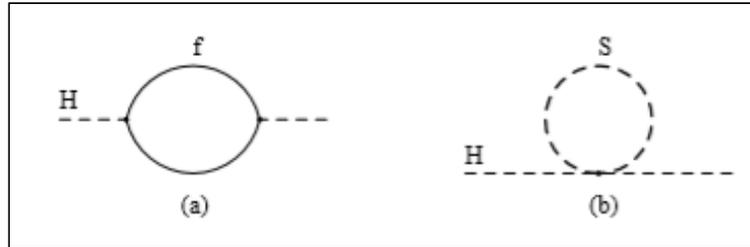


FIG. 1.1 – Corrections quantiques à une boucle à la masse-carrée du Higgs. (a) boucle de fermion, (b) boucle de boson scalaire.

$$\Delta m_H^2 = -\frac{y_f}{16\pi^2} [2\Lambda^2 + 6m_f^2 \ln(\frac{\Lambda}{m_f}) + \dots], \quad (1.3)$$

où  $\Lambda$  est un cut-off ultraviolet utilisé pour restreindre les impulsions dans la boucle et qui est de l'ordre de l'échelle de la nouvelle physique au delà du MS. Nous voyons

*Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.*

que la masse du Higgs diverge et que si nous supposons le  $\overline{MS}$  valable jusqu'à l'échelle de Planck,  $M_P \simeq 10^{19} GeV$ , alors  $\Lambda = M_P$  et cette correction est  $10^{30}$  fois plus forte que la valeur raisonnable de la masse du Higgs au carré,  $(10^2 GeV)^2$ !

Cette constatation est la même si nous considérons plutôt une boucle d'un champ scalaire  $S$ , figure (1.1 b)

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} [\Lambda^2 - 2m_S^2 \ln(\frac{\Lambda}{m_S}) + \dots], \quad (1.4)$$

Où  $\lambda_S$  est son couplage avec le boson de Higgs. Que nous apporte la supersymétrie dans ce cas ?

Si nous regardons de plus près les 2 équations précédentes, les deux contributions divergentes (leur terme  $\propto \Lambda^2$ ) s'annulent si pour chaque fermion de notre théorie entrant dans la boucle nous avons aussi 2 scalaires avec  $\lambda_S = y_f$ . Nous verrons juste après que c'est exactement ce que la supersymétrie se propose d'apporter ! Et de plus, à tous les ordres (c'est-à-dire quand nous considérons des corrections à plusieurs boucles) ceci est réalisé. Il nous reste alors une divergence logarithmique mais qui n'induit pas de problèmes d'ajustements fins. A ce jour, la supersymétrie fournit la résolution du problème de la hiérarchie la plus naturelle et la plus efficace.

- Les deux premiers arguments ne concernent que le Higgs.

Considérons maintenant les constantes de couplages qui caractérisent chaque force fondamentale. Si nous faisons évoluer les 3 couplages du Modèle Standard en fonction de l'énergie, nous observons qu'ils tendent tous à se croiser à la même échelle. Enfin presque, c'est quand nous ajoutons la supersymétrie dans les calculs d'évolution que les couplages se croisent quasi exactement au même point (autour de  $2 \times 10^{16} GeV$ ). Personne n'est obligé de croire en une "Grande Unification" qui repose sur cette unification des couplages, mais il est très étonnant d'observer que la supersymétrie

réalise l'unification aussi précisément.

- Il y a aussi un argument de ce type en faveur de l'existence de la supersymétrie dans la nature.

Les théories de cordes, qui fournissent à l'heure actuelle une des seules solutions au problème de la gravitation quantique (avec la gravité quantique à boucles), ne peuvent se passer de la supersymétrie sans souffrir d'inconsistences physiques et mathématiques. Là aussi la supersymétrie semble un ingrédient essentiel pour construire des théories cohérentes à haute énergie.

- Enfin, la supersymétrie peut aussi jouer un rôle dans l'explication de la matière noire. C'est une des seules théories qui possèdent dans son spectre de particules des candidats sérieux. Ils ont pour nom, neutralino ou gravitino, et la supersymétrie prédit, dans un cadre plausible, leur stabilité. Ainsi, une fois créés, il ne se désintègrent pas et ne peuvent pas être observés directement. Leur nombre peut donc contribuer à la masse manquante sous la forme de matière noire.

Cette discussion démontre que la supersymétrie est une symétrie très séduisante théoriquement, mais surtout très utile. Nous n'avons encore aucune preuve de son existence mais au vu de ce qu'elle apporte en physique des particules, il est difficile d'y rester insensible. Nous n'avons donné que des arguments qualitatifs dans cette partie, nous allons maintenant entrer beaucoup plus en détail.

### **1.3 L'algèbre de supersymétrie**

Pour une description réaliste des interactions des particules élémentaires, la matrice  $S$  doit posséder plusieurs symétries :

- Invariance de Poincaré sous les translations et les rotations de Lorentz ; les gé-

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

érateurs de ces transformations notés respectivement  $P_\mu$  et  $M_{\mu\nu}$ , vérifient l'algèbre :

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (1.5)$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \quad (1.6)$$

$$[M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}) \quad (1.7)$$

$\mu$  et  $\nu$  : des indices de Lorentz (ou indices vectoriels).

$\eta_{\mu\sigma}$  correspond au tenseur métrique plat de signature  $(-, +, +, +)$ .

- Invariance sous des symétries internes en relation avec un nombre quantique conservé comme la charge électrique ou l'isospin.

Les générateurs  $T^a$  de ces symétries internes sont des scalaires de Lorentz et forment un groupe de Lie avec des constantes de structure  $C^{abc}$ .

$$[T^a, P_\mu] = 0 \quad (1.8)$$

$$[T^a, M_{\mu\nu}] = 0 \quad (1.9)$$

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \quad (1.10)$$

*Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.*

A la fin des années 1960, Coleman et Mandula [22] démontrèrent que les symétries précédentes sont les seules symétries continues que peut admettre la matrice  $S$ . Cela est vrai si l'on suppose une algèbre contenant uniquement des commutateurs. Néanmoins, en 1975, Haag, Lopuszanski et Sohnius [23] montrèrent qu'il n'était pas indispensable de n'avoir que des commutateurs dans l'algèbre : une algèbre de Lie graduée, contenant des commutateurs et des anticommutateurs, est tout à fait acceptable. De plus, ils établirent que l'algèbre de supersymétrie est la seule algèbre de Lie graduée compatible avec les symétries de la matrice  $S$ .

L'algèbre supersymétrique la plus générale doit contenir le générateur des translations  $P_\mu$ , celui des rotations  $M_{\mu\nu}$ , et un certain nombre  $N$  de générateurs de symétries internes  $Q$ . Même si  $N$  peut valoir 1, 2, 4 ou 8, dans cette analyse on se restreindra désormais au cas  $N = 1$  car c'est l'unique cas dans lequel la théorie dispose de fermions chiraux. Ces générateurs sont des spineurs de Weyl à deux composantes  $Q_\alpha$  et  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ , avec  $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ .

L'algèbre de ces générateurs est [24] :

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \quad (1.11)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (1.12)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] \quad (1.13)$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = 1 \quad (1.14)$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (1.15)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} \bar{Q}_{\dot{\beta}} (\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (1.16)$$

D'après la première équation, on constate que les générateurs  $Q$  et  $\bar{Q}$  ont une dimension de masse  $1/2$ .

Les  $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu)$  de l'équation (1.13) sont les générateurs du groupe  $SL(2, C)$ . Les opérateurs  $Q_\alpha$  et  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  appartiennent respectivement aux représentations  $(1/2, 0)$  et  $(0, 1/2)$  du groupe de Lorentz :

- $Q_\alpha$  se transforme comme un spineur de Weyl gauche,
- $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  comme un spineur droit.
- $\alpha$  et  $\beta$  : étant des indices spinoriels

## 1.4 Formalisme

Le commutateur de deux opérateurs  $A$  et  $B$  se calcule de la manière suivante [25] :

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.17)$$

On définit également leur anticommutateur :

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (1.18)$$

Sur ce principe et en se basant sur ce qui a été décrit précédemment, on peut également définir des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation<sup>1</sup> (que nous noterons respectivement  $f^\dagger$  et  $f$ ). Ceux-ci satisfont les relations d'anticommutation :

$$\begin{aligned} \{f^\dagger, f\} &= 1 \\ \{f^\dagger, f^\dagger\} &= \{f, f\} = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

De la même manière que les opérateurs bosoniques  $b$  et  $b^\dagger$  satisfont les relations de commutation :

$$\begin{aligned} \{b^\dagger, b\} &= 1 \\ \{b^\dagger, b^\dagger\} &= \{b, b\} = 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Remarque : Note sur les opérateurs bosoniques et fermioniques : L'état d'une particule est décrit par un vecteur d'un espace de Hilbert. Si on s'intéresse non pas à une seule particule, mais à un système constitué d'un nombre indéterminé ou variable de particules, on le décrit par un vecteur d'un espace de Fock associé à l'espace de Hilbert.

### 1.4.1 La SUSY pour l'étude de potentiels à une dimension

Cette section peut être considérée comme une première étape importante pour la découverte de nouveaux potentiels analytiquement solubles.

---

<sup>1</sup>Le non donné à ces opérateurs n'est pas dépourvu de sens car celui de création augmente les valeurs propres, et d'annihilation les diminue.

*Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.*

Nous y verrons comment, à partir d'un potentiel donné, générer ses "superpartenaires".

Il est connu maintenant que l'Hamiltonien Supersymétrique  $H_S$  d'un système de combinaison de bosons et fermions est écrit comme la somme de l'hamiltonien bosonique  $H_B$  et fermionique  $H_F$  [26],

$$H_S = H_B + H_F \tag{1.21}$$

En substituant les superpartenaires hamiltoniens  $H_+$  et  $H_-$ . [27]

$$H_S = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Pour l'Hamiltonien à une dimension  $H_1$ , il est redéfini comme  $H_+$  dans l'eq (1.22).

Une fois que nous réalisons ceci, il est maintenant très simple de factoriser l'hamiltonien en utilisant : Un des ingrédients principaux pour la résolution exacte des problèmes d'un potentiel dimensionnel est le raccordement entre les fonctions d'onde et le potentiel. Ce n'est pas toujours évident de connaître exactement le potentiel (jusqu'à une constante) juste en connaissant la fonction d'onde de l'état fondamental (ou toute autre fonction d'onde d'un autre état).

Le nom donné à ces opérateurs n'est pas dépourvu de sens car celui de création augmente les valeurs propres, et d'annihilation les diminue.

Soit l'Hamiltonien d'une particule :

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \tag{1.23}$$

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

On va voir ici qu'il est possible de déterminer le potentiel  $V_1(x)$  si l'on connaît l'état fondamental [17].

Si  $\Psi_0(x)$  (l'état fondamental) tend vers zéro pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et ne possède aucun noeud, et si on choisit l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $H_1$  comme étant zéro ( $E_0^{(1)} = 0$ ). Alors on a l'équation de Schrödinger de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\Psi_0(x)$  :

$$H_1\Psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_0}{dx^2} + V_1(x)\Psi_0(x) = 0 \quad (1.24)$$

A partir de cette équation, on trouve facilement une expression de  $V_1$

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} \quad (1.25)$$

Une fois que nous réalisons ceci, Il est maintenant très simple de factoriser l'hamiltonien en utilisant

$$H_1 = A^\dagger A \quad (1.26)$$

où

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.27)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $A^\dagger$  et  $A$  sont une généralisation des opérateurs  $b^\dagger$  et  $b$  que nous avons cité précédemment.

