République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

Master en Mathématiques

Option :**Probabilités**

Par

Grainat Sabrina

Titre :

Principe de Maximum Stochastique pour les équations différentielles stochastiques(EDSs)

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Korichi Fatiha	U.Biskra	Encadreur
Dr.	Abba Abdelmadjid	U.Biskra	Président
Dr.	Berrouis Nassima	U.Biskra	Examinateur

2020

Dédicace

À mon très chère pére

Qui décédé il y a un an et qui était un parfait exemple pour le chef de famille, et qui n'a jamais négligé de me fournir le chemin de la bonté et du bonheur.

À mon très chère mère

Quoique je fasse ou que je dise, je ne saurai point remboursez vos dettes ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les défférents obstacles.

À mes Chers sœurs et frères

Qui je dépendent d'eux dans tous les petits et grands.

À tous mes collègues de promotion de **Math 2020**.

REMERCIEMENTS

La louange à Allah

Je tiens à remercier directeur de ce mémoire professeur **Korichi Fatiha**, pour l'aide qu'il a fournie et les connaissances qu'il a su me transmettre. Je le remercie également pour sa disponibilité et la qualité de ses conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Dr.Abba Abdelmadjid et **Dr.Berrouis Nassima.**

Enfin, je remercie tous mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Merci à tous.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDSs) représentent une généralisation des équations différentielles ordinaires (EDOs). Celles-ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Itô pour étudier les trajectoires d'un processus de diffusion. Cette notion a été traitée de maniere profonde en relation avec la théorie des semi-martingale. Des applications dans tous les domaines de sciences de l'ingénieur (féltrage des processus, contrôle optimal, mathématiques financières, gestion des stoks etc...) cette étude a porté sur le but les équations différentielles stochastiques sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

où b est appelée la derive (drift) et σ appelé le coeffcient de diffusion, et $\mathcal{B}_t$ un mouvement Brownien.

Notre objectif est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques. Ce travail, consiste à minimiser (ou maximiser) sur l'ensemble des contrôles admissibles, une fonction de coût J défini par

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right],$$

et le couple (X, u) est dite solution optimale. Le système considéré dans ce travail est gouverné par des équations différentielles (EDSs) avec des coefficients contrôllés. Nous supposons le domaine du contrôle est convexe. La preuve de ce résultat est basée sur la perturbation convexe et la formule d'Itô.

Ce mémoire est structuré de trois chapitres :

Le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour le deuxième et le troisième chapitres, ces deux derniers, contient l'essentielle de notre travail.

Dans le deuxième chapitre consacré à l'étude les équations différentielles stochastiques et leur théoreme d'existence et d'unicité de solution.

Le dernier chapitre contient la contribution essentielle de ce travail, nous établirons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité satisfaites par un contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques défini par

$$J(\widetilde{u}(.)) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{J(u(.)), u(.) \in U : convexe\},$$

où $\mathcal{U}$ est l'espace de contrôle admissible. La méthode de démonstration basée sur le principe d'optimisation convexe.

Chapitre 1

Calcul stochastique

L'objet de ce chapitre est rappeler les définitions et les notions de base de calcul stochastique pour l'utilisation dans les prochaines chapitres.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *(Filtration) Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *(*$s < t$ *;* $\mathcal{F}_s < \mathcal{F}_t$*), on appelle espace probabilisé filtrée* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ *tout espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Définition 1.1.2 *La filtration naturelle (ou canonique)* $\mathcal{F}_t^X$ *associée à la processus* X *est définie par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t), t \in T.$$

Définition 1.1.3 *On dit que* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est compléte (augmentée) si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles négligeables de* $\mathcal{F}$ *.*

Remarque 1.1.1 *Lorsque on parlera de la filtration naturelle il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée.*

Définition 1.1.4 *(Variable aléatoire) Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ξ) *deux espaces probabilisables et* P *une loi de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*, on appelle variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

et à valeurs dans (E, ξ), tout application X de Ω dans E est $(\mathcal{F}, \xi)-$mesurable i.e :

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}; \forall A \in \xi.$$

Définition 1.1.5 *(Processus stochastique) Soit T un ensemble, on appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.2 *Si T est une variable dénombrable totalement ordonée (comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$) X est appelle un processus à temps discret, et pour $T = \mathbb{R}_+$, X est appeleé un processus stochastique à temps continue.*

On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire à chaque ω, on associe la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ qui est appelée trajectoire.

Définition 1.1.6 *(Processus à trajectoire continue, càdlàg et càglàd) On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les application $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

Définition 1.1.7 *(Processus adapté) Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si $\forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.8 *(Processus progressivement mesurable) Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$, si pour tout $t \in T$ l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Remarque 1.1.3 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus réel adapté, et à trajectoire continue à droite (c-à-d) ou continue à gauche (c-à-g), alors X est progressivement mesurable.*

Définition 1.1.9 *(Modification d'un processus) Soient X et Y deux processus définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que X est une modification de Y si pour tout $t \geq 0$ les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $P-p.s$:*

$$\forall t \geq 0; P(X(t) = Y(t)) = 1.$$

Définition 1.1.10 *(Indistingubilité d'un processus) X et Y sont indistinguables si $P-p.s$ les trajectoires de X et Y sont les même, c'est-à-dire :*

$$P(X(t) = Y(t); \forall t \geq 0) = 1.$$

Proposition 1.1.2 *Cette derniére définition est plus forte que la définition de modification. Notons que si X est une modification de Y, et si X et Y sont à trajectoires continue à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.*

1.2 Martingale

Définition 1.2.1 *(Martingale, sous-martingale et surmartingale) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ un espace probabilisé filtré, une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que :*

1. $E(|X_t|) < \infty$, pour tout $t \geq 0$.
2. $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.
3. $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, pour tout $0 \leq s < t$.

Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une surmartingale (respectivement une sous-martingale,), alors :

$$\forall\ 0 \leq s < t;\ E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s\ (respectivement\ E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s).$$

Définition 1.2.2 *(Temps d'arrêt) Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, *i.e un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt par rapport à la filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *si pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.2.3 *(Martingale locale) Soit* X *un processus càdlàg adapté, on dit que* X *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(\tau_n)_{n \geq 1}$ *telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n \rightarrow \infty \ p.s,$$

et le processus arrêté X^{τ_n} *est une martingale pour tout* n.

Proposition 1.2.1 *(Inégalité de Doob) Si* X *est une martingale continue alors*

$$E\left(\sup_{s \leq T} |X_s|^2\right) \leq 4E\left(|X_T|^2\right).$$

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *Un processus* $\mathcal{B}_t$ *à valeurs réelles est appelé mouvement Brownien standard si :*

1. $t \longmapsto \mathcal{B}_t(\omega)$ est continue $P - p.s.$
2. $\mathcal{B}_0 = 0 \ P - p.s.$
3. $\forall \ 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
4. $\forall \ 0 \leq s \leq t$, $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ est de loi $N(0, t-s)$.

Autrement dit, le processus $\mathcal{B}$ part de 0 et de trajectoire continue, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Proposition 1.3.1 *Soit $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique tel que toutes les trajectoires sont continues, et tel que $\mathcal{B}_0 = 0$, alors les propriétés suivante sont équivalentes :*

1. Le processus $\mathcal{B}$ est un mouvement Brownien standard.
2. Le processus $\mathcal{B}$ est un gaussien avec espérence $E(t) = 0$ et covariance $cov(s,t) = \min\{s,t\}$.

