République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par

**GASMI Manal**

Titre :

# Construction du mouvement Brownien

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | ZOUZOU Akila | UMKB | Encadreur |
| Dr. | CHALA Adel | UMKB | Président |
| Dr. | REMILI Nasira | UMKB | Examinateur |

septembre 2020

## Dédicace

Je dedie ce modeste travail :

À mes chèrs parents, pour tous leurs sacrifices , leurs amour , leurs tendresse , leurs soutien et leurs prières tout au long de mes études .

À ma chère soeur **Romaissa** pour sa présence à mes cotés , qui n'a jamais cessé de m'éppauler et de me soutenir inconditionnellement.

À mes chèrs frères **Fouaz** et **Okba** pour leurs appui et leurs encouragement .

À ma belle soeur **Karima** .

À mon cher neveu **Amin** .

À mes ami(e)s : **Isra** , **Madjida** , **Charifa, Rania** , **Tarek** qui ont si bien su m'encourager et me soutenir.

À tous ceux qui m'aiment .

# REMERCIEMENTS

*En Préambule de ce mémoire , je remercie Dieu qui ma donné le souffle pour la réalisation de ce mémoire .*

*Louange à Dieu pour Sa Grâce et Sa Bonté.*

*Un énorme merci à mes parents, ma soeur et mes frères pour leurs soutien et encouragement et pour l'infini patience tout au long mon parcours scolaire.*

*Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur,Madame* **Zouzou Akila** *pour ses remarques, ses conseils judicieux et sa disponibilité .*

*Je voudrais également remercier tous les membres de jury :* ***Dr.CHALA Adel*** *de m'avoir honorée en acceptée de présider le jury,* ***Dr.REMILI Nasira*** *d'avoir acceptée d'éxaminer ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarque et critique .*

*Je remercie chaleuresement mes amis qui ont si bien su m'encourager et me soutenir. Un MERCI bien particulier à mon adorable amie "Ammari Madjida", pour son amitié et l'aide qu'elle m'a apporté tout au long de ma démarche.*

*Tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu de toute manière que ce soit .*

<u>*Merci à vous tous*</u>

# Table des matières

# Introduction

En 1827 ,le botaniste R ,Browen , a observé une petite particule en suspension dans un liquide et soumise à l'infini de nombreuses collisions avec des atomes , et il est donc impossible d'observer sa trajectoire exacte .Avec l'aide d'un microscope , il est seulement possible de confirmer que le mouvement de particule est entièrement chaotique . II est nécessaire de faire des approximations de ce type de mouvement ( appelé *Mouvement Brownien* (M.B)) , dans le but de décrire le processus . Donc grâce aux travaux de Nobert Wiener aux États-Unis , Andreï Kolmogorov aux URSS sur la théorie des probabilités , et Paul Lévy , Doob en france , qui vont contribuer de façon décisive pour définir le modèle mathématique appelé processus de Wiener .

Depuis ces travaux , les chercheurs en mathématiques n'ont cessé d'étudier les propriétés des processus en général et en particulier ce processus , et les applications en sont nombreuses dans le domaine des finances .

L'objectif de ce travail est de présenté le mouvement Brownien .

Nous avons choisi de structurer notre manuscrit selon le plan décrit ci-dessous :

Le premier chapitre est consacré aux notions générales de processus stochastique, on a présenté des définitions de notion comme la filtration, temps d'arrêt, martingales,...etc.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude du mouvement Brownien, et ces propriétés principales.

Et finalement, dans le troisième chapitre, nous avons traiter une application du mouvement Brownien.

# Chapitre 1

# Étude préliminaire

Ce chapitre regroupe quelque définitions de base utilisées : processus stochastique,filtration,temps d'arrêt,martingales,...etc, qui sont indispensables pour la suite.

## 1.1 Rappels sur les processus stochastiques

L'objet de la théorie des processus stochastique (ou aléatoire) est l'étude des phénomèbes aléatoires dépendant du temps.

### 1.1.1 Base stochastique

**Définition 1.1.1** *(**processus stochastique**) Un **processus stochastique** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatiores $X_t$ indexée par un ensemble $\mathbb{T}$ des temps,définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ appelé espace de base, et à valeurs dans un espace mesurable $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$,appelé espace d'états.*

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de $t$ (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

- pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'éspace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.

Dans ce qui suit, on prendra tantôt $\mathbb{T} = [0, T]\,, T > 0$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.

**Définition 1.1.2** *(**Égalités des processus**) on dira que $Y$ est une **version** (ou une **modification**) du processus $X$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t)$ =1.*

Deux processus $X$ et $Y$ sont dit **indistinguables** s'il existe $N$ négligeable tel que pour $\omega \notin N$,on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$,de façon un peu abusive (car$\{X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}\}$ n'est pas nécessairement un évenement). on écrit : $\mathbb{P}(\mathbb{X}_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T})$ =1.

• Si $X$ et $Y$ sont des processus stochastique **indistinguables** alors, ils sont **modification** l'un de l'autre (La réciproque est général faux).

**Définition 1.1.3** • *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique*

*- Le processus $X$ est **un processus à trajectoires continues** (ou simplement **processus continu**) si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$.*

*- Le processus $X$ est dit **càdlàg (continu à droite limite à gauche)** si ses trajectoires sont continues à droite et à des limites à gauche.*

*- le processus $X$ est dit **càglàd (continu à gauche limite à droite)** si ses trajectoires sont continues à gauche et à des limites à droite*

**Définition 1.1.4** • *Soit $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité*

*Une famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$ est appellée une* **filtration** *si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ pour $s \leq t$ et $s, t \in \mathbb{T}$.*

*Le quadriple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}})$ est appelé **la base stochastique** (**Espace de probabilité filtré**).*

***Définition 1.1.5*** • *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$,*

*$X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}$ Un processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration (X processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)*

1. *Le processus $X$ est dit **mesurable** si la fonction $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ considérée comme une fonction entre $\Omega \times \mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable par rapport $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{T})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2. Le processus $X$ est dit **progressivement mesurable** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si $\forall\ s \in \mathbb{T}$ la fonction $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ considirée comme une fonction de $\Omega \times [0, s]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s \times \mathcal{B}(\,[0, s]\,)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Le processus $X$ est dit **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a que $X_t$ est $\mathcal{F}_t - mesurable.$

• Supposons $X$ et $Y$ des processus **modification** l'un de l'autre et que **les trajectoires** de $X$ et $Y$ sont **continues à gauche (ou à droite)** alors les processus $X$ et $Y$ sont **indistinguables**.

• Un processus progressivement mesurable est **mesurable** et **adapté**.

• Un processus stochastique **adapté** tel que tous **les trajectoires** sont **continues à gauche** (**ou à droite**) est **progressivement mesurable**.

