

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Mourad Raghdi

Titre :

Introduction aux processus stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr. **Benabba. Fadhila** UMKB Encadreur

Dr. **Korichi. Fatiha** UMKB Président

Dr. **Bougherara. Saliha** UMKB Examineur

Septembre 2020.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère et mon père pour leurs affections et amours,

A mes sœurs et frères pour leurs encouragements et

leurssoutiens

A tout ma famille, a mes amis,

Et à tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire,

Et mes collègues de la promotion **2020**.

Mourad

Remerciements

Nous tenons à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Tout d'abord nous tenons surtout à adresser nos plus vifs remerciements à notre encadreur **Dr. Benabba Fadhila** qui nous a permis de réaliser ce travail sous sa direction. Nous ne saurons jamais oublier sa disponibilité, son assistance et ses conseils judicieux pour nous.

Nous voudrions remercier également **Dr.Korichi Fatiha** et **Dr.Bougherara Saliha**, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter de jures ce travail.

Nous remercions également les responsables de département de mathématique.

Nous remercions aussi tout ce qui ont nous aider de réaliser ce travail.

Enfin nous remercions tous les enseignants de la faculté.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Introduction	1
1 Généralités et notations	3
1.1 Définitions et exemples	3
1.1.1 Tribu	3
1.1.2 Espace mesurable	4
1.2 Variable aléatoire (v.a)	5
1.2.1 Variable aléatoire discrète	7
1.2.2 Variables aléatoires continues	8
1.2.3 Espérance	9
1.2.4 Variable Gaussien	14
2 Processus stochastique	16
2.1 Généralités et notations	16
2.2 Exemples de processus	24
2.2.1 Mouvement Brownien (MB)	24

2.2.2 Processus de Poisson	32
Conclusion	38
Bibliographie	39
Annexe A : Abréviations et Notations	41
Annexe B : Rappel	42

Table des figures

1.1 Une variable aléatoire	6
2.1 Processus stochastique	17
2.2 Mouvement Brownien	26
2.3 Processus de comptage	32

Introduction

- ◁ Nous avons tous une idée plus ou moins précise de ce qu'implique le titre de ce document.
“**Stochastique**” est un mot un peu chic pour dire “**aléatoire**”, ce qui évoque bien sûr l'idée des probabilités ; “processus” évoque l'idée d'un changement dans le temps.
- ◁ L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.
- ◁ Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.
- ◁ Dans ce travail, nous présentons une introduction aux processus stochastiques, par une étude de quelques familles importantes :

- **Mouvement brownien :**

Un mouvement brownien a été étudié en Botanique, en Finance, et en Physique. Le botaniste R. Brown observe d'abord vers **1828** le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En **1877**, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est alors appelé mouvement au hasard. En **1900**,

L. Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse de Paris dans sa thèse, met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t , et ne dépend pas de sa position avant t . Peu après, vers **1905**, A. Einstein détermine la densité de transition du Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires. La première étude mathématique rigoureuse du Brownien est faite par N. Wiener (**1923**), qui construit une mesure de probabilités sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien. Des recherches d'une influence considérable ont ensuite été menées par P. Lévy (**1948**), lequel s'est intéressé aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Ces objets ont été développés par les potentialistes américains à la suite de J. L. Doob, puis systématisés par les spécialistes de la "Théorie Générale des Processus" de l'école de Strasbourg, autour de P.-A. Meyer.

• **Processus de Poisson :**

Un processus de Poisson, nommé d'après le mathématicien français Siméon Denis Poisson (XIX^{ème} siècle) et la loi du même nom, est un processus de comptage classique dont l'équivalent discret est la somme d'un processus de Bernoulli.

Un processus de Poisson est un modèle mathématique modélisant des événements aléatoires qui se reproduisent au cours du temps : naissances, pannes, désintégration radioactive.

Nous allons présenter dans ce qui suit la description deux chapitres de ce mémoire :

- ◀ Dans le premier chapitre nous donnons un rappel de calcul stochastique en énumérant tous les outils mathématiques : tribu, espace mesurable, variable aléatoire,...
- ◀ Dans le deuxième chapitre nous étudions le processus stochastique et nous donnons deux exemples : le mouvement Brownien, processus de Poisson.