Corollaire 1.3.1 *Si $(\mathcal{B}_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors :*

1. Le processus $\widehat{\mathcal{B}}$ défini par $\widehat{\mathcal{B}}_t = -\mathcal{B}_t$ est un mouvement Brownien.
2. Pour tout c > 0 le processus $\widetilde{\mathcal{B}}$ défini par $\widetilde{\mathcal{B}}_t = \frac{1}{c}\mathcal{B}_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.
3. Le processus $\overline{\mathcal{B}}$ défini par $\overline{\mathcal{B}}_t = t\mathcal{B}_{\frac{1}{t}}$, $\forall t > 0$; $\overline{\mathcal{B}}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

Théorème 1.3.1 *(Représentation des martingales Browniennes) Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}}\right\}_{t\in[0,T]}$, alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$, tel que :*

$$\forall t \geq 0;\ M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\mathcal{B}_s,\ P - p.s.$$

1.4 Intégrale stochastique et formule d'Itô

1.4.1 Intégrale stochastique

Dans l'intégrale stochastique on cherche à défini de v.a de type :

$$I(\theta) = \int_0^t \theta_s d\mathcal{B}_s,$$

où $(\theta_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $\{\mathcal{B}_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, on note la filtration naturelle de M.B par

$$\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}} := \sigma\left\{\mathcal{B}_s;\ s \in [0,t]\right\}.$$

Définition 1.4.1 *(Bon processus) On dit que* $\{\theta_t;\ t \geq 0\}$ *est un "bon processus" s'il est* $(\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}})-$*adapté, càglàd et si :*

$$E\left[\int_0^t \theta^2 ds\right] < \infty;\ \forall t \geq 0.$$

L'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \theta_s d\mathcal{B}_s$ pour des processus θ :

Cas étagé On dit que θ est une processus étagés s'il existe $(t_i) \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire θ_i telle que θ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\theta_t = \theta_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\theta_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]},$$

on définit

$$\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i}),$$

on montre

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s\right] &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i E\left[\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i}\right] = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Var\left[\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s\right] &= E\left[\left(\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s\right)^2\right] - E\left[\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s\right]^2 \\
&= E\left[\left(\int_0^\infty \theta_s d\mathcal{B}_s\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\theta_i)^2\, E\left[\left(\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\theta_i)^2\, (t_{i+1} - t_i) = \int_0^\infty \theta_s^2 ds \\
&= E\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].
\end{aligned}$$

On a alors

$$\int_0^t \theta_s d\mathcal{B}_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (\mathcal{B}_{t_{i+1}\wedge t} - \mathcal{B}_{t_i \wedge t}).$$

Cas général

Si θ bon processus, il existe $\{\theta^n,\ n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$E\left[\int_0^t (\theta_s^n - \theta_s)^2\, ds\right] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$E\left[|I(\theta_t^n) - I(\theta_t)|^2\right] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

on pose

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s d\mathcal{B}_s,$$

on a alors

$$E\left[I_t\left(\theta\right)\right]=0,$$

et

$$Var\left[I_t\left(\theta\right)\right]=E\left[\int_0^{\infty}(\theta_s)^2ds\right].$$

Propriété 1.4.1 *Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :*

A. Linéarité :

$$\int_0^t(X_s+Y_s)d\mathcal{B}_s=\int_0^t X_sd\mathcal{B}_s+\int_0^t Y_sd\mathcal{B}_s,$$

et soit $c\geq 0$;

$$\int_0^t(cX_s)d\mathcal{B}_s=c\int_0^t X_sd\mathcal{B}_s.$$

B. Additivité, pour $0\leq s<u<t\leq T$;

$$\int_s^t X_vd\mathcal{B}_v=\int_s^u X_vd\mathcal{B}_v+\int_u^t X_vd\mathcal{B}_v.$$

C. Pour un temps d'arrêt τ;

$$\int_0^{\tau\wedge T} X_td\mathcal{B}_t=\int_0^T \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}X_td\mathcal{B}_t.$$

D. Si $\int_0^t E(X_t^2)dt<\infty$, alors pour tout $t\leq T$;

$$E(\int_0^t X_sd\mathcal{B}_s)=0,$$

et l'isométrie ;

$$E\left((\int_0^t X_sd\mathcal{B}_s)^2\right)=\int_0^t E(X_s^2)ds.$$

1.4.2 Formule d'Itô

Définition 1.4.2 *(Processus d'Itô) Les processus d'Itô, ce sont des processus qui s'écrivant sous la forme suivante :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathcal{B}_s,$$

où b_s est un processus $(\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}})-$adapté tel que

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty,\ p.s;\ \forall t \geq 0,$$

σ_s soit un "bon processus local"(càglàd, $(\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}})-$adapté et $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty\ p.s)$, et $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.1 *(Formule d'intégration par parties) Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t .$$

Théorème 1.4.1 *($1^{ére}$ formule d'Itô) Supposons que f de classe C^2 alors :*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2 ds. \tag{1.1}$$

Théorème 1.4.2 *($2^{éme}$ formule d'Itô) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t de classe C^2 par rapport à x, alors :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\left\langle X \right\rangle_s . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Théorème 1.4.3 *($3^{éme}$ formule d'Itô) Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et*

y, soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées, alors :

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) &= f(x,y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\left\langle X \right\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) d\left\langle Y \right\rangle_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) d\left\langle X, Y \right\rangle_s . \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.5 Classes des contrôles

Définition 1.5.1 *(Contrôle) La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée a tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.*

Définition 1.5.2 *(Fonction de coût) L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur les contrôles une fonctionnelle $J(X, u)$.*

Classes des contrôles

1. Contrôle admissible : On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mésurable et $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans un borélien $U \subset \mathbb{R}^n$. Notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles

$$\mathcal{U} = \left\{ u : [0,T] \times \Omega \to U, \text{ tel que } u \text{ est mésurable et } \mathcal{F}_t - adapté \right\}.$$

2. Contrôle optimal : Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u\ )$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$, on dit que le contrôle $\widetilde{u}$ est optimal si :

$$J(\widetilde{u}) \leq J(u), \ \forall u \in \mathcal{U}.$$

3. Contrôle feed-back : Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t$-adapté, et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le pocessus X On dit que u_t est feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rappot la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si u dépend de X.

1.6 Quelques inégalités

Lemme 1.6.1 *(Lemme de Gronwalle) Soit g une fonction mesurable bornée sur $[0,T]$, telle que*

$$\forall t \geq 0; \; g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds,$$

avec a et b des constantes positives, alors :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Définition 1.6.1 *(Ensemble convexe) Un ensemble C est dit convexe lorsque pour tout x et y de C, le segment $[x,y]$ est tout entier contenu dans C, i.e :*

$$\forall (x,y) \in C^2; \; \forall t \in [0,1]\,; \; tx + (1-t)\,y \in C.$$

Définition 1.6.2 *(Fonction convexe et concave) Soit E e.v sur $\mathbb{R}$ et $C \subset E$ convexe, une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe ssi*

$$\forall (x,y) \in C^2; \; \forall t \in [0,1]\,; \; f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

si $(-f)$ est convexe on dit que f est concave.

Proposition 1.6.1 *(Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG)) Soit $p > 0$ un réel, il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X nulle* *en zéro*

$$c_p E\left[< X, X >_{\infty}^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[< X, X >_{\infty}^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.6.1 *En particulier, si $T > 0$:*

$$c_p E\left[< X, X >_{T}^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[< X, X >_{\infty}^{\frac{p}{2}}\right].$$

Proposition 1.6.2 *(Inégalité de Cauchy-Schwartz) soient f et g deux fonctions de carré intégrable, alors on a*

$$E(f.g) \leq \left[E\left(f^2\right)E\left(g^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.6.2 *(Lemme de Fatou) Soit (E, A, μ) un espace mesuré, pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $[0, \infty[$, la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a*

$$\int \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Théorème 1.6.1 *(Théoréme de lévy) Un processus stochastique $X = \{X_t; t \geq 0\}$ est appelé processus de Lévy, si*

1. X est càdlàg.
2. Pour $0 \leq s < t \in T$, ona $X_t - X_s$ la même loi qui X_{t-s} (accroissement stationnaire).
3. Pour $0 \leq s_1 \leq ... \leq s_n \leq s < t \in T$ les variables aléatoire $X_t - X_s$ sont indépendantes de $(X_{s_1}, X_{s_2}, ..., X_{s_n})$.

