République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

REZGUI Maroua

Titre :

Sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaires de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**GHERBAL Boulakhras**	UMKB	**Encadreur**
Dr.	**YEKHLEF Samia**	UMKB	**Président**
Dr.	**GHOUL Abdelhak**	UMKB	**Examinateur**

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie mon travail

A mes parents sont très cher pour me soutenir.

A mon cher époux **Haroun.**

A mes frères **Fares** et **Nassro,** et mes soeurs **Sara, Farida, Rima.**

A toutes mes familles et mes amis.

Vous à tous ceux qui m'a encouragé.

REMERCIEMENTS

Louange à Allah qui nous a donné le courage, la puissance et la patience pour terminer ce mondeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Dr. **GHERBAL Boulakhras,** mon encadreur pour m'avoir bien suivi durant mon travail et de me faire profiter de son savoire, ainsi de ses conseils et pour tout l'aide, les remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce travail.

Je remercie également les menbers du Jury : Dr**. YEKHLEF Samia** et Dr. **GHOUL Abdelhak** pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Calcul stochastique et Équations différentielles stochastiques rétrogrades **3**

1.1 Calcul stochastique 3

1.1.1 Processus stochastique 3

1.1.2 Modification, indistingabilité des processus 4

1.1.3 Espérance conditionnelle 6

1.1.4 Martingales 7

1.1.5 Le mouvement Brownien (M.B) 8

1.1.6 Intégrale stochastique et EDS 8

1.1.7 Cas de processus simple 10

1.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades 14

1.2.1 Notations et définitions 14

1.2.2 Cas Lipschitz 16

1.2.3 EDSR linéaires 17

1.3 Résultats utilisés 18

2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSR linéaires 20

2.1 Formulation du problème et hypothèse 20

2.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 22

2.2.1 Le principe d'optimisation convexe 23

3 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaire de type champ moyen 29

3.1 Introduction 29

3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 30

3.2.1 Le principe d'optimisation convexe 31

Bibliographie 36

Annexe : Abréviations et Notations 38

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Les EDSR ont apparu pour la première fois en (1973) dans un travail de Bismut [2] dans le cas où le générateur est linéaire. Cependant le point de départ de la théorie des EDSRs est l'article de Pardoux et Peng (1990) [6], dans lequel le générateur est non linéaire. Bahlali, Gherbal et Merzerdi [1], ont prouvent l'existence des contrôles optimaux pour les EDSR linéaires et ils ont établirent les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour ce genre de problème de contrôle stochastique.

Notre objectif dans ce mémoire, c'est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour un problème de contrôle stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen (EDSRs) dans lequel les coefficients dépendent des processus de l'état de résolution ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction. De plus, la fonctionnelle de coût est également de type champ moyen. Plus précisément, le système est dérigé l'EDSR de type champ moyen suivante :

$$y_t = \xi + \int_t^T \left(a_s y_s + \hat{a}_s \mathbb{E}\left[y_s\right] + b_s z_s + \hat{b}_s \mathbb{E}\left[z_s\right] + c_s u_s \right) ds - \int_t^T z_s dW_s, \tag{1}$$

avec

a_s, $\hat{a}_s$, b_s, $\hat{b}_s$, et c_s sont des matrices suitables, $y_T = \xi$ est un processus $\mathcal{F}_T-$mesurable représente la condition terminale et u_t c'est la variable de contrôle. W_t est un mouvement Brownien standard défini dans un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, satisfaisant les conditions habituelles.

Alors notre problème de contrôle est de minimiser une certainne fonction de côut $J(.)$ définie par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(y_0, \mathbb{E}[y_0]) + \int_0^T h(t, y_t, \mathbb{E}[y_t], z_t, \mathbb{E}[z_t], u_t)\, dt\right]. \tag{2}$$

La méthode de démonstration de notre résultat des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour EDSR linéaire de type champ moyen, dans ce mémoire est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres, nous allons présenter dans ce qui suit la discription de ces chapitres :

Chapitre 1 : Calcul stochastique et Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Ce premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant quelques notations et définitions de processus stochastique, filtration, martingale, mouvenment Brownien, intégrale stochastique et puis nous présentons le premier résultat d'existence et d'unicité de soution pour les EDSR non linéaires (dû a Pardoux et Peng (1990) [3]) ainsi que le théorème d'existence de la solution pour les EDSR linéaire.

Chapitre 2 : Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les EDSR linéaires

Dans ce chapitre, nous établirons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires, comme le système est linéaire et le domaine des contrôles est convexe, alors pour établir ce résultat en utilisant la méthode de perturbation convexe ainsi que le principe d'optimisation convexe.

Chapitre 3 : **les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSR linéaires de type champ moyen**

Dans ce chapitre généralisons les résultats de deuxième chapitre au systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen, c'est-à-dire nous établirons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités pour les EDSR linéaires de type champ moyen.

Chapitre 1

Calcul stochastique et Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre, nous exposons la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement Brownien, martingales) qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique et puis l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastique rétrogrades.

1.1 Calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexées par un ensembe $\mathcal{T}$. En général $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.*

1. Si $\mathcal{T}$ est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.
2. Si $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variables aléatoires.

3. Si $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$, le processus est discret.
4. Si $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire.