**Définition 1.1.6** • *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *espace probabilisé muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*. On dit que la filtration satisfait aux conditions habituelles si elle est :*

*a.* *Compléte : une filtration compléte si l'espace est complet et si tous les ensembles* $\mathbb{P}$ *négligables appartiennent à* $\mathcal{F}_0$

*b.* *Continue à droite : $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ où $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$.*

**Remarque 1.1.1** *Une filtration quelconque $(\mathcal{F}^\circ_t)$ peut toujours être complétée : on complète l'espace, et on adjoint à chaque tribu tous les ensembles négligeables. Si l'on fait cette opération sur la famille rendue continue à droite $\mathcal{G}^\circ_t = \mathcal{F}^\circ_{t^+}$ ,on obtient une famille $(\mathcal{F}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles, et qui est appelée l'**augmentation habituelle** de la famille $(\mathcal{F}^\circ_t)$.*

**Remarque 1.1.2** *Un choix minimal de la filtration pour que le processus $(X_t)$ soit adapté est sa filtration naturelle qui est donnée par $(\mathcal{F}^X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où $\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s; s \leq t)$.*

**Remarque 1.1.3** $*$ *Tout processus stochastique est trivialement adapté à sa filtration naturelle.*

$*$ Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$, et si $X$ est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ alors toute modification de $X$ est encore adaptée.

**Définition 1.1.7** *Un processus stochastique adapté* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit* ***croissant*** *si* $X_0 = 0$ *et* $t \mapsto X_t$ *est une fonction croissante pour tout* $t \in \mathbb{T}$.

**Définition 1.1.8** *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus stochastique adapté une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. *Le processus est dit à accroissement indépendants si pour tout* $s < t$ *dans* $\mathbb{T}$*,la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_s$.
2. *Le processus est dit à accroissement stationnaires si la loi de* $X_t - X_s$*, pour* $s < t$ *dans* $\mathbb{T}$*,ne dépend que* $t - s$.

### 1.1.2 Processus à variation finie

Commençons d'abord par définir les fonctions à variation finie

**Définition 1.1.9** *Soit* $A$ *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$*,continue à droite avec limite à gauche. Une partition* $\Delta_t$ *de l'intervalle* $[0, t]$ *est une suite de points* $(t_i)_{\ i=0,\dots,n}$ *tels que* $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$*.Pour tout* $t > 0$ *on définit*

$$V(A)_t = \sup_{\Delta_t} \sum_{t_i \in \Delta_t} \left| A_{t_{i+1}} - A_{t_i} \right| \ .$$

*La fonction* $t \mapsto V(A)_t$ *s'appelle* ***la variation*** **(totale)** *de* $A$.

*La fonction* $A$ *est à* ***variation finie*** *si pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $V(A)_t$ *est finie*

**Exemple 1.1.1** *Les fonctions monotones, lipschitiziennes ou de classe* $C^1$ *sont à variation finie.*

**Définition 1.1.10** ***(processus à variation finie)*** *Un processus adapté* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est* ***à variation finie*** *si* $\mathbb{P}$*-presque toutes les trajectoires* $t \mapsto X_t(\omega)$ *sont à variation finie au sens de la définition précédente.*

**Remarque 1.1.4** *soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus continu, adapté.* $X$ *est un processus à variation finie si et seulement s'il existe* $X_t^1$ *et* $X_t^2$ *deux processus croissants tels que* $X = X_t^1 - X_t^2$.

### 1.1.3 Variation quadratique d'un processus stochastique

**Définition 1.1.11** $(\Delta_n)_{n\geq 0} = (t_k^n)_{k=0,\ldots,k(n)}$ *une suite de subdivision de*$[0,t]$, *vérifiant* $|\Delta_n| \underset{n\to+\infty}{\mapsto} 0$ *où* $|\Delta_n| = \sup_{i=0\ldots k(n)} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|$, *est soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus continu.*

*Posons :*

$$\mathbb{Q}_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$$

*On dit que le processus* $X$ *admet une variation quadratique finie sur* $[0,t]$ , *si :* $\lim_{n\mapsto+\infty} \mathbb{Q}_t^{\Delta_n}(X)$ *existe en probabilité.*

Dans ce cas, on note par :

$$\langle X_t \rangle = \langle X, X \rangle_t = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathbb{Q}_t^{\Delta_n}(X) \ .$$

Le processus $(\langle X, X\rangle_t)_{t\in\mathbb{T}}$ s'appelle la variation quadratique de $X$.

**Remarque 1.1.5** *La variation quadratique d'un processus continu à variation finie est nulle.*

**Exemple 1.1.2** *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement Brownien réel, alors* $X$ *admet une variation quadratique et* $\mathbb{P}$*-p.s :*

$$\langle X \rangle_t = t \ , \ \forall \ t \in \ \mathbb{R}_+ \ .$$

## 1.2 Temps d'arrêt

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, \mathbb{P})$.

**Définition 1.2.1** *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ *est une variable aléatoire* $\tau$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *telle que ,pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall \ t \in \ \mathbb{R}_+ \ .$$

**Définition 1.2.2** *Soit $\tau$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$-temps d''arrêt*

*On appelle* ***tribu des évenements antérieurs*** *à $\tau$,et on note $\mathcal{F}_\tau$,la tribu définie par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ ,\forall \ t \in \mathbb{T}\} \text{ où } \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\underset{t\in\mathbb{T}}{\cup}\mathcal{F}_t\right) \ .$$

**Définition 1.2.3** ***(Processus arrêt)*** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et $\tau$ un temps d'arrêt relativement à la même filtration on appelle* ***processus arrêt*** *au temps $\tau$ le processus definie par $X^\tau = (X_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ .*

***Remarque 1.2.1*** *Le processus arrêt est adapté à $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\}_{t\geq 0}$ et donc adapté à la filtration$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.*

**a)** Si $\tau$ est un temps d'arrêt, alors $\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable .

**b)** Si $S$ et $\tau$ sont deux temps, alors $S \wedge \tau$ est un temps d'arrêt .

**c)** Si $S$ et $\tau$ sont deux temps et si $S \leq \tau$,alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\tau$ .

## 1.3 Matingales

### 1.3.1 Rappels Sur L'espérance Conditionnelle

Contexte :$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. $X$ $Y$ $Z$ des vecteurs aléatoires intégrables de $\Omega \to \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.1** *Étant donné $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ .*

*On définit $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{H}$ comme l'unique vecteur aléatoire de $\Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

1. $\mathbb{E}\left(X|\ \mathcal{H}\right)$ est $\mathcal{H}$ -mesurable .
1. $\int_A \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{H}\right) \, d\mathbb{P} \ \forall \ A \in \mathcal{H}$. ($\Longleftrightarrow \int_\Omega Z.\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{H}\right) \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z.X \ d\mathbb{P}$ , $\forall$ $Z$ $\mathcal{H}$ -mesurable) .