Chapitre 2

Èquations différentielles stochastiques(EDSs)

On rappelle dans cette chapitre les équations différentielles stochastiques (EDSs) á coefficients aléatoires par rapport á un mouvement Brownien. Notre objective dans cette section est d'établir l'existence et l'unicité des solutions des l'équations différentielles stochastiques.

Définition 2.0.3 *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)d\mathcal{B}_s^j, \quad 1 \leq i \leq d, \tag{2.2}$$

où, pour m et d des entiers positifs :

i) $b(t,x) = (b_i(t,x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé dérive ou drift de l'EDS.

ii) $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq m}}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé coefficient de diffusion de l'EDS.

Et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, ..., \mathcal{B}^m)$ est un mouvement Brownien standard en dimension m.

2.1 Exemples d'EDS

Exemple 2.1.1 *(Équation de Ornstein-Uhlenbeck)*

$$b(t,x) = -bx(b > 0) et \sigma(x) = \sigma,$$

il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma d\mathcal{B}_t, \tag{2.3}$$

c'est à dire avec $b(t,x) = -bx$, et $\sigma(x) = \sigma$, la solution est donnée par

$$X_t = X_0 \exp(-bt) + \sigma \int_0^t \exp(-b(t-s)) d\mathcal{B}_s, \tag{2.4}$$

sans le terme $\sigma d\mathcal{B}_t$, l'équation $dX_t = -bX_t\,dt$ se résout immédiatement en $X_t = C\exp(-bt)$, pour tenir compte du terme, on fait « varier la constante C » :

$$dC\exp(-bt) - bC\exp(-bt)dt = dX_t = -bX_t dt + \sigma d\mathcal{B}_t,$$

$$dC = \sigma \exp(bt) d\mathcal{B}_{t,}$$

$$C = X_0 + \int_0^t \sigma \exp(bs) d\mathcal{B}_s,$$

et, avec $X_t = C\exp(-bt)$, l'expression 2.4 est obtenue.

On peut observer directement que 2.4 est satisfaite en dérivant

$$X_t = X_0 \exp(-bt) + \sigma \exp(-bt) \int_0^t \exp(bs) d\mathcal{B}_s,$$

avec la formule d'Itô (sous la formule d'intégration par parties).

Exemple 2.1.2 *$b(t,x) = b_t x$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x$, on suppose les processus $(b_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ bornés ou vérifiant l'intégrabilité $\int_0^T |b_t| \, dt < \infty$, $\int_0^T |\sigma_t|^2 \, dt < \infty$ soit l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t = X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathcal{B}_t), \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.5}$$

avec à nouveau b et σ des fonctions déterministes, nous pouvons alors écrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = b_t dt + \sigma_t d\mathcal{B}_t,$$

posons $Y_t = u(X_t) = \ln(X_t)$, alors par première formule d'Itô

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t^2 \\ &= b(t)dt + \sigma(t)d\mathcal{B}_t - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 dt, \end{aligned}$$

en intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc la solution

$$X_t = x \exp\left\{ \int_0^t \left[b(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2 \right] ds + \int_0^t \sigma(s) d\mathcal{B}_s \right\}. \tag{2.6}$$

Exemple 2.1.3 *(Black et Scholes) C'est le cas particulier où $b(t,x) = bx$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$, i.e :*

$$\begin{cases} dX_t = bX_t dt + \sigma X_t d\mathcal{B}_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.7}$$

la solution est un cas particulier de 2.6

$$X_t = x \exp\left\{ \int_0^t \left[b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] ds + \int_0^t \sigma d\mathcal{B}_s \right\}$$
$$= x \exp\left\{ \left[b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] t + \sigma \mathcal{B}_s \right\},$$

alors

$$X_t = x \exp(bt - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma d\mathcal{B}_t).$$

2.2 Existence et unicité

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles, dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS 2.1.

Définition 2.2.1 *Pour l'équation 2.1, on dit qu'il y a*

- Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de 2.1.
- Existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de 2.1 ont même loi.
- Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ et le mouvement Brownien $\mathcal{B}$ étant fixés, deux solutions X et $\grave{X}$ de 2.1 telles que $X_0 = \grave{X}_0$ p.s sont indistinguables.

On dit de plus qu'une solution X de 2.1 est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de $\mathcal{B}$, il y a unicité forte pour l'EDS 2.1 si pour tout mouvement Brownien $\mathcal{B}$, deux solutions fortes associées à $\mathcal{B}$ sont indistinguables.

Exemple 2.2.1 *Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle, soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien, on considére le processus*

$$Z_t = \int_0^t sgn(W_s) dW_s,$$

où sgn est la fonction définie par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1; & si\ x \geq 0, \\ -1; & si\ x < 0, \end{cases}$$

le théorème de Lévy justifie que Z est un mouvement Brownien, on considère maintenant l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = sgn(X_t) d\mathcal{B}_t, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

Z est solution de cette équation, on voit que toutes les solutions de cette équation sont des M.B et sont égaux en loi (on a l'existence et l'unicté faible) mais n'est pas l'unicité fort car le processuse $(-Z_t)_{t\geq 0}$ est solutions de cette équation mais

$$P\left(Z_t \neq -Z_t\right) = P(2Z_t \neq 0) = 1,$$

(Z_t) et $(-Z_t)$ ne sont pas indistinguable donc n'est pas l'unicité forte.

Théorème 2.2.1 *Si b et σsont des fonctions continues, telles qu'il existe $k < +\infty$, avec :*

1. Condition de Lipschitz, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ telle que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

2. Condition de croissance linéaire, $\forall x \in \mathbb{R}$ telle que

$$|b(t,x) + \sigma(t,x)| \leq K(1 + |x|).$$

3. $E(x^2) < +\infty$.

Alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation 2.1 admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$. De plus cette solution $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ vérifie :

$$E(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2) < +\infty.$$

preuve. Commençons par démontrer l'unicité, soient X_t et Y_t deux solutions fortes de condition initiale x telle que

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left| \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\mathcal{B}_s - \int_0^t b(s, Y_s) ds - \int_0^t \sigma(s, Y_s) d\mathcal{B}_s \right|^2 \\
&= \left| \int_0^t \left[b(s, X_s) - b(s, Y_s) \right] ds + \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) \right] d\mathcal{B}_s \right|^2,
\end{aligned}$$

on utilisant le fait que $(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, on a pour tout $0 \leq t \leq n \leq T$

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2 \left| \int_0^t \left[b(s, X_s) - b(s, Y_s) \right] ds \right|^2 + 2 \left| \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) \right] d\mathcal{B}_s \right|^2,$$

où

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left[b(s, X_s) - b(s, Y_s) \right] ds \right|^2 + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) \right] d\mathcal{B}_s \right|^2,$$

en passant aux ésperances

$$\begin{aligned}
E(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2) &\leq 2E(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left[b(s, X_s) - b(s, Y_s) \right] ds \right|^2) \\
&\quad + E(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) \right] d\mathcal{B}_s \right|^2),
\end{aligned}$$

utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô on trouve

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2) &\leq 2E(\left|\int_0^T b(s,X_s)-b(s,Y_s)ds\right|^2) \\ &+ 8E(\int_0^t |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds), \end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy Schwartz, donne alors

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2) &\leq 2TE(\int_0^T (|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,ds) \\ &+ 8E(\int_0^t |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds), \\ &= 2(T+4)E(\int_0^T (|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2 \\ &+ |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2)ds), \end{aligned}$$

comme les fonctions b et σ sont Lipschiz alors :