Remarque 1.1 **i)** *Pour* $t \in \mathcal{T}$ *fixé, l'application* $w \in \Omega \mapsto X_t(w)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*

ii) *Pour* $w \in \Omega$ *fixé, l'application* $t \in \mathcal{T} \mapsto X_t(w)$ *est une fonction à valeurs réelles, appelée la trajectoire du processus* X_t*.*

1.1.2 Modification, indistingabilité des processus

– Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dit modification l'un de l'autre si :

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, X_t(\omega) = Y_t(\omega), \mathbb{P}-p.s.$$

– Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dit indistingable s'il existe un ensemble $N - \mathbb{P}$-négligeable tel que :

$$\mathbb{P}(\omega \notin N : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}^+) = 1.$$

C'est-à-dire :

$$\forall \omega \notin N \Longrightarrow X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}^+; \mathbb{P}-p.s,$$

ce qui signifier que les processus X et Y ont les mêmes trajectoires sauf peut-être sur un ensemble négligeable.

Définition 1.2 (Filtration) *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t.$$

1. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s'appelle un espace de probabilié filtré.

2. Une filration est $\mathbb{P}$-complète pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous le évènements de mesure nulle, (ou tous les ensembles négligeable) $i.e$

$$\mathcal{N}\{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0.$$

3. On dit qu'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, satisfait les conditions habituelles si :

- Les ensemles négligeables sont inclus dans $\mathcal{F}_0$ $i.e$

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0.$$

- La filtration est continue à droite $i.e$

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s \forall t.$$

Définition 1.3 (Processus continu) *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, le processus X est dit continu si pour presque tout $w \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(w)$ est continue (i.e leurs trajectoires sont continues).*

Définition 1.4

1. **Mesurable :** Un processus X est mesurable si l'application $(t, w) \mapsto X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ respectivement.
2. **Adapté :** Un processus X est adapté par rapport à filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$ X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
3. **Progressivement mesurable :** Un processus X est progressivement mesurable par rapport à filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, w) \mapsto X_s(w)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

1.1.3 Espérance conditionnelle

Définition 1.5 (Espérance conditionnelle par rapport à une tribu) *Soit X une $v.a.r$ (intégrable i.e $X \in L^1$) définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une tribu, on appelle espérance conditionnelle par rapport à une tribu $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire :*

a) $\mathcal{G}$-mesurable.

b) $\int\limits_A \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] dP = \int\limits_A X dP, \, \forall \in A \in \mathcal{G}.$

C'est aussi l'unique variable $\mathcal{G}$-mesurable (à une égalité $p.s$ prés) telle que :

$$\mathbb{E}\left[Y \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[XY\right],$$

pour tout variable aléaitoire Y, $\mathcal{G}$-mesurable et bornée.

Définition 1.6 (Espérance conditionnelle par rapport à une variable) *On définit l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X (intégrable) par rapport à une variable aléatoire Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note par $\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]$ est caractérisée par :*

a) C'est une variable $\sigma(Y)$-mesurable.

b)

$$\int\limits_A \mathbb{E}\left[X \mid Y\right] dP = \int\limits_A X dP, \forall A \in \sigma(Y).$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

a) Linéarité : Soit a et b deux constantes, on a

$$\mathbb{E}\left[aX + bY \mid \mathcal{G}\right] = a\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].$$

b) Croissance : Soit X et Y deux $v.a$ telles que $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right].$$

c)

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

d) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = X.$$

e) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right].$$

f) Si X indépendante de $\mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

g) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{H}\right] \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\left[\mathbb{E}X \mid \mathcal{G}\right] \mid \mathcal{H}\right].$$

1.1.4 Martingales

Définition 1.7 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (ou $\mathcal{F}_t$-adapté) et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé :*

- Une martingale si pour tout $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

- Une surmartingale si pour tout $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s.$$

- Une sousmartingale si pour tout $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s.$$

Remarque 1.3 *Si $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right],$$

pour tout t.

1.1.5 Le mouvement Brownien (M.B)

Définition 1.8 *Le processus $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :*

a) $\mathbb{P}\left(W_0 = 0\right) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée et de variance $(t-s)$.

c) $\forall n$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n$, les variables

$$\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}\right),$$

sont indépendantes.

Remarque 1.4 *On dit que W est un mouvement Brounien par rapport à x si $W_0 = x$.*

1.1.6 Intégrale stochastique et EDS

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filté où $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ c'est une filtration de $\mathcal{F}$, satisfaisant les conditions habituelles et $W_t = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien défini dans espace de probabilité.

Définition 1.9 *Un processus stochastique $X_t = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit simple si il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, de l'interval $[0,T]$ et une famille $(\varsigma_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires avec $\sup_i |\varsigma_i| \leq c \leq \infty$, telle que ς_i est $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable $\forall i \geq 0$:*

$$X_i = \varsigma_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Où $\mathbb{I}_B$ désigne l'indicatrice de l'ensemble B, c'est-à-dire :

$$\mathbb{I}_B = \begin{cases} 1 : si\ x \in B \\ -1 : \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.5 *L'ensemble des processus simples sera noté $\mathcal{S}_T$.*

Définition 1.10 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ progressivement mesurables est dit de classe $\mathcal{M}_T$ si*

$$\mathcal{M}_T = \left\{ X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \text{ progressivement mesurable } \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_t|^2\, dt < \infty\right]\right\}.$$

C'est-à-dire : $\mathcal{M}_T$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables et de carré intégrable.

Définition 1.11 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ progressivement mesurable est dit de classe $\mathbb{P}_T$ si :*

$$\mathbb{P}_T = \left\{ X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \textit{ progressivement mesurable } \mathbb{P}\left\{\int_0^t |X_t|^2\, dt < \infty\right\} = 1\right\}.$$

C'est-à-dire : $\mathbb{P}_T$ est l'ensemble des processus progressivement mésurables et de carré intégrable presque surement.