**Proposition 1.3.1** *Si $X$ est de carré intégrable, alors $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{H}\right)$ représente la meilleure approximation* de $X$ au sens des moindres carrés par une variable.aléatoire de carré integrable $\mathcal{H}$-mesuable . En particulier, on a$\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})\|_{L^2} \leq \|X\|_{L^2}$

• Si $\mathcal{H} = \sigma(Y)$ ,alors on note $\mathbb{E}(X \mid Y)$ au lieu de $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ .

• Il existe $\varphi$ une application mesurable telle que $\mathbb{E}(X \mid Y) = \varphi(Y)$ et on note

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \varphi(Y) \ .$$

• $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(I_A \mid \mathcal{H})$ .

a) <u>Linéarité</u> : $a, b$ deux constantes $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{H}) = a\ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) + b\ \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{H})$ .

b) <u>Croissance</u> : si $X \leq Y$ ,alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{H})$ .

c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$ .

d) Si $Y$ est $\mathcal{H}$-mesurable,alors $\mathbb{E}(Y.X \mid \mathcal{H}) = Y.\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ .

e) Si $X$ est indépendant de $\mathcal{H}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$ .

f) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors :

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) \ .$$

### 1.3.2 Martingale à temps continu

Nous allons maintenant introduire à la notion de martingale en temps continu .

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ .

**Définition 1.3.2** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeur réelles , $X_t$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ adapté et intégrable ( pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$) est appelé :*

*- Une martingale si :*

$$\forall\ s \leq t,\ \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \ .$$

- *Une* sur − martingale *si :*

$$\forall\ s \leq t,\ \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \ .$$

- *Une sous-martingale si :*

$$\forall\ s \leq t,\ \mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq X_s\ .$$

**Définition 1.3.3** - *Une martingales $(M_t)_{t\geq 0}$ est dite uniformément intégrable si :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \mathbb{E}[\,|M_t|\ \ 1_{|M_t|>n}] = 0\ .$$

- *Une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ est dite fermée par une variable aléatoire $M_\infty \in L^1$ , si pour tout $t \geq 0$,*

$$M_t = \mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]\ .$$

- *Une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ est de carré intégrable si pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left(|M_t|^2\right) < +\infty\ .$$

**Proposition 1.3.2** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ -martingale de carré intégrable . Alors pour $s \leq t$ , on a :*

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\ .$$

**Preuve.** Par un calcul direct , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[X_t.X_s \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] - 2.X_s.\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] + X_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2.X_s^2 + X_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - X_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\ .
\end{aligned}$$

■

**Théorème 1.3.1** ***(convergence des martingales)***

i) Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale càd-làg borné dans $L^1$ (en particulier si elle est positive). Alors $M_t$ converge p.$s$ quand $t \to +\infty$.

ii) Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale càd-làg. Alors $M$ est uniformément intégrable si et seulement si $M_t$ converge p.$s$ et dans $L^1$ quand $t \to +\infty$ vers une variable aléatoire $M_\infty$. Dans ce cas, $M_\infty$ ferme $M$ à droite.

**Théorème 1.3.2** ***(Théorème d'arrêt)*** *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*

**i).** Pour tout temps d'arrêt borné $\tau$ la variable aléatoire $M_t$ est intégrable et $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

**ii).** Si $\sigma$ et $\tau$ sont deux temps d'arrêt bornés, et si $\sigma < \tau$, alors :

$$M_\sigma = \mathbb{E}\left(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \ .$$

**Théorème 1.3.3** ***(Inégalité de jensen)*** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale (resp une sous-martingale) et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante) .On suppose que $\varphi\left(X_t\right) \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ .Alors : $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale .*

**Théorème 1.3.4** ***(Inégalité de Doob)*** *Soit $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une sous-martingale positive (ou une martingale), càdlàg .Alors pour tout temps d'arrêt $\tau$ on a :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq \tau} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\,|M_t|}{\lambda} \ , \forall\ \lambda > 0 \ . \tag{1.1}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \tau} |M_t|\right]^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] \ , \forall\ p > 1 \ .$$

**Remarque 1.3.1** *L'inégalité 1.1 et le théorème de convergence des martingales impliquent que si $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale càdlàg uniformément intégrable, alors*

$$\sup_{t\in T} |M_t| < +\infty \quad p.s \ .$$

**Théorème 1.3.5** *Une martingale continue et bornée* $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *admet une variation quadratique finie*$(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ .

De plus ,$(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ est l'unique processus croissant, continu, nul en 0 tel que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ soit une martingale.

**Proposition 1.3.3** *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue, et soit* $\tau$ *un temps d'arrêt . Alors ,le processus arrêté* $M^\tau = (M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ *est une martingale (**martingale arrêté**). Et de plus*

$$\langle M^\tau, M^\tau\rangle = \langle M, M\rangle^\tau \ .$$

## 1.4 Martingales locales et semi-martingales continues

### 1.4.1 Variation totale et variation quadratique

**Définition 1.4.1** *La variation infinitésimale d'ordre* $p$ *d'un processus* $X_t$ *défini sur* $[0, T]$ *associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *est définie par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p \ .$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ à une limite dans un certain sens ($convergence\ L^p, convergence\ p.s$) lorsque :

$$\Pi_n : = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0 \ .$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre $p$ de $X_t$ sur$[0, T]$ .En particulier,

- Si $p = 1$, la limite s'appelle **la variation totale** de $X_t$ sur $[0, T]$ .

- Si $p = 2$, la limite s'appelle **la variation quadratique** de $X_t$ sur $[0, T]$ et est notée $\langle X \rangle_T$ où $\langle X \rangle_T = \langle X, X \rangle_T$ .

**Définition 1.4.2** *Un processus $X$ est un procrssus à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \ p.s \ .$$

**Proposition 1.4.1** *Un processus est à variation bornée si et seulement s'il est la différence de deux processus croissants .*

**Proposition 1.4.2** *Si $X$ est un proccessus à variation bornée à trajectoire continues,sa variation quadratique est nulle p.s :*

$$\langle X \rangle_T = 0 \ .$$

**Définition 1.4.3** *Soient $X$ et $Y$ deux processus tels que $X$ $Y$ et $X+Y$ ont des variations quadtratique finies dans $L^2$. On définit alors la covariation quadratique entre les processus $X$ $Y$ comme :*

$$\langle X,Y \rangle \ := \frac{1}{2} \left( \langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle \right) \ .$$

*Par construction, l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ vérifie :.*

*i.* <u>*Relation de bilinéarité*</u> *:* $\langle X + Y, X + Y \rangle : \langle X, X \rangle + 2 \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$

*ii.* <u>*Relation scalaire*</u> *:*$\langle \alpha X, \beta Y \rangle = \alpha\beta \langle X, Y \rangle$ .

