République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Chabira Houda

Titre :

Equations Différentielles Stochastiques et Application

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**Chighoub Farid**	UMKB	Président
Dr.	**Chaouch khouane Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Aoune Salima**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A à mes parents,mon épaux ,et toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en tout premier lieu Allah le tout puissant de m'avoir donné la patience,la force,et le courage,pour élaborer ce travail..

je vourais remercier mon encadreuse **Dr.Nassima Chaouch Khouane.**

Je tiens à remercier les membres de jury Pr.**Chighoub Farid**, et Dr. **Aoune Salima**.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants de département de mathématique à l'université de Biskra, qui m'ont apporté leur aide au bon acheminement de parcours éducatif et qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques trés varies. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblant devoir leur correspondre. L'objectif de ce travaille est introduire l'integrale d'Itô qui permet d'aborder les équations différentielles stochastique.

Le premiere chapitre sera consacré aux rappels de base concernant les processus stochastiques.On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales qui seront utils pour cela. Aprés avoir présenter quelques résultas importants relatifs à l'integrale stochastique.

Dans le deuxième chapitre,on va études l'existence et l'unicité de la solution des équations dans le cas fort et nous basons sur le théoreme de Picard-Banach avec des éxemples.

Enfin le derniér chapitre nous appliquant l'E.D.S dans le controle optimal.

Chapitre 1

Généralisation sur le Calcul Stochastique

On s'interesse dans ce chapitre à l'étude sur la generalite sur le calcule stochastique, pour cela on va montrer quelque consepte de base sur la theorie des mesure, definition élémentraire des processus stochastique et la formule d'Itô, ce chapitre est entierement tiré à partir du polycope suivants [7], [2],[4] et [1].

1.1 Rappel sur mesures

Définition 1.1.1 *Pour tout ensemble Ω, on note par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ces parties, on appelle tribu ou $\sigma-$algebre de Ω tout sous famille $\mathcal{A}$ des parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :*

1 $\Omega \in \mathcal{A}$.

2.Stabilité par passage au complémentaire. i.e : $\forall A \in \mathcal{A}$ alors $A \in \mathcal{A}.^c$

3.Stabilité par union denombrable. i.e : soit $A_1, A_2, A_3, \ldots.., A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

On appelle l'espace $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable.

Définition 1.1.2 *(Tribu engendrée) La tribu engendrè par variable aleatoire X defini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble de partie de Ω qui s'écrivent $X^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est la plus petit* *tribu sur* Ω *rendant* X *mesurable, on note cette tribu par* $\sigma(X)$ *.*

Définition 1.1.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable, une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un application* $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ *telle que :*

1) $\mu(\phi) = 0$.

2) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties deux à deux disjointes de* Ω *alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Définition 1.1.4 *(Intégral de lebesgue) : Soient la fonction mesurable Borélienne* $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *la mesure de Lebesgue* μ, *alors on définit l'intégrale de Lebesgue par la quantité suivante*

$$\int_a^b f d\mu.$$

Théorème 1.1.1 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*une suite de fonctions mesurables sur un espace mésuré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *à valeurs réelles ou complexes telle que : La suite des fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* Ω *vers une fonction* f. *Il existe une fonction intégrable* g *telle que*$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x)$. *Alors* f *est intégrable*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

En particulier

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Théorème 1.1.2 *(Théorème de convergence Monotone de Beppo Levy) Soit* (f_n) *une suite de fonction mesurable telle que :*$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x)$ *.avec* $f_n(x) \geq f(x)$ *pour presque tout* x. *Alors* f *est mesurable et*

$$\int_x f_n d\mu \rightarrow \int_x f d\mu.$$

Théorème 1.1.3 *(Théorème convergence bornée de Lesbesgue) Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurable sur* Ω *telle que :* $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *satisfaisant :*

Il existe une constante $M > 0$ *avec* $|f_n| \leq M$ *pour tout* $n > 1$*,.avec* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$. *Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|\, d\lambda \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n d\lambda \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda.$$

Théorème 1.1.4 *'(Théorème de Fibuni) Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$, $(F, \mathcal{B}, \lambda)$ *deux espaces mésures, tels que les deux mésures étant* $\sigma-$*finies et* $(E \times F, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \lambda)$ *l'espace mesurable produit muni de la mesure produit si* $f : E \times F \to [0, \infty]$ *et est un application* $\mathcal{A}\times\mathcal{B}-$*mesurable, alors les applications :* $x \to \int_E f(x,y)\, d\mu(y)$ *et* $y \to \int_F f(x,y)\, d\lambda(x)$, *sont respectivement* $\mathcal{A}-$*et* $\mathcal{B}-$*mesurable et*

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f(x,y)\, d(\mu\otimes\lambda)(x\times y) &= \int_F \left(\int_E f(x,y)\, d\lambda(y)\right) d\mu(x) \\ &= \int_E \left(\int_F f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\lambda(y).\end{aligned}$$

Définition 1.1.5 *(La convergence en probabilité) Une suite de variables aléatoires réelles* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers la variable aleatoire* X *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Définition 1.1.6 *(La convergence presque surement) Une suite de variables aléatoires réelles* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers la variable aleatoire* X *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Proposition 1.1.1 *La convergence presque sûr implique la convergence en probabilité.*

Lemme 1.1.1 *(Inégalité de Chebychev (ou Markov)) Soient X une variable aleatoire, et $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que Ψ est Borélienne et croissant sur $\mathbb{R}_{+,}$ de plus $\Psi(a) > 0$ pour tout $a > 0$ et $\mathbb{E}\left(\Psi(X)\right) < \infty$. Alors*

$$\mathbb{P}\left(\{X > a\}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\Psi(X)\right)}{\Psi(a)},\ \forall a > 0.$$

1.2 Processus stochastique

Soit $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$.