Lemme 1.1 *Pour les espaces précédent, on a l'inclusion suivante :*

$$\mathcal{S}_T \subset \mathcal{M}_T \subset \mathbb{P}_T.$$

Dans ce qui suit, on va constuire et on va donner les propriétés des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ du type

$$I(t) = \int_0^t X_s dB_s.$$

Comme on peut pas définir les intégrales de type précédent comme intégrales de Lebesgue-Stieljes puisque les trajectoires du movement Brownien contiennent toutes les propriétés qui en un certain sens sont l'analogue de la finitude de la variation.

1.1.7 Cas de processus simple

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique simple, on définit formellement intégrale stochastique X par rapport au mouvement Brownien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ comme suit :

$$I(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \varsigma_n(W_T - W_{t_n}),$$

et

$$I(t) = \int_0^t X_s dW_s,$$

donc

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^t \left[\varsigma_0 1_{\{0\}}(s) + \sum_{i=0}^{n} \varsigma_i 1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\right] dW_s \\
&= \int_0^t \varsigma_0 1_{\{0\}}(s)dW_s + \sum_{i=0}^{n} \varsigma_i \int_0^t 1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)dW_s \\
&= \varsigma_0 W_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \varsigma_n(W_T - W_{t_n}),
\end{aligned}$$

puisque

$$P(\varsigma_0 = 0) = 1.$$

On conclut , et en vérifiant que pour tout $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left[\delta(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\delta(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] = 0.$$

De plus

$$\mathbb{E}[I(t)] = 0,$$

et

$$Var[I(t)] = \mathbb{E}[\int_0^t (\delta(s))^2 ds].$$

Propriétés d'intégrales stochastiques

1. **Mesurabilité** : $t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

2. **Linearité** : soient $I(t)$ et $J(t)$ deux intégrales stochastiques donnés par :

$$I(t) = \int_0^t \delta(s) dB_s, \text{ et } J(t) = \int_0^t \phi(s) dB_s.$$

   Alors on obtient le resultat suivant :

$$I(t) + J(t) = \int_0^t (\delta(s) + \phi(s)) dB_s,$$

   et

$$\alpha I(t) = \int_0^t \alpha \delta(s) dB_s.$$

3. $$(I(t))_{t \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

4. Propriété d'isomitrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \delta(s) dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(s) ds\right].$$

Définition 1.12 (Processus d'Itô) *On appelle un processus d'Itô, tout processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où x est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant les conditions suivantes $\mathbb{P}-p.s$:

$$\int_0^T |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2\, ds < \infty \ .$$

On utilise la forme différentielle suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dW_t, \\ X_0 &= x, \end{cases}$$

telle que, le coefficient b est appelé le drift ou la dérive et σ est appelé le coefficient de diffusion.

Remarque 1.6 *La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

a) Première formule d'Itô : Soient X un processus d'Itô et

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

est une fonction de classe C^2 à dérivées bornées, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^T f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

b) Deuxième formule d'Itô : Soient

$$(t, x) \mapsto f(t, x),$$

est une fonction réelle deux fois différentiable en t et X un processus d'Itô

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Définition 1.13 (Équation différentielle stochastique) *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \tag{1.1}$$

où sous la forme

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, x_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \\ X_0 &= x. \end{cases}$$

Le coefficient b s'appelle le drift et la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion. L'inconnu est le processus X.

Le problème est -comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire-, de montre que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle stochastique précédente à une solution unique.

Définition 1.14 (Solution forte de l'EDS) *Une solution (forte) de l'EDS* (1.1) *est un processus continu X tel que :*

1. X est progressivement mesurable.
2. On a
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{|b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2\right\} ds\right] < +\infty,$$
où $\|\sigma\|^2 = trac(\sigma\sigma^*)$.
3. $\mathbb{P}-p.s$, on a :
$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \quad 0 \le t \le T.$$

Théorème 1.1 (Existence et unicité) *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante λ telle que $t \in [0, T]$, x, $y \in \mathbb{R}^n$,*

1 Condition de Lipshitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \lambda |x-y| .$$

2 Croissance linéaire :

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq \lambda(1+|x|),$$

et de plus la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et est de carré intégrable $i.e$ $\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty\right)$.

Alors, il existe une unique solution de l'EDS (1.1) à trajectoires continues pour tout t.

La preuve du théorème d'existence et d'unicité de la solution, est basée sur le lemme de Gronwall, l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy et l'application du théorème de point fixe.

1.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

1.2.1 Notations et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien de d-dimensionnel dans $\mathbb{R}^d$ sur cet espace, où

$$W = \left\{W_t^i,\ t \geq 0,\ 1 \leq i \leq d\right\}.$$

On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filration augmentée du mouvement Brownien, qui vérifie les hypothèses usuelles :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sigma\left\{W_s,\ 0 \leq s \leq t\right\} \cup \mathcal{N}\right),$$

on se donne T un temps déterministe fini et fixé (appelé aussi l'horizon).

On travaillera avec deux espaces de processus :

$\star$ $\mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: L'espace vectoriel forme des processus progressivement mesurable Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

⋆ $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$: L'espace vectoriel formé des processus progressivement mesurable Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] < \infty,$$

où pour $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = tr\,(zz^*)$, pour simplifie, on note $|z|^2$.

⋆ On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t &= f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dW_t,\ 0 \leq t \leq T, \\ Y_t &= \xi, \end{cases}$$

ou d'une façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_t^T Z_r dW_r,\ 0 \leq t \leq T. \tag{1.2}$$

Dans l'EDSR (1.2), les éléments de base sont les paramètres f et ξ appelés respectivement le générateur et la condition terminale, on dit souvent que l'EDSR est associée aux paramètres (f, ξ) qui vérifiant :

1.

$$f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k,$$

tel que : $f\left(., t, y, z\right)$ noté pour simplifier $f\left(t, y, z\right)$ est progressif pour tout y, z.