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2) &\leq 2K^2(T+4)E(\int_0^T |X_s-Y_s|^2\,ds) \\ &\leq 2K^2(T+4)\int_0^T E(|X_s-Y_s|^2)ds \\ &\leq 2K^2(T+4)\int_0^T E(\sup_{0\leq n\leq s}|X_n-Y_n|^2)ds, \end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Gronwall

$$E(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2) \leq 0\exp(2K^2(T+4)T)=0,$$

ce si implique que X et Y sont indistinguables i.e

$$p(X_t=Y_t, \forall 0\leq t\leq T)=1.$$

Afin de prouver l'existence, on procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x, \\
X_t^1 &= x + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x)d\mathcal{B}_s, \\
X_t^2 &= x + \int_0^t b(s,X_s^1)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s, \\
... &= ... \\
X_t^n &= x + \int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})d\mathcal{B}_s. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

On peut déterminer (X_t^n) pour tout n on montre que (X_t) converge vers X_t et X_t vérifie l'EDS 2.1. D'abord on suppose que les fonctions σ et b vérifient la condition de Croissance linéaire et on prouve que

$$\exists C, E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^2\right] \leq C,$$

si $n=1$ on a

$$\left|X_t^1\right|^2 = \left|x + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x)d\mathcal{B}_s\right|^2,$$

et comme $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ on trouve

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b(s,x)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma(s,x)d\mathcal{B}_s\right|^2\right),$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $0 \leq t \leq d \leq T$

$$
\begin{aligned}
\left|X_t^1\right|^2 &\leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^t |b(s,x)|^2 ds + \left|\int_0^t \sigma(s,x)d\mathcal{B}_s\right|^2\right), \\
\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2 &\leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^d |b(s,x)|^2 ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,x)d\mathcal{B}_s\right|^2\right),
\end{aligned}
$$

en passant aux ésperances

$$E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right)\leq 3E\left(|x|^2+T\int_0^d|b(s,x)|^2\,ds+\sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,x)d\mathcal{B}_s\right|^2\right),$$

d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right)&\leq 3E\left(|x|^2+T\int_0^d|b(s,x)|^2\,ds+4\int_0^d|\sigma(s,x)|^2\,ds\right)\\&\leq 3E\left(|x|^2+TK^2\int_0^d(1+|x|)^2ds+4K^2\int_0^d(1+|x|)^2ds\right)\\&\leq 3E\left(|x|^2+K^2(1+|x|)^2(T+4)d\right)\\&=3\,|x|^2+K^2(1+|x|)^2(T+4)d,\end{aligned}$$

donc soit $C_1=3K^2(1+|x|)^2(T+4)$

$$E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right)\leq 3\,|x|^2+C_1d,$$

de la même manière on trouve que aprés $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout $0\leq t\leq d\leq T$

$$\begin{aligned}\left|X_t^2\right|^2&=\left|x+\int_0^t b(s,X_s^1)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s\right|^2\\&\leq 3\left(|x|^2+\left|\int_0^t b(s,X_s^1)ds\right|^2+\left|\int_0^t\sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s\right|^2\right)\\&\leq 3\left(|x|^2+T\int_0^t\left|b(s,X_s^1)\right|^2ds+\left|\int_0^t\sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s\right|^2\right)\\\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2&\leq 3\left(|x|^2+T\int_0^d\left|b(s,X_s^1)\right|^2ds+\sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s\right|^2\right)\\E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right)&\leq 3E\left(|x|^2+T\int_0^d\left|b(s,X_s^1)\right|^2ds+\sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,X_s^1)d\mathcal{B}_s\right|^2\right),\end{aligned}$$

et par utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right) &\leq 3E\left(|x|^2+T\int_0^d\left|b(s,X_s^1)\right|^2 ds+4\int_0^d\left|\sigma(s,X_s^1)\right|^2 ds\right)\\
&=3\left(|x|^2+TE\left(\int_0^d\left|b(s,X_s^1)\right|^2 ds\right)+4E\left(\int_0^d\left|\sigma(s,X_s^1)\right|^2 ds\right)\right)\\
&\leq 3\left[|x|^2+TE\left(\int_0^d K^2(1+\left|X_s^1\right|)^2 ds\right)+4E\left(\int_0^d K^2(1+\left|X_s^1\right|)^2 ds\right)\right]\\
&=3\left[|x|^2+(T+4)K^2E\left(\int_0^d(1+\left|X_s^1\right|)^2 ds\right)\right]\\
&\leq 3\left[|x|^2+(T+4)K^2E\left(\int_0^d 2(1+\left|X_s^1\right|^2)ds\right)\right],
\end{aligned}$$

soit $C_2=(T+4)K^2$

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right) &\leq 3\left[|x|^2+2C_2E\left(\int_0^d(1+\left|X_s^1\right|^2)ds\right)\right]\\
&\leq 3\left[|x|^2+2C_2E\left(T+\int_0^d\left|X_s^1\right|^2 ds\right)\right]\\
&\leq 3\left[|x|^2+2C_2\left(T+\int_0^d E\left(\sup_{tv\leq s}\left|X_s^1\right|^2 ds\right)\right)\right]\\
&\leq 3\left[|x|^2+2C_2\left(T+\int_0^d\left(3|x|^2+C_1 d\right)ds\right)\right]\\
&=3\left[|x|^2+2C_2\left(T+3|x|^2 d+C_1\frac{d^2}{2}ds\right)\right],
\end{aligned}$$

et par une récurrence nous avons donc

$$E\left(\sup_{t\leq d\leq T}|X_t^n|^2\right)\leq |x|^2\sum_{i=0}^n\frac{d^i}{i!}C_i, \forall n\geq 1.$$

Ensuit eIle reste à montrer que la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge P-p.s uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$

$$\begin{aligned}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &= \left|\int_0^t \left(b(s,X_s^1\right) - b(s,x))ds + \int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1\right) - \sigma(s,x))d\mathcal{B}_s\right| \\ &\leq 2\left|\int_0^t \left(b(s,X_s^1\right) - b(s,x))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1\right) - \sigma(s,x))d\mathcal{B}_s\right|^2,\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{t\leq d}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 \leq 2\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(b(s,X_s^1\right) - b(s,x))ds\right|^2 + 2\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1\right) - \sigma(s,x))d\mathcal{B}_s\right|^2,$$

en passant aux ésperances et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$\begin{aligned}&E\left(\sup_{t\leq d}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2\right) \\ &\leq 2E\left(\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(b(s,X_s^1\right) - b(s,x))ds\right|^2\right) + 2E\left(\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1\right) - \sigma(s,x))d\mathcal{B}_s\right|^2\right) \\ &\leq 2TE\left(\int_0^d \left|\left(b(s,X_s^1\right) - b(s,x)\right|^2 ds\right) + 2E\left(\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1\right) - \sigma(s,x))d\mathcal{B}_s\right|^2\right) \\ &\leq 2TE\left(\int_0^d \left|b(s,X_s^1 - b(s,x)\right|^2 ds\right) + 8E\left(\int_0^t \left|\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,x)\right|^2 ds\right) \\ &\leq 2TK^2E\left(\int_0^d \left|X_s^1 - x\right|^2 ds\right) + 8K^2E\left(\int_0^t \left|X_s^1 - x\right|^2 ds\right) \\ &\leq (2TK^2 + 8K^2)\int_0^d E\left(\left|X_s^1 - x\right|^2\right) ds \\ &\leq (2TK^2 + 8K^2)\int_0^d E\left(\sup_{v\leq s}\left|X_v^1 - x\right|^2\right) ds,\end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\leq d}\left|X_t^2-X_t^1\right|^2\right) &\leq 2(2TK^2+8K^2)\left(\int_0^d E\left(|x|^2\right)ds+\int_0^d E\left(\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right)ds\right)\\
&= 2(2TK^2+8K^2)\left(x^2d+\int_0^d E\left(\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right)ds\right)\\
&\leq 2(2TK^2+8K^2)\left(x^2d+\int_0^d E\left(\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right)ds\right)\\
&\leq 2(2TK^2+8K^2)\left(x^2d+\int_0^d (C+C_1d)\,ds\right)\\
&\leq 2(2TK^2+8K^2)\left(x^2d+Cd+C_1\frac{d^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