**Proposition 1.4.3** *Soit $X$ un processus à variation bornée continu ayant une variation quadratique dans $L^2$ (qui est donc nulle) et $Y$ un processus à variation quadratique finie dans $L^2$, alors $X + Y$ est à variation finie dans $L^2$ et l'on a :*

$$\langle X+Y\rangle = \langle Y\rangle \ ,$$

ce qui revient à dire que :

$$\langle X,Y\rangle = 0 \ .$$

**Théorème 1.4.1** ***(Décomposition de Doob Meyer)***

Si $M$ est une martingale continue de carré intégrable ($\mathbb{E}\left(M_t^2\right) < \infty$ pour tout $t$), alors $\langle M\rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que $M^2 - \langle M\rangle$ soit une martingale .

### 1.4.2 Martingale locale continues

**Définition 1.4.4** *Soit $M$ un processus défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ à valeurs réelles, continu. On dit que $M$ est une martingale locale continue si :*

*(i). $M_0$ est intégrable .*

*(ii). Il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s est telle que $M^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable .*

### 1.4.3 Semi-martingale continues

**Définition 1.4.5** *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = M_t + A_t \ .$$

*où $M$ est une martingale locale et $A$ est un processus à variation finie .La décomposition ci-dessus est unique .Si $Y_t = M_t' + A_t'$ est une autre semi-martingale continue, on pose par définition :$\langle X,Y\rangle_t :=\langle M, M'\rangle_t$ .*

en particulier , $\langle X, X\rangle_t \ : \langle M, M\rangle_t$ .

# Chapitre 2

# Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau. Il est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence a Wiener, ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence a Brown. Nous allons maintenant présenter la déscription générale du mouvement Brownien : définition, et leurs propriétés principales.

## 2.1 Processus gaussiens

### 2.1.1 Variables gaussiennes

**Définition 2.1.1** *Un variable aléatoire $X$ suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité :*

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

*De façon générale, une variable aléatoire $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité :*

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

*Si $\sigma^2 = 0$, la loi est dégénérée, la variable aléatiore $X$ est constante égale à $\mu$. Sa loi est une mesure de Dirac en $\mu$ : $\mathbb{P}_X = \delta_\mu$.*

**Proposition 2.1.1** *Une variable aléatoire $X$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour :*

- **Espérance :** $\mathbb{E}[X] = \mu$.

- **Variance :** $Var(X) = \sigma^2$.

- **Fonction caractéristique :** $\varphi_X(t) = \exp(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$.

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors les moments de $X$ sont donnée par :

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0.$$

### 2.1.2 Vecteurs gaussiens

**Définition 2.1.2** *Un vecteur aléatiore $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est un gaussien ssi toutes les combinaisons linéaires ses coordonnées $\langle \alpha, X \rangle = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n$ suivant une loi gaussienne dans $\mathbb{R}$ (pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$) .*

**Définition 2.1.3** *La matrice de covariance d'un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est la matrice carée symétrique, positive :*

$$K = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i \leq j \leq n} \ .$$

*L'espérance de $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est le vecteur des espérance de ses marginales :*

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_n]) \ .$$

*Si $\mathbb{E}[\mathbb{X}]$ =0, le vecteur $X$ est dit centré .*

**Proposition 2.1.2** *Soient $(X, Y)$ un couple gaussien . Alors $X$ et $Y$ sont indépendantes ssi $Cov(X, Y) = 0$ .*

### 2.1.3 Définition d'un processus gaussien

Un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes .

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus gaussien réel ($i.e.\mathbb{E} = \mathbb{R}$). Pour tous $s, t \in \mathbb{T}$, on pose :

$$m(t) = \mathbb{E}(\mathbb{X}_t) \ . \tag{1.1}$$

et

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}((X_t - m(t))(X_s - m(s))) \ . \tag{1.2}$$

**Définition 2.1.4** *1. La fonction $m : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie en* (1.1) *s'appelle la moyenne du processus $X$ .*

*2. La fonction $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie en* (1.2) *est appelée la covariance du processus gaussien $X$ .*

**Remarque 2.1.1** *Pour toute partie finie $I = \{t_1, ..., t_n\}$ de l''espace des temps $\mathbb{T}$, la matrice*

$$\Gamma_I = (\Gamma(t_i, t_j))_{1\leq i,j\leq n} \ .$$

est de type positif puisque c'est la matrice des covariances du vecteur gaussien

$$X_I = (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \ .$$

Les deux fossus gaussien réel $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$,unique à équivalence près,tel que pour toute partie finie $I = \{t_1, ..., t_n\} \subset \mathbb{T}$ , Le vecteur aléatoire $X_1 = (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ , soit de loi $\mathcal{N}_n(m_1, \Gamma_1)$ avec $m_1 = (m(t_1), ..., m(t_n))$ .

## 2.2 Le mouvement Brownien

**Le mouvement Brownien** en 2 dim à étè observé par Robert BROWN en 1828 comme la diffusion du pollun dans l'eau . Aprés le mouvement Brownien en dim 1 à étè utilisé par Louis Bachelier . En 1900 pour modéliser les marches financiens et en 1905 par ALbert Ensten .

La premiére preuve mathématique régoureuse de son existence (mathématique) à étè donnée par Norbert Weiner en 1921 .

**Définition 2.2.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus stochastique Le processus* $B$ *est appelé Mouvement Brownien standard si :*

**1.** $B_0 = 0$ $\mathbb{P}.p.s$ .

**2.** $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est à accroissements indépendants .

**3.** $\forall\ 0 \leq s \leq t$ la variable aléatoire $B_t - B_s$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, t-s)$ .

**4.** L'application $t \to B_t$ est continue $\mathbb{P}.p.s$ .

**Proposition 2.2.1** $(B_t)$ *est processus gaussien dont la fonction de covariance :*

$$cov\,(B_t, B_s) = \min\,(t, s)\,.$$

**Preuve.** La covariance est égale à $\mathbb{E}\,(B_t B_s)$ car le processus $B_t$ est centré $(i.e\,; \mathbb{E}\,[B_t] = 0)$ si $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(B_t B_s) &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\,B_s + B_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}\,(B_t - B_s)\,\mathbb{E}\,(B_s) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \\ &= 0 + s = \min\,(t, s)\ \ . \end{aligned}$$

Car $(B_t - B_s)$ est $B_s$ sont indépendant, de même pour $s < t$ . ■

**Définition 2.2.2** *On appelle mouvement Brownien standard par rapport à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ , *un mouvement Brownien standard* $(B_t)_{t\geq 0}$ *adapté à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *et tel que :*

$$(B_t - B_s) \perp \mathcal{F}_s \ \forall \ 0 \leq s \leq t \ .$$

**Définition 2.2.3** ***(Mouvement Brownien avec dérive)*** *On appelle encore mouvement Brownien issu de $x$ et dérive (ou drift) $\mu$ et de coefficient de diffusion $\sigma$ , le processus :*

$$X_t = x + \sigma B_t + \mu t \ .$$

**Proposition 2.2.2** ***(Mouvement Brownien multidimensionnel)***

Soit $B_t = \left(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}, ..., B_t^{(n)}\right)^T$ un processus $n - \dim ensionnel$ (l'exposant $^T$ note la transposition d'un vecteur) .