2.

$$\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k\right).$$

Notre objectif est de trouver une solution de l'équation(1.2) c'est-à-dire les inconnues Y et Z.

Définition 1.15 *Une solution de I'EDSR est un couple de processus* $\left\{(Y_t, Z_t)\right\}_{0\leq t\leq T}$ *véri-*

fiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ (respectivement).
2. On a :
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{\left|f\left(r,Y_r,Z_r\right)\right| + \left\|Z_r\right\|^2\right\} dr\right] < \infty.$$
3. $\mathbb{P}-p.s$, on a :
$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r,Y_r,Z_r\right) dr - \int_t^T Z_r dW_r,\ 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 1.7 **i)** *Les intégrables de l'equation* (1.2) *étant bien définies*

ii) On a :
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f\left(r,Y_r,Z_r\right) dr - \int_0^t Z_r dW_r,\ 0 \leq t \leq T.$$

telle que :
$$\int_0^t f\left(r,Y_r,Z_r\right) dr,$$

est à variation finie et
$$\int_0^t Z_r dW_r,$$

est une martingale, alors Y_t est une semi-martingale continue.

iii) Y_0 est une quantité déterministe car, Y_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

1.2.2 Cas Lipschitz

Résultat de Pardoux-peng

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

a) Condition d'intégrabililé

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T \left|f\left(r,0,0\right)\right|^2 dr\right] < \infty.$$

b) Condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z'.

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda (|y-y'| + \|z-z'\|),$$

telle que λ est une constante indépendante de t, y, y', z et z'.

Théorème 1.2 (PARDOUX-PENG 90) *Etant donné un couple* (f,ξ) *vérifiant les deux conditions* ***a)*** *et* ***b)****, il existe une solution unique* $(Y,Z) \in S^2 \times M^2$ *à l'EDSR* (1.2).

Démonstration. L'idée de démonstration est basée sur un argument de point fixe sur l'espace de Banach $\mathcal{B}^2 = S^2 \times M^2$ des solutions (Y,Z).

La preuve se fait en deux étapes. On construit une application Ψ sur $\mathcal{B}^2$, qui à pour tout $(U,V) \in \mathcal{B}^2$ associe

$$(Y,Z) = \Psi(U,V),$$

définie par :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \ 0 \leq t \leq T.$$

i) Permière étape : Nous vérifions que l'application Ψ est bien définie de $\mathcal{B}^2$ dans lui même.

ii) Deuxième étape : Pour montrer l'existence et unicité d'une solution de l'EDSR (1.2), il nous suffit de montrer l'existence et unicité d'un point fixe pour Ψ ce qui revient par le théoreme de point fixe à montrer que Ψ est contractante.

■

1.2.3 EDSR linéaires

Dans ce partie, nous étudions un cas particulier des EDSR qu'est le cas linéaire pour lequel nous allons donner une formule plus ou mois explicite.

Définition 1.16 *On suppose que* $k = 1$ *ce qui implique que* Y *est un réel et* Z *est une matrice de taille* $1 \times d$ *(vecteur de dimension* d*).*

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un couple processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné et soient $\{c_r\}_{t\in[0,T]}$ un élèment de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable, à valeurs réelles, telle que.

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + b_r Z_r + c_r\}\, dr - \int_t^T Z_r dW_r. \tag{1.3}$$

L'EDSR (1.3) s'appelle équation différentielle stochastique rétrograde linéaire.

Proposition 1.1 *L'EDSR* (1.3) *possède une solution unique qui vérifie,*

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left[\xi\Gamma_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right],$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2\, dr + \int_0^t a_r dr\right).$$

Remarque 1.8 *Notons que si* $\xi \geq 0$ *et* $c_t \in S^2$ *alors la solution de l'EDSR linéaire* (1.3) *vérifiant que* $Y_t \geq 0$.

1.3 Résultats utilisés

Lemme 1.2 (Lemme de Gronwall) *Soit* $T > 0$ *et soit* g *une fonction positive mesurable et bornée sur l'intervalle* $[0,T]$. *Supposons qu'il existe deux constantes* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *telles que pour tout* $t \in [0,T]$

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\, ds,$$

alors, on pour tout $t \in [0,T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.3 (Représentation des martingales Browniennes) *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la fil-*

tration naturelle du mouvement Brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$. *Soit* M *une martingale continue par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *et de carré intégrable. Alors il existe un unique processus prévisible* H *vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T H_s^2 ds\right] < +\infty,$$

tel que $\forall t \in [0,T]$:

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s,\ \mathbb{P}-p.s.$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Pour tout* $p > 0$, *il existe des constantes positives* c_p *et* C_P *telles que, pour toute martingale locale continue* $X = (X_t)_{t\geq 0}$, *nulle en* 0, *on a:*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_P\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right].$$

Remarque 1.9 *En particulier, si* $T \geq 0$, *on a*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_P\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

Théorème 1.5 (Théorème du point fixe) *Soient* (E, d) *un espace métrique complet et*

$$\varphi : E \to E,$$

une application contractante, i.e. Lipshitzienne de rapport $k < 1$. *Alors,* φ *adment un unique point fixe* $a \in E$ *tel que :*

$$\varphi(a) = a.$$

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSR linéaires

Dans ce chapitre, nous établirons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires, comme le système est linéaire et le domaine des contrôles est convexe, alors pour établir ce résultat en utilisant la méthode de perturbation convexe ainsi que le principe d'optimisation convexe.

2.1 Formulation du problème et hypothèse

Soient T un réel strictement positif, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré, satisfaisant les conditions habituelles, $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de dimension r défini dans cet espace et U un sous ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^k$.