Ceci nous permet d'identifier.

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \dot{W}(x), \quad (1.28)$$

Cette équation est l'équation bien connue de Riccati. Où  $W(x)$  est généralement connu sous le nom de "superpotentiel" en littérature de la MQ SUSY . La solution pour  $W(x)$  en termes de fonction d'onde d'état fondamental est :

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\dot{\Psi}_0^{(1)}(x)}{\Psi_0^{(1)}(x)}. \quad (1.29)$$

Cette solution est obtenue à condition que  $A\Psi_0 = 0$  est satisfaite, nous avons automatiquement une solution  $H_1\Psi_0 = A^\dagger A\Psi_0 = 0$ .

La prochaine étape en construisant la théorie SUSY liée à l'hamiltonien original  $H_1$  est de définir l'opérateur  $H_2 = AA^\dagger$  obtenu en renversant l'ordre de  $A$  et de  $A^\dagger$ . Une peu de simplification prouve que l'opérateur  $H_2$  est en fait la correspondance hamiltonienne à un nouveau potentiel  $V_2(x)$ .

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad (1.30)$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \dot{W}(x) \quad (1.31)$$

Les potentiels  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont connus en tant que les potentiels partenaires supersymétrique ou encore les potentiels "SUSY-partenaires".

Notez que les valeurs propres d'énergie de  $H_1$  et de  $H_2$  sont semi-définies positif ( $E^{(1,2)} \geq 0$ ). Pour  $n > 0$ , l'équation de Schrödinger pour  $H_1$  :

$$H_1 \Psi_n^{(1)} = A^\dagger A \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)}. \quad (1.32)$$

implique :

$$H_2 (A \Psi_n^{(1)}) = A A^\dagger A \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (A \Psi_n^{(1)}). \quad (1.33)$$

De la même façon, l'équation de Schrödinger pour  $H_2$  :

$$H_2 \Psi_n^{(2)} = A A^\dagger \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \Psi_n^{(2)}, \quad (1.34)$$

Implique

$$H_1 (A^\dagger \Psi_n^{(2)}) = A^\dagger A A^\dagger \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} A^\dagger \Psi_n^{(2)}. \quad (1.35)$$

Du fait que  $E_0^{(1)} = 0$ , et des équations précédentes il est clair que les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  sont reliées par :

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)}, \\ E_0^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\Psi_n^{(2)} = \left[ E_{n+1}^{(1)} \right]^{-1/2} A \Psi_{n+1}^{(1)}, \quad (1.37)$$

$$\Psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-1/2} A^\dagger \Psi_n^{(2)} \quad (1.38)$$

( $n = 0, 1, 2..$ )

Notez que si  $\Psi_{n+1}^{(1)}$  ( $\Psi_n^{(2)}$ ) de  $H_1(H_2)$  est normalisée alors la fonction d'onde  $\Psi_n^{(2)}$  ( $\Psi_{n+1}^{(1)}$ ) dans les éqs. (1.37) et (1.38) est également normalisée.

De plus, ces relations nous montrent que si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_1$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en appliquant l'opérateur  $A$ , et si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_2$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_1$  (mis à part l'état fondamental, qui n'a pas de SUSY-partenaire) en appliquant l'opérateur  $A^\dagger$ .

L'opérateur  $A(A^\dagger)$  convertit non seulement une fonction propre de  $H_1(H_2)$  à une fonction propre de  $H_2(H_1)$  avec la même énergie, mais elle détruit également (crée) un noeud supplémentaire dans la fonction propre.

Puisque la fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_1$  est annihilée par l'opérateur  $A$  cet état n'a aucun partenaire de SUSY. Ainsi l'image que nous obtenons est que en sachant toutes les fonctions propres de  $H_1$  nous pouvons déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en utilisant l'opérateur  $A$  et vice versa en utilisant  $A^\dagger$  nous pouvons reconstruire toutes les fonctions propres de  $H_1$  de ceux de  $H_2$  excepté l'état fondamental [28].

Ceci est illustré dans la figure (1-2).

La raison fondamentale de la dégénérescence des spectres de  $H_1$  et de  $H_2$  peut être comprise très facilement des propriétés de l'algèbre de SUSY.

On peut maintenant écrire et considérer une matrice hamiltonienne SUSY de la forme [28] :

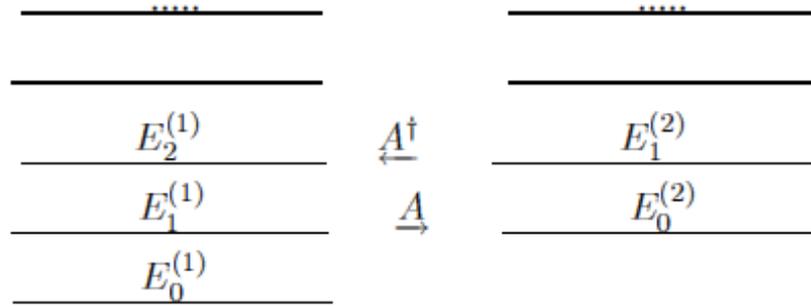


FIG. 1.2 – Action des opérateurs  $A$  et  $A^+$ [28]

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Cette matrice hamiltonienne fait partie d'une algèbre fermée qui contient les opérateurs bosoniques et fermioniques avec des relations de commutation et d'anticommutation (voir l'algèbre précédemment). Nous considérons les opérateurs supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  (déjà rencontrés lors de l'étude de l'algèbre SUSY) sous la forme  $Q = Af^\dagger$  et  $Q^\dagger = A^\dagger f$  dans un cadre général [29], ce qui est équivalent à :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Les relations suivantes de commutation et d'anticommutation décrivent la superalgèbre fermée  $sl(1/1)$  :

$$\begin{aligned}
 [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0, \\
 \{Q, Q^\dagger\} &= H, \\
 \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Le fait que les supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  commutent avec  $H$  c'est le responsable de la dégénérescence. Les opérateurs  $Q$  et  $Q^\dagger$  peuvent être interprétés comme opérateurs qui changent des degrés de liberté bosoniques au fermioniques et vice versa. Ceci est élaboré au plus loin dans les exemples de l'oscillateur harmonique de SUSY (Voir réf [29, 34]).

### Factorisation et Hiérarchies d'Hamiltoniens

Dans ce qui précède nous avons trouver qu'une fois qu'on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental qui correspond à  $H_1$ , on peut trouver le superpotentiel de l'éq (1.29). On sait aussi que la fonction d'onde de l'état fondamental du partenaire hamiltonien  $H_2$  est déterminée par le premier état excité  $H_1$  en appliquant l'opérateur  $A_1$ , donc on vient de voir qu'on peut déterminer  $H_2$  si l'on connaît  $H_1$ . On peut dès lors aussi refactoriser  $H_2$  pour déterminer son partenaire  $H_3$ , puis refactoriser  $H_3$  pour déterminer son partenaire  $H_4$ , et ainsi de suite. Chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent.

Pour simplifier on prend  $\hbar = 2m = 1$

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)
 \tag{1.43}$$

où

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{d}{dx} + W_1(x), \\
 A_1^\dagger &= -\frac{d}{dx} + W_1(x) \\
 W_1(x) &= -\frac{d \ln(\Psi_0^{(1)})}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{1.44}$$

Le partenaire SUSY Hamiltonien est donné alors

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)
 \tag{1.45}$$

où

$$V_2(x) = W_1 + \dot{W}_1 + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2\dot{W}_1 = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(1)}
 \tag{1.46}$$

On doit introduire la notion  $E_n^{(m)}$ ,  $n$  est le niveau d'énergie et ( $m$ ) refert le  $m$ 'ième hamiltonien  $H_m$ . Les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$

$$\begin{aligned}
 E_{n+1}^{(1)} &= E_n^{(2)}, \\
 \Psi_n^{(2)} &= \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_1 \Psi_{n+1}^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{1.47}$$

Maintenant commençant par  $H_2$  dont l'énergie fondamentale est  $E_0^{(1)} = E_1^{(1)}$ , on peut simuler généralement le troisième hamiltonien  $H_3$  comme le partenaire SUSY de  $H_2$ , d'après ceci nous pouvons écrire  $H_2$  sous la forme

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)} \quad (1.48)$$

où

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{d}{dx} + W_2(x), \\ A_2^\dagger &= -\frac{d}{dx} + W_2(x), \\ W_2(x) &= -\frac{d \ln(\Psi_0^{(2)})}{dx} \end{aligned} \quad (1.49)$$

On continuant de la même manière on obtient

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (1.50)$$

où

$$V_3 = W_2^2 + \dot{W}_2 + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(2)} = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\Psi_0^{(1)} \Psi_0^{(2)}) \quad (1.51)$$

En outre

$$\begin{aligned} E_n^{(3)} &= E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \\ \Psi_n^{(3)} &= \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}\right)^{-1/2} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)} \\ &= \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_2 A_1 \Psi_{n+2}^{(1)} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

De cette manière, c'est clair que si l'Hamiltonien d'origine  $H_1$  a un nombre  $p$  d'états liés, aux valeurs propres  $E_n^{(1)}$  et aux fonctions propres  $\Psi_n^1$  avec  $0 \leq n \leq (p-1)$ , alors on peut toujours générer une hiérarchie de  $(p-1)$  Hamiltoniens  $H_1, H_2, \dots, H_p$  telle que  $H_m$  (où  $m = 2, 3, \dots, p$ ) a le même spectre de valeurs propres que  $H_1$ , à part que  $H_m$  n'a pas les  $(m-1)$  premières valeurs propres de  $H_1$  [17]. Pour  $m = 2, 3, \dots, p$ ,  $H_m$  est alors donné par la relation suivante :

$$H_m = A_m^\dagger A_m + E_{m-1}^{(1)} \quad (1.53)$$

où

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{d}{dx} + W_m(x) \\ W_m(x) &= -\frac{d \ln(\Psi_0^{(m)})}{dx} \end{aligned} \quad (1.54)$$

on a aussi les relations

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \quad (1.55)$$

$$\Psi_n^{(m)} = \left[ (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-1} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1} \right] A_{m-1} \dots A_1 \Psi_{n+m-1} \quad (1.56)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\Psi_0^{(1)} \dots \Psi_0^{(m-1)}) \quad (1.57)$$

Dans ce chemin, connaître tout les valeurs propres et fonctions propres de  $H_1$  on sera directement tout les valeurs propres d'énergie et fonctions propres de la hiérarchie de  $p - 1$  Hamiltonien.

### Spectres des partenaires supersymétriques

Rappelons que  $E_0^{(2)} = 0$  pour  $n \neq 0$ , on a  $(A^- | \Psi_n^{(2)} \rangle$  est état propre de  $H_1$  avec la valeur propre  $E_n^{(2)}$ . On peut noter  $(A^- | \Psi_n^{(1)} \rangle = | \Psi_n^{(1)} \rangle$ .