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique est une famille de variable aleatoire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ indixé par le temps $t \in \mathbb{T}$.*

Définition 1.2.2 *(Filtration) Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$, c'est à dire $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_s$ pour tout $t \leq s$ et $\mathcal{A}_0 = \{\phi, E\}$.*

Définition 1.2.3 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est dit satisfait les conditions habituelles si :*

i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$, avec $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

ii) La filtration est contenue à droite i,e $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s\geq t} F_s, \forall t$.

Définition 1.2.4 *(Processus adapté) Un prosessus stochastique $X = \{X\left(t\right), t \geq 0\}$ est dit adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{A}_t$-mesurable.*

Définition 1.2.5 *(Processus mesurable) Le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si l'application :$(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right)) \to \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est mesurable.*

Définition 1.2.6 *(Processus c à d l à g) Un processus est dit càdlàg (continu à droite avec limite à gauche), s'il éxiste un ensemble négligeable $\mathcal{N} \subset \Omega$ tel que :pour tout $w \notin \mathcal{N}$ la trajectoire*

$t \to X_t(w)$ est continue à droit en tout $t \geq 0$ et admet une limite à gauche en tout $t \geq 0$.

Définition 1.2.7 *On dit que le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est stochastiquement continue en un point* t *si :*

$$\forall\varepsilon \geq 0,\ \mathbb{P}\left(w : |X(t+\Delta t) - X(t)| > \varepsilon\right) \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0.$$

Définition 1.2.8 *(Modification) Soient les processus* (X_t) *et* (Y_t) *deux processus definis sur le mème éspace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *,* X *est une modification de* Y *si pour tout* t*, telle que les variables aleatoires* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P}$*.p.s où*

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Définition 1.2.9 *(Indistingable) Deux processus* (X_t) *et* (Y_t) *sont distingables si et seulment si :*

$$\mathbb{P}(w \in \Omega;\ \forall t \in \mathbb{T}; X_t(w) = Y_t(w)) = 1.$$

Remarque 1.2.1 *Autremendit si* X *et* Y *sont indistingables alors l'un est une modification de l'autre.*

Définition 1.2.10 *(Equivalentes) Deux processuces sont dites équivalentes si et seulmentes si,* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$ *:*

$$Loi\left(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\right) = Loi\left(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}\right).$$

Définition 1.2.11 *(Progressivement mesurable) Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *si pour tout* $t \geq 0$*, l'application :*

$$\begin{aligned} X_t : \quad & ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ & (s,w) \to X_s(w), \end{aligned}$$

mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *de* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$*.*

1.2.1 Martingale

Définition 1.2.12 *Un processus X à valeurs réels est dit une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.

3. Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$.

Définition 1.2.13 *(Martingal locale) Soit X un processus $\mathcal{F}_t-$adapté à trajectoires contiues à droite, on dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temp darrèt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = +\infty \quad \mathbb{P}-p.s$ et pour tout n on a $X_{\tau_n \wedge \chi_{Tn}}$ est une martingale*

Définition 1.2.14 *(Vatiation borné) Un processus $V = (V_t)\, t \geq 0$ est dit à variation borné sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right| < k.$$

Définition 1.2.15 *(Variation quadratique) Un processus $V = (V_t)\, t \geq 0$ est dit à variation fini sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right|^2 < \infty.$$

Définition 1.2.16 *(Variation fini) Un processus $V = (V_t)\, t \geq 0$ est dit à variation fini sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right| < \infty.$$

Définition 1.2.17 *(Semi- martingale) Une semi- martingale X_t continue est un processus reèl adapté et càdlàg qui se décompose en une somme d'une martingale locale M_t et d'une processus V_t réel càdlàg et a variation finie ie :$X_t = M_t + V_t$*

Théorème 1.2.1 *(Théoreme du point fixe de Picard) Soient (E, d) un espace métrique complet et $\phi : E \to E$ une application contractante, i.e.Lipshitzienne de rapport $k < 1$. Alors ϕ admet un unique point fixe $a \in E$ tel que $\phi(a) = a$.*

1.2.2 Mouvement Brownien

On se donne un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cette espace.