donc pour n

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right) \leq 2E&\left(\left|\int_0^t \left(b(s,X_s^1)-b(s,x)\right)ds\right|^2\right)\\
&+2E\left(\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X_s^1)-\sigma(s,x)\right)d\mathcal{B}_s\right|^2\right),
\end{aligned}
$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$
\begin{aligned}
&E\left(\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right)\\
&\leq 2TE\left(\int_0^t \left|b(s,X_s^n-b(s,X_s^{n-1})\right|^2ds\right)+8E\left(\int_0^t \left|\sigma(s,X_s^n-\sigma(s,X_s^{n-1})\right|^2ds\right)\\
&\leq 2TK^2E\left(\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right)+8K^2E\left(\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right)\\
&=(2TK^2+8K^2)E\left(\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right)\\
&\leq(2TK^2+8K^2)\int_0^t E\left(\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right)ds,
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
E\left(\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right)\leq C_n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!},
$$

cela entraîne que p.s

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t\leq d} \left| X_t^{n+1} - X_t^n \right| \right\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \sup_{t\leq d} \left| X_t^{n+1} - X_t^n \right| \right\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(C_n \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \leq +\infty,$$

cela entraîne que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t\leq d} \left| X_t^{n+1} - X_t^n \right| < \infty,$$

et donc la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge p.s uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$qui est continu. Après on vérifier que X_t est solution de l'EDS 2.1, soit un sous suite X^k converge dans L^2, en effet

$$\begin{aligned}
\left\| X_t^m - X_t^n \right\|_{L^2} &\leq \left\| \sum_{n=0}^{m-1} \sup_{t\leq d} \left| X_t^{k+1} - X_t^k \right| \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left\| \sup_{t\leq d} \left| X_t^{k+1} - X_t^k \right| \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(C_k \frac{d^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

en passant à la limite de 2.8, aprés le lemme de Fatou

$$E\left[\int_0^T \left| X_t^n - X_t \right|^2 dt \right] \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf E\left[\int_0^T \left| X_t^n - X_t^m \right|^2 dt \right] \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

aprés la condition de Lipschitziennes, l'inégalité de Cauchy Schartz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique

$$E\left[\left| \int_0^t \left(b(s, X_s^n) - b(s, X_s) \right) ds \right|^2 \right] \leq tK^2 E\left[\int_0^t \left| X_s^n - X_s \right|^2 ds \right] \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$E\left[\left| \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s) \right) d\mathcal{B}_s \right|^2 \right] \leq 4K^2 E\left[\int_0^t \left| X_s^n - X_s \right|^2 ds \right] \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\int_0^t b(s, X_s^n)ds \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} \int_0^t b(s, X_s)ds,$$
$$\int_0^t \sigma(s, X_s^n)d\mathcal{B}_s \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} \int_0^t \sigma(s, X_s)d\mathcal{B}_s,$$

on déduit que X_t est une solution de l'EDS 2.1. ■

Chapitre 3

Principe de maximum

3.1 Formulation du problème et les hypothèses

Soit un espace de probabilité filtrée $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, P)$ tel que $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles P-nuls, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ pour un horizon temporel T arbitrairement fixé, et $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ satisfait l'habituel conditions. Par suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ est engendré par un mouvement Brownien standard $\mathcal{B}$ de dimension d par note $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles. Tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ sera identifié à un vecteur de colonne avec n composantes, et de norme $|x| = |y^1| + ... + |y^n|$. Le produit scalaire de deux vecteurs y et x sur $\mathbb{R}^n$ sont désignés par yx ou $\sum_{i=1}^n y^i x^i$. Pour une fonction h, la notation de h_x (resp. h_{xx}) est le gradient ou jacobien (resp. la hessienne) de h par rapport à la variable x.

Définition 3.1.1 *Soit $u : [0,T] \times \Omega \to U$ un contrôle admissible tel que*

$$E\left[\int_0^T u(s)ds\right] < \infty.$$

Considérons le système contrôlé stochastique suivant :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)d\mathcal{B}_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times d}$, sont donnés.

Par suppose que donne une fonction de coût $J(u)$ de la forme :

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)dt + g(x_T)\right], \tag{3.2}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Le problème de contrôle stochastique est de trouver un contrôle optimal $\widetilde{u} \in \mathcal{U}$ tel que :

$$J(\widetilde{u}) = \inf_{u\in\mathcal{U}} J(u). \tag{3.3}$$

Soit les hypothèses suivantes sur les coefficients b, σ, f, et g.

(H1) Les fonctions b, σ, et f sont différentiables continus par rapport à (x, u), et g est différentiable continu en x.

(H2) Les dérivés $b_x, b_u, \sigma_x, \sigma_u, f_x, f_u$ et g_x sont continus en (x, u) et uniformément bornés.

(H3) b, σ, f sont bornés par $K_1(1+|x|+|u|)$, et g est borné par $K_1(1+|x|)$, pour certains $K_1 > 0$.

3.2 Principe de maximum stochastique

La définition d'Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \overline{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}$ est :

$$H(t, x, u, p, q) = f(t, x, u) + pb(t, x, u) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} q^j \sigma^j(t, x, u), \tag{3.4}$$

où q^j et σ^j pour $j = 1, .., n$, la notaion de j est colonne de la matrice q et σ, respectivement. Soit $\widetilde{u}$ un contrôle optimal et $\widetilde{x}$ la trajectoire optimale correspondante. Ensuite, une paire (p, q) de processus adaptés intégrables carrés associés à $\widetilde{u}$, avec des valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$

tel que :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t, p_t, q_t)dt + q_t d\mathcal{B}_t, \\ p_T = g_x(\widetilde{x}_T). \end{cases} \tag{3.5}$$

3.3 Conditions nécessaires d'optimalité

Le but de cette section est de trouver l'optimalité des conditions nécessaires satisfaites par un contrôle optimal, suppose que la solution existe. L'idée est d'utiliser une perturbation convexe pour contrôle optimal, conjointement avec quelques estimations de la trajectoire de l'état et de la fonction de coût, et en envoyant les perturbations à zéro, on obtient une certaine inégalité, puis en complétant avec théorème de représentation de la martingale, le principe maximal est exprimé en termes d'un processus adjoint .

Peut énoncer le principe du maximum stochastique sous une forme plus forte.

Théorème 3.3.1 *(Conditions d'optimalité nécessaires) Soit $\widetilde{u}$ un contrôle optimal minimisant la fonction de coût J sur $\mathcal{U}$, et soit $\widetilde{x}$ la trajectoire optimale correspondante, alors il existe un processus adapté*

$$(p, q) \in \mathbb{L}^2(([0, T]\,; \mathbb{R}^n)) \times \mathbb{L}^2(([0, T]\,; \mathbb{R}^{n\times d})),$$

qui est la solution unique du EDSR 3.5, de telle sorte que pour tout $v \in U$

$$H_u(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t, p_t, q_t)(v_t - \widetilde{u}_t) \leq 0, \quad P - p.s.$$

Afin de donner la preuve du théorème 3.3.1, il convient de présenter ce qui suit.

3.4 Équation variationnelle

Soit $v \in \mathcal{U}$ tel que $(\widetilde{u} + v) \in \mathcal{U}$, la condition de convexité du domaine de contrôle garantit que, pour $\theta \in (0, 1)$ le contrôle $(\widetilde{u} + \theta v)$ est aussi en $\mathcal{U}$. On note y^θ la solution du EDS 3.1

correspond au contrôle $(\widetilde{u}+\theta v)$, puis par des arguments standard du calcul stochastique, il est facile de vérifier le résultat de convergence suivant.