On a donc  $E_m^{(1)} = E_n^{(2)}$ , ce qui prouve qu'en dehors de l'état fondamental  $E_n^{(2)}$ , tous les niveaux  $H_-$  et  $H_+$  et coïncident, ce que l'on peut écrire

(figure 1-3).

$$E_n^{(1)} = E_{n+1}^{(2)} \tag{1.58}$$

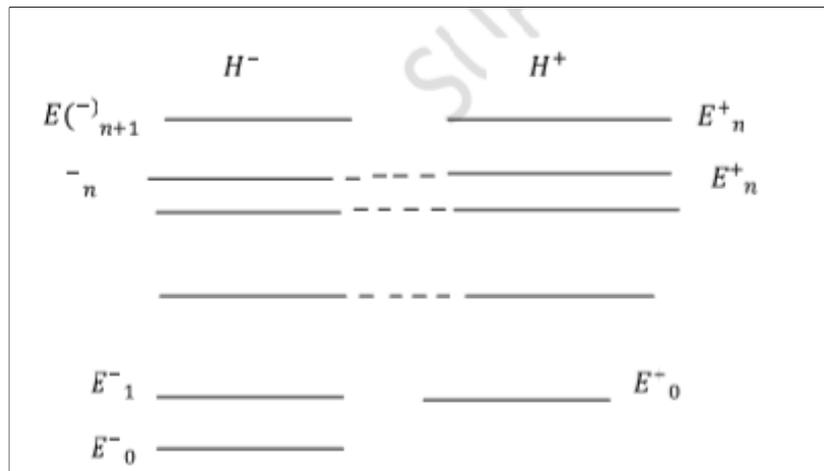


FIG. 1.3 – Spectres de deux partenaires supersymétriques.

Notons que nous avons assuré  $E_0^{(2)} = 0$  par construction. Dans le cas général où l'on se donne un superpotentiel  $\Psi$  trois cas de figure peuvent se présenter :

- S'il existe un état propre normalisable de  $H_-$ , déterminé par  $A^- | \Psi_0^{(2)} \rangle = 0$  alors  $A^+ A^- | \Psi_0^{(2)} \rangle = 0$  et  $| \Psi_0^{(2)} \rangle$  correspond à l'état fondamental d'énergie nulle  $E_0^{(2)} = 0$ . Inversement, si  $E_0^{(2)} = 0$  la valeur nulle de l'élément de matrice  $\langle \Psi_0^{(2)} | A^+ A^- | \Psi_0^{(2)} \rangle = 0$  assure que  $A^- | \Psi_0^{(2)} \rangle = 0$ .

Toutes les valeurs propres de  $H_-$  autres que l'état fondamental sont  $E_0^{(2)}$  aussi valeurs propres de  $H_+$ . Ceci correspond à la figure (1-4a)

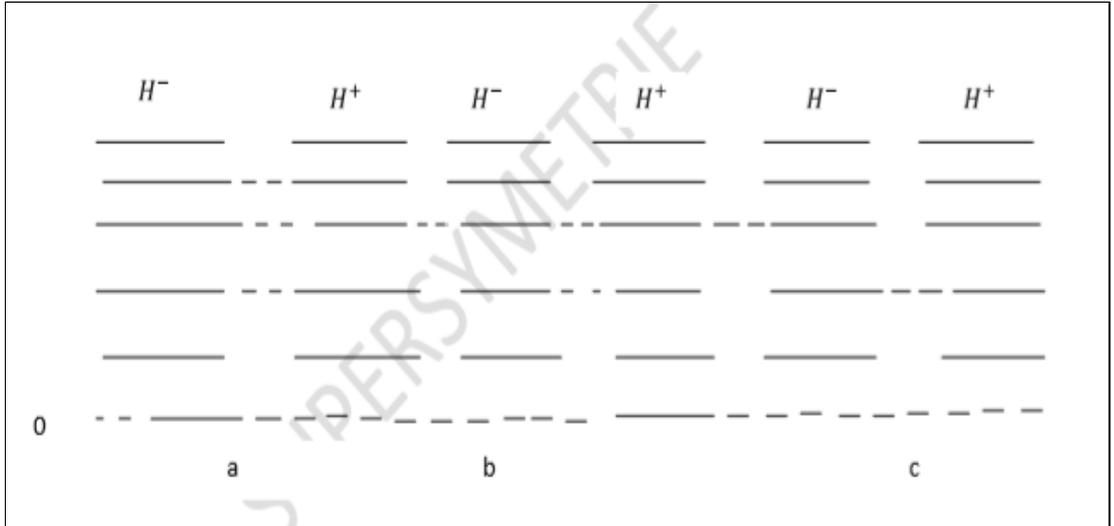


FIG. 1.4 – Les diverses possibilités de spectres superpartenaires.

- En revanche, s'il existe un état propre normalisable de  $H_+$  solution de  $A^+ | \Psi_0^{(1)} \rangle = 0$ , le raisonnement précédent peut être reproduit et l'on obtient la représentation spectrale de la figure (1-4b).

- On peut enfin envisager qu'il n'existe pas d'état normalisable solution de  $A^+ | \Psi_0^{(1)} \rangle = 0$ .

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

Dans ce cas, les deux spectres commencent à une valeur strictement positive et se correspondent deux à deux comme l'indique la figure (1-4c).

On peut déterminer la forme du superpotentiel dans chacune des trois situations précédentes par des considérations très générales.

La figure (1-4a) correspond au cas d'un état fondamental  $E_0^{(2)} = 0$  associé à une fonction d'onde  $\Psi_0^{(2)}$  donnée par :

$$\Psi^{(2)} \sim \exp -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi W(x) dx \prec \infty \quad (1.59)$$

Pour que celle-ci soit normalisable, on impose la condition suivante (en omettant le facteur positif  $\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$ ) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp -2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi W(x) dx \prec \infty \quad (1.60)$$

Ce qui exige les comportements asymptotiques suivants

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \int_0^\xi W(x) dx \rightarrow +\infty \quad (1.61)$$

En nous limitant au cas d'un superpotentiel non oscillant à l'infini et ne présentant pas de singularité, il existe toujours une borne finie  $A$  telle que, pour  $x > A$ ,  $x$  reste de signe constant. Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_0^\xi W(x) dx = \int_0^A W(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_A^\xi W(x) dx \rightarrow +\infty \quad (1.62)$$

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

La première intégrale du membre de droite apporte une contribution finie. Le comportement asymptotique divergent est donc assuré par la seconde intégrale, ce qui exige  $W(x) > 0$  pour  $(x > 0)$ . De même, si  $W(x) > 0$  est de signe constant pour  $x < A$  où  $B$  à une valeur finie, l'argument identique impose que soit négatif pour  $x < B$ .

On obtient des conclusions opposées dans le cas de la figure (1-4b) et, dans le cas de la figure (1-4c) enfin, aucune des deux fonctions :

$$\exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi W(x) dx \quad (1.63)$$

$$\exp + \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi W(x) dx \quad (1.64)$$

n'est normalisable, ce qui correspond à un superpotentiel de signe identique en  $\pm\infty$ .

Trois exemples de fonctions  $W(x)$  sont représentées sur la figure (1-5).

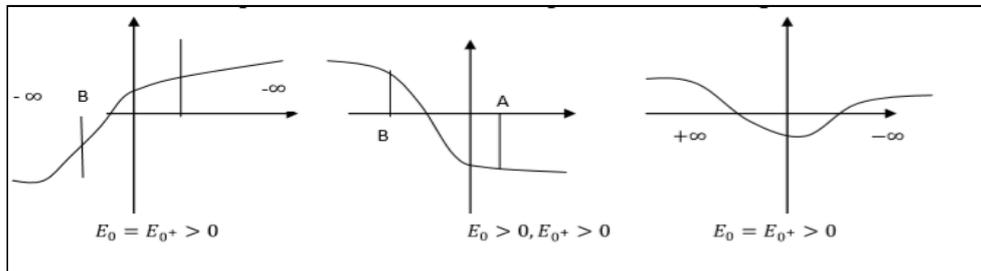


FIG. 1.5 – Les différents types de superpotentiels.

Chapitre 1. La Mécanique Quantique de la Supersymétrie.

Revenons à la situation représentée sur la figure (1-4a). La correspondance entre les fonctions d'onde se fait par l'intermédiaire des opérateurs  $\hat{A}^\pm$

$$\hat{A}^- \Psi_{n+1}^{(-)}(\varepsilon) \sim \Psi_n^{(+)}(\xi)$$

Le coefficient est déterminé, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, en formant la norme

$$\begin{aligned} \|\hat{A}^{(-)} \Psi_{n+1}^{(-)}\|^2 &= \langle \Psi_{n+1}^{(-)} / \hat{A}^- \hat{A}^+ / \Psi_{n+1}^{(-)} \rangle \\ &= \Psi_{n+1}^{(-)} / \hat{H}_- / \Psi_{n+1}^{(-)} \quad (1.65) \\ &= E_{n+1}^{(-)} \end{aligned}$$

$$\|\Psi_n^{(+)}\|^2 = 1$$

D'où

$$\Psi_n^{(+)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \hat{A}^+(\varepsilon) \Psi_{n+1}^{(+)} \quad (1.66)$$

On obtient de même :

$$\Psi_{n+1}^{(-)}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \hat{A}^+(\xi) \Psi_n^{(+)} \quad (1.67)$$

La connaissance d'un des deux spectres et des vecteurs propres normés correspondants détermine donc automatiquement le second spectre et les fonctions d'onde normées associées par l'intermédiaire des opérateurs  $\hat{A}^\pm$  (figure (1-6)).

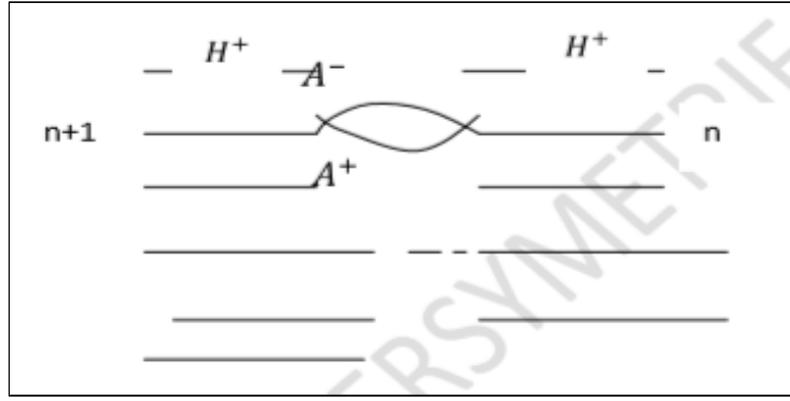


FIG. 1.6 – Correspondance entre les états propres supertenaies

Dans un système unidimensionnel, la fonction d'onde  $\Psi_{n+1}^{(-)}$  possède  $n + 1$  nœuds.

Les opérateurs  $\hat{A}^-$  et  $\hat{A}^+$  apparaissent ainsi comme des opérateurs qui annihilent ou créent un nœud, Les hamiltoniens  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  et ayant des spectres identiques (au fondamental  $E_0^{(-)}$  près), ils sont dits partenaires supersymétriques.