Définition 1.2.18 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard si :*

1-$\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1.$

2-$\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable aléatoire de loi Gaussienne centrée de variance* $(t-s)$*.*

3-$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *les variable* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, .., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont independants.*

Théorème 1.2.2 *Un processus Gaussien continue* $(B_t,\ t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien si et seulement si :*

1-$\mathbb{E}(B_t) = 0.$

2-$\mathbb{E}(B_t B_s) = min(s,t)$ *pour tout* $t, s \geq 0$

Proposition 1.2.1 *i) Symetrie : le processus* $(-B_t)$ *est aussi un mouvement Brownien*

ii) Invariante d'echelle : pour tout $c \geq 0$, *le processus* $\left(\frac{1}{c}B_c\right)$ *est aussi un mouvement Brownien.*

iii) Regularité les trajectoires $t \rightarrow B_t(w)$.

iv) (B_t) *est a trajectoire à variation infinie sur tout intervalle fini.*

Théorème 1.2.3 *(Theorème de répresentation des martingales) Soient* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du mouvement Brownien standard* (B_t), M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *. Alors il existe un processus adaoté* H *telle que :* $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) < \infty$, *et pour tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dBs\ \mathbb{P}-p.s.$$

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

1.3.1 Intégrale stochastique pour processus simple

Soit (B_t) un mouvement Brownien adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$.

1-$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $t \geq s$.

2-B_t est $\mathcal{F}_t-$adapté.

3-$\forall t \leq t_1 \leq ... \leq t_n : B_{t_1} - B_t, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$sont indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Définition 1.3.1 *Soit $\theta(t)$ un processus tel que :*

i) $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.

ii) $\forall T \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\theta(t)^2\right) dt\right] < \infty$, on veut définir l'intégrale stochastique d'Itô sous la forme $\int_0^t \theta(s)\, dBs$.

Remarque 1.3.1 *Si f une fonction dérivable, alors :*

$$\int_0^t \theta_s df(s) = \int_0^t \theta_s f(s)\, ds.$$

Proposition 1.3.1 *Soit $\eta = \{t_0, t_1, ., t_n\}$ partition de $[0, T]$ tel que $0 = t_0 \leq t_1 \leq .. \leq t_n = T$, supposons que $\theta(t)$ est constante sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ on définit*

$$I(t) = \sum \theta(t_j)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) + \theta(t_k)(B_t - B_{t_k}), \text{ avec } t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

1-$\forall t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2-$\theta \to I(t)$ est linéaire.

3-$I(t)$ est une martingale.

4- contunuité :$t \to \int_0^t \theta_s dBs$ est à trajectoire continue.

5- Isometrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_{(u)} dB(u)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_{(u)}^2 d(u)\right]. \tag{1.1}$$

Définition 1.3.2 *(Processus d"Itô) Soient* $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *un espace filtré, et* B_t *une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall t\leq T, X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec :

1) X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

2) $(b_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ *deux processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$*.*

3) $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty\ \mathbb{P}-p.s \int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty\ \mathbb{P}-p.s.$

1.3.2 Formule d'Itô

Théorème 1.3.1 *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *alors :*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds,$$

avec

$$df(X_t) = f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds. \tag{1.2}$$

Théorème 1.3.2 *Soit* f *une fonction défine sur* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *par rapport à* t*, et de classe* C^2 *par rapport à* x *on a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\, d\langle X_s\rangle,$$

telle que

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.3.3 *Soient* X_1 *et* X_2 *deux processus d'Itô, et* f *une fonction dans* $\mathbb{R}$ *de classe*

C^2 *alors*

$$
\begin{aligned}
f\left(X_1(t), X_2(t)\right) = {} & f\left(X_1(0), X_2(0)\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_1(s) \\
& + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1\right\rangle_s \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_2\right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1, X_2\right\rangle_s .
\end{aligned}
$$

Théorème 1.3.4 *(Intégrale par partie) Soit* X *et* Y *deux processus d'Itô telle que* $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s$ *et* $Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s' ds + \int_0^t \beta_s' dB_s$.

Alors

$$
X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X, Y\right\rangle_t ,
$$

avec

$$
\left\langle X, Y\right\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s' ds.
$$

De plus la formule d'intégrale par partie s'écrit

$$
d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t .
$$

1.3.3 Quelques inégalités

Théorème 1.3.5 *(Inegalité de Hölder :)Soient* p, q *deux nombres reèlles conjugués* $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty, X \in L^p, Y \in L^q$ *alors :*

$$
XY \in L^1 \text{ et } \left\|XY\right\|_1 \leq \left\|X\right\|_p \left\|Y\right\|_q .
$$

Remarque 1.3.2 *Pour* $p = q = 2$, *on obtient l'inégalité de Cauchy-Shwartz*

$$
\mathbb{E}\left(|XY|\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left|X\right|^2}\sqrt{\mathbb{E}\left(|Y|^2\right)}. \tag{1.3}
$$

Lemme 1.3.1 *(Inégalité Bukholder-Davis-Gundy (B D G))*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s\right)dB_s\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s,X_s\right)\right|^2 ds\right], \tag{1.4}$$

où C est un constante positive.

Lemme 1.3.2 *(Lemme de Gronwall) Soit g une fonction positive mesurable sur $[0,T]$ telle que $g\left(t\right)\leq a+b\displaystyle\int_0^t g\left(s\right)ds, t\geq 0$ avec a,b des constantes positive alors :*

$$g\left(t\right)\leq a\exp\left(bt\right). \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Equation Differentielle Stochastique

Le but de ce chapitre est donner un modèl mathematique pour une équation differentielle pertubée par un bruit aléatoire. Partous d'une équation differentielle ordinnaire

$$\frac{dX_t}{dt} = b\left(X_t\right).$$

Ces équations décrivant en général l'évolution dant le temps d'un systèm physique, par exemple X_t peut ètre la position et le mouvement d'un satellite à l'instant t.