Chapitre 1

Généralités et notations

1.1 Définitions et exemples

1.1.1 Tribu

Définition 1.1 (*tribu*) : Soit Ω un ensemble, on appelle tribu (ou σ -algèbre) de parties de Ω , la donnée d'un ensemble \mathcal{A} de parties de Ω , possédant les propriétés suivantes :

- a) $\Omega \in \mathcal{A}$;
- b) \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire i.e $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$;
- c) \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable i.e pour tout ensemble $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, alors :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Proposition 1.1 : Si \mathcal{A} est une σ -Algèbre de parties de Ω , il vient :

- a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- b) Si $A \in \mathcal{A}$, on a : $A^c \in \mathcal{A}$.
- c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, on a : $\bigcap_{i=0}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1 :

- $\mathcal{P}(\Omega)$ la plus grand tribu est appelé tribu grossière.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ la plus petite tribu sur Ω est appelé tribu triviale.

Proposition 1.2 (Tribu engendré) : Soit Ω un ensemble, et M un ensemble de parties de Ω ($M \subset \mathcal{P}(\Omega)$), l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant M c'est le plus petit des tribus \mathcal{A}_i telles que $M \subset \mathcal{A}_i$ appelés tribu engendrée par M et se note :

$$\sigma(M) \quad \text{et} \quad \sigma(M) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

Exemple 1.2 : $M = (\{A\})$, $A \subset \Omega$, $M \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\sigma(M) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

Définition 1.2 (Sous-Tribu) : Une sous-tribu de \mathcal{A} est une tribu \mathcal{G} telle que si $A \in \mathcal{G}$ alors, $A \in \mathcal{A}$ on note $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$

Exemple 1.3 : Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque de tribus sur Ω Alors $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est encore une tribu sur Ω

Définition 1.3 (Tribu de Borel) : Soit (Ω, T) un espace topologique, on appelle tribu de Borel sur Ω la tribu engendrée par les ouverts de Ω : $\mathcal{A} = \sigma(T)$.

Proposition 1.3 : La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par l'ensembles des intervalles ouverts, semi -ouvertes, fermés.

1.1.2 Espace mesurable

Définition 1.4 : On dit que (Ω, \mathcal{A}) est un espace mesurable et les éléments de \mathcal{A} sont appelés les parties mesurables de Ω .

Définition 1.5 : Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, on appelle mesure positive sur Ω une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Additivité dénombrable* : Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors :

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Définition 1.6 : Si (Ω_1, E) et (Ω_2, F) sont deux espaces mesurables, alors une application $f : E \rightarrow F$ est dite mesurable si $f^{-1}(F) \subset E$.

Définition 1.7 (mesure de probabilité) : Soit \mathcal{A} une tribu sur Ω . Une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, telle que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$ disjoints (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$), alors :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n).$$

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.2 Variable aléatoire (v.a)

Un triplet formé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'un ensemble Ω d'une tribu \mathcal{A} sur Ω et d'une mesure \mathbb{P} sur cette tribu tel que : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 1.8 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, ε) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E , toute fonction mesurable X de Ω vers E .

Définition 1.9 (Loi d'une variable aléatoire) : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire. On appelle loi de X la fonction \mathbb{P}_X qui à toute partie I de \mathbb{R} qui peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles associe :

$$\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(\{\omega; X(\omega)\} \in I).$$

Graphique ($(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, \mathcal{E}) un espace mesurable) :

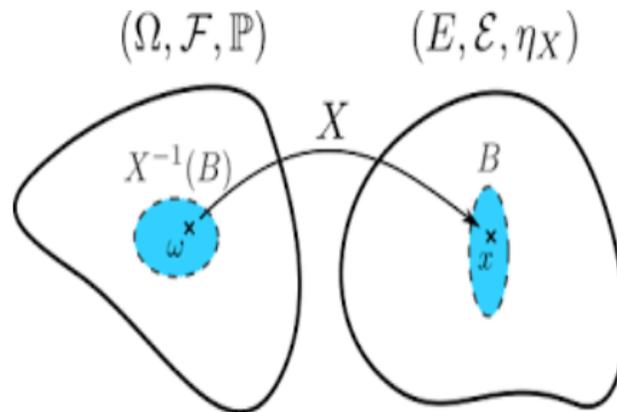


FIG. 1.1 – Une variable aléatoire

Proposition 1.4 : L'application \mathbb{P}_X définit une probabilité sur \mathbb{R} .