## 1.4.2 La SUSY pour les potentiels de n-dimensions

Jusqu'ici nous avons discuté la MQ SUSY sur la ligne complète ( $-\infty < x < \infty$ ). Plusieurs de ces résultats sont analogues pour les potentiels à n-dimensions avec

symétrie sphérique. Par exemple, dans trois dimensions on peut faire une expansion partielle de l'onde en termes de fonctions d'onde [30, 31, 32, 33, 35] :

$$\Psi(r, \theta, \Phi) = \frac{1}{r} R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \Phi). \quad (1.68)$$

Du fait que  $\Psi(r, \theta, \Phi)$  est solution de l'équation de Schrödinger et que  $Y_l^m(\theta, \Phi)$  est fonction propre de  $L^2$ , on voit que  $Y_l^m(\theta, \Phi)$  se sépare, ainsi après simplification, on obtient l'équation radiale :

$$\left[ \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] R_l(r) = ER_l(r) \quad (1.69)$$

où  $p_r^2 \equiv -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r$ . Comme nous l'avons déjà signalé dans l'expression de l'Hamiltonien que la valeur  $r = 0$  n'est pas forcément valable. Il faudra donc s'assurer que le comportement à l'origine des solutions  $R_l(r)$  est suffisamment régulier pour que (1.58) soit effectivement une solution de l'équation de Schrödinger. Posons en effet :

$$R_{k,l}(r) = \frac{1}{r} U_{k,l}(r) \quad (1.70)$$

L'indice  $k$ , qui peut être discret ou continu, permet de repérer les différentes valeurs propres associées à la même valeur de  $l$ . En multipliant les deux membres de (1.70) par  $r$ , on obtient pour  $U_{k,l}(r)$  l'équation différentielle suivante :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] U_{k,l}(r) = EU_{k,l}(r) \quad (1.71)$$

dont on notera la ressemblance avec l'équation de Schrödinger à une dimension  $\left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(r) \right) \Psi = E \Psi \right]$  sauf qu'à l'énergie potentielle  $V(r)$  s'ajoute un terme  $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$  que l'on peut appeler terme de force centrifuge et qui disparaît pour  $l = 0$ .

On conclusion, la formulation SUSY sera la même que pour une dimension sauf qu'il faut avant de formuler trouver le comportement à l'origine et asymptotique des solutions (voir réf [28]).

### 1.4.3 Brisure de la Supersymétrie

Un modèle supersymétrique phénoménologiquement réaliste doit contenir des termes engendrant la brisure de la supersymétrie. On pourrait s'attendre à ce que la supersymétrie soit une symétrie exacte de la théorie qui est brisée spontanément ; c'est-à-dire que le vide ne doit pas être invariant sous des transformations supersymétriques, même si le modèle ultime l'est. De cette façon la supersymétrie est cachée aux basses échelles, notamment à l'échelle électrofaible. Néanmoins il n'est pas facile de briser cette symétrie spontanément.

La définition de l'algèbre, implique que le hamiltonien est défini en fonction des supercharges.

La supersymétrie n'est pas brisée si  $H|0\rangle = 0$ , ce qui implique que l'énergie de l'état du vide est nulle. Inversement, si elle est spontanément brisée, l'état du vide aura une énergie positive.

Plusieurs modèles avec une brisure spontanée ont été proposés dans la littérature. Ils mettent toujours en jeu des extensions du modèle afin d'inclure de nouvelles particules et interactions à de très hautes échelles d'énergie. On trouve par exemple la brisure médiée par la gravité [36, 37], par les interactions de jauge [38], par des anomalies [39], brisure dans des dimensions supplémentaires [40]. . . Néanmoins, il

n'existe pas de consensus sur la façon selon laquelle la brisure doit avoir lieu. On doit donc attendre plus de données expérimentales pour résoudre cette question.

D'un point de vue pratique, il est possible de paramétriser les effets du modèle de brisure choisi en introduisant tous les termes qui peuvent briser la supersymétrie explicitement dans le lagrangien supersymétrique. Les nouveaux couplages doivent être doux afin de ne pas réintroduire de divergences quadratiques dans la théorie.

Le lagrangien  $L_{doux}$  renormalisable le plus général brisant explicitement la supersymétrie doit contenir :

- des masses pour les scalaires
- des masses pour les jauginos
- des interactions scalaires trilineaires
- et des termes scalaires bilinéaires

D'autres termes fermioniques pourraient exister mais ils seraient absorbés par une redéfinition du superpotentiel, des masses scalaires et des couplages trilineaires. Il a été montré rigoureusement qu'une théorie avec brisure douce de la supersymétrie ne contient pas de divergences quadratiques à tout ordre dans la série de perturbations [41].

Il est clair que  $L_{doux}$  brise la supersymétrie, vu qu'il contient exclusivement des scalaires et des jauginos mais pas leurs superpartenaires. Ces termes doux sont capables d'engendrer une masse à tous les scalaires et tous les jauginos, même si les bosons vecteurs et les fermions chiraux étaient sans masse [42].

# Chapitre 2

## Exemples d'utilisation de la MQSUSY

Ce chapitre traite trois exemples de construction réussie de superpartenaires et de superpotentiel selon la méthode de la MQSUSY, à fin de trouver les énergies et les fonctions d'ondes correspondantes de chaque potentiel étudié, ces exemples sont :

1. Le potentiel de l'oscillateur harmonique,
2. Puits rectangulaire infini de largeur  $L$ ,
3. Potentiels périodiques auto-isospectraux.

### 2.1 Oscillateur harmonique quantique

#### 2.1.1 Définition

De façon générale, un oscillateur est un système dont l'évolution dans le temps est périodique. Il est dit de plus harmonique si les oscillations effectuées sont sinusoï-

dales, avec une amplitude et une fréquence qui ne dépendent que des caractéristiques intrinsèques du système et des conditions initiales. C'est le cas en mécanique classique pour une particule évoluant à une dimension dans un potentiel quadratique, de forme générale :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.1}$$

$k$  étant une constante positive.

Loin d'être un cas particulier purement académique, cette forme de potentiel est obtenue notamment dans le cas d'oscillations de faible amplitude autour d'une position d'équilibre stable dans un potentiel quelconque, à l'exception notoire du potentiel en  $\frac{1}{r}$  rencontré en gravitation ou pour des charges ponctuelles comme celle des protons et électrons, car au voisinage de cette position d'équilibre le potentiel prend cette forme. Pour cette raison, le concept d'oscillateur harmonique joue un rôle majeur dans de nombreuses applications de la physique.

La mécanique quantique a révolutionné un grand nombre de concepts fondamentaux. L'oscillateur harmonique a aussi subi une reformulation dans ce cadre quantique, ce qui a permis d'élucider plusieurs résultats expérimentaux, notamment en physique de la matière condensée. Son étude amène à introduire des outils mathématiques d'un intérêt considérable en physique, notamment en théorie des champs : les opérateurs de création et d'annihilation de quanta.

### 2.1.2 Importance physique

Un oscillateur harmonique classique à une dimension est modélisé par un potentiel quadratique, typiquement ( $m$  étant la masse du système) :

$$v(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (2.2)$$

où  $w$  est une grandeur homogène à une fréquence (angulaire) appelée pulsation propre de l'oscillateur. De façon générale celle-ci est liée à la « force » ou « raideur » du potentiel

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique unidimensionnel est donc :

$$H = \frac{P^2x}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (2.3)$$

L'oscillateur harmonique a un intérêt considérable en physique, car tout système évoluant dans un potentiel au voisinage d'une position d'équilibre stable, donc un minimum de potentiel, peut être modélisé par un oscillateur harmonique pour les petites oscillations au voisinage de cette position d'équilibre.

En effet, dans le cas d'un potentiel quelconque unidimensionnel  $v(x)$ , avec un minimum en  $x = x_0$ , il vient au voisinage de celui-ci :

$$v(x) \approx v(x_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2$$

avec nécessairement pour un minimum  $\left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)_{x_0} \succ 0$ , ce qui correspond bien à un oscillateur harmonique tel que  $mw^2 \equiv \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)_{x_0}$ , l'expression précédente du potentiel correspondant au choix de  $x_0$  et  $v(x_0)$  comme origines respectivement des coordonnées et des énergies.

L'approximation « harmonique » est valable au voisinage de la position d'équilibre stable du système : la figure ci-contre illustre, la modélisation par un oscillateur harmonique de la courbe d'énergie potentielle d'une molécule diatomique.

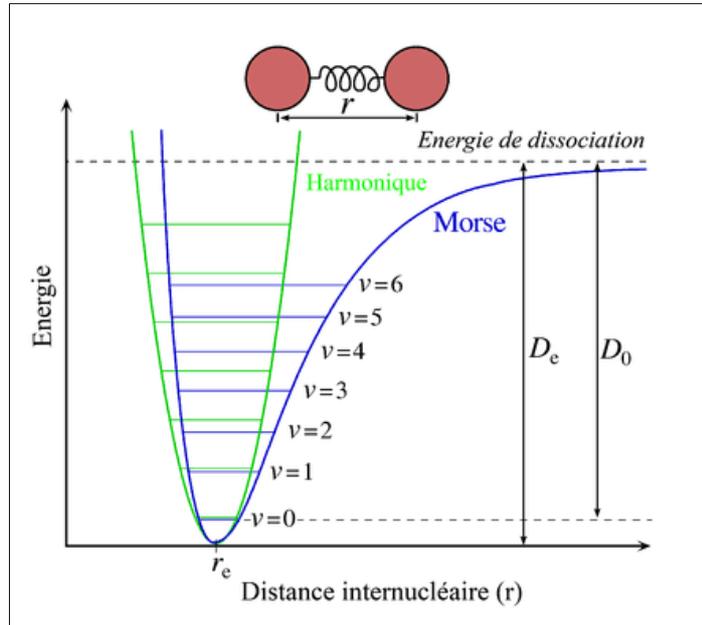


FIG. 2.1 – Comparaison pour une molécule diatomique entre la courbe de potentiel « réelle », représentée par le potentiel de Morse et celle d'un oscillateur harmonique.

Le caractère non-harmonique du potentiel réel conduit à un resserrement des niveaux d'énergie, qui sont également espacés pour un oscillateur harmonique « pur ».

### 2.1.3 Les partenaires supersymétriques et le superpotentiel

L'oscillateur harmonique est l'un des exemples les plus fréquents dans la construction des partenaires supersymétriques et le superpotentiel,

$$W(r) = \frac{\omega r}{2} - \frac{l+1}{r} \quad (2.4)$$

Alors les deux partenaires supersymétriques du potentiel sont :

$$V_1(r) = \frac{\omega^2 r^2}{4} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(l + \frac{3}{2}\right) \omega \quad (2.5)$$

$$V_2(r) = \frac{\omega^2 r^2}{4} + \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \omega \quad (2.6)$$

Ainsi, nous voyons que dans le cas d'oscillateur, une onde partielle donnée a pour partenaire SUSY le même potentiels d'oscillateur que pour la  $(l + 1)$  ème onde partielle. En particulier, les potentiels d'oscillateur des ondes S et P sont les partenaires SUSY l'un de l'autre [43].

## 2.2 Exemple de costruction d'un partenaire supersymétrique [44].

Considérons à titre d'exemple le cas du puits rectangulaire infini de largeur  $L$  (figure2-2).