L'équation décrivant l'évolution du satellite ne peut pas ètre déterministe à cause de nombreux paramètre inconnus On ajoute donc un térme de bruit aleatoire de la forme $\sigma\left(X_t\right) dB_t$ où B_t est un mouvement Brownienne et $\sigma\left(.\right)$ représent l'intensité de bruit dépendant de l'état du système physique à l'instant t. On arrive donc à une équation differentielle stochastique (abréviation E-D-S) de la forme suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

L'inconnu est le processus (X_t), les cofficients b et σ sont appelles respectivement la dérivé du processus et son cofficient de diffision.

Ce chapitre est entierement tiré à partir du livres suivants [6], et [5].

2.1 La solution fort de l'équations differentielle stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré, B_t est $(\mathcal{F}_t)$-MB $d-$dimensionnelle, $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique continue à valeur dans $\mathbb{R}^n$, et$\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to M_{n\times d}(\mathbb{R})$, et $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, deux fonctions Boreliennes, et ζ un variable alertoire $\mathcal{F}_0$ mesurable indépendante de B_t telle que :$\mathbb{E}(|\zeta|^p) < \infty$, et $\forall p > 1$.

Définition 2.1.1 *On dit que l'équation* (2.1) *admet une solution forte si pour chaque espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *pour tout mouvement Brownien* $B = (B_t)\, t \in [0,T]$, *il existe un processus continue* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *tel que :*

1- X est progressivement mesurable

2- $\mathbb{P}-p.s \int \{|b(s,X_s)| + \|\sigma(s,X_s)\|\} < \infty$ où :$\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$.

3- $\mathbb{P}-p.s$ on a :$0 \leq t \leq T$:

Alors

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s.$$

Définition 2.1.2 *On dit que l'équation* (2.1) *admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *er* $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| > 0\right) = 0.$$

Notation 2.1.1 *On note par*

$$S^2 \quad : \quad \textit{l'espace de mesure } X_t \textit{ progressivement mesurable tq :}$$
$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) \quad < \quad \infty, \textit{ muni de } \|X_t\|_2 = \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Théorème 2.1.1 *(Théoreme d'éxistance et unicité) Supposons que pour tout* x, $y \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \geq 0$. *Les fonctions b et σ satisfait les deux conditions suivantes :*

1) Condition Lipschitz : S'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq k|x-y|^2. \tag{2.2}$$

2) Croissance lineaire : S'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L\left(1+|x|^2\right). \tag{2.3}$$

3) X_0 est independente à $(B_t, t \geq 0)$ et de carré integrable i.e :

$$\int_0^t |X_0|^2 \, ds < +\infty.$$

Alors :On dit que l'équations differentielles stochastique (2.1) *admet une unique solution à trajectoire continue. De plus cette solution vérifie* $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) < \infty$.

La preuve du theorème l'existance et l'unicité est basé sur les deux lemmes 1.5 et 1.4.

Preuve. **1) L'unicité :** Soient $X \in S^2$ et $Y \in S^2$, où $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux solutions de l'E.D.S (2.1), $X_0 = Y_0 = \xi$

En utilisant les formules de X_t et Y_t et on obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|\xi + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s - \xi - \int_0^t b(s,Y_s)\,ds - \int_0^t \sigma(s,Y_s)\,dB_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dB_s\right|^2.
\end{aligned}$$

On applique maintenant cette inégalité :$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, alors :

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dB_s\right|^2.$$

En passant à l'ésperence mathématique et d'aprés l'inégalite de Cauchy Schwartz (1.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s\right) - b\left(s, Y_s\right)\right) ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(s, Y_s\right)\right) dB_s\right|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t 1^2 ds \int_0^t \left|\left(b\left(s, X_s\right) - b\left(s, Y_s\right)\right)\right|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(s, Y_s\right) dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

D'aprés l'isometrie d'Itô (1.1), on obtient :

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t 1^2 ds \int_0^t \left|\left(b\left(s, X_s\right) - b\left(s, Y_s\right)\right)\right|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(s, Y_s\right)\right|^2 ds.$$

D'aprés condition de Lipchitzienne (2.2), nous donne

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2T\mathbb{E}\int_0^t k\left|X_s - Y_s\right|^2 ds + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t k\left|X_s - Y_s\right|^2 ds\right).$$

De plus théorème de Fibuni **??**, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2Tk\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds + 2k\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds.$$

On pose $C = \max\left(2Tk, 2k\right)$, alors

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds.$$

D'aprés inégalité de Gronwall (1.5), on a

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 0\int_0^t e^{cs} = 0.$$

Alors

$$X_t = Y_t.\mathbb{P} - p.s.$$

Finalment on a l'unicité fort de la solution.