Lemme 3.4.1 *Sous l'hypothèse (H1) il ya :*

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - \widetilde{x}_t\right|^2\right] = 0. \tag{3.6}$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned}\left|x_t^\theta - \widetilde{x}_t\right|^2 &= \left|\int_0^t b(s,x_s^\theta,u_s^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s^\theta,u_s^\theta)d\mathcal{B}_s\right. \\ &\quad \left. - \int_0^t b(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)ds - \int_0^t \sigma(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)d\mathcal{B}_s\right|^2,\end{aligned}$$

on ajoutant et retranchant les termes $b(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)$ et $\sigma(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)$

$$\begin{aligned}\left|x_t^\theta - \widetilde{x}_t\right|^2 &= \left|\int_0^t [b(s,x_s^\theta,u_s^\theta) - b(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)]ds\right. \\ &\quad + \int_0^t [b(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s) - b(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)]ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma(s,x_s^\theta,u_s^\theta) - \sigma(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)]d\mathcal{B}_s \\ &\quad \left. + \int_0^t [\sigma(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s) - \sigma(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)]d\mathcal{B}_s\right|^2,\end{aligned}$$

comme $(a+b+c+d)^2 \leq 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$

$$\begin{aligned}\left|x^\theta(t) - \widetilde{x}(t)\right|^2 &\leq 4\int_0^t \left|b(s,x_s^\theta,u_s^\theta) - b(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)\right|^2 ds \\ &\quad + 4\int_0^t \left|b(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s) - b(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)\right|^2 ds \\ &\quad + 4\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s^\theta,u_s^\theta) - \sigma(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s)]d\mathcal{B}_s\right|^2 \\ &\quad + 4\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s^\theta,\widetilde{u}_s) - \sigma(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{u}_s)]d\mathcal{B}_s\right|^2,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2 &\leq 4\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)\right|^2 ds\\ &+4\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-b(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)\right|^2 ds\\ &+4\left|\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}[\sigma(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)]d\mathcal{B}_s\right|^2\\ &+4\left|\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}[\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-\sigma(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)]d\mathcal{B}_s\right|^2,\end{aligned}$$

en passant aux ésperances, ona :

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2\right) &\leq 4\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds\\ &+4\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-b(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds\\ &+4E\left(\left|\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}[\sigma(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)]d\mathcal{B}_s\right|^2\right)\\ &+4E\left(\left|\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}[\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-\sigma(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)]d\mathcal{B}_s\right|^2\right),\end{aligned}$$

par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gandy :

$$\begin{aligned}E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2) &\leq 4\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds\\ &+4\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|b(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-b(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds\\ &+4M\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|\sigma(r,x_r^\theta,u_r^\theta)-\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds\\ &+4M\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|\sigma(r,x_r^\theta,\widetilde{u}_r)-\sigma(r,\widetilde{x}_r,\widetilde{u}_r)\right|^2)ds,\end{aligned}$$

puisque b et σ sont Lipschitzienne et croissance linéaire en x, ona :

$$
\begin{aligned}
E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2) \leq\; & 4K\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}(1+\left|x_r^\theta\right|+\left|u_r^\theta\right|-1-\left|x_r^\theta\right|-|\widetilde{u}_r|)^2)ds \\
& + 4K\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|x_r^\theta-\widetilde{x}_r\right|^2)ds + 4MK\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|x_r^\theta-\widetilde{x}_r\right|^2)ds \\
& + 4MK\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}(1+\left|x_r^\theta\right|+\left|u_r^\theta\right|-1-\left|x_r^\theta\right|-|\widetilde{u}_r|)^2)ds,
\end{aligned}
$$

comme $u_t^\theta=\widetilde{u}_t+\theta v_t$, alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2) \leq\; & 4K\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}|\theta v_r|^2)ds + 4K\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|x_r^\theta-\widetilde{x}_r\right|^2)ds \\
& + 4MK\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|x_r^\theta-\widetilde{x}_r\right|^2)ds + 4MK\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}|\theta v_r|^2)ds,
\end{aligned}
$$

soit $C=4MK+4K$ ceci donne le résultat suivant :

$$
E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2) \leq C\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}\left|x_r^\theta-\widetilde{x}_r\right|^2)ds + C\theta^2\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}|v_r|^2)ds.
$$

De la définition 3.1.1, et le lemme de Gronwall on obtient :

$$
E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2) \leq C\theta^2\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}|v_r|^2)ds\times\exp(Ct),
$$

et

$$
0\leq\lim_{\theta\longrightarrow 0}E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2)\leq\lim_{\theta\longrightarrow 0}C\theta^2\int_0^t E(\sup_{r\in[0,s]}|v_r|^2)ds\times\exp(Ct)=0,
$$

donc :

$$
\lim_{\theta\longrightarrow 0}E(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta-\widetilde{x}_t\right|^2)=0.
$$

■

Le définir le processus $z(t) = z^{\widetilde{u},v}(t)$ par

$$\begin{cases} dz_t = \left\{b_y(t, \widetilde{z}_t, \widetilde{u}_t)z_t + b_u(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{u}_t)v_t\right\} dt \\ +\sum_{j=1}^{d} \left\{\sigma_y^j(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{u}_t)z_t + \sigma_u^j(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{u}_t)v_t\right\} d\mathcal{B}_t^j, \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

De (H2) et de la définition 3.1.1, on peut trouver une solution unique z qui résout l'équation variationnelle 3.7, et l'estimation suivante est valable.

Lemme 3.4.2 *Sous hypothèse (H1), il soutient que :*

$$\lim_{\theta \to 0} E \left| \frac{x_t^\theta - \widetilde{x}_t}{\theta} - z_t \right|^2 = 0. \tag{3.8}$$

Preuve. Laisser

$$\Gamma^\theta(t) = \frac{x_t^\theta - \widetilde{x}_t}{\theta} - z_t.$$

Indiquant $x_t^\theta = \widetilde{x}_t + \theta(\Gamma_t^\theta + z_t)$, et $u_t^\theta = \widetilde{u}_t + \theta v_t$, pour la commodité de la notation. Nous avons alors immédiatement que $\Gamma^\theta(0) = 0$, on a :

$$d\Gamma^\theta(t) = \frac{1}{\theta}(dx_t^\theta - d\widetilde{x}_t) - dz_t,$$

donc $\Gamma^\theta(t)$ remplit l'EDS suivant :

$$\begin{aligned} d\Gamma^\theta(t) &= \frac{1}{\theta}(b(t, x_t^\theta, u_t^\theta) - b(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t))dt \\ &+ \frac{1}{\theta}(\sigma(t, x_t^\theta, u_t^\theta) - \sigma(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t))d\mathcal{B}_t \\ &- (b_x(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t)z_t + b_u(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t)v_t))dt \\ &- (\sigma_x(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t)z_t + \sigma_u(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t)v_t)d\mathcal{B}_t, \end{aligned} \tag{3.9}$$

puisque les dérivées des coefficients sont bornées, et de la définition 3.1.1, par le développement de Taylor avec rèste intégral aux points (x, u) et l'ordre 0 des fonctions $b(t, x_t^\theta, u_t^\theta)$ et $\sigma(t, x_t^\theta, u_t^\theta)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&b(t, x_t^\theta, u_t^\theta) - b(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) \\
&= \int_0^1 b_x(t, \widetilde{x}_t + \lambda(x_t^\theta - \widetilde{x}_t), \widetilde{u}_t + \lambda(u_t^\theta - \widetilde{u}_t))(x_t^\theta - \widetilde{x}_t) d\lambda \\
&+ \int_0^1 b_u(t, \widetilde{x}_t + \lambda(x_t^\theta - \widetilde{x}_t), \widetilde{u}_t + \lambda(u_t^\theta - \widetilde{u}_t))(u_t^\theta - \widetilde{u}_t) d\lambda,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sigma(t, x_t^\theta, u_t^\theta) - \sigma(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) \\
&= \int_0^1 \sigma_x(t, \widetilde{x}_t + \lambda(x_t^\theta - \widetilde{x}_t), \widetilde{u}_t + \lambda(u_t^\theta - \widetilde{u}_t))(x_t^\theta - \widetilde{x}_t) d\lambda \\
&+ \int_0^1 \sigma_u(t, \widetilde{x}_t + \lambda(x_t^\theta - \widetilde{x}_t), \widetilde{u}_t + \lambda(u_t^\theta - \widetilde{u}_t))(u_t^\theta - \widetilde{u}_t) d\lambda,
\end{aligned}$$