Définition 1.10 (Fonction de répartition) : On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Proposition 1.5 : On a les propriétés suivantes :

- a) $0 \leq F_X \leq 1$,
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$,
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$,
- d) F_X est une fonction croissante,
- e) F_X est continue à droite.

Proposition 1.6 : On a l'identité. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b].$$

1.2.1 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est fini ou infini dénombrable.

Définition 1.11 :

1. Une variable aléatoire réelle X à valeurs dans un ensemble Ω fini ou dénombrable est appelée variable aléatoire réelle discrète.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}.$$

2. Dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités :

$$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \Omega.$$

Ainsi, pour toute partie A de X , on a alors :

- $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$
- $\mathbb{P}_X(\Omega) = \mathbb{P}(X \in \Omega) = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(X = x) = 1.$

Exemple 1.4 : Par exemple, après n lancers successifs d'un dé, on peut noter X_n le nombre de fois où l'on a obtenu 6. X_n est alors une variable aléatoire discrète.

Exemple 1.5 : Construction de la variable aléatoire de bernoulli. Soient :

- l'espace des observables : $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$;
- la tribu définie sur Ω : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- la probabilité \mathbb{P} définie sur Ω : $\mathbb{P}(\omega_1) = p$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$ où $p \in]0,1[$.

La variable aléatoire de bernoulli de X de paramètre p est définie par :

- $X(\omega_1) = 1$ et $X(\omega_2) = 0$.
- $\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(X^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.

Exemple 1.6 : On lance deux dés, et on note X le nombre de 6 obtenus. On a :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

- Déterminer la loi de probabilité de X revient à déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
- On prouve facilement que :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{25}{36} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{10}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}.$$

- Plus généralement, si X est une variable aléatoire discrète, dont l'univers des possibles est $\{x_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ déterminer la loi de X signifie déterminer les réels p_k pour lesquels $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$.

Définition 1.12 : Une variable aléatoire X est dite intégrable si la quantité

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x)$$

est finie.

1.2.2 Variables aléatoires continues.

Définition 1.13 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} et f une densité de probabilité sur \mathbb{R} . On dit que X est une variable aléatoire continue de densité f si pour tout intervalle I de \mathbb{R} , on a :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x) dx.$$

(Une variable aléatoire continue peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs, par exemple dans un intervalle ou sur tout \mathbb{R} .)

Remarque 1.1 : La fonction de répartition F_X est continue.

Définition 1.14 : Une variable aléatoire possède une densité si sa fonction de répartition F est dérivable. La dérivée notée f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X .

Proposition 1.7 :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

c) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

Définition 1.15 : Une variable aléatoire X est dite intégrable si la quantité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

est converge.

1.2.3 Espérance

Espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note $\mathbb{E}(X)$ et se lit « espérance de X ».

Définition 1.16 :

1. On appelle espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire réelle discrète X , la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_X(k),$$

où p_X est la fonction de masse de X .

2. On appelle *espérance mathématique* ou *moyenne* d'une variable aléatoire réelle absolument continue X , la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx,$$

où f_X est la fonction de densité de X .

Remarque 1.2 : Ce nombre peut s'interpréter comme une valeur moyenne de X si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Définition 1.17 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *variance* de X , la quantité notée $Var(X)$ et définie par :

$$1. \text{ Cas discrète : } Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - \mathbb{E}(X))^2 p_X(k).$$

2. Cas absolument continue :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx - (\mathbb{E}(X))^2. \end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance

Soient X, Y deux v.a. intégrables. On a :

- Linéarité : $\mathbb{E}(cX + Y) = c\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $c \in \mathbb{R}$.
- Positivité : Si $X \geq 0$ p.s., alors : $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Positivité stricte : Si $X \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors : $X = 0$ p.s.
- Monotonie : Si $X \geq Y$ p.s., alors : $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Inégalités importantes