2) Existance : On montre l'existance d'une solution forte, en utilisant la méthode des approximation successives, pour cela on pose pour tout

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| = \left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) ds + \int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) dB_s\right|.$$

En utilisant le même technique pour l'unicité, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right) ds.$$

On a :

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t b\left(s, X_s^0\right) ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right) dB_s\right|^2.$$

D'après l'inégalite de Cauchy-Schwartz (1.3) et l'isometrie d'Itô(1.1) , on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2t\mathbb{E}\int_0^t \left|b\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds,$$

En utilisant la croissance linéaire (2.3) de b et σ, on trouve

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2Tk\mathbb{E}\int_0^t \left(1 + |X_0|^2\right) ds + 2k\mathbb{E}\int_0^t \left(1 + |X_0|^2\right) ds.$$

D'aprés théorème de Fibuni **??**, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 &\leq 2Tk\int\limits_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X_0\right|^2\right)ds + 2k\int\limits_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X_0\right|^2\right)ds \\ &\leq M\left(1+\left|X_0\right|^2\right)T \leq CT,\end{aligned}$$

avec : $M = \max(2Tk, 2k)$ et $C = M\left(1+\left|X_0\right|^2\right)$.

Alors

$$\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 \leq C\int\limits_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right)ds.$$

En appliquant les mêmes étaps successivement, nous avons trouver :

$$\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 \leq C^2\int\limits_0^t sds \leq C^2\frac{t^2}{2} \leq \frac{(CT)^2}{2}.$$

De plus, pour $n = 3$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^3 - X_t^2\right|^2 &\leq C\int\limits_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^2 - X_s^1\right|^2\right)ds \\ &\leq C\int\limits_0^t C^2\frac{s^2}{2}ds \\ &\leq \frac{C^3}{2}\int\limits_0^t s^2ds \\ &\leq \frac{C^3}{2}\frac{t^3}{3} \\ &\leq \frac{C^3T^3}{1.2.3} \\ &\leq \frac{(CT)^3}{3!}.\end{aligned}$$

Alors $\forall n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right) ds \\
&\leq C\int_0^t \left(\frac{C^n s^n}{n!}\right) ds \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1}\right) \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Deuxièmment on montre que X_t^n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, en utilisant l'inégalité triangulaire on trouve :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=n}^{m-1}\left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{(MT)^{K+1}}{(K+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Lorsque :$n,\, m \to \infty$, on obtient

$$\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ (qui est lui même un espace de Banach), et par conséquent elle est converge.dans $L^2(\Omega)$. Notons X_t la limite de la suite X_t^n alors $\lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t$, telle que :

$$X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s. \tag{2.4}$$

Il faut montrer que la solution s'écrit sous la forme E.D.S(2.1), en utilisant l'isometrie d'Itô (1.1) on a

$$\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) - \sigma\left(s, X_s\right)\right) dB_s\right)^2\right| \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|X_s^{n-1} - X_s\right|^2 ds\right).$$

Comme $X_t^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} X_t$. Alors

$$\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Shwartz (1.3), on a

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^{n-1}\right) - b\left(s, X_s\right)\right) ds\right|^2 \leq CT\mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s\right|^2\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Par la continuité de la fonction b on obtient :

$$b\left(s, X_s^{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} b\left(s, X_s\right).$$

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t^n = \zeta + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} X_t = \zeta + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

Donc X_t est un solution de l'équation.(2.1) . Il reste vérifier que $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t\right|^2\right) < \infty$.

Premièrement d'aprés l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, on a

$$\begin{aligned}
|X_t|^2 &= \left(|\zeta| + \int_0^t |b(s,X_s)|\, ds + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|\, dBs\right)^2 \\
&\leq 3|\zeta|^2 + 3\left(\int_0^t |b(s,X_s)|\, ds\right)^2 + 3\left(\int_0^t |\sigma(s,X_s)|\, dBs\right)^2 .
\end{aligned}$$

En passant à l'inégalité de Cauchy-Shwartz (1.3) et l'esperance mathématiques, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|\zeta|^2 + 3t\mathbb{E}\int_0^t |b(s,X_s)|^2\, ds + 3\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\sigma(s,X_s)^2\right| dBs\right)^2 .$$

En appliquant l'isometrie d'Itô (1.1), on trouve

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|\zeta|^2 + 3T\mathbb{E}\int_0^t |b(s,X_s)|^2\, ds + 3\mathbb{E}\left(\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2\, ds\right).$$

D'aprés la croissance linéaire de b et $\sigma\,(2.3)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|\zeta|^2 + 3T\mathbb{E}\int_0^t k\left(1+|X_s|^2\right) ds + 3\mathbb{E}\int_0^t k\left(1+|X_s|^2\right) ds.$$

Puis on applique le théorème de Fibuni 1.1.4, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|\zeta|^2 + 3Tk\int_0^t \mathbb{E}\left(1+|X_s|^2\right) ds + 3k\int_0^t \mathbb{E}\left(1+|X_s|^2\right) ds.$$

On posons $N = \max(3, 3Tk, 3k)$, alors

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq N\mathbb{E}|\zeta|^2 + N\int_0^t \left(1+\mathbb{E}|X_s|^2\right) ds + N\int_0^t \left(1+\mathbb{E}|X_s|^2\right) ds.$$

On pose aussi $c = \max(N, 2N)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] &\leq c\mathbb{E}|\zeta|^2 + c\int_0^t \left(1+\mathbb{E}|X_s|^2\right) ds \\ &\leq c\mathbb{E}|\zeta|^2 + cT + c\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^2 ds \\ &\leq c\left(\mathbb{E}|\zeta|^2 + T\right) + c\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^2 ds.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwal 1.5, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq c\left(\mathbb{E}|\zeta|^2 + T\right) e^{ct},$$

telle que $a = c\left(\mathbb{E}|\zeta|^2 + T\right)$ et $b = c = \max(N, 2N)$ et $M = c\left(\mathbb{E}|\zeta|^2 + T\right) e^{ct}$ sont positives. Alors :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq M.$$

Et d'apres inégalite de B.D.G (1.4) , on a

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) \leq c\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq M < +\infty.$$

D'où $X_t \in S^2$.