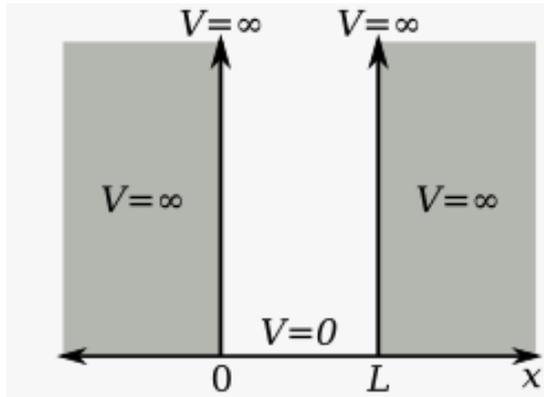


FIG. 2.2 – Puit de potentiel infini de largeur  $L$

Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la MQSUSY

L'équation de Schrödinger s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E_n \Psi_n(x) \quad 0 \prec x \prec L \quad (2.7)$$

Ou encore :

$$\ddot{\Psi}_{FF}(x) + K_n^2 \Psi_n(x) = 0, \quad K_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \quad (2.8)$$

Elle admet pour solution générale

$$\Psi(x) = A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x \quad (2.9)$$

Les conditions aux limites déterminent la quantification du vecteur d'onde et la forme des fonctions d'onde

$$\Psi_n(0) = 0 \implies A_n = 0 \quad (2.10)$$

$$\Psi_n(L) = 0 \implies_n L = n\pi, n \in \mathbb{N}^* \quad (2.11)$$

En ajoutant de plus la condition de normation

$$\int_0^L \Psi_n^*(x) dx = 1 \quad (2.12)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\hbar^2 \bar{\partial}^2}{2mL^2} (n+1)^2 \quad n = 0, 1, 2 \\ \Psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le superpotentiel est défini à partir de :

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad \Psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.14)$$

d'où

$$\dot{\Psi}_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (2.15)$$

$$W(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot g^2 \frac{\pi x}{L} \quad 0 < x < L \quad (2.16)$$

On en déduit le superpartenaire du potentiel

$$V_2 = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \cot g^2 \frac{\pi x}{L} - \frac{\hbar^2 \pi}{2mL} \frac{(-1)}{\sin^2 \frac{\pi x}{L}} \quad (2.17)$$

Ainsi que l'hamiltonien correspondant :

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \left( \frac{1}{\frac{\sin^2 \pi x}{L}} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

$$E_n^{(1)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+1} - E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} [(n+2)^2 - 1] \quad (2.19)$$

Et les fonctions d'onde associées sont données par :

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)}}} \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + (-) \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{L} \cot g \frac{\pi x}{L} \right) \Psi_{n+1}^{(2)}(x) \quad (2.20)$$

$$= \left( \frac{\hbar \pi^2}{mL^2} [(n+2)^2 - 1] \right)^{-1/2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L} \left( \frac{d}{dx} - \frac{\pi}{L} \cot g \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{(n+2)\pi x}{L}} \quad (2.22)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{2}}{L} [(n+1)^2 - 1] \right)^{-1/2} \quad (2.23)$$

$$\left\{ (n+2) \cos \frac{(n+2)\pi x}{L} - \sin \frac{(n+2)\pi x}{L} \cot g \frac{\pi x}{L} \right\} \quad (2.24)$$

L'état fondamental et le premier niveau excité sont en particulier donnés par :

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\Psi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2L} \left[ 3 \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cot g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

La figure (1-3) donne l'allure des niveaux d'énergie et des premières fonctions d'onde des deux superpartenaires  $H_1$  et  $H_2$  [44].

## 2.3 Potentiels périodiques auto-isospectraux et MQ-SUSY

Dans un article récent, Feinberg [45] a systématiquement discuté de divers aspects de la mécanique quantique supersymétrique (SUSYQM) appliquée sur des potentiels périodiques. Ils ont notamment défini et développé longuement le concept de potentiels périodiques auto-isospectraux.

Fondamentalement, un potentiel unidimensionnel  $V_-(x)$  de la période  $2K$  est dit auto-isospectral si son potentiel partenaire supersymétrique  $V_+(x)$  n'est que le potentiel d'origine jusqu'à une transformation discrète. En ce sens, un potentiel auto-isospectral est quelque peu trivial, puisque l'application du formalisme SUSYQM [46] ne lui apporte rien de nouveau.

$$V(x) = mj(j+1)sn^2(x, m), j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Ici  $sn(x, m)$  est une fonction elliptique de Jacobi du paramètre de module elliptique réel  $m(0 < m < 1)$ . Désormais, pour simplifier, l'argument  $m$  est supprimé. L'équation de Schrödinger du potentiel elliptique donné est l'équation de Lamé bien connue [47]. En réf [45] on prétend que les potentiels donnés en éq (2, 26) sont auto-isospectraux. Le but de ce commentaire est de souligner que bien que le potentiel  $j = 1$  soit auto-isospectraux. ce n'est pas le cas pour des valeurs plus élevées de  $j$ . En effet, pour  $j > 2$ , nous affirons que MQSUSY génère de nouveaux problèmes périodiques exactement résolubles. En prenant le cas  $j = 2$ , et en décalant le potentiel d'une constante pour que l'état fondamental ait une énergie null, cela donne

$$V_-(x) = -2 - 2m + 2\delta + 6msn^2(x), \delta = \sqrt{1 - m + m^2} \quad (2.27)$$

Le superpotentiel est :

$$W = -\frac{d}{dx} \log \Psi_0^{(-)}(x) = \frac{6msn(x)cn(x)dn(x)}{1 + m + \delta - 3msn^2(x)} \quad (2.28)$$

Les potentiels partenaires supersymétrique  $V_{\pm}(x)$  sont liés à  $W(x)$  via  $V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm dW/dx$  par conséquent,  $V_+$  est donné par

$$V_+(x) = -V_-(x) + \frac{72m^2sn^2(x)cn^2(x)dn^2(x)}{[1 + m + \delta - 3msn^2(x)]^2} \quad (2.29)$$

En utilisant MQSUSY et les fonctions propres connues  $\Psi_n^{(-)}(x)$  de  $V_-(x)$ , on peut immédiatement noter les fonctions propres non normalisées correspondantes  $\Psi_n^{(+)}(x)$  de  $V_+(x)$

$$\Psi_0^{(+)}(x) = \frac{1}{\Psi_0^{(-)}(x)}, \quad \Psi_n^{(+)}(x) = \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right)\Psi_n^{(-)}(x). \quad (2.30)$$

Dans cet exemple les fonctions propres de  $V_+(x)$  ont été calculées (voir le tableau 1).

En notant qu'à la limite de  $m \rightarrow 1$ , le potentiel  $V_+(x) \rightarrow 4 - 6\text{sech}^2x$ , qui est en effet le partenaire supersymétrique de  $V_-(x, m = 1) = 4 - 6\text{sech}^2x$  [46].

En procédant de la même manière, un nouveau potentiel périodique  $V_+(x)$  correspondant à  $j = 3$ . Ici, la fonction d'onde de l'état fondamental est :

$$\Psi_0^{(-)}(x) = dn(x)[1 + 2m + \delta_1 - 5msn^2(x)]$$

et le superpotentiel correspondant est :

$$W = \frac{msn(x)cn(x)}{dn(x)} \frac{[2m + \delta_1 + 11 - 15msn^2(x)]}{[2m + \delta_1 + 1 - 5msn^2(x)]} \quad (2.31)$$

Les potentiels partenaires  $V_{\pm}(x)$  s'avèrent être

$$V_-(x) = -2 - 5m + 2\delta_1 + 12msn^2(x), \delta_1 = \sqrt{1 - m + 4m^2}$$

et

$$V_+(x) = -V_-(x) + \frac{2m^2sn^2(x)cn^2(x)}{dn^2(x)} \frac{[2m + \delta_1 + 11 - 15msn^2(x)]^2}{[2m + \delta_1 + 1 - 5msn^2(x)]^2} \quad (2.32)$$

De toute évidence, le potentiel  $V_-(x)$  n'est pas auto-isospectral. En fait,  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$  sont des potentiels périodiques nettement différents qui ont les mêmes bords de sept bandes correspondant à trois bandes liées et une bande de continuum [47].

Bien que dans ce commentaire, l'exemple est concentré uniquement sur les cas  $j = 2, 3$ , il est clair que MQSUSY fournit un moyen de générer de nouveaux problèmes résolubles pour toutes les valeurs  $j$  supérieures. Il s'agit d'un résultat passionnant étant donné l'extrême rareté des potentiels périodiques analytiquement résolubles. En effet, une extension supplémentaire à des potentiels encore plus généraux impliquant des fonctions elliptiques de Jacobi [47] donne des potentiels périodiques supplémentaires presque exactement résolubles [48].

**Tableau II-1** : états propres des bords de bande de  $V_{\pm}$

$$\text{pour } j = 2 \text{ [} \delta = \sqrt{1 - m + m^2}, \quad B = 1 + m + \delta \text{]}$$

$n$	$E_n$	$\Psi_n^{(-)}$	$[B - 3m \operatorname{sn}^2(x)]\Psi_n^{(+)}$
0	0	$m + 1 + \delta - 3m \operatorname{sn}^2(x)$	1
1	$2\delta - 1 - m$	$\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)$	$\operatorname{sn}(x)[6m - (m + 1)B + m \operatorname{sn}^2(x)(2B - 3 - 3m)]$
2	$2\delta - 1 + 2m$	$\operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x)$	$\operatorname{cn}(x)[B + m \operatorname{sn}^2(x)(3 - 2B)]$
3	$2\delta + 2 - m$	$\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(x)$	$\operatorname{dn}(x)[B + \operatorname{sn}^2(x)(3m - 2B)]$
4	$4\delta$	$m + 1 - \delta - 3m \operatorname{sn}^2(x)$	$\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)$

# Chapitre 3

## Détermination des énergies et des états liés au moyen de la MQSUSY

### 3.1 Introduction

Le potentiel de Kratzer est une combinaison du potentiel de Coulomb et du potentiel carré inverse. En générale ce potentiel est utilisé pour étudier la structure atomique et moléculaire [49; 50], il joue donc un role important dans le domaine chimie quantique. En mécanique quantique, les problèmes analytiquement résolubles sont limités. Dans les systèmes quantiques le potentiel de Kratzer est l'un des rares potentiels qui ont une solution analytique exacte [51]. Les équations potentielles de Kratzer dans l'espace commutatif ont été étudiés dans ces références [52,53, 54]. Le potentiel de Kratzer est défini par :

$$V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$$

## 3.2 Etude analytique

La solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel  $V(r)$  s'écrit comme suit :

$$U(r) = U_0(r) U_\infty(r) U_{susy}(r) \quad (3.1)$$

où  $U_0(r)$  est la solution au comportement à l'origine ( $r \rightarrow 0$ ),

$U_\infty(r)$  est la solution au comportement asymptotique ( $r \rightarrow \infty$ )

et  $U_{susy}(r)$  la fonction inconnue que nous allons trouver par la méthode SUSY.

Cette solution est liée aux paramètres  $a$ ,  $b$  du potentiel.

On injecte l'expression du potentiel  $V(r)$  dans l'équation de Schrödinger, il vient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar} \left( \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} - E \right) \right] U(r) = 0 \quad (3.2)$$

La nécessité de prendre les unités :  $2m = \hbar = 1$  n'est qu'un choix de convenance.