- **Inégalités de Cauchy-Schwarz** : Soient X, Y deux v.a. de carré intégrable. alors : XY est intégrable et

$$(\mathbb{E}(|XY|))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

- **Inégalités triangulaire** : Soient X, Y deux v.a. intégrables. Alors :

$$\mathbb{E}(|X + Y|) \leq \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|).$$

- **Inégalités de Jensen** : Soient X une v.a. et $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et convexe, telle que : $\mathbb{E}(|\Phi(X)|) < \infty$, alors :

$$\Phi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\Phi(X)).$$

- **Inégalités de Chebychev (ou Markov)** : Soient X une v.a. et $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que Ψ est borélienne et croissante sur \mathbb{R}_+ , $\Psi(a) > 0$, pour tout $a > 0$ et $\mathbb{E}(\Psi(X)) < \infty$.

Alors :

$$\mathbb{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(\Psi(X))}{\Psi(a)}, \quad \forall a > 0.$$

Espérance conditionnelle

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}(X|Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y , donc c'est une fonction de Y : il existe ψ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} borélienne, telle que :

$$\mathbb{E}(X|Y) = \psi(Y).$$

- **Espérance conditionnelle dans le cas discret** :

Supposons que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. L'espérance d'une v.a. dont la loi est la loi conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$ est appelée espérance conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$. Elle est notée :

$$\mathbb{E}(X|Y = y_i) = \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j | Y = y_i).$$

• **Esperance conditionnelle dans le cas continu :**

Supposons que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. L'esperance conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$ est le reel

$$\mathbb{E}^{Y=y_i}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X^{Y=y_i}(x) dx.$$

L'esperance conditionnelle de X sachant Y est la variable aléatoire réelle :

$$\mathbb{E}^Y(X) = \mathbb{E}(X|Y) = h(X),$$

avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \mathbb{E}^{Y=y}(X)$, $x \in \mathbb{R}$.

L'esperance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$ est caractérisée par :

► c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.

►
$$\int_A \mathbb{E}(X|Y) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \sigma(Y).$$

Exemple 1.7 : *On lance deux fois une même pièce. On gagne un euro à la fin si on obtient deux piles, on perd un euro sinon. On note X la variable aléatoire égale au gain. L'espace des événements correspondant est*

$$\Omega = \{(P_1, P_2), (P_1, F_2), (F_1, P_2), (F_1, F_2)\}.$$

- *La tribu associée est $\mathbb{P}(\Omega)$, elle comporte 16 éléments. Maintenant, on suppose qu'on a déjà lancé une première fois la pièce. Dans ce cas, on ne peut pas distinguer l'événement (P_1, P_2) de l'événement (P_1, F_2) , ni l'événement (F_1, P_2) de l'événement (F_1, F_2) .*
- *La tribu associée doit en tenir compte, et la tribu qui porte l'information que l'on a après le premier tirage est la tribu engendrée par les deux ensembles :*

$$\{(P_1, P_2), (P_1, F_2)\} \quad \text{et} \quad \{(F_1, P_2), (F_1, F_2)\}.$$

Elle est donc égale à :

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega, \{(P_1, P_2), (P_1, F_2)\}, \{(F_1, P_2), (F_1, F_2)\}\}.$$

Calculons maintenant l'espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{B} . Comme $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ doit être \mathcal{B} -mesurable, on a nécessairement

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, P_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, F_2).$$

La deuxième condition donne

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, P_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, F_2) = 0.$$

Ceci exprime que, si on a simplement l'information donnée par le premier lancer de la pièce, et que le résultat est pile, alors le jeu est équitable.

De la même façon, on a :

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, P_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(P_1, F_2) = -1.$$

Ceci exprime que, si on a simplement l'information donnée par le premier lancer de la pièce, et que le résultat est face, alors le jeu est perdant à tous les coups.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Proposition 1.8 : Soient X, Y deux v.a. intégrables :

- a) Linéarité : $\forall b, c \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(bX + cY|\mathcal{G}) = b\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + c\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), p.s.$
- b) Positivité-monotonie : $X \geq Y \text{ p.s.} \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) p.s.$

Proposition 1.9 : Soit X une variable aléatoire :

- a) Si X est \mathcal{G} -mesurable : $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X.$

b) Si Y est G -mesurable : $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

c) Si X est indépendante de G : $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 1.10 : Si G et H sont deux tribus telles que $H \subset G$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|H) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|H)|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|H).\end{aligned}$$