CQFD. ■

Exemple 2.1.1 *(Pont Brownien) La solution de l'équation suivant*

$$\begin{cases} dx_t = \frac{x_t}{t-1}dt + dB_t, 0 \leq t \leq 1, \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

est

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s, 0 \leq t \leq 1.$$

Le dernier equation est appelée le pont Brownien entre l'origine au temps 0 *et au temps* t

En appliquant le lemme d'Itô ou une intégration par partie à $f(t,y) = (1-t)\, y$ *et* $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s$*, donc*

$$dY_t = \frac{dB_t}{1-t},$$

il vient

$$dX_t = (-dt) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} + (1-t)\, \frac{dB_t}{1-t}.$$

On admet l'unicité de la solution . Le processus X *est gaussien car* $\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$ *est une intégrale de wiener , et on a* $\mathbb{E}\,|X_t| = 0$ *et la covariance de* X *est donné par*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X_t X_s) &= (1-t)\,(1-s)\,\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{dB_u}{1-u} \int_0^s \frac{dB_u}{1-u}\right) \\
&= (1-t)\,(1-s) \int_0^s \frac{du}{(1-u)^2} = (1-t)\, s.
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = t\,(1-t)\,,$ *d'où* $X_t \to 0$ *quand* $t \to 1,$ *le processus* X *est un pont Brownien, d'où*

$$\begin{cases} dX_t = \frac{x_t}{t-1} dt + dB_s, 0 \leq t \leq 1, \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.1.2 *(Equation de Langevin) On considère l'équation de Langevin défine par*

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t,$$

avec $b, \sigma > 0,$ *En multipliant par* e^{bt}*, on trouve*

$$e^{bt} dX_t = -be^{bt} X_t dt + \sigma e^{bt} dB_t,$$

En appliquant par ailleurs la formule d'Itô avec $Y_t = g\,(t, X_t) = e^{bt}$*, on trouve*

$$d\left(e^{bt} dX_t\right) = be^{bt} X_t dt + e^{bt} dB_t = e^{bt} dB_t.$$

Donc

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{bu} dB_u.$$

De plus

$$X_t = e^{-bt} X_0 + \int_0^t \sigma e^{-b(t-u)} dB_u.$$

Cet processus est appelé processus d'Ornstein-Ulhenbeck. On remarque alors que :

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = e^{-bt}\mathbb{E}\left(X_0\right),$$

et que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t^2\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-2bt}\left(X_0^2\right) + 2\sigma e^{-bt} X_0 \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s + \sigma^2 \left(\int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right)^2\right], \\
&= e^{-2bt}\mathbb{E}\left(X_0^2\right) + 2\sigma e^{-2bt}\mathbb{E}\left(X_0\right)\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right) + \sigma^2\left(\int_0^t e^{-2b(t-s)} ds\right), \\
&= e^{-2bt}\mathbb{E}\left(X_0^2\right) + \frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2bt}\right),
\end{aligned}$$

et la variance $V\left(X_t\right)$ est donner par :

$$V\left(X_t\right) = e^{-bt}\mathbb{V}\left(X_0\right) + \frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2bt}\right).$$

Chapitre 3

Application sur le Contrôle Optimal Stochastique

3.1 Formulation du problème

Ce chapitre est entierement tiré à partir du livres suivants [3], et [5].

Notre but dans ce chapitre est de dérivé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les E.D.S.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré sur lequel on définit un mouvement Brownien $d-$dimensionnel $B = (B_t, t \geq 0)$, et la filtration naturelle de mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$, T un réel strictement positive fixé, U un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 *(Le contôle admissible) On définit un contôle admissible pour tout processus $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans U tel que :*

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |v_t|^2) \leq \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contôles admissibles

Considerons le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de E.D.S (les prix de tous les articles) suivant

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)\, dt + \sigma(t, x_t)\, dB_t \\ x_0 = \zeta, \end{cases}$$

et le contrôle

$$\begin{aligned} u: \quad & [0, T] \times \Omega \to A \subset \mathbb{R}, \\ & (t, w) \to u_t(w). \end{aligned}$$

Alors l'E.D.S contrôlée est donné

$$\begin{cases} dx_t^u = b(t, x_t^u, u_t)\, dt + \sigma(t, x_t^u, u_t)\, dB_t, \\ x_0^u = \zeta. \end{cases}, \tag{3.1}$$

tel que x_t^u la solution contrôlé et b, σ sont linéaires et on a V le processus de prix qui s'écrit sous la forme E.D.S.R suivante

$$\begin{cases} dV_t = f(t, x_t, z_t, u_t)\, dt + z_t dB_t, \\ V_T = g(x_T). \end{cases},$$