On pose  $l = 0$  l'expression (3.2) sera :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \left( E - \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} \right) \right] U(r) = 0 \quad (3.3)$$

On pose :

$$-\frac{d^2}{dr^2} U(r) = (E - V_1(r)) U(r) \quad (3.4)$$

### 3.3 Les partenaires supersymétriques

#### 3.3.1 L'hamiltonien $H_1$ et le superpotentiel $W_1$

Nous pouvons proposer selon la MQ SUSY l'hamiltonien  $H_1$  :

$$H_1 U(r) = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} U(r) = \left( -\frac{d^2}{dr^2} + V_1 \right) U(r) \quad (3.5)$$

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_1(r) \quad (3.6)$$

On peut écrire le potentiel sous la forme :

$$V_1(r) = W_1^2(r) - W_1'(r) \quad (3.7)$$

de l'éq (3.3) et (3.6) on peut déduire :

$$V_1(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} - E_0^{(1)} \quad (3.8)$$

On propose le superpotentiel  $W_1(r)$  sous la forme :

$$W_1(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + C \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} V_1(r) &= (A + A^2 + 2BC^2) \left( \frac{1}{r^2} \right) + 2(B + AB) \frac{1}{r^3} + (2AC^2) \frac{1}{r} + \frac{B^2}{r^4} + C^2 \\ &= \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} - E_0^{(1)} \end{aligned}$$

Les relations entre les paramètres de cette équation satisfont les définitions de la *SUSY*

$$\left\{ \begin{array}{l} A + A^2 + 2BC = a \\ 2(B + AB) = 0 \\ (2AC) = -b \\ B^2 = 0 \\ C^2 = -E_0^{(1)} \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Les relations précédentes seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + A^2 = a \\ (2AC) = -b \\ C^2 = -E_0^{(1)} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2}(\sqrt{4a+1}) - \frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1} \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

alors on peut écrire le superpotentiel comme :

$$W_1(r) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1} - \frac{1}{2}\right)}{r} + \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1} \quad (3.13)$$

$$U_0 = \exp \left[ - \int \left( \frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1} - \frac{1}{2}\right)}{r} + \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1} \right) dr \right] \quad (3.14)$$

$$U_0 = N_0^{(1)} \exp \left[ - \int \left( \frac{A}{r} + C \right) dr \right] \quad (3.15)$$

Après intégration :

$$U_0^{(1)} = N_0^{(1)} \frac{1}{r^A} e^{-Cr} \quad (3.16)$$

où  $N_0^{(1)}$  est une constante de normalisation ,

$A$  et  $C$  sont définits selon l'équation (3-12),

Nous pouvons à présent calculer les valeurs des énergies suivant l'éq (3-11) :

**Tableau III-1:**

$a$	$b$	$A = -\frac{1}{2} (\sqrt{4a+1}) - \frac{1}{2}$	$C = \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1}$	$E_0^{(1)} = -C^2$
1	1	-1.618	0.30902	$-9.5481 \times 10^{-2}$
5	3	-2.7913	0.53739	-0.28837
100	40	-10.512	1.9025	-3.6176

Exemple 3.1 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(1)}(r)$  relative au cas

$$E_0^{(1)} = -9.5481 \times 10^{-2}$$

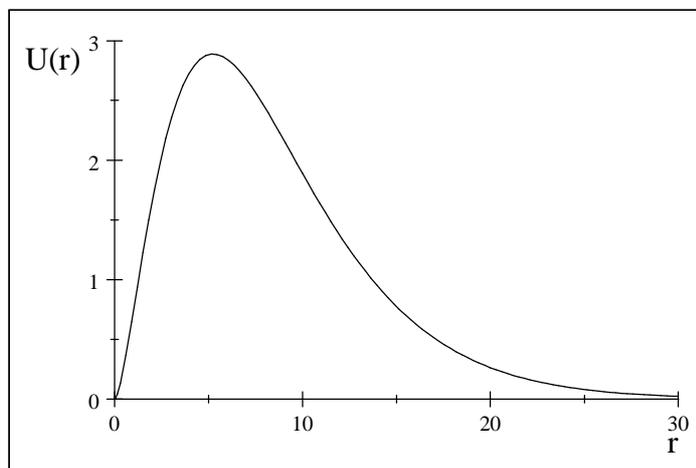


FIG. 3.1 –  $U_0^{(1)}$  SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(1)} = -9.5841 \times 10^{-2}$

Exemple 3.2 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(1)} = -0.28837$

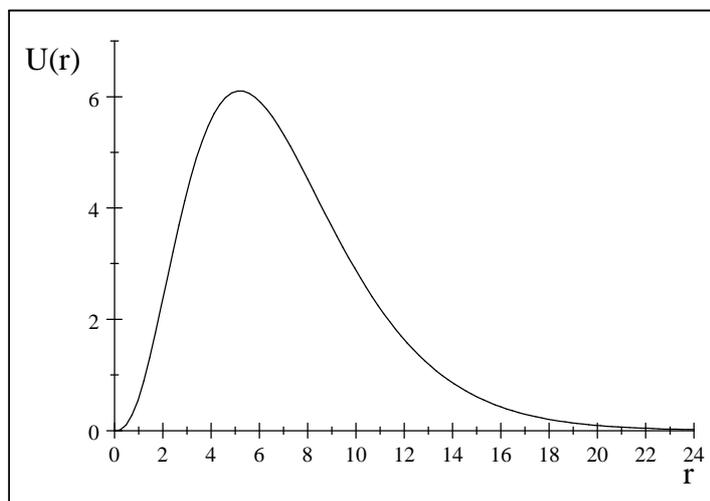


FIG. 3.2 –  $U_0^{(1)}$  SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(1)} = -0.28837$

Exemple 3.3 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(1)} = -3.617$

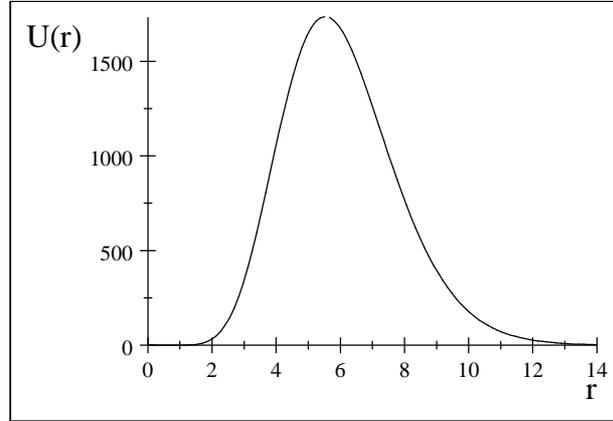


FIG. 3.3 –  $U_0^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(1)} = -3.617$

## Conclusion

Les courbes  $U_0^{(1)}(r)$  ne présentent aucun nœuds, donc elles correspondent à l'état fondamental, d'énergie  $E_0^{(1)}$ .

On peut déjà conclure que pour  $n = 0$  et  $l = 0$ , la fonction d'onde radiale décrit seulement l'état fondamental.

### 3.3.2 La Factorisation de l'hamiltonien $H_1$

La deuxième étape dans La MQ SUSY est de trouver les partenaires supersymétriques de  $H_1$  et  $V_1$ , qui sont  $H_2$ ,  $V_2$  et donc  $W_2$ . Dans cette seconde approche, on va commencer par enlever l'état fondamental  $U_0^{(1)}$  d'énergie  $E_0^{(1)}$  pour le potentiel  $V_1(r)$ , afin de générer le potentiel SUSYpartenaire  $V_2(r)$ .

En combinant l'éq (1.30) et (1.31), on trouve :

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_2(r) \quad (3.17)$$

où :

$$V_2(r) = W_1^2 + W_1 + E_0^{(1)} = V_1(r) + 2W_1 = V_1(r) - 2\frac{d^2}{dr^2} \ln U_0^{(2)} \quad (3.18)$$

Qui a les mêmes valeurs propres que  $V_1$ , sauf en ce qui concerne l'état lié d'énergie  $E_0^{(1)}$ .

Et en même temps on propose un nouveau superpotentiel qui va déterminer  $V_2$ .

$$V_2(r) = W_2^2(r) + W_2(r) + E_0^{(2)} \quad (3.19)$$

On trouve

$$V_2(r) = V_1(r) + 2W_1 = \frac{1}{r^2} (a - 2A) - \frac{b}{r} - E_0^{(1)} \quad (3.20)$$

$$V_2(r) = \frac{1}{r^2} \left( a + 1 \left( \left( \sqrt{4a + 1} \right) + 1 \right) \right) - \frac{b}{r} - E_0^{(1)} \quad (3.21)$$

On propose

$$W_2(r) = \frac{A_2}{r} + \frac{B_2}{r^2} + C_2 \quad (3.22)$$

Et de la même manière que  $W_1$  on arrive aux relations suivantes :

$$A_2^2 - A_2 + 2B_2C_2 = a - 2A \quad (3.23)$$

$$B_2 = 0$$

$$2A_2C_2 = -b \quad (3.24)$$

$$C_2^2 + E_0^{(2)} = -E_0^{(1)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5} \quad (3.25)$$

$$B_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{b}{\left(1 - \sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)}$$

$$E_1^{(1)} = \left(\frac{b}{\sqrt{4a+1} + 1}\right)^2 - \left(-\frac{b}{\left(1 - \sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)}\right)^2$$

Donc :

$$W_2(r) = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)}{r} - \frac{b}{\left(1 - \sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)} \quad (3.26)$$

$$U_0^{(2)} = N_0^{(2)} \exp \left[ - \int \left( \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)}{r} - \frac{b}{\left(1 - \sqrt{4a + 4\sqrt{4a+1} + 5}\right)} \right) dr \right] \quad (3.27)$$

$$U_0^{(2)}(r) = N_0^{(2)} \exp \left[ - \int \left( \frac{A_2}{r} + C_2 \right) dr \right]$$

$$U_0^{(2)}(r) = N_0^{(2)} \frac{1}{r^{A_2}} e^{-C_2 r} \quad (3.28)$$

Le tableau (III.2) contient quelques résultats de  $E_0^{(2)}$ , sans oublier la relation suivante :  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$

**Tableau III-2 :**

$a$	$b$	$E_0^{(2)} = E_1^{(1)} = \left( \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1} \right)^2 - \left( -\frac{b}{(1-\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5})} \right)^2$
10	10	1.6008
100	90	4.055 1
200	160	4.528 3
1000	700	7.748 5

*Exemple 3.4 :* La fonction d'onde radiale  $U_0^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 1.6008$

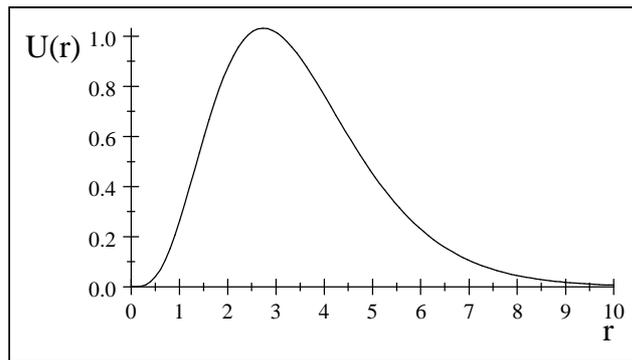


FIG. 3.4 –  $U_0^{(2)}$  SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 1.6008$