On note souvent

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|H)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|H|\mathcal{G}).$$

1.2.4 Variable Gaussien

Définition 1.18 : Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de paramètres m et σ^2 si elle admet la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On dit qu'une variable gaussienne est centrée réduite lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

Remarque 1.3 : En particulier, si $X \sim N(m, \sigma^2)$: alors :

$$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$$

et si $X \sim N(0,1)$, alors :

$$\sigma X + m \sim N(m, \sigma^2).$$

Définition 1.19 : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est gaussien ssi toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées :

$$\langle a, X \rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

suivent une loi gaussienne dans \mathbb{R} (pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$).

Proposition 1.11 : La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_X(x) &= \exp \left(i \langle x, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} (x^t \text{cov}(X) x) \right) \\ &= \exp \left(i \langle x, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \text{cov}(X) x \rangle \right). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Processus stochastique

2.1 Généralités et notations

On qualifie de processus stochastique tout phénomène d'évolution temporelle dont l'analyse peut être soumise au calcul des probabilités. Du point de vue de l'observation, un processus stochastique est constitué par l'ensemble de ses réalisations.

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ représentant l'état du système.

Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$, en revanche, pour une évolution particulière du système (i.e à ω fixé) les états successifs sont représentés par la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ que l'on nomme par abus de langage une trajectoire.

Définition 2.1 : *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X(t, \omega), t \in \mathbb{T}\}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeur dans un espace mesurable (\mathbb{E}, ζ) , où \mathbb{T} un sous-ensemble (qui représente le temps).*

Définition 2.2 : *Un processus stochastique $\{X(t, \omega), t \in \mathbb{T}\}$ est dit à temps discret (respectivement à temps continu) si \mathbb{T} est un ensemble infini dénombrable (respectivement un ou plusieurs intervalles).*

Définition 2.3 : Un processus stochastique dépend de deux paramètres : t et ω .

1. Si t est fixé, l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$ est une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} .
2. Si ω est fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$, $\forall t \in \mathbb{T}$ est appelé trajectoire du processus.

Graphique du processus stochastique

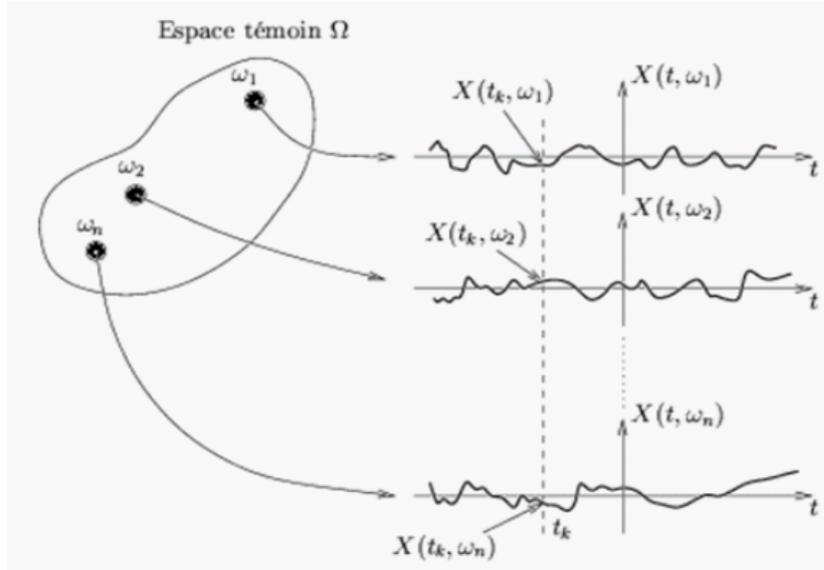


FIG. 2.1 – Processus stochastique

Exemple 2.1 : On considère une séquence infinie de tirage (pile ou face) de Bernoulli. Ces tirages sont supposés indépendants. L'ensemble des résultats possibles est :

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i = \left\{ \begin{matrix} P, \\ F, \end{matrix} \right\} \right\},$$

où $\mathbb{P}(P) = p$; $\mathbb{P}(F) = q = 1 - p$; $0 \leq p \leq 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit des variables aléatoires X_n comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = P \\ 0 & \text{si } \omega = F \end{cases}$$

donc : $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un processus défini par :

- X_1, X_2, \dots indépendantes.
- $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = q$, $p + q = 1$.