On écrit cette E.D.S.R sous forme intégrable

$$V_t = \int_t^T h(s, x_s, u_s)\, ds - \int_t^T z_s dB_s + g(x_T).$$

Nous passant à l'éspérence pour éliminer le terme hasard sur l'EDSR précédente, nous obtient

$$\mathbb{E}(V_t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T h(s, x_s, u_s)\, ds + g(x_T)\right] =: J(u).$$

Définition 3.1.2 *(Fonction de coût) Soit la fonction de coût J donné par :*

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, x_t^u, u_t)\, dt + g(x_T^u)\right], \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} h &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \boldsymbol{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+, \\ g &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 *(Le contrôle Feed-Back) Soit V un contrôle $\mathcal{F}_t-$adapté, et $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X. On dit que u_t est feed-back contôle si :u_t est aussi adapté par rapport la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$.On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulment si dépend de X.*

Le but du problème de contrôle optimal $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$ est de minimiser (maximiser) la fonctionnelle de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$, on choisit un contrôle $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(\widetilde{u}) = \inf_{u\in\mathcal{U}} J(u). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1.1 *On suppoose qu'il existe $\widehat{u}$ qui minimise ou bien maximise la fonctionnelle de coût. D'après condition de Fillipove (l'ensemble $\{b,h\}$ est convexe) noue assure l'existence du contrôle optimal*

Définition 3.1.4 *On définit l'équation adjoint suivante*

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t,x,u,p,q)\,dt + q_t(x_T) \\ p_T = g_x(x_T), \end{cases} \tag{3.4}$$

avec H c'est la Hamiltonienne tel que

$$H(t,x,u,p,q) = pb(t,x,u) + q\sigma(t,x,u) + h(t,x,u).$$

La solution d'équation adjointe (3.4) est donnée par (p,q).

Hypothése :

Les fonctions b, σ, h et g sont continues en (x, u), et leur dérivées sont continues et uniformément bornées.

Les fonctions b, σ, h et g sont Croissance lineaire,,,,

Les fonctions b, σ h, g sont bornées et Lipchitzienne en x, u.

3.2 Contrôle Feedback

Supposont que les coefficientes d'EDS (3.1) sont linieare

$$\begin{cases} dx_t = (x_t + u_t)\, dt + (x_t + u_t)\, dB_t, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

La fonction de coût (3.2) est donné par sa forme lineaire quadratique

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, x_t, u_t)\, dt + g(x_T)\right], \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \left(x_t^2 + u_t^2\right) dt + (x_T)\right]. \end{aligned}$$

Le Hamiltonien c'est

$$H(t, x, u, p, q) = p_t (x_t + u_t) + q_t (x_t + u_t) + \frac{1}{2}\left(x_t^2 + u_t^2\right).$$

Les conditions necessaire d'optimalites nous permet de trouver le contrôle optimal, alors nous dérivons H par raport aux u,on trouve

$$H_u(t, x, u, p, q) = p_t + q_t + u_t.$$

Si $H_u(t) = 0$, on trouve le contrôle optimal

$$\widetilde{u} = -p_t - q_t. \tag{3.5}$$

On a l'E.D.S qui dépent du contrôle optimal (3.5) est donné par

$$\begin{cases} d\widetilde{x}_t = (\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dt + (\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dB_t, \\ \widetilde{x}_0 = 0. \end{cases}$$

La dérivée de Hamiltonien est

$$H_x\,(t, x, u, p, q) = p_t + q_t + x_t.$$

tel que p c'est le processus adjoint, qui est lui même la solution d'équation EDSR suivante

$$\begin{cases} dp_t = -\,(p_t + q_t + \widetilde{x}_t)\, dt + q_t dB_t, \\ p_T = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Alors on a Forward-Backward E.D.S fortement couplée

$$\begin{cases} d\widetilde{x}_t = (\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dt + (\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dB_t, \\ dp_t = -\,(p_t + q_t + \widetilde{x}_t)\, dt + q_t dB_t, \\ \widetilde{x}_0 = 0, p_T = 1. \end{cases}$$

Pour résourdre cette système on suppose

$$p_t = \alpha_t \widetilde{x}_t + \beta_t, \tag{3.7}$$

tel que α, β deux fonctions déterministes, et en appliquant la formule d'Itô (1.2) sur (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} dp_t &= d\,(\alpha_t \widetilde{x}_t) + d\beta_t \\ &= \overset{\bullet}{\alpha}_t \widetilde{x}_t dt + \alpha_t d\widetilde{x}_t + \overset{\bullet}{\beta}_t dt \\ &= \overset{\bullet}{\alpha}_t \widetilde{x}_t dt + \alpha_t\,(\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dt + \alpha_t\,(\widetilde{x}_t - p_t - q_t)\, dB_t + \overset{\bullet}{\beta}_t dt. \end{aligned}$$

Pour la factorisation

$$dp_t = \left[\overset{\bullet}{\alpha}_t \widetilde{x}_t + \alpha_t \left(\widetilde{x}_t - p_t - q_t\right) + \overset{\bullet}{\beta}_t\right] dt + \alpha_t \left(\widetilde{x}_t - p_t - q_t\right) dB_t. \tag{3.8}$$