en remplaçanat ces deux quantités dans l'EDS 3.9 et $(x_t^\theta - \widetilde{x}_t) = \theta(\Gamma_t^\theta + z_t)$, $(u_t^\theta - \widetilde{u}_t) = \theta v_t$, soit $\lambda = 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
d\Gamma^\theta(t) = &[\int_0^1 b_x(t, x_t^\theta, u_t^\theta)\Gamma_t^\theta d\lambda]dt + [\int_0^1 b_x(t, x_t^\theta, u_t^\theta) z_t]dt \\
&+ [\int_0^1 b_u(t, x_t^\theta, u_t^\theta) v_t d\lambda]dt + [\int_0^1 \sigma_x(t, x_t^\theta, u_t^\theta)\Gamma_t^\theta d\lambda]d\mathcal{B}_t \\
&+ [\int_0^1 \sigma_x(t, x_t^\theta, u_t^\theta) z_t d\lambda]d\mathcal{B}_t + [\int_0^1 \sigma_u(t, x_t^\theta, u_t^\theta) v_t d\lambda]d\mathcal{B}_t \\
&- [b_x(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) z_t + b_u(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) v_t]dt \\
&- [\sigma_x(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) z_t + \sigma_u(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) v_t]d\mathcal{B}_t,
\end{aligned}$$

en passent aux ésperances carrées, on a :

$$E\left|\Gamma^{\theta}(t)\right|^{2} \leq KE\int_{0}^{t}\left|\int_{0}^{1} b_{x}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})\Gamma_{s}^{\theta}d\lambda\right|^{2} ds + KE\left|\rho_{t}^{\theta}\right|^{2}$$
$$+ KE\int_{0}^{t}\left|\int_{0}^{1} \sigma_{x}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})\Gamma_{s}^{\theta}d\lambda\right|^{2} ds,$$

où $\rho^{\theta}(t)$ est donné par

$$\begin{aligned}\rho_{t}^{\theta} = &-\int_{0}^{t} b_{x}(s,\widetilde{x}_{s},\widetilde{u}_{s})z_{s}ds\\ &-\int_{0}^{t} \sigma_{x}(s,\widetilde{x}_{s},\widetilde{u}_{s})z_{s}d\mathcal{B}_{s}\\ &-\int_{0}^{t} b_{u}(s,\widetilde{x}_{s},\widetilde{u}_{s})v_{s}ds\\ &-\int_{0}^{t} \sigma_{u}(s,\widetilde{x}_{s},\widetilde{u}_{s})v_{s}d\mathcal{B}_{s}\\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} b_{x}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})z_{s}d\lambda ds\\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} b_{u}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})v_{s}d\lambda ds\\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} \sigma_{x}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})z_{s}d\lambda d\mathcal{B}_{s}\\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} \sigma_{u}(s,x_{s}^{\theta},u_{s}^{\theta})v_{s}d\lambda d\mathcal{B}_{s}.\end{aligned}$$

Depuis par b_x, σ_x sont bornés, alors

$$E\left|\Gamma^{\theta}(t)\right|^{2} \leq ME\int_{0}^{t}\left|\Gamma_{s}^{\theta}\right|^{2} ds + ME\left|\rho_{t}^{\theta}\right|^{2},$$

où M est une constante générique dépendant de la constante K et T. Nous concluons du lemme 3.4.2 que $\lim\limits_{\theta\to 0}\rho_{t}^{\theta} = 0$, en appliquant lemme de Gronwall

$$\lim_{\theta\to 0} E\left|\Gamma^{\theta}(t)\right|^{2} = \lim_{\theta\to 0} E\left|\frac{x_{t}^{\theta}-\widetilde{x}_{t}}{\theta} - z_{t}\right|^{2} \leq \lim_{\theta\to 0} ME\left|\rho_{t}^{\theta}\right|^{2}\exp(Mt) = 0,$$

alors on conclut

$$\lim_{\theta\to 0} E\left|\frac{x_t^\theta-\widetilde{x}_t}{\theta}-z_t\right|^2=0.$$

■

3.5 Inégalité variationnelle

Soit Φ la solution fondamentale de l'équation matricielle linéaire, pour $0\leq s<t\leq T$

$$\begin{cases} d\Phi_{s,t}=b_x(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)\Phi_{s,t}dt+\sum\limits_{j=1}^{d}\sigma_x^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)\Phi_{s,t}d\mathcal{B}_t^j, \\ \Phi_{s,s}=I_d, \end{cases}$$

où I_d est la matrice d'identité $n\times n$, cette équation est linéaire avec des coefficients bornés, puis elle admet une solution forte unique.

À partir de la formule d'Itô, peuvent facilement vérifier que $d(\Phi_{s,t}\Psi_{s,t})=0$, et $\Phi_{s,s}\Psi_{s,s}=I_d$, où Ψ est la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi_{s,t}=-\Psi_{s,t}\left\{b_x(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)+\sum\limits_{j=1}^{d}\sigma_x^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u})\sigma_x^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)\right\}dt \\ -\sum\limits_{j=1}^{d}\Psi_{s,t}\sigma_x^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)d\mathcal{B}_t^j, \\ \Psi_{s,s}=I_d, \end{cases}$$

donc $\Psi=\Phi^{-1}$, si s $=0$, tout simplement écrire $\Phi_{0,t}=\Phi_t$, et $\Psi_{0,t}=\Psi_t$. En intégrant par formule de partie nous pouvons voir que, la solution de l'équation 3.7 est donnée par $z(t)=\Phi_t\eta_t$, où t est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\eta_t=\Psi_t\left\{b_u(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)v_t+\sum\limits_{j=1}^{d}\sigma_x^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)\sigma_u^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)v_t\right\}dt \\ +\sum\limits_{j=1}^{d}\Psi_t\sigma_u^j(t,y_t^\circ,u_t^\circ)v_td\mathcal{B}_t^j, \\ \eta_0=0, \end{cases}$$

introduisons la perturbation convexe suivante du contrôle optimal $\widetilde{u}$ par

$$u^\theta = \widetilde{u} + \theta v, \tag{3.10}$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$, et $\theta \in (0,1)$. Puisque $\widetilde{u}$ est un contrôle optimal, alors

$$\theta^{-1}(J(u^\theta) - J(\widetilde{u})) \geq 0.$$

Ainsi, une condition nécessaire à l'optimalité est que :

$$\lim_{\theta \to 0} \theta^{-1}(J(u^\theta) - J(\widetilde{u})) \geq 0. \tag{3.11}$$

Le reste est consacré au calcul de la limite ci-dessus. Nous verrons que l'expression 3.11 conduit à une description précise du contrôle optimal $\widetilde{u}$ en termes de processus adjoint. Tout d'abord, il est facile de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.5.1 *Sous hypothèses (H1), on a*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\theta \to 0} \theta^{-1}(J(u^\theta) - J(\widetilde{u})) \\ &= E\left[\int_0^T \{f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)z_s + f_u(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)v_s\}\, ds + g_x(\widetilde{x}_T)z_T\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve. En utilisant les mêmes notations que dans la preuve du lemme 3.4.2. Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned} &\theta^{-1}(J(u^\theta) - J(\widetilde{u})) \\ &= E\left[\int_0^T \int_0^1 \left\{f_x(s, x_s^\theta, u_s^\theta)z_s + f_u(s, x_s^\theta, u_s^\theta)v_s\right\} d\lambda ds \right. \\ &\left. + \int_0^1 g_x(x_T^\theta)z_T d\lambda\right] + \beta_t^\theta, \end{aligned}$$

où

$$\beta_t^\theta = E\left[\int_0^T \int_0^1 f_x(s, x_s^\theta, u_s^\theta)\Gamma_s^\theta d\lambda ds + \int_0^1 g_x(x_T^\theta)\Gamma^\theta(T)d\lambda\right].$$