On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 2.1 *On appel contrôle admissible tout processus $v = \left((v_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ progressivement mesurable à valeurs dans U. On note par U_{ad} l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

Pour tout $v. \in U_{ad}$ on considère le problème du contrôle optimal gouvernés par l'EDSR linéaire suivante :

$$y_t = \xi + \int_t^T \{a_s y_s + b_s z_s + c_s u_s\} \, ds - \int_t^T z_s dW_s, \tag{2.1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurabe telle que

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty,$$

soient a_t, b_t, c_t trois processus bornés et progressivement mesurables par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$.

Soit maintenant la fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles admissible strict $\mathcal{U}$ qui définie par :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(y_0) + \int_0^T h(t, y_t, z_t, u_t) \, dt\right], \tag{2.2}$$

où

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d} \times U \to \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R},$$

sont des fonctions mesurables données.

Le problème de contrôle optimal est de chercher parmi l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$, un contrôle qui minimise la fonction de coût J et leurs trajectoires satisfisant l'EDSR linéaire (2.1).

Définition 2.2 *1. Un contrôle admissible u est un processus progressivement mesurable tel que*

$$\mathbb{E}\left[|u_t|^2\right] < \infty.$$

2. Un contrôle admissible u est dit optimal s'il satisfie :

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v). \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 *En remarquant que on a ajouté la condition du carré intégrabilité au contrôle admissible, c'est juste pour assurer l'existence du solution de l'EDSR linéaire (2.1).*

Hypothèses (H) : Pour établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités on besoin des hypothèses suivantes :

On suppose que :

- $U \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe et compact.
- h et g sont continues et convexes.
- h et g sont continument dérivables en leurs variables avec des dérivées continues et bornées.

2.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous donnons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité, sous forme d'un principe de maximum, sous l'hypothèse de convexité du domaine de contrôle U, dans ce cas, en utilisant la méthode de perturbation convexe du contrôle optimal. On pertube le contrôle optimal u, de la manière suivante :

$$u_t^{\varepsilon} = u_t + \varepsilon \left(v_t - u_t \right), \quad v \in \mathcal{U}, \quad \text{où}, \quad \varepsilon > 0,$$

on note par u^{ε} le contrôle pertubé et par $\left(y_t^{\varepsilon}, z_t^{\varepsilon} \right)$ la solution de l'equation (2.1) contrôlée par u^{ε} (ou bien les trajectoires associées à u^{ε}).

D'aprés l'optimalité de u, on a :

$$0 \leq J \left(u^{\varepsilon} \right) - J \left(u \right).$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J \left(u^{\varepsilon} \right) - J \left(u \right) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(J \left(u + \varepsilon \left(v - u \right) \right) - J \left(u \right) \right) \\ &= \left\langle J' \left(u \right), v - u \right\rangle . \end{aligned}$$

2.2.1 Le principe d'optimisation convexe

Pour établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en utilisant le principe d'optimisation convexe (voir Ekeland-Temam ([3], prop 2.1, page 35) donner par le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soit E un espace de réflexif, $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble convexe, fermé non vide de E et F est une fonction définie de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, semi-continue inférieurement et gâteaux-différentiable de différentielle F' continu, alors, on a*

$$x^* \text{ minimise } F \Longleftrightarrow \left\langle F' \left(x^* \right), x - x^* \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{D}.$$

Comme l'ensemble des contrôles U est convexe et J est convexe en u, continu et Gâteaux-différentiable de différentielle J' continu, on peut applique le principe d'optimisation convexe précédent, pour obtenir

$$\left(u \text{ minimise } J \right) \Longleftrightarrow \left\langle J' \left(u \right), v - u \right\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}. \tag{2.4}$$

Commençons par calculer la dérivée de Gâreaux de J au point u et direction $\left(v - u \right)$, nous *avons la formule*

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v-u\rangle &= \mathbb{E}\left[g_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) + h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)\right) dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(v_t - u_t\right) dt\right].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Théorème 2.2 (Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité) *Soit u un contrôle admissible et (y^u, z^u) la solution de (2.1) correspondante à u. Alors u est optimal si seulement s'il existe un unique processus adapté Q, solution de l'equation différentielle stochastique suivante (appelée équation adjointe)*

$$\left\{\begin{array}{rcl} dQ_t^v &=& H_y\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v\right) dt + H_z\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v\right) dW_t, \\ Q_0^v &=& g_y\left(y_0^v\right), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

tel que

$$H_u\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v\right)\left(v_t - u_t\right) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s. \tag{2.7}$$

Où a fonction de Hamiltonien est définie comme suit

$$H\left(t, y_t, z_t, Q_t, v_t\right) = h\left(t, y_t, z_t, v_t\right) + \left\langle Q_t, a_t y_t + z_t b_t + c_t v_t\right\rangle. \tag{2.8}$$

Démonstration. On peut réécrire (2.4) comme suit

$$\left\{\begin{array}{rcl} dQ_t^v &=& \left\{h_y\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) + a_t Q_t^v\right\} dt + \left\{h_z\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) + b_t Q_t^v\right\} dW_t, \\ Q_0^v &=& g_y\left(y_0^v\right). \end{array}\right.$$