On dit que $B$ est un Brownien multidimensionnel si le processus $\left(B^{(i)},\ i \leq n\right)$ sont des Brownien indépendants .

## 2.3 Construction du mouvement Brownien

Il existe de nombreuses constructions du mouvement Brownien mais toutes procédent en fait des mêmes idées, soit on le construit explicitement par une méthode hilbertienne à partir d'une suite de variables aléatoires normale indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$ , soit on utilise le théorème de Kolmogorov pour justifier son existence .

### 2.3.1 Existence du mouvement Brownien

**Théorème 2.3.1** *Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace $\mathbb{R}^{[0,+\infty]}$ muni de la tribu produit $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes[0,+\infty[}$ tel que le processus$(X_t)_{t\geq 0}$ des applications coordonnées, soit un mouvement Brownien naturel .*

**Preuve.** On vient de voir qu'un processus réel, gaussien centré partant de 0 et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ est un mouvement Brownien . Il suffit donc d'après le théorème **??** de prouver le résultat suivant : ■

**Lemme 2.3.1** *Pour tout entier* $n$ *et tous* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ , *la matrice* $\Gamma = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ *est de type positif .*

**Preuve.** Par récurrence sur $n = 1$, le résultat est trivial . si $n = 2$, on a :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

et pour un vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on a facilement $\langle u \mid \Gamma u \rangle = t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 u_2 + t_2 u_2^2 \geq t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 u_2 + t_1 u_2^2 = t_1 (u_1 + u_2)^2 \geq 0$, d'où le résultat dans ce cas . On fait alors l'hypothèse de récurrence suivant : Pour $(n-1)$ instants , la matrice $\Gamma$ correspondante est telle que pour tout vecteur $v = (v_1, ..., v_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a $\langle v \mid \Gamma v \rangle \geq t_1 (v_1 + ... + v_{n-1})^2$ . Pou vérifier cette hypothése à l'ordre $n$, remarquons que la matrice $\Gamma$ a sa première ligne et sa première colonne composées uniquement de la valeur $t_1$ et que le reste constitue une matrice $\Gamma_{n-1}$ correspondant aux valeurs $t_2 \leq ... \leq t_n$ pour tout vecteur $u = (u_2, ..., u_n)$ on obtient alors :

$$\langle u \mid \Gamma u \rangle = t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 (u_2 + ... + u_n) + \langle v \mid \Gamma_{n-1} v \rangle,$$

où $v = (u_2, ..., u_n)$. Mais on a $\langle v \mid \Gamma_{n-1} v \rangle \geq t_2 (u_2 + ... + u_n)^2 \geq t_1 (u_2 + ... + u_n)^2$ , et l'hypothèse de récurrence est aussitôt vérifiée . D'où le résultat . ■

### 2.3.2 Construction hilbertienne du mouvement Brownien

Soit $I = [0, T]$ $(ou\mathbb{R}_+)$ et $(e_n)_{n \in N}$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(I, dt)$ des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $I$ .On note $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t)\, dt$ le produit scalaire des fonctions $f, g \in \mathcal{L}^2(I, dt)$ .

**Théorème 2.3.2** *Soit* $(\mathcal{N}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoire i.i.d de loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *.Pour tout* $t \in I$, *on pose :*

$$B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle 1_{[0,t]}, e_n \right\rangle \mathcal{N}_n \ . \tag{2.1}$$

Alors le processus $B = (B_t)_{t\in I}$ est bien défini et c'est un Mouvement Brownien naturel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Preuve.** La série converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En effet si $S_t^{(n)}$ désigne sa somme partielle d'ordre $n$, comme les $\mathcal{N}_k$ sont non corrélées, pour tout $m \leq n$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left(S_t^{(n)} - S_t^{(m)}\right)^2\right) = \sum_{k=m+1} \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle^2 \longrightarrow 0 \ .$$

quand $m, n \longrightarrow \infty$ comme reste de la série convergente qui s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle = \left\| 1_{[0,t]} \right\|_{\mathcal{L}^2(I)} \ .$$

Ce qui montre que la suite $S_t^{(n)}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2$ donc elle converge . De plus comme les $S_t^{(n)}$ sont des variables aléatoires normales centrées, il en est de même pour leur limite $B_t$ par le même argument, on voit aussi que toute combinaison linéaire $a_1 B_{t_1} + ... + a_N B_{t_N}$ est aussi une variable normale centrée donc les processus $(B_t)_{t\in I}$ est gaussien centré . De plus $B_0 = 0$ par définition et pour tout $s, t \in [0, I]$ , grâce à l'indépendance des $\mathcal{N}_j$, on voit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(B_s B_t\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle 1_{[0,s]}, e_k \right\rangle \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle \\ &= \left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \right\rangle = \min\left(s, t\right) \ . \end{aligned}$$

Par la formule de **Bessel-Perceval .** Le processus $B$ est donc un mouvement Brownien sur $I$ d'après la définition 2.2.1 ■

.

## 2.4 Régularisation des trajectoires

**Théorème 2.4.1** ***(Critée de Kolmogorove)*** *Soit* $X = (X_t, t \in [0,1])$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\exists\ p > 1,\ c < \infty\ ,\ \varepsilon > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq c\,|t-s|^{1+\varepsilon}\ \forall\ t,s \in [0,1]$ *. Alors, il existe une version* $\tilde{X}$ *de* $X$ *dont p.s les trajectoires sont* ***hölder-continues*** *d'exposant* $\alpha$ *pour tout* $\alpha < \varepsilon/p$ *.*

**Proposition 2.4.1** ***(Dvoretski)*** *Il existe* $c > 0$ *tel que , pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\exists\ t \in [0,1] : |B_{t+s} - B_t| \leq \sqrt{c}, \forall s \in [0,\varepsilon]\right) = 0\ .$$

**Corollaire 2.4.1** ***(Play, Wienner, Zygmund)*** *Avec probabilité 1 , la trajectoire Brownienne est nulle part différentiable , i.e :*

$$\mathbb{P}\left(\exists\ t \in \mathbb{R}_+,\ \text{tel que}\ \lim_{s\longrightarrow t} \frac{B_t - B_s}{t-s}\ \textit{existe}\right) = 1\ .$$

## 2.5 Mouvement Brownien et martingales

Le Mouvement Brownien , ainsi que toute une série de pocessus d'érivés, sont des martingales . Les martingales, sur- et sous-martingales sont définies comme dans le cas discret, sauf qu'on considére tous les temps $t > s$, pour les quels $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Commençons par considérer le mouvement Brownien .