En utilisant le lemme 3.4.2, et puisque les dérivées f_x, f_u, et g_x sont bornés, nous avons $\lim\limits_{\theta\to 0} \beta_t^\theta = 0$. Ensuite, le résultat suit en laissant θ aller à 0 dans l'égalité ci-dessus. ■

Substituer par $z(t) = \Phi_t\eta_t$ dans 3.12 ce mène à

$$I = E\left[\int_0^T \left\{f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)\Phi_s\eta_s + f_u(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)v_s\right\} ds + g_x(\widetilde{x}_T)\Phi_T\eta_T\right].$$

Considérez la bonne version continue de la martingale carrée intégrable

$$M(t) := E\left[\int_0^T f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)\Phi_s ds + g_x(\widetilde{x}_T)\Phi_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Par le théorème de représentation, il existe $Q = (Q^1, .., Q^d)$ où $Q^j \in \mathbb{L}^2$, pour $j = 1, ..., d$,

$$M(t) = E\left[\int_0^T f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)\Phi_s ds + g_x(\widetilde{x}_T)\Phi_T\right] + \sum_{j=1}^d \int_0^t Q_s^j d\mathcal{B}_s^j.$$

Un peu plus de notation, écrivez par $\widetilde{x}(t) = M(t) - \int_0^t f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)\Phi_s ds$. La variable adjointe est les processus définis par :

$$\begin{cases} p(t) = \widetilde{x}_t\Psi_t, \\ q^j(t) = Q_t^j\Psi_t - p(t)\sigma_x^j(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t); \textit{pour } \text{j=1,...,d.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Théorème 3.5.1 *Sous hypothèses (H1), on a*

$$I = E\left[\int_0^T \left\{f_u(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) + p(s)b_u(s, \widetilde{x}_s, \widehat{u}_s) + \sum_{j=1}^d q^j\sigma_u^j(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s)\right\}\right].$$

preuve. À partir de la formule d'intégration par partie, et en utilisant la définition de

$p(t)$, $q^j(t)$ pour $j = 1, .., d$, on vérifie facilement que

$$E\left[x(T)\eta(T)\right] = E\left[\int_0^T \left\{ p(t) b_u(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) + \sum_{j=1}^{d} q^j(s) \sigma_u^j(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) \right\} v(t) dt \right. \\ \left. - \int_0^T f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) \eta_t \Phi_t dt. \right. \tag{3.14}$$

Nous avons aussi

$$I = E\left[x(T)\eta(T) + \int_0^T f_x(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) \eta_t \Phi_t dt. + \int_0^T f_u(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{u}_s) v_t dt\right], \tag{3.15}$$

substituant l'équation 3.14 dans 3.15, ceci complète la preuve. ■

3.6 Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 3.6.1 *Soit $\widetilde{u}$ un contrôle admissible, $\widetilde{x}$ le processus d'état contrôlé associé, et soit (p, q) une solution au EDSR correspondant l'équation 3.1. Supposons que $H(t, x, u, p_t, q_t)$ et (x) sont des fonctions concaves. Supposons en outre que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$H(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t, p_t, q_t) = \inf_{u \in U} H(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t, p_t, q_t), \tag{3.16}$$

Alors $\widetilde{u}$ est un contrôle optimal.

Preuve. Soit la différence

$$J(\widetilde{u}) - J(u) = E\left[\int_0^T (f(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t) - f(t, \widetilde{x}_t, \widetilde{u}_t)) dt\right] \\ + E\left[g(\widetilde{x}_t) - g(x_T)\right].$$

Puisque g est concave, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[g(\widetilde{x}_T) - g(x_T)\right] &\geq E\left[(\widetilde{x}_T - x_T)g_x(\widetilde{x}_T)\right] \\
&= E\left[(\widetilde{x}_T - x_T)p(T)\right] \\
&= E\left[\int_0^T (\widetilde{x}_t - x_t)dp(t) + \int_0^T p(t)d(\widetilde{x}_t - x_t)\right] \\
&+ E\left[\int_0^T \sum_{j=1}^{n}(\sigma^j(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t) - \sigma^j(t,x_t,u_t))q^j(t)dt\right],
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T (\widetilde{x}_t - x_t)dp(t)\right] &= E\left[\int_0^T (\widetilde{x}_t - x_t)(-H_x(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t,p_t,q_t))dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T (\widetilde{x}_t - x_t)q(t)d\mathcal{B}_t\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T p(t)d(\widetilde{x}_t - x_t)\right] &= E\left[\int_0^T p(t)(b(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t) - b(t,x_t,u_t))dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T p(t)(\sigma(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t) - \sigma(t,x_t,u_t))d\mathcal{B}_t\right].
\end{aligned}$$

D'un autre côté, le processus

$$E\left[\int_0^T \left\{p(t)(\sigma(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t) - \sigma(t,x_t,u_t) + (\widetilde{x}_T - x_T)q(t)\right\} d\mathcal{B}_t\right],$$

est une martingale locale continue pour tous les $0 < t \leq T$, par le fait que $(p,q) \in \mathbb{L}^2(([0,T]\,;\mathbb{R}^n)) \times \mathbb{L}^2(([0,T]\,;\mathbb{R}^{n\times d}))$, on en déduit que les intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales ont une attente nulle. Par la concavité de l'Hamiltonien H, il devient

$$\begin{aligned}
E\left[g(\widetilde{x}_T)-g(x_T)\right] \geq &-E\left[\int_0^T (H(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t,p_t,q_t)-H(t,x_t,u_t,p_t,q_t))dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T p(t)(b(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)-b(t,x_t,u_t))dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T (\sigma(t,\widetilde{x}_t,\widetilde{u}_t)-\sigma(t,x_t,u_t))q(t)dt\right].
\end{aligned}$$

Par la définition du Hamiltonien H, il obtient

$$J(\widetilde{u})-J(u)\geq 0,$$

alors $\widetilde{u}$ est un contrôle optimal. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un problème de contrôle optimal stochastique pour des équations différentielles stochastiques (EDSs) avec des coefficients controllés a été discuté, et leur conditions nécessaires et suffisantes. La méthode de démonstration est basée sur le principe d'optimisation convexe qui est différente a la méthode classique où on utilise une perturbation convexe, inégalité variationnelle, ...,ect. À titre d'illustration, en utilisant ces résultats, le problème de sélection de fonction de coût a été discuté.

Bibliographie

[1] M.Jeanblanc (2006) :Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY.

[2] Léonard Gallardo :Mouvement brownien et calcul d'itô, cours et exercices corrigés, Hermann.

[3] Nils Berglund (Version de Janvier 2014) :Martingales et calcul stochastique, Master 2 Recherche de Mathématiques, Université d'Orléans.

[4] Huyên Pham :Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, Springer, New York.

[5] Mémoire Master, Aggoun Karima :Principe du maximum pour les équations différentielles stochastiques linéaires.

[6] I.E.Lakhdari(2018) :Optimal control for stochastic differential equations governed by normal martingales, University Mohamed khider Biskra.

[7] Jean-Christophe Breton(Septembre-D ecembre 2014) :Calcul stochastique, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1.

[8] J.Yong and X.Y. Zhou (1999), Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$	Filtration
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$	Espace de probabilitéfiltré
$\mathcal{B}_t$	Mouvement Brownien
E	L'espérance par rapport à la probabilité P.
$< X.X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$
exp	Exponentiel.
$\liminf$	Limite inférieur
$P - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité P
$s \wedge t$	min(s,t)
$J(.)$	La fonction de coût à minimiser
$\widetilde{u}$	Contrôle optimal
u_t^θ	Contrôle perturbé
$p(t)$	Processus adjoint
$H(t, x, \mu, u, p, q)$	Hamiltonian