Par la formule d'Itô (intégration par partie), on a

$$d\left(Q_t y_t\right) = Q_t dy_t + Q_t dy_t + d\left\langle Q, y\right\rangle_t,$$

tel que :

$$\begin{cases} dy_t &= -\left(a_t y_t + b_t z_t + c_t u_t\right) dt + z_t dW_t, \\ y_t &= \xi. \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} d\left(Q_t^u y_t^u\right) &= Q_t^u dy_t^u + Q_t^u dy_t^u + d\left\langle Q^u, y^u\right\rangle_t \\ &= -Q_t^u\left(a_t y_t^u + b_t z_t^u + c_t u_t\right) dt + Q_t^u z_t dW_t \\ &+ y_t^u\left(h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + a_t Q_t^u\right) dt + y_t^u\left(h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + b_t Q_t^u\right) dW_t \\ &+ \left(z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + z_t^u b_t Q_t^u\right) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d\left(Q_t^u y_t^u\right) &= -Q_t^u c_t u_t dt + Q_t^u z_t^u dW_t \\ &+ \left(y_t^u h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right) dt \\ &+ \left(y_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + y_t^u b_t Q_t^u\right) dW_t \\ &+ z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) dt, \end{aligned}$$

passant à l'intégrale de 0 à T, on trouve

$$\begin{aligned} Q_T^u y_T^u - Q_0^u y_0^u &= \int_0^T \left(y_t^u h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - Q_t^u c_t u_t\right) dt \\ &+ \int_0^T \left(Q_t^u z_t^u + y_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + y_t^u b_t Q_t^u\right) dW_t, \end{aligned}$$

par passage a l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[Q_0^u y_0^u\right] = \mathbb{E}\left[Q_T^u y_T^u\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right) dt\right]. \tag{2.9}$$

Et puisque on a $Q_0^u = g_y\left(y_0^u\right)$ d'après l'équation (2.5) et $y_T^u = \xi$, alors (2.9) devient

$$\mathbb{E}\left[g_y\left(y_0^u\right)y_0^u\right] = \mathbb{E}\left[Q_T^u\xi\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right)dt\right], \tag{2.10}$$

par le même argument nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[g_y\left(y_0^u\right)y_0^v\right] = \mathbb{E}\left[Q_T^u\xi\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left(Q_t^u c_t v_t - y_t^v h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - z_t^v h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right)dt. \tag{2.11}$$

Remplaçant les deux égalités (2.10) , (2.11) dans l'égalité (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\langle J'\left(u\right), v-u\right\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t v_t - y_t^v h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - z_t^v h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right)dt\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - z_t^u h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right)dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) - h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)\right)dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)dt\right].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left\langle J'\left(u\right), v-u\right\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t\left(v_t - u_t\right)dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right)dt\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\int_0^T h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(h_y\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) - h_z\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)\right)dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)dt\right],\end{aligned}$$

donc

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t (v_t - u_t)\, dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t^v - u_t)\, dt\right]. \tag{2.12}$$

D'autre part, d'après (2.7) on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\, dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t (v_t - u_t)\, dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t^v - u_t)\, dt\right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

d'après (2.12) (2.13), on trouve

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\, dt\right],$$

en utilisant l'équivalence (2.4) et l'égalité précédente, on obtient

$$(u \text{ minimise } J) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\, dt\right] \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{U}. \tag{2.14}$$

Cela implique que

$$\mathbb{E}\left[H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\right] \geq 0,\ \mathbb{P}{-}p.s$$

Maintenant, soit F est élément arbitraire de σ-algèbre $\mathcal{F}_t$, et on pose que

$$\pi_t = v_t 1_F + u_t 1_{\Omega - F}.$$

Il n'est pas difficile de voir que π est un élément de $\mathcal{U}$. En appliquant l'inégalité ci-dessus avec π, nou obtenous

$$\mathbb{E}\left[1_F H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\right] \geq 0,\ \forall F \in G_t.$$

Ce qui implique cela

$$\mathbb{E}\left[H_u\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u\right)\left(v_t - u_t\right) dt \mid \mathcal{F}_t\right] \geq 0.$$

On obtient le résultat d'après la mesurabilité de la quantité interieure l'espérance par rapport à $\mathcal{F}_t$. ■

Chapitre 3

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaire de type champ moyen

3.1 Introduction

Soit W_t un processus de Wiener r-dimensionnel défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On notera par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de (mouvement Brownien W_t) tel que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensemble P-nul de $\mathcal{F}$, et on considère une variable aléatoire ξ de carré intégrable et $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Nous considérons un problème de contrôle optimal dans lequel le système est gouverné par l'EDSR linéaire de type champ moyen suivante :

$$y_t = \xi + \int_t^T \left(a_s y_s + \hat{a}_s \mathbb{E}\left[y_s\right] + b_s z_s + \hat{b}_s \mathbb{E}\left[z_s\right] + c_s u_s \right) ds - \int_t^T z_s dW_s, \tag{3.1}$$

avec a, $\hat{a}$, b, $\hat{b}$ et c sont des matrices suitables et u_s est la variable de contrôle a valeurs dans un sous ensemble U de $\mathbb{R}^n$.

La fonction de coût a minimiser dans l'ensemble des contrôles admissible $\mathcal{U}$ est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(y_0, \mathbb{E}[y_0]) + \int_0^T h(t, y_t, \mathbb{E}[y_t], z_t, \mathbb{E}[z_t], u_t)\, dt\right], \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{aligned} &h : [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \to \mathbb{R}, \\ &g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sont des fonctions données.

Remarque 3.1 *1. L'équation* (3.1)*, c'est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de type champ moyen avec $Y_T = \xi$. On remarque ici que les coefficients dépendent des processus d'état de résolution ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction. De plus, la fonctionnelle de coût est également de type champ moyen. L'objectif de controlleur est de trouve parmi les contôles admissibles, un contrôle qui minimise la fonction de côut J sur $\mathcal{U}$, tel que les trajectoires associées à ce contrôle vérifiant l'EDSR linéaire de type champ moyen* (3.1)*.*

Hypothèses (H) : Pour établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités on besoin des hypothèses suivantes :

On suppose que :

- $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact.
- h et g sont continues et convexes.
- h et g sont continument dérivables en leurs variables avec des dérivées continues et bornées.