Exemple 3.5 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.0551$

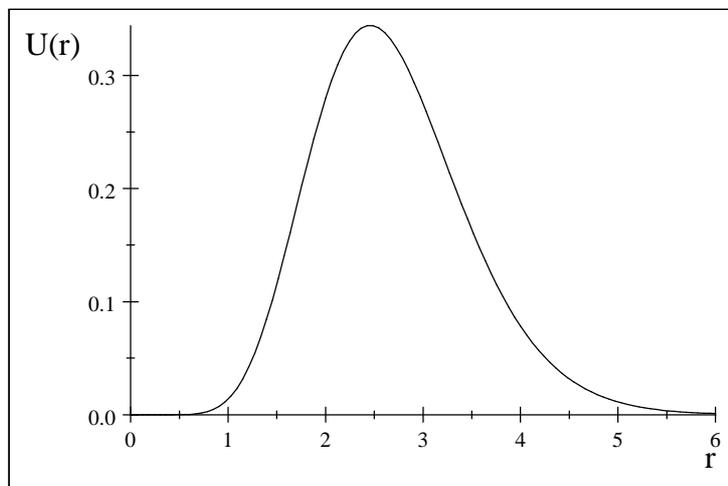


FIG. 3.5 –  $U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.0551$

Exemple 3.6 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.5283$

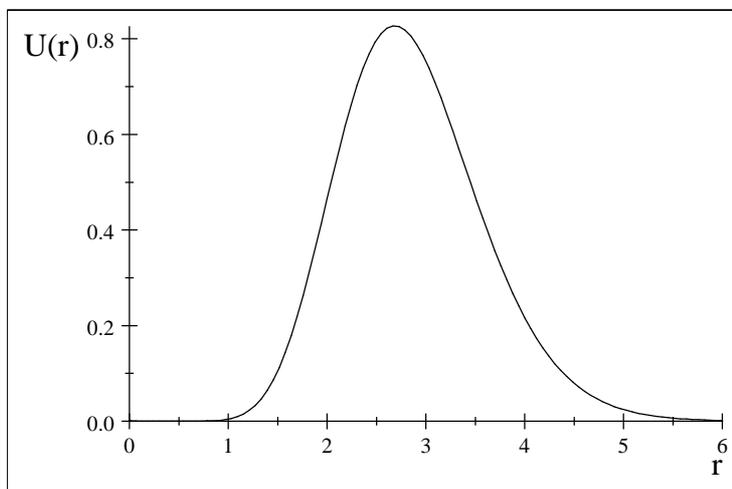


FIG. 3.6 –  $U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.5283$

Exemple 3.7 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 7.7485$

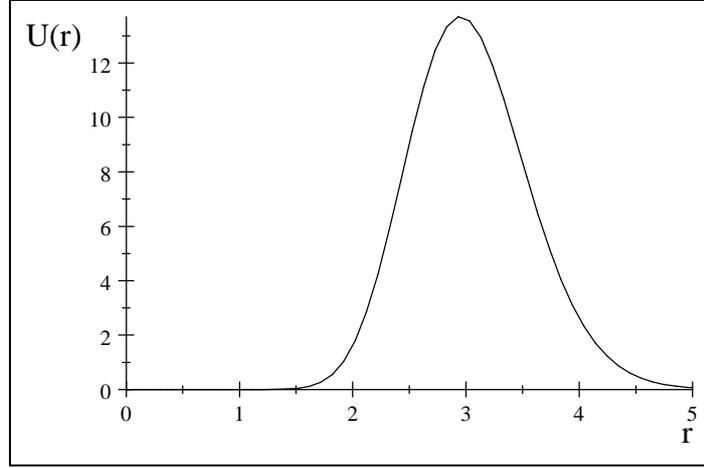


FIG. 3.7 –  $U_0^{(2)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 7.7485$

### Conclusion

Les courbes  $U_0^{(2)}(r)$  ne présentent aucun nœuds, donc elles correspondent à l'état fondamental, d'énergie  $E_0^{(2)}$ . On peut conclure cette fois aussi que pour  $n = 0$  et  $l = 0$ , la fonction d'onde radiale décrit seulement l'état fondamental, n'oublions pas qu'on parle du partenaire SUSY  $H_2$ .

### 3.3.3 La fonction d'onde $U_1^{(1)}$ correspondante à l'énergie $E_1^{(1)}$

Il ne faut pas nous s'éloigner de nôtre but, qui est de trouver la hiérarchie de  $H_1$ , pour chaque  $n = 0.1.2.3\dots$

Nous avons déjà trouvé  $E_1^{(1)} = E_0^{(2)}$  il r ste   trouver la fonction d'onde  $U_1^{(1)}$  correspondante.

Nous avons selon le principe supersymétrique que

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, U_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1 \setminus 2} A_1 U_{n+1}^{(1)} \quad (3.29)$$

$$U_{n+1}^{(1)} = \left(E_n^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1 \setminus 2} A_1^+ U_n^{(2)} \quad (3.30)$$

$$n = 0, U_1^{(1)} = \left(E_0^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1 \setminus 2} A_1^+ U_0^{(2)} \quad (3.31)$$

$$U_1^{(1)} = \left(E_0^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1 \setminus 2} \left(-\frac{d}{dr} + W_1(r)\right) U_0^{(2)} \quad (3.32)$$

En remplaçant tous les termes par leurs équations correspondantes, on trouve alors :

$$U_1^{(1)}(r) = N_0^2 \left( \left( \left( \left( -\frac{b}{\sqrt{4a+1}-1} \right)^2 - \left( -\frac{b}{(1-\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5})} \right)^2 \right) + \left( \frac{b}{\sqrt{4a+1}-1} \right)^2 \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

$$\left( \left( \left( -r^{\frac{1}{2}} \sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5} - \frac{3}{2} \frac{\exp\left(-\frac{b}{\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5}-1}\right)}{\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5}-1} \right)}{\left( 2a - \sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5} + 2\sqrt{4a+1} - br + 3 \right)} + \left( \frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}-\frac{1}{2}\right)}{r} + \frac{b}{\sqrt{4a+1}+1} \right) \right) \right) \quad (3.34)$$

$$\left( \left( \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5}\right)}} e^{-\left(-\frac{b}{(1-\sqrt{4a+4\sqrt{4a+1}+5})}\right)r} \right) \right)$$

Exemple 3.8 : La fonction d'onde radiale  $U_1^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 1.6008$

$$U_1^{(1)}(r) = 0.54031 \left( \frac{10}{\sqrt{41}+1} - \frac{1}{2r^2} (\sqrt{41} + 1) \right) r^{3.701} e^{-1.35r}$$

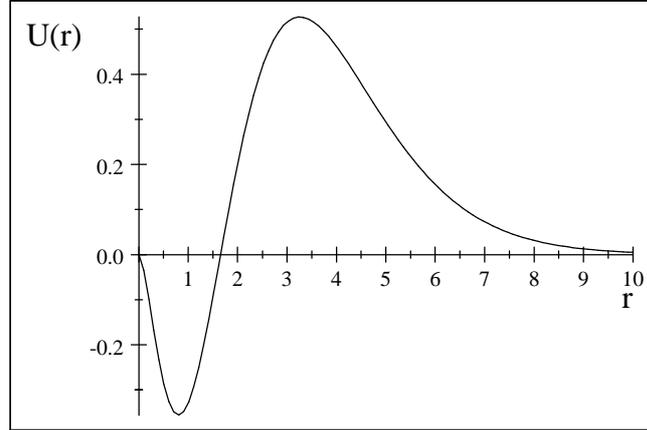


FIG. 3.8 –  $U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 1.6008$

Exemple 3.9 : La fonction d'onde radiale  $U_1^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.0551$

$$U_1^{(1)}(r) = -0.21139 \left( \frac{10.512}{r^2} - 4.2806 \right) r^{10.512} e^{-4.28r}$$

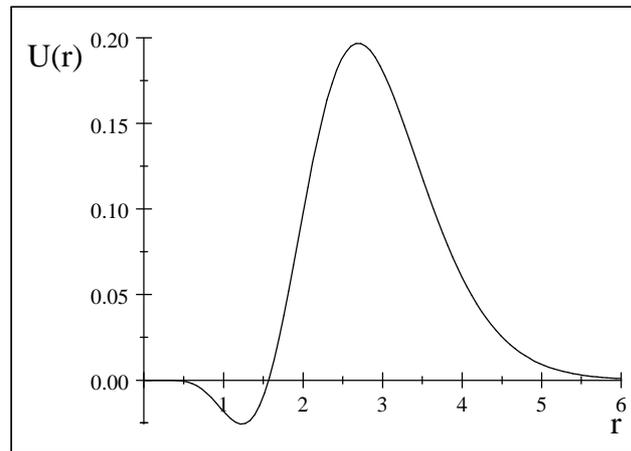


FIG. 3.9 –  $U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.0551$

Exemple 3.10 : La fonction d'onde radiale  $U_1^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.5285$

$$U_1^{(1)}(r) = -0.17064r^{14.651}e^{-5.46r} \left( \frac{14.651}{r^2} - 5.4604 \right)$$

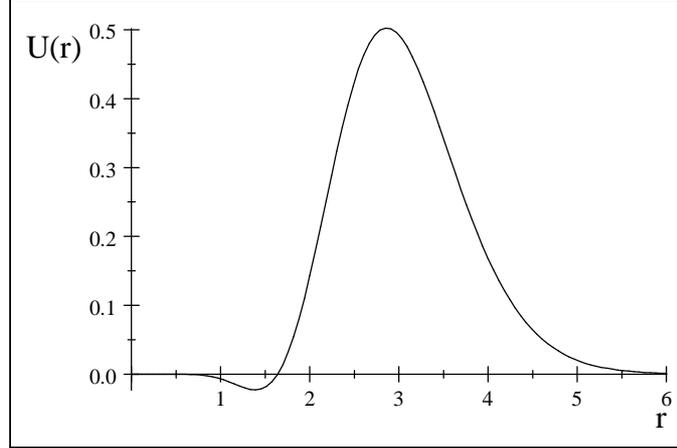


FIG. 3.10 –  $U_1^{(1)}$ SUSY non normalisée relative au cas  $E_0^{(2)} = 4.5285$

### Conclusion

Les fonctions d'ondes  $U_1^{(1)}$  présentent un nœud, donc elles correspondent au premier état excité, d'énergie  $E_1^{(1)}$ . Alors pour  $n = 1$  et  $l = 0$  la fonction d'onde radiale décrit le premier état excité.

Maintenant on peut dès lors aussi refactoriser  $H_2$  pour déterminer son partenaire SUSY  $H_3$  comme dans l'éq (1.50 et 1.51).

Et continuer la factorisation pour le nième état.

# Conclusion et Perspectives

L'une des extensions du modèle standard la plus populaire — tant sur le plan phénoménologique que théorique — est la supersymétrie. De nombreuses expériences, comme le LHC, visent à prouver sa validité et beaucoup d'espoirs reposent sur cette dernière.

Dans le modèle standard, les masses des fermions et des vecteurs sont "protégées" grâce aux symétries chirale et de jauge [55, 56, 57]. Par contre, rien ne préserve la masse des scalaires, qui peuvent diverger jusqu'à la masse de Planck à cause des corrections quantiques. L'idée de la supersymétrie est d'associer un partenaire fermionique à chaque boson, et inversement : les boucles de fermions dans les diagrammes de Feynman contribuent avec un signe opposé à celles des bosons, de sorte qu'en ajustant des constantes de couplages, c'est à dire en permettant une symétrie entre bosons et fermions (ou encore entre matière et interaction), il est possible qu'elles se compensent exactement [58].

Toutefois, la supersymétrie implique que les superpartenaires doivent avoir la même masse, ce qui est en désaccord avec les données expérimentales : il faut donc briser la supersymétrie. Hélas, il s'agit d'une symétrie difficile à briser, et beaucoup d'efforts ont été consacrés à mieux en comprendre les mécanismes et les implications.

D'un point de vue pratique, et ce même si la théorie de la supersymétrie était

## *Conclusion et Perspectives*

fausse, elle permet de faire beaucoup plus facilement certains calculs, et peut donc servir pour obtenir des résultats préliminaires de théories plus réalistes [59]. Elle a permis aussi plusieurs avancées en mathématiques et trouve des applications en matière condensée [59].

Pour résumer, la supersymétrie est intéressante pour les raisons suivantes :

1. elle règle le problème de la hiérarchie et offre plus grande stabilité quantique ;
2. elle unifie les constantes de couplage ;
3. elle offre un candidat pour la matière noire ;
4. elle propose un premier pas pour l'unification des théories de jauge avec la gravité ;
5. elle est nécessaire pour la théorie des cordes.

La méthode supersymétrique en mécanique quantique, qui fut fondée dans le but de rendre compte des symétries qui existent entre particules élémentaires est très efficace dans la résolution de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle pour des potentiels jouissant de la propriété d'invariance de forme et dans le cadre d'une symétrie non brisée ; c'est-à-dire si la fonction d'onde déduite, suite à la factorisation de l'hamiltonien, est acceptable physiquement.