**Théorème 2.5.1** ***(Propriété de martingale du mouvement Brownien)*** *Le mouvement Brownien est une martingale par rapport à la filtration canonique* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *.*

**Preuve.** Pour tout $t \geq s \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t/\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_t - B_s + B_s/\mathcal{F}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(B_t - B_s/\mathcal{F}_s\right) + \mathbb{E}\left(B_s/\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) + B_s \\
&= B_s \ .
\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.5.1** *a). $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une martingale .*

*b). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)_{t\geq 0}$ est une martingale .*

**Preuve.**

a). Pour tout $t > s > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t^2/\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s\right) \\
&= B_s^2 + 0 + (t - s) \\
\mathbb{E}(B_t^2 - t/\mathcal{F}_s) &= B_s^2 - s \ .
\end{aligned}$$

b). 1.L'intégrabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_t|\right) = \mathbb{E}\left[\left|\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\lambda b - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \exp\left(\frac{b^2}{2t}\right) \ db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(b^2 - 2t\lambda b + t^2\lambda^2)}{2t}\right) \ db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(b - t\lambda)^2}{2t}\right) \ db = 1 < +\infty \ .
\end{aligned}$$

2. Puisque $X_t$ est une fonction continue de variables aléatoires $\mathcal{F}_t - mésurables$, $X_t$ est elle-même $\mathcal{F}_t - mésurables$ .

3. Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] &= X_s\mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s}/\mathcal{F}_s\right], \text{ car } X_s > 0 \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\frac{\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)}{\exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s\right)}/\mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(B_t - B_s\right) - \frac{\lambda^2}{2}\left(t-s\right)\right)/\mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(B_t - B_s\right) - \frac{\lambda^2}{2}\left(t-s\right)\right)/\mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(B_t - B_s\right) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)\right] \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(\lambda b - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)\exp\left(-\frac{b^2}{2(t-s)}\right)\, db \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(-\frac{b^2 - 2(t-s)\lambda b + \lambda^2(t-s)}{2(t-s)}\right)\, db \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(b-(t-s)\lambda)^2}{2(t-s)}\right)\, db \\
&= X_s\ .
\end{aligned}$$

■

## 2.6 Propriétés trajectorielles du mouvement Brownien

Les trajectoires du mouvement Brownien sont caractérisées par une "remarquable" irrégularité. Nous nous proposons de mettre en évidence ici quelque unes de ces pathologies.

**Proposition 2.6.1** *Soit* $(B_t)$ *un mouvement Brownien , Alors* $\mathbb{P}-p.s$ ,

**a)** $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\sup\frac{B_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\longrightarrow0^+}\sup\frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$

**b)** $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\inf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t\longrightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$

**Preuve.** Pour (a) on considère la variable aléatoire

$$R = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\sup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\sup \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t}}\ (\forall s \geq 0).$$

Par indépendance des accroissements Brownien $R \perp \sigma(B_u, u \leq s)$ pour tout $s \geq 0$ et donc $R \perp \sigma(B_u, u \geq 0)$ . Ainsi $R \perp R$ et donc $R$ est une constante (finie ou infinie) . ■

Supposons que $R$ est finie, ainsi par définition de la lim sup, $\mathbb{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R+1\right) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ .Or $\mathbb{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R+1\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq R+1\right) > 0$ d'où le résultat . La deuxiéme partie de (a) se traite de la même manière . Le point (b) est une conséquence immédiate de (a) et de la symétrie du Brownien.

**Remarque 2.6.1** *Les trajectoires du mouvement Brownien sont donc des exemples explicites de fonctions continues nulle part dérivable . Notons que sans faire appel aux probabilités, la consturction explicite d'un tel objet est loin d'être évidente . Du point de vue de la modélisation, la non dérivabilité signifie qu'on ne peut définir la vitesse de la particule, ceci est donc physiquement trés imparfait . Le fait d'avoir négligé la masse de la particule (pas d'inertie) est une explication de ce phénoméne .*

## 2.7 Propriétés en loi du mouvement Brownien

1. **Symétrie :** Si $B$ est un mouvement Brownien, alors $(-B)$ est un encore un mouvement Brownien .
2. **Autosimlarité (propriété d'échelle) :** Pour tout $c > 0$, $B_t^c = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ définit un mouvement Brownien (standard) .
3. **Inversion du temps :** Le processus retourné à l'instant $T$, $\tilde{B}_t$ défini par $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, si $t \neq 0$, et $\tilde{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien standard .
4. **Retournement du temps :** Le processus retourné à l'instant $T$, $\hat{B}^{(T)} = B_T - B_{T-t}$ est encore un mouvement Brownien sur $[0, T]$ .

5. **Propriété de Markov faible (ou Invariance par translation) :** Le mouvement Brownien tranlaté de $t_0 > 0$, $\bar{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ est encore un mouvement Brownien standard, de plus il est indépendant du mouvement Brownien arrêté en $t_0$ ,$(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$ , *i.e* : $\bar{B}_t^{(t_0)} \perp \mathcal{F}_{t_0}^B$, tel que $\mathcal{F}_{t_0}^B = \sigma\left(B_t, t \leq t_0\right)$.

## 2.8 Variation quadratique du mouvement Brownien

**Proposition 2.8.1** *La variation quadratique sur* $[0,T]$ *du mouvement Brownien existe dans* $\mathcal{L}^2(\Omega)$ *(la variation infinitésimale converge en* $\|.\|_2$*) et vaut* $T$ *. De plus, si la subdivision* $\Pi_n$ *satisfait* $\sum_{n=1}^{n} \pi_n < \infty$ *on a la convergence au sens presque sûr . On a donc :*

$$\langle B \rangle_T = T \ .$$

**Preuve.** La variation infinitésimale d'ordre 2 du mouvement Brownien est donnée par :

$$V_T^2\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left| B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n} \right|^2 \ .$$

On rappelle que si $X \backsim \mathcal{N}(\mathbf{0},\sigma^2)$ alors :

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2 \text{ et } Var\left[X^2\right] = 2\sigma^4 \ .$$

on a donc :

$$\mathbb{E}\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) = T,$$

et en notant $\pi_n := \max_{i \leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right|$ , on obtient :

$$Var\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n\right)^2 \leq 2T\pi_n \underset{\pi_n \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\left\|V_T^2\left(\pi_n\right)-T\right\|_2^2=Var\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right]\underset{\pi_n\to 0}{\to}0\ .$$

Pour obtenir la convergence presque sûre,il faut utiliser l'inégalité de Tchebycheve qui donne pour tout $\varepsilon$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[\left|V_T^2\left(\Pi_n\right)-T\right|>\varepsilon\right]<\infty,$$

ce qui par Borel-Cantelli entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2\left(\Pi_n\right)$ vers $T$ . ■