3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous donnons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité, sous forme d'un principe de maximum, sous l'hypothèse de convexité du domaine de contrôle U, dans ce cas, en utilisant la méthode de perturbation convexe du contrôle optimal. On pertube le contrôle optimal u, de la manière suivante :

$$u_t^{\varepsilon} = u_t + \varepsilon\left(v_t - u_t\right), \quad v \in \mathcal{U}, \quad \text{où}, \quad \varepsilon > 0,$$

on note par u^{ε} le contrôle pertubé et par $(y_t^{\varepsilon}, z_t^{\varepsilon})$ la solution de l'equation (3.1) contrôlée par u^{ε} (ou bien les trajectoires associées à u^{ε}).
D'aprés l'optimalité de u, on a :

$$0 \leq J\left(u^{\varepsilon}\right) - J\left(u\right).$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(J\left(u^{\varepsilon}\right) - J\left(u\right)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(J\left(u + \varepsilon\left(v - u\right)\right) - J\left(u\right)\right) \\ &= \langle J'\left(u\right), v - u\rangle. \end{aligned}$$

3.2.1 Le principe d'optimisation convexe

Puis le système est linéaire et l'ensemble des valeurs des contrôles est convexe, alors pour établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en utilisant le principe d'optimisation convexe.
Comme l'ensemble des contrôles U est convexe et J est convexe en u, continu et Gâteaux-différentiable de différentielle J' continu, on peut applique le principe d'optimisation convexe précédent, pour obtenir

$$\left(u \text{ minimise } J\right) \Longleftrightarrow \langle J'\left(u\right), v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.3}$$

Commençons par calculer la dérivée de Gâreaux de J au point u et de direction $(v - u)$, nous avons la formule de type champ moyen

$$
\begin{aligned}
\langle J'(u), v-u\rangle &= \mathbb{E}\left[g_y\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)\left(y_0^v-y_0^u\right)\right]+\mathbb{E}\left[g_{y'}\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)\mathbb{E}\left[y_0^v-y_0^u\right]\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_y\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\left(y_t^v-y_t^u\right) dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_{y'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\mathbb{E}\left[y_t^v-y_t^u\right] dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_z\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\left(z_t^v-z_t^u\right) dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_{z'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\mathbb{E}\left[z_t^v-z_t^u\right] dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\left(v_t-u_t\right) dt\right].
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Théorème 3.1 (Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité) *Soit u un contrôle admissible et (y^u, z^u) la solution de (3.1) correspondante à u. Alors u est optimal si seulement s'il existe un unique processus adapté Q, solution de l'equation différentielle stochastique suivante (appelée équation adjointe)*

$$
\begin{cases}
dQ_t^v &= \left(H_y\left(t, v_t, Q_t^v\right)+\mathbb{E}\left[H_{y'}\left(t, v_t, Q_t^v\right)\right]\right) dt \\
&\quad +\left(H_z\left(t, v_t, Q_t^v\right)+\mathbb{E}\left[H_{z'}\left(t, v_t, Q_t^v\right)\right]\right) dW_t, \\
Q_0^v &= g_y\left(y_0^v, \mathbb{E}\left[y_0^v\right]\right)+\mathbb{E}\left[g_{y'}\left(y_0^v, \mathbb{E}\left[y_0^v\right]\right)\right],
\end{cases} \tag{3.5}
$$

tel que

$$
H_u\left(t, v_t, Q_t^v\right)\left(v_t-u_t\right) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad \mathbb{P}-p.s. \tag{3.6}
$$

Où a fonction de Hamiltonien est définie comme suit

$$
H\left(t, y_t, y_t', z_t, z_t', Q_t, v_t\right)=h\left(t, y_t, y_t', z_t, z_t', v_t\right)+\left\langle Q_t, a_t y_t+\hat{a}_t y_t'+z_t b_t+\hat{b}_t z_t'+c_t v_t\right\rangle, \tag{3.7}
$$

$$
H_\delta\left(t, v_t, Q_t^v\right)=H_\delta\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], v_t, Q_t^v\right), \text{ pour } \delta=y, y', z, z', u.
$$

Démonstration. On peut réécrire (3.5) comme suit

$$\begin{cases} dQ_t^v = \{h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + a_t Q_t^v + \mathbb{E}[h_{y'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + \hat{a}_t Q_t^v]\} dt \\ \quad + \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + b_t Q_t^v + \mathbb{E}\left[h_{z'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + \hat{b}_t Q_t^v\right]\right\} dW_t, \\ Q_0^v = g_y(y_0^v, \mathbb{E}[y_0^v]) + \mathbb{E}[g_{y'}(y_0^v, \mathbb{E}[y_0^v])]. \end{cases}$$