Malheureusement tous les potentiels ne sont pas invariants de forme, et il est parfois difficile d'éviter la brisure de symétrie, car on a affaire à l'équation de Riccati, où il n'existe aucune recette permettant son intégration de façon générale.

Sans ces deux difficultés majeurs (invariance de forme et brisure de symétrie), la technique supersymétrique serait sans doute la plus géniale des méthodes permettant d'intégrer l'équation de Schrödinger stationnaire unidimensionnelle avec élégance. Il serait alors bon de penser un jour à trouver une alternative, en cas de non invariance

## *Conclusion et Perspectives*

de forme, ou de brisure de symétrie, sans recourir à d'autres méthodes.

Certain physiciens ont vue en cette méthode un moyen d'édifier une nouvelle mécanique quantique non hermitienne. L'invariance des hamiltoniens non hermitiens, ainsi que leurs fonctions propres sous la transformation  $PT$  garantissent la réalité de leurs spectres.

Nous avons essayer dans ce mémoire de donner un exposé généralisé sur cette méthode dans un premier chapitre puis présenter brièvement quelques exemples de potentiels traités avec cette méthode pour obtenir un spectre d'énergie correspondant.

Notre choix de potentiel dans le troisième chapitre a été confirmé suite à une étude d'un potentiel plus complexe dont l'étude a aboutit à des résultat quasi exactes avec la MQSUSY [60], ce potentiel qui n'est autre que le potentiel de Kratzer.

Dans ce travail , nous avons réussie les étapes suivantes avec succès :

- Introduction d'un potentiel de type :  $V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$  dans l'équation de Schrödinger radiale indépendante du temps.
- La formulation de l'hamiltonien selon la MQSUSY.
- L'introduction du superpotentiel.
- Détermination des états liés (détermination des énergies).
- Description des états propres correspondantes.

Ce qu'il faut souligner ici que nous sommes arrêter au premier état excité ( par manque de temps en temps de pandémie ) et que nous aurions pu arriver au nième état excité en utilisant la factorisation de l'hamiltonien.

Nous pouvons donc conclure que la supersymétrie est une hypothèse simplificatrice, c'est ce qui en fait l'attrait car la science cherche le simple et l'unité.

# Bibliographie

- [1] A. Benachour, thèse de magister "Approche de supersymétrie en mécanique quantique et application à la construction de potentiels non hermitiens avec spectres réels" Univ. Mentouri- Constantine, 2010.
- [2] Y. A. Gel'fand, E. P. Likhtman, Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance, JETP Lett. 13 (1971) 323.
- [3] P. Ramond, Dual theory for free fermions, Phys. Rev. D 3 (1971) 2415.
- [4] A. Neveu and J. Schwarz, Factorizable dual model of pions, Nucl. Phys. B 31 (1971) 86.
- [5] J. Wess and B. Zumino, Supergauge transformations in four dimensions, Nucl. Phys. B 70 (1974) 39; Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics, B 78 (1974) 1.
- [6] E. Witten, Dynamical breaking of symmetry, Nucl. Phys. B 188 (1981) 513.
- [7] F. Cooper, B. Freedman, Aspects of symmetric quantum mechanics, Ann. Phys (NY) 146 (1983) 262.
- [8] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP. lett. 38 (1983) 356.
- [9] D. Lancaster, Supersymmetry breakdown in supersymmetric quantum mechanics, Nuovo Cimento A 79 (1984) 28.
- [10] L. Gendenshtein, I.V. Krive, Supersymmetry in quantum mechanics, Sov. Phys. Usp. 28 (1985) 654.
- [11] G. Stedman, Simple supersymmetry : factorisation methode in quantum mechanics, Euro. Jour. Phys. 6 (1985) 163.
- [12] C. V. Sukmar, Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a hamiltonian hierarchy, J. Phys. A 18 (1985) L57.
- [13] R. Hamaker and A. R. P. Rau, Supersymmetry in quantum mechanics, Am. Jour. Phys. 54 (1986) 928.

## Bibliographie

- [14] R. Dutt, A.Khare and U. Sukatme, Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials, *Am. Jour. Phys.* 56 (1988) 163.
- [15] A. Lahiri, P. Roy and B. Bagchi, Supersymmetry in quantum mechanics, *Int. Jour. Mod. Phys. A* 5 (1990) 1383.
- [16] O. L de Lange and R. E. Raab, *Operator methods in quantum mechanics*, Oxford University Press (1991).
- [17] F. Cooper, A.Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics, *Phy. Rep.* 251 (1995) 267 ; Supersymmetry in quantum mechanics, World Scientific Publishings (2001).
- [18] E. Schrödinger, Further studies on solving eigenvalue problems by factorisation, *Proc. Roy. Irish. Acad.* 46 A (1941)183.
- [19] L. Infeld and T. E. Hull, The factirisation method, *Rev. Mod. Phys.* 23 (1951) 21.
- [20] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields III : Supersymmetry* . Cambridge University Press, 2000.
- [21] Gordon Kane. *Supersymétrie. Les lois ultimes de la nature dévoilée* . Le Pomnier, September 2003.
- [22] S. Coleman, J. Mandula, All possible symmetries of the S-matrix, *Phys. Rev.* 159 (1967) 12511256.
- [23] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, "All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix" , *Nucl. Phys.* B88 (1975) 257
- [24] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity",. Princeton, USA : Univ. Pr. (1992) 259 p
- [25] D. Baye. *Physique quantique et statistique*. Presses Universitaires de Bruxelles, 2003
- [26] Ming-Tang Lee and Hsiang-Nan Li "Supersymmetric Quantum Mechanics with Spin Orbit Couplings" The physical society of the republic of China, Unv of Chung-Cheng.1996
- [27] H. Yamagishi, *Phys. Rev.* D29, 2975 (1984) ; Ig. Tamm, *Z. Phys.* 71, 141 (1931) ; T. T.Wu et C. N. Yang, *Nucl. Phys.* B107, 365 (1976).
- [28] N. Bensalah, thèse de Doctorat, " Les états liés et de diffusion et l'introduction du superpotentiel", Unv Biskra, 2013.
- [29] M-Elise. Ernould. " La supersymétrie en mécanique quantique" projet de phys mathématique, 2005
- [30] L. Landau and E. Lifshitz, *Nonrelativistic Quantum Mechanics Volume3*, Pergamon Press,N.Y. (1977).

## Bibliographie

- [31] C. C. Tannoudji, B. Diu, and F. Laloé, Hermann, (1996) Paris.
- [32] A. Messiah, Mécanique quantique, Tome 1,2, Dunod, (1997).
- [33] E. Durant, Mécanique quantique, Tome 1, Masson et Cie, (1970), Paris.
- [34] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry and Quantum Mechanics, LA UR-94-569. (2004).
- [35] E. H. Wichmann, Berkeley, Physique quantique, Tome 4, Parie (1981).
- [36] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, “ Progress Toward a Theory of Supergravity” , Phys. Rev. D13 (1976) 3214 3218.
- [37] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen, “Yang-Mills Theories with Local Supersymmetry : Lagrangian, Transformation Laws and Super-Higgs Effect” , Nucl. Phys. B212 (1983) 413.
- [38] G. F. Giudice and R. Rattazzi, “Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking” , Phys. Rept. 322 (1999) 419 499, arXiv :hep-ph/9801271.
- [39] L. Randall and R. Sundrum, “ Out of this world supersymmetry breaking” , Nucl. Phys. B557 (1999) 79 118, arXiv : hep-th/9810155.
- [40] M. Quirós, “New ideas in symmetry breaking ” , arXiv : hep-ph/0302189
- [41] L. Girardello and M. T. Grisaru, “Soft Breaking of Supersymmetry” , Nucl. Phys. B194 (1982) 65
- [42] N. Bernal Hernandez, Thèse de doctorat "Théorie et phénoménologie du MSSM avec des scalaires lourds", Unv Pierre de Marie Curie Parie VI, 2008.
- [43] A. Khare, Supersymmetry in Quantum Mechanic, Institut of physics, India
- [44] E. Ntumba Lobo, " la supersymétrie en physique quantique", unv de Kinshasa, 2010.
- [45] G. Dunne and J. Feinberg, Phys. Rev. D57, 1271 (1998).
- [46] See, for example, F. Cooper, A. Khare and U.P. Sukhatme, Phys. Rev. 251, 267 (1995).
- [47] F.M. Arscott, Periodic Differential Equations (Pergamon, Oxford, 1981); W. Magnus and S. Winkler, Hill's Equation (Wiley, New York, 1966).
- [48] A. Khare and U. Sukhatme, UIC preprint UICHEP-TH/99-3 (1999), manuscript in preparation.
- [49] A. Kratzer, Z. Phys. 3 (1920) 289.
- [50] R.J. Le Roy and R.B. Bernstein, J. Chem. Phys. 52 (1970) 3869.
- [51] S.M. Ikhdaïr and R. Sever, Cent. Eur. J. Phys. 6 (2008) 697; S.M. Ikhdaïr and R. Sever, J Math Chem . 45, 1137 (2009); S.M. Ikhdaïr, R. Sever, J. Mol. Struc. :Theochem.806, 155 (2007); S.M. Ikhdaïr, R. Sever, J. Mol.

## *Bibliographie*

- [52] Struc. :Theochem.855, 13 (2008)
- [53] M.R. Setare and E. Karimi, Phys. Scr. 75 (2007) 90.
- [54] D. Bouaziz, Ann. Phys. 355 (2015) 269.
- [55] Pierre Binétruy. Supersymmetry. Theory, Experiment and Cosmology . Oxford University Press, 2006
- [56] Ulrich Theis. An Introduction to Supersymmetry. [http ://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Events/Lectures/theis.pdf](http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Events/Lectures/theis.pdf)
- [57] M.R. Trautenberg and B. Fuks. Supersymétrie : Exercices avec solutions . Ellipses, 2011.
- [58] Martin P. Stephen. A Supersymmetry Primer. 1997. [http ://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356](http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356)
- [59] Adel Bilal. Introduction to Supersymmetry. 2001. [http ://arxiv.org/abs/hep-th/0101055](http://arxiv.org/abs/hep-th/0101055)
- [60] M. Debab, R. Haffas, Memoire de Master, "Initiation à la Supersymétrie", Unv Biskra, 2019.

## ملخص

قمنا في هذا العمل بتقديم نظرية ميكانيك الكم للتناظر الفائق (MQSUSY) كخطوة أولى. ثم إيجاد الطاقات والحالات المرتبطة الموافقة لكمون من الشكل  $V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$  وذلك بإدخال الكمون الفائق المقترح حسب ميكانيك الكم الفائقة التناظر.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة شرودنجر، ميكانيك الكم للتناظر الفائق، الكمون الفائق.

## Résumé

Nous avons présenté dans ce travail la mécanique quantique supersymétrique (MQSUSY) comme une première étape.

Puis déterminer les énergies et les états liés correspondants d'un potentiel de la forme  $V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ , en introduisant le superpotentiel suggéré par la MQSUSY.

**Mots clés :** équation de Schrödinger, MQSUSY, superpotentiel.

## Abstract

We presented in this work supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) like a first stage.

Then to determine energies and the corresponding dependant states of a potential of the form,  $V(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ , by introducing the superpotential suggested by the SUSYQM.

**Keywords :** Schrödinger equation, SUSYQM, superpotential.