**Proposition 2.8.2** *Pourtoute subdivision $\Pi_n$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{n}\pi_n<\infty$, la variation infinitésimale d'ordre 1 sur $[0,T]$ du mouvement Brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers $+\infty$. Donc, la variation du mouvement Brownien vaut $+\infty$ p.s :*

$$V_T^1=\sup V_T^1\left(\Pi_n\right)=\infty\ p.s\ .$$

**Preuve.** Soit $\Pi_n$ une suite de subdivision de $[0,T]$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{n}\pi_n<\infty$. Alors, sur presque tout chemin $\omega$, on la relation :

$$V_T^2\left(\Pi_n\right)(\omega)\leq\sup_{|u-v|\leq\Pi_n}\left|B_u(\omega)-B_v(\omega)\right|V_T^1\left(\Pi_n\right)(\omega)\ .$$

Le terme de gauche tend vers $T$ car on a la convergence presque sûrement de la variation quadratique, le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement Brownien a ses trajectoires continues sur $[0,T]$. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini . ■

## 2.9 Non différentiabilité des trajectoires Browniennes

**Théorème 2.9.1** *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont différentiables en aucun point .*

**Preuve.** Il suffit d'après $(B_{t+s} - B_s)$ est un mouvement Brownien de se restreindre à l'étude des trajectoires sur l'intervalle $[0,1]$ . Fixons $M > 0$ et pour tout , entier $n > 0$ considérons l'événement :

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega ; \exists s \in \left[\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right] : |s-t| \leq \frac{2}{n} \Longrightarrow |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq 2M\,|s-t|\right\} .$$

Les $A_n$ forment une suite croissante et $A^{(M)} = \cup_n A_n$ contient tous les $\omega \in \Omega$ tels que la trajectoire $t \longrightarrow B_t(\omega)$ a une dérivée en un point de $]0,1[$ dont la valeur absolue est inférieure à $2M$ . D'autre part si $s \in \left[\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right]$ est tel que $|s-t| \leq \frac{2}{n}$ implique $|B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq 2M\,|s-t|$ et si $k$ est le plus grand entier tel que $\frac{k}{n} \leq s$ alors, on a :

$$\Delta_k(\omega) = \max\left(\left|B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)\right|, \left|B_{\frac{k+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{k}{n}}(\omega)\right|, \left|B_{\frac{k}{n}}(\omega) - B_{\frac{k-1}{n}}(\omega)\right|\right) \leq \frac{6M}{n} .$$

Si donc on considère les événements

$$\tilde{A}_n = \left\{\omega \in \Omega ; \exists k \leq n-2 : \Delta_k(\omega) \leq \frac{6M}{n}\right\} = \bigcup_{k=1}^{n-2} \left[\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right] \tag{2.2}$$

On a $A_n \subset \tilde{A}_n$. Donc pour prouver que $\mathbb{P}\left(A^{(M)}\right) = 0$, il suffit de montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) = 0$.
On déduit de**??** que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right) . \tag{2.3}$$

Mais la valeur de $\mathbb{P}\left(\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right)$ ne dépend pas de $k$ car le vecteur aléatoire

$$\left(B_{\frac{K+2}{n}} - B_{\frac{k+1}{n}}, B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}, B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)$$

a des composantes indépendantes et il est donc de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)^{\otimes 3}$ On peut alors récrire **??** sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) &\leq (n-2)\left(\mathbb{P}\left(\left|B_{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{6M}{n}\right)\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\frac{6M}{n}}^{\frac{6M}{n}} \exp\left(-\frac{1}{2}nx^2\right)\, dx\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-6M}^{6M} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{n}\right)\, dy\right)^3 \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty)\ .
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathbb{P}\left(A^{(M)}\right) = 0$. Pour finir, il suffit de remarquer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la trajectoire $t \longrightarrow B_t(\omega)$ est dérivable quelque part, est inclus dans $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A^{(M)}$ qui est de probabilité nulle . ∎

## 2.10 Le mouvement Brownien comme processus de Markov

Sachant que le mouvement Brownien est à accroissement indépendatnts, il est facile de calculer la loi conditionnelle de $B_t$ sachant $\mathcal{F}_s$, pour $s < t$ .

**Proposition 2.10.1** *Le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov .*

**Preuve.** Puisque $e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}$ indépendante de $\mathcal{F}_t$, ainsi que $e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}$ indépandante de $B_t$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}/\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t+B_t]}/\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}/\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}\right] \ \text{ car } \mu\left[B_{t+s}-B_t\right] \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_t \\
&= e^{\mu B_t}\mathbb{E}\left[e^{\mu[B_{t+s}-B_t]}/B_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\mu B_{t+s}}/B_t\right]\ .
\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.10.2** ***(Propriété de Markov forte)*** *Soit $\tau$ un temps d'arrêt à valeurs finies . On a alors :*

$$\mathbb{E}\left[f\left(B_{\tau+s}\right)/\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f\left(B_{\tau+s}\right)/\sigma\left(B_\tau\right)\right] \ .$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini $\tau$, le processus $(W_t, t \geq 0)$ définie par $W_t \overset{déf}{=} B_{t+\tau} - B_\tau$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$ .

# Chapitre 3

# Application

Comme énoncé en introduction nous allons traiter une application du mouvement brownien .

## 3.1 Calcul stochastique et intégrale d'ito

Les équations différentielles stochastiques (EDS) que l'on cherche à résoudre sont de la forme :

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{c} dX = b(X,t)dt + B(X,t)dW \\ X(0) = X_0 \end{array} \right\}$$

dont la solution d'un point de vue formel est :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X,s)ds + \int_0^t B(X,s)dW \qquad \forall t \geq 0$$

On va donc chercher à définir et à expliciter les intégrales de la forme

$$\int_0^T G(t,\omega)dW(t,\omega),$$

pour $G$ processus stochastique et$W$ mouvement Brownien.

Le probléme est que l'expression $\int_a^b g(t)df(t)$ , pour $g$ continue,n'a de sens que pour les fonctions $f$ variations bornées .

Ainsi, pour $\omega_0$ fixé, l'expression

$$\int_0^T G(\omega_0)dW(t,\omega_0) = \int_0^T G(t)dW(t)$$

n'a a priori de sens que si $W(t)$ est à variations bornées.