Continuité des trajectoires

Définition 2.4 : On dit que les trajectoires d'un processus sont continues ssi, pour \mathbb{P} presque tout ω , $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(\omega)$ est continue i.e $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \text{l'application } t \mapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\} = 1$.

Définition 2.5 : Un processus est dit càdlàg (continu à droite, limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

Notation 1 : Pour tout temps $t \geq 0$ et X processus, on note :

- Limite à gauche en t : $X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t, s < t} X_s$.
- Limite à droite en t : $X_{t+} = \lim_{s \rightarrow t, s > t} X_s$.
- Sauts de X à l'instant t : $\Delta X_t = X_{t+} - X_{t-}$.

Proposition 2.1 :

- Un processus est càdlàg si pour tout t , $X_{t+} = X_t$ et $X_{t-} \in \mathbb{R}^d$.
- Dans ce cas : $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. Un processus est continu si pour tout t , $\Delta X_t = 0$.

Définition 2.6 : Pour deux processus stochastiques $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$. On dit que X et Y sont indistinguables ssi presque toutes les trajectoires coïncident i.e :

$$\mathbb{P}(\{\omega : \forall t \geq 0 : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1.$$

Lemme 2.1 : Soient X et Y deux processus à valeurs \mathbb{R}^d à trajectoires p.s continues à droite. Si, pour chaque t , $X_t = Y_t$ p.s, X_t et Y_t sont indistinguables.

Filtrations, processus adapté

Définition 2.7 (Filtration) : Une filtration est une famille croissante $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de sous-tribus de \mathcal{F} : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour $0 \leq s < t < +\infty$.

On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \right)$.

Remarque 2.1 :

- La filtration naturelle (canonique) est la filtration engendrée par un processus X est donnée par :

$$\mathbb{F}^X = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

- Une filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est dite complète si $\forall t \in \mathbb{R}^+$, \mathcal{F}_t contient les ensembles négligeables \mathcal{N} de \mathcal{F} où

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega; \exists A \in \mathcal{F}, N \subset A : \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Définition 2.8 : Une filtration est continue à droite (resp. à gauche) si : $\forall t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \quad (\text{resp. } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \sigma \left(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s \right)).$$

Définition 2.9 : Un processus $X = \{X_t\}_{t \in T}$ est dit mesurable si l'ensemble :

$$\{(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \otimes \mathcal{F}, \forall B \in \zeta.$$

C'est à dire l'application :

$$\begin{aligned} (\Omega \times \mathbb{T}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathbb{P}) &\longrightarrow (\mathbb{E}, \zeta) \\ (\omega, t) &\longmapsto X(\omega, t) \end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 2.10 : Un processus X est dit progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, l'application :

$$\begin{aligned} (\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0, t], \mathbb{P}) &\longrightarrow (E, \zeta) \\ (\omega, s) &\longmapsto X(\omega, s) \end{aligned}$$

est mesurable.

Exemple 2.2 : On dit que $\{X_t, t \geq 0\}$ est une bonne processus s'il est (\mathcal{F}_t) -adapté, càdlàg, et si :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right] < \infty \quad \text{pour tout } t \geq 1.$$

Définition 2.11 : Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si : $\forall t \geq 0$, X_t est une v.a. \mathbb{F} -mesurable.

Définition 2.12 :

1. Un processus stochastique X est dit \mathcal{F}_t -prévisible si X comme fonction de $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu sur $\mathbb{T} \times \Omega$ engendrée par les processus adapté et continu à gauche.
2. Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dit prévisible pour la filtration \mathcal{F}_n ou \mathcal{F}_n -prévisible si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable.

Définition 2.13 : Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à variation finie si \mathbb{P} -presque toutes les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont à variation finie. Ou si la variation totale de $(X_t)_{t \geq 0}$ existe et est fini, ie

$$V_{[0, T]}(X) = \sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s}$$

$\Pi_n = (t_1^n, t_2^n, \dots, t_{p_n}^n)$ une subdivision de $[0, T]$.