Par la formule d'Itô (intégration par partie), on a

$$d(Q_t y_t) = Q_t dy_t + Q_t dy_t + d\langle Q, y\rangle_t.$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} d(Q_t^u y_t^u) &= Q_t^u dy_t^u + Q_t^u dy_t^u + d\langle Q^u, y^u\rangle_t \\ &= -Q_t^u \left(a_t y_t^u + \hat{a}_t \mathbb{E}[y_t] + b_t z_t + \hat{b}_t \mathbb{E}[z_t] + c_t u_t\right) dt + Q_t^u z_t dW_t \\ &+ y_t^u (h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + a_t Q_t^u) dt \\ &+ y_t^u \mathbb{E}[h_{y'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{a}_t Q_t^u] dt \\ &+ y_t^u (h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u) dW_t \\ &+ y_t^u \mathbb{E}\left[h_{z'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u\right] dW_t \\ &+ z_t^u (h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u) dt \\ &+ z_t^u \mathbb{E}\left[h_{z'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u\right] dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(Q_t^u y_t^u) &= -Q_t^u c_t u_t dt + Q_t^u z_t^u dW_t \\ &+ y_t^u (h_y(t, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{y'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) dt \\ &+ y_t^u (h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u \\ &\qquad + \mathbb{E}\left[h_{z'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u\right]\Big) dW_t \\ &+ z_t^u (h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{z'}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) dt, \end{aligned}$$

passant à l'intégrale de 0 à T, on trouve

$$
\begin{aligned}
Q_T^u y_T^u - Q_0^u y_0^u = & \int_0^T \left(y_t^u \left(h_y\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right) - Q_t^u c_t u_t\right) dt \\
& + \int_0^T z_t^u \left(h_z\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + \mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right) dt \\
& + \int_0^T y_t^u \left(h_z\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + b_t Q_t^u \right. \\
& \qquad \left. + \mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + \hat{b}_t Q_t^u\right] + Q_t^u z_t^u\right) dW_t,
\end{aligned}
$$

par passage a l'espérance, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Q_0^u y_0^u\right] = & \mathbb{E}\left[Q_T^u y_T^u\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t u_t - y_t^u \left(h_y\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) - \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right)\right.\right. \\
& \left.\left. - \; z_t^u \left(h_z\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + \mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right)\right) dt\right].
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Et puisque on a $Q_0^u = g_y\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right) + \mathbb{E}\left[g_{y'}\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)\right]$ d'après l'équation (3.5) et $y_T^u = \xi$, alors (3.8) devient

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left(g_y\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right) + \mathbb{E}\left[g_{y'}\left(y_0^u, \mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)\right]\right) y_0^u\right] \\
& = \mathbb{E}\left[Q_T^u \xi\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Q_t^u c_t u_t - y_t^u \left(h_y\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) - \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right)\right.\right. \\
& \left.\left. - \; z_t^u \left(h_z\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right) + \mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t, y_t^u, \mathbb{E}\left[y_t^u\right], z_t^u, \mathbb{E}\left[z_t^u\right], u_t\right)\right]\right)\right) dt\right],
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

par le même argument nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(g_y\left(y_0^u,\mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)+\mathbb{E}\left[g_{y'}\left(y_0^u,\mathbb{E}\left[y_0^u\right]\right)\right]\right)y_0^v\right] \qquad (3.10)\\
&=\mathbb{E}\left[Q_T^u\xi\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(Q_t^u c_t v_t-y_t^v\left(h_y\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)-\mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\ z_t^v\left(h_z\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)+\mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right)dt\right].
\end{aligned}$$

Remplaçant les deux égalités (3.8) , (3.9) dans l'égalité (3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\langle J'\left(u\right),v-u\right\rangle\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(Q_t^u c_t v_t-y_t^v\left(h_y\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)-\mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\ z_t^v\left(h_z\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)+\mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right.\right.\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(Q_t^u c_t u_t-y_t^u\left(h_y\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)-\mathbb{E}\left[h_{y'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\ z_t^u\left(h_z\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)+\mathbb{E}\left[h_{z'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\right]\right)\right)dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_y\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\left(y_t^v-y_t^u\right)dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_{y'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\mathbb{E}\left[y_t^v-y_t^u\right]dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_z\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\left(z_t^v-z_t^u\right)dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_{z'}\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\mathbb{E}\left[z_t^v-z_t^u\right]dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t,y_t^u,\mathbb{E}\left[y_t^u\right],z_t^u,\mathbb{E}\left[z_t^u\right],u_t\right)\left(v_t-u_t\right)dt\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t (v_t - u_t)\, dt + \int_0^T h_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t\right)(v_t - u_t)\, dt\right]. \tag{3.11}$$

D'autre part, d'après (3.7) on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u\right)(v_t - u_t)\, dt\right] \qquad (3.12) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t (v_t - u_t)\, dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t\right)(v_t - u_t)\right], \end{aligned}$$

d'après (3.11) (3.12), on trouve

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u\right)(v_t - u_t)\, dt\right],$$

en utilisant l'équivalence (3.3) et l'égalité précédente, on obtient

$$(u \text{ minimise } J) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u\right)(v_t - u_t)\, dt\right] \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.13}$$

Ce qui prouve le résultat. ■

Bibliographie

[1] K. Bahlali, B. Gherbal, and B. Mezerdi, (2010), Existence and optimality conditions in stochastic control of linear BSDEs, Rand. Oper. Stoch. Equ 18(3), 185-197.

[2] Bismut, J.M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2) ; 384 –404.

[3] Briand, P. (2001). Équation Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] I. Ekeland and R. Temam. (1974). Analyse convexe et probl eme variationnel, Dunod.

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7.

[6] Pardoux, E.& Peng, S. G. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett., 14(1), 55 – 61.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$v.a$	Variable aléatoire.
$i.e$	C'est-à-dire.
$resp$	Respectivement.
$\mathbb{R}^k$	Espace réel eulidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
L^1	Espace des processus intégrables.
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du $v.a.$ X.
$\mathcal{N}$	Eensemble des négligeables N (ensemble négligeables).
MB	Mouvement Brownien.
EDS	Equations différentielle stochastique.
$EDSR$	Equations différentielle stochastique rétrograde.
$tr\,(M)$	Trace de la matrice M.
$\langle .,. \rangle$	Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$H\,(t, y_t, z_t, Q_t, v_t)$	Hamiltonien
v_t	Variable de contrôle