Or , nous avons vu que $W(.)$ était à variations infinies, donc $\int GdW$ ne peut étre défini au sens usuel.D'ou :

**Définition 3.1.1** *:Pour $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g \in C^1, g(0) = g(1) = 0,$on pose*

$$\int_0^1 gdW := \int_0^1 g^1 W dt$$

**Remarque 3.1.1** *: L'expression $\int_0^1 gdW$ est une variable aléatoire.*

**Remarque 3.1.2** *: $\int_0^1 gdW = -\int_0^1 \grave{g} W dt$ est bien définie (et finie) au sens de Riemann pour presque tout $\omega \in \Omega$ car $g^1$ est suppose $C^1$ et $W(t,\omega)$ est continu pour presque tout $\omega$.*

**Propriété :** Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g \in C^1, g(0) = g(1) = 0$. Alors :

$$\cdot E\left[\int_0^1 gdW\right] = 0$$

$$\cdot V\left[\int_0^1 gdW\right] = E\left[\left(\int_0^1 gdW\right)^2\right] = \int_0^1 g^2 dt$$

**Preuve.** On a d'une part

$$E\left[\int_0^1 gdW\right] = -E\left[\int_0^1 \grave{g}W\,dt\right] = -\int_0^1 \grave{g}E\left[W(t)\right]dt = 0, car E\left[W(t)\right] = 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
E\left[(\int_0^1 gdW)^2\right] &= E\left[\int_0^1 \grave{g}(t)W(t)dt\int_0^1 \grave{g}(s)W(s)ds\right] \quad = \int_0^1 \grave{g}(t)\grave{g}(s)E\left[W(t)W(s)\right]dsdt \\
&= \int_0^1 \grave{g}(t)(\int_0^1 s\grave{g}(s)ds + \int_t^1 t\grave{g}(s)ds)dt, car E\left[W(t)\right] = min(t,s) \\
&= \int_0^1 \grave{g}(t)(-\int_0^t g(s)ds + [sg]_0^t + t\int_t^1 \grave{g}(s)ds)dt \\
&= \int_0^1 \grave{g}(t)(-\int_0^t g(s)ds + tg(t) - tg(t)dt \\
&= \int_0^1 \grave{g}(t)(-\int_0^t g(s)ds) \\
&= \int_0^1 g^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Nous allons à présent généraliser la définition(3.1.1)pour les fonctions $g \in L^2$. Soit donc $g \in L^2(0,1)$ et soit $(g_n)_n \in N$ une suit de fonctions $C^1$ telle que : $\int_0^1 (g_n - g)^2 dt = 0$,c'est-à-dire $g_n \to g$ dans $L^2(0,1)$.Une telle suite existe , d'aprés, les propriétés générales des espaces $L^p$. D'aprés le deuxiéme point de la propriété 4.4,on a donc

$$E\left[(\int_0^1 g_m dW - \int_0^1 g_n dW)^2\right] = \int_0^1 (g_m - g_n)^2 dt,$$

c'est-à-dire $\left\{\int_0^1 g_n dW\right\}_n^\omega = 1$ est de Cauchy dans $L^2$ qui est complet pour la norme $\|f\|_{L^2} =$

$\int f^2 dt$ , donc elle converge.On définit donc : ■

**Définition 3.1.2** *:* $\int_0^1 gdW := lim_{n\to\omega} \int_0^1 g_n dW.$

**Probléme :** On a bien défini l'intégrale par rapport à $dW$ pour des fonctions $g \in L^2$ déterministes, mais pas pour les processus stochastiques .Il nous faut donc une définition dans le cas de processus $G(t, \omega)$ qui coïncide avec les définition ci-dessus lorsque $G(t, \omega) = G(t)$ presque partout .Cette généralisation est appelée intégrale stochastique d'Ito .

Soit $W(.)$ un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Définition 3.1.3** *:La o-algébre*

$$W(t) := \mathcal{F}(W(s) \mid 0 \leq s \leq t)$$

*est appelé historique du mouvement Brownien jusqu'au temps t inclus . la o-algébre*

$$W^+(t) := \mathcal{F}(W(s) - W(s) - W(t) \mid s \geq t)$$

*est le futur du mouvement Brownien à partir du temps t*

.

**Définition 3.1.4** *:Une famille de o-algébre*$(\mathcal{F}_t)$ *est une filtration de* $\mathcal{F}$ *si*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall t, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \\ 0 \leq s \leq t \Longrightarrow, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \end{array} \right\}$$

**Définition 3.1.5** *: Une famille* $(\mathcal{F}(t))_t \geq 0$ *de* $\sigma$*-algébre algébres incluses donc* $\mathcal{F}$ *est dite "non-anticipante" par rapport a* $W(.)$ *si :*

$$(**)\ \left\{\begin{array}{c} \mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s), \forall t \geq s \geq 0, \\ \mathcal{F}(t) \supseteq W(t), \forall t \geq 0, \\ \mathcal{F}(t) \textit{ est indépendant de } W^{+}, \forall t \geq 0. \end{array}\right\}$$

*donnons la définition pour un processus stochastique.*

# Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude de mouvement Brownien, qui nous fournira d'une classe d'intégrateurs la plus genérale pour le calcul stochastique. Pour cela, on a défini les processus à variation finie et on a donné une présentation des martingales locales, semi-martingales continues et les processus gaussiens . Nous nous sommes intéressés à la construction du mouvement Brownien en donnant ses propriétés principale.On a commencé par la construction du mouvement Brownien : sa existence et sa construction hilbertienne , Ensuite, on a donné quelques propriétés de mouvement Brownien . Et on a consacré la dernière section de ce mémoire a donné des applications de mouvement Brownien en particulier l'intégrale d'ito .

# Bibliographie

[1] A. Belqadhi (2008), Etude de calcule stochastique martingales,mouvement Brownien et intégration d'Itô Ecole polytechnique Fédérale De lausanne .

[2] N. Berglund (2012), Martingales et calcul stochastique université d'orléans.

[3] J-C. Breton (2019), Processus stochastique. Université de Rennes 1.

[4] G.Chagny, Construction du mouvement Brownien.

[5] L. Gallardo (2008), Mouvement Brownien et calcul d'itô :cours et exercices corrigés.Herman.

[6] J-F.Le Gall (2010), Calcul stochastique et processus de markov. Université Paris-Sud.

[7] J-F. Le Gall (2013), Mouvement Brownien,martingales et calcul stochastique. Université Paris-Sud. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | : | la mesure de probabilité |
| $C^k$ $(k = 1, 2)$ | : | la classe des fonctions $k-$ fois continuement dérivables |
| $L^1$ | : | l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires intégrables $(E\|X\| < \infty)$ |
| $L^2$ | : | l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires de carré intégrable $(E\|X\|^2 < \infty)$ |
| $\mathcal{B}(.)$ | : | la tribu borélienne sur . |
| $\sigma(.)$ | : | la tribu engendrée par . |
| $\|.\|$ | : | la norme |
| $\langle ., . \rangle$ | : | le produit scalaire |

Les abréviations utilisées dans ce mémoire sont :

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}-p.s$ | : | presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. |
| $EDS$ | : | équations différentielles stochastiques. |
| $i.e$ | : | c'est à dire. |
| $iid$ | : | indépendante et identiquement distribuée |