Définition 2.14 : Un processus X est à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Indépendance et stationnarité d'une processus

Définition 2.15 : Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :

1. $X_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s.
2. $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, tel que $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les v.a $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

Définition 2.16 : Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$, tel que $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s} . Autrement dit :

$$\forall h \geq 0 : X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

Lemme 2.2 : Soit $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ un processus à valeurs \mathbb{R}^d tel que $X_0 = 0$. Alors X_t est un processus à accroissements indépendants (P.A.I) ssi pour tous $s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$.

Preuve.

\Rightarrow) Si X_t est un **P.A.I.** et si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ donc il est indépendant de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et de $\sigma(X_u, u \leq s)$.

\Leftarrow) Si, $\forall s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$, on a pour $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et $f_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n f_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right) &= \mathbb{E} (f_n (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \dots \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} (f_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})). \end{aligned}$$

■

Continuité, convergence et dérivabilité d'un processus

Notions de continuité, dérivabilité et intégrabilité devront être définies selon des critères de convergence. Le critère le plus utilisé est celui de la convergence en moyenne quadratique

Définition 2.17 :

1. Un processus $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ est continu en probabilité au point t si $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) = 0.$$

2. Un processus $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ est localement continu en probabilité au point t si

$$X_{t+h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\mathbb{P}} X_t. \text{ C'est à dire : } \forall \varepsilon > 0 : h > 0 :$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition 2.18 : Un processus $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ converge en moyenne quadratique au point t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}\{(X_t - X_{t_0})^2\} = 0.$$

Théorème 2.1 : Un processus $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ est continu en moyenne quadratique si et seulement si sa fonction d'autocorrélation, à savoir :

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2})$$

est continue à $t_1 = t_2 = t, \forall t > 0$.

Preuve. Supposons que $\gamma(t_1, t_2)$ est continue à $t_1 = t_2 = t$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_{t_2})^2\} &= \mathbb{E}(X_{t_1}^2) + \mathbb{E}(X_{t_2}^2) - 2\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \\ &= \mathbb{E}(X_{t_1}^2) + \mathbb{E}(X_{t_2}^2) - 2\gamma(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $t_1 = t_2 = t$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_{t_2})^2\} = 0.$$

Ce qui démontre que le processus X_t est continu en moyenne quadratique. Inversement, si le processus est continu en moyenne quadratique, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_tX_t) &= \mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_t)(X_{t_2} - X_t)\} \\ &\quad + \mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_t)X_t\} + \mathbb{E}\{(X_{t_2} - X_t)X_t\}. \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant trois fois l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_tX_t)| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_t)^2\}} \sqrt{\mathbb{E}\{(X_{t_2} - X_t)^2\}} \\ &\quad + \sqrt{\mathbb{E}\{(X_{t_1} - X_t)^2\}} \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)} + \sqrt{\mathbb{E}\{(X_{t_2} - X_t)^2\}} \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)}. \end{aligned}$$

Puisque X_t est continu en moyenne quadratique, on en déduit que :

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} |\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_tX_t)| = 0,$$

d'où

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}) = \mathbb{E}(X_tX_t).$$

Donc, $\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2})$ est une fonction continue à $t_1 = t_2 = t$. ■

Le concept de dérivabilité en moyenne quadratique est défini de façon semblable. Nous dirons qu'un processus aléatoire X_t est dérivable en moyenne quadratique au point t_0 s'il existe un processus Y_t tel que :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{X_t - X_{t_0}}{t - t_0} \right)^2 - Y_{t_0} \right\} = 0.$$

Si X_t est dérivable en moyenne quadratique pour tout $t \in [a, b]$, alors il est dérivable en moyenne quadratique sur $[a, b]$. Cette dérivabilité est caractérisée par le théorème suivant.

Théorème 2.2 : Un processus X_t est dérivable en moyenne quadratique si et seulement si $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \gamma(t_1, t_2)$ existe et est continue à $t_1 = t_2 = t$.

Nous procédons comme pour l'intégrale de Riemann, en considérant des suites de fonctions en escalier et le passage à la limite sera pris au sens de la moyenne quadratique.