On remplace p_t par sa valeur de (3.7) sur (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} dp_t &= \left[\overset{\bullet}{\alpha}_t \widetilde{x}_t + \alpha_t \left(\widetilde{x}_t - \alpha_t \widetilde{x}_t - \beta_t - q_t\right) + \overset{\bullet}{\beta}_t\right] dt + \alpha_t \left(\widetilde{x}_t - \alpha_t \widetilde{x}_t - \beta_t - q_t\right) dB_t, \\ &= \left[\widetilde{x}_t \left(\overset{\bullet}{\alpha}_t - \alpha_t^2 + \alpha_t\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t + \overset{\bullet}{\beta}_t\right] dt + \left[\widetilde{x}_t \left(\alpha_t - \alpha_t^2\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t\right] dB_t. \end{aligned}$$

Alors on a le système

$$\begin{cases} dp_t = \left[\widetilde{x}_t \left(\overset{\bullet}{\alpha}_t - \alpha_t^2 + \alpha_t\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t + \overset{\bullet}{\beta}_t\right] dt + \left[\widetilde{x}_t \left(\alpha_t - \alpha_t^2\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t\right] dB_t, \\ p_T = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

D'autre part, on a (3.6) on remplace p_t par sa valeur (3.7), on trouve

$$\begin{cases} dp_t = -\left(\alpha_t \widetilde{x}_t + \beta_t + \beta + \widetilde{x}_t\right) dt + q_t dB_t, \\ p_T = 1, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} dp_t = -\left(\widetilde{x}_t \left(\alpha_t + 1\right) + \beta_t + q_t\right) dt + q_t dB_t, \\ p_T = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

On compare (3.9) avec (3.10) membre à membre, on obtient les deux équations suivantes

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\alpha}_t - \alpha_t^2 + \alpha_t = \alpha_t - 1, \\ -\beta_t - q_t = -\alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t + \overset{\bullet}{\beta}_t, \\ \widetilde{x}_t \left(\alpha_t - \alpha_t^2\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t = q_t \end{cases}$$

Pour déterminer q_t on a d'apres équation suivante

$$q_t = \widetilde{x}_t \left(\alpha_t - \alpha_t^2\right) - \alpha_t \beta_t - \alpha_t q_t.$$

Alors

$$q_t = \frac{\widetilde{x}_t \left(\alpha_t - \alpha_t^2\right) - \alpha_t \beta_t}{(1 + \alpha_t)} \tag{3.11}$$

Alors on obtient

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\alpha}_t - \alpha_t^2 + 2\alpha_t + 1 = 0, \\ \overset{\bullet}{\beta}_t + (-\alpha_t + 1)\,\beta_t - \alpha_t q_t + q_t = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Le première équation s'appelle équation de Ricatti et le deuxième équation c'est une équation déffirentielle ordinaire.

Donc on a

$$\begin{aligned} \widetilde{u} &= -p_t - q_t, \qquad (3.13) \\ &= -\alpha_t \widetilde{x}_t - \beta_t - q_t. \end{aligned}$$

Tel que α la solution d'équation de Riccati (3.12) et β_t la solution d'E.D.O (3.12).

Théorème 3.2.1 *Le contrôle optimal* (3.13)*.s'écrit sous forme Feedback tel que α la solution d'équation de Ricatti* (3.12)*, β_t solution E.D.O* (3.12) *et q donné par* (3.11)*.*

Conclusion gérérale :

Dans ce travail, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastique que l'on notera E.D.S. Premièment nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution dans le cas fort et nous donnons quelques exemples dans les deux cas.

Finalements, nous appliquantes l'E.D.S dans le contrôle optimal stochastique.

Bibliographie

[1] Jeanblanc, M (2006). Cours de Calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes. University of Évry.

[2] Campillo,F (1996) Processus de diffusion, DEA de Mathématiques Appliquées, Université de Procevence.

[3] Chala, A (2013).Contibution à l'étude des contrôles optimales stochastique, Doctorat au université de Biskra.

[4] Lessard, S (2014). Processus stochastique Cours et exercices corrigés. Edition Ellipses .288 pages.

[5] Øksendal, B (1997) Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications Fifth Edition,Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New-York.

[6] Pardoux,E.,Răşcanu, A.(2014). Stochastic Differentiel Equations, Backward SDEs, Partial Differentiel Equations.Springer edition..680 pages.

[7] Khalfallah, N.(2019).Cours de martingale.département de Mathématique, premiere année Master, université de Biskra.

[8] Gallardo,L .(2008). Mouvement Brownien et calcul d'Itô Cours et exercices corrigés.Hermann éditeurs..256 pages.

Annexe :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité
$\mathcal{P}(E)$	tribu grossien
L^1	l'espace des fonction intégrable
$p.s$	presque surement
C^1, C^2	l'espace des fonction continue intégrable
F_t	filtration
B_t	mouvement brownien
$E.D.S$	équation différentielle stochastique
$\mathbb{P} - p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
χ	la fonction indicatrice
$p(t)$	le processus adjoint
$H(t, x, p, q, u)$	le hamiltonienne
$F - B - E.D.S$	Forward-Backward E.D.S
$\widetilde{u}$	le controle optimale
u	côntrole admissible
J	fonction de coût