Processus Gaussien et quelques propriétés

Définition 2.19 : Un processus gaussien est un processus $(X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ tel que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire gaussien $\forall n \geq 1$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$. Ceci revient à dire que $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$ est une v.a. gaussienne $\forall n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

- La fonction $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et appelée la moyenne du processus.
- La fonction $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s))] \\ &= \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))] \end{aligned}$$

est appelée la covariance du processus.

Proposition 2.2 : Un processus gaussien X_t est stationnaire ssi $\mathbb{E}(X_t)$ est constante, et $K(t, s) = K(|t - s|)$.

2.2 Exemples de processus

2.2.1 Mouvement Brownien (MB)

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert Brown en **1828**. Il en résulte une dispersion des microparticules dans l'eau, on dit aussi une "diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

- Prix d'actions en bourse.
- Erreurs de mesures physiques.

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown**.

Définition 2.20 : *Un processus stochastique réel $B = \{B_t : t \geq 0\}$ est appelé mouvement Brownien (standard) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $B_0 = 0$ p.s.
2. B_t est à accroissements indépendants et stationnaires.
3. Pour chaque t la v.a.r B_t suit la loi $\mathcal{N}(0, t)$.
4. Les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

Remarque 2.2 : *De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$: i.e :*

- $B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
- $\mathbb{E}[(B_t - B_s)] = 0$ et $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Proposition 2.3 *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes*

$$\text{i) } \left\{ \begin{array}{l} 2. (B_t; t \in \mathbb{R}^+) \text{ est à accroissements indépendants,} \\ 3. \forall 0 \leq s < t, B_t - B_s \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t - s), \end{array} \right.$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{array}{l} 2. \forall t \geq 0, B_t \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, t), \\ 3. \forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \text{ et } B_s \text{ sont indépendants,} \end{array} \right.$$

$$\text{iii) } \left\{ \begin{array}{l} 2. (B_t)_{t \geq 0} \text{ est un processus gaussien, centré,} \\ 3. \forall s, t \in \mathbb{R}^+, \text{cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s] = s \wedge t. \end{array} \right.$$

Graphique du mouvement Brownien

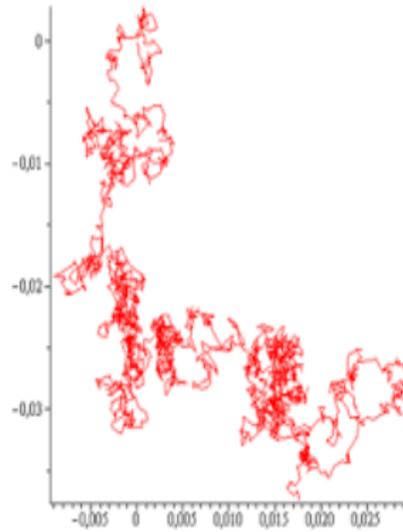


FIG. 2.2 – Mouvement Brownien

Proposition 2.4 : *Un mouvement Brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne $m(t) = \mathbb{E}(B_t) = 0$, $\text{var}(B_t) = t$ et covariance $K(t, s) = t \wedge s = \min(t, s)$.*

Preuve. Il faudrait vérifier que $c_1 B_{t_1} + \dots + c_n B_{t_n}$ est une v.a. gaussienne. Vérifions seulement que $B_t + B_s$ est gaussienne :

$$B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s,$$

c'est donc une v.a. gaussienne, car la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes est encore gaussienne.

Soit maintenant $t \geq s \geq 0$:

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}(B_t) = 0 \\ K(t, s) &= \text{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)B_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= 0 + s. \end{aligned}$$

car $(B_t - B_s) \perp B_s$. On a donc $K(t, s) = \min(t, s)$. ■

Exemple 2.3 : Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $\mathcal{N}(0, t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien ? Justifiez votre réponse.

Réponse : Non, puisque pour $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_t - X_s] &= \text{Var}[\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z] \\ &= (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2 \text{Var}[Z] \\ &= t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \\ &\neq t - s. \end{aligned}$$

Proposition 2.5 : Le vecteur $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est centré et sa matrice des covariances est donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Propriétés du mouvement Brownien

Propriétés en loi. Systématiquement, pour vérifier qu'on a un mouvement Brownien, il s'agit de vérifier qu'on a un processus gaussien, centré, à trajectoires continues et avec la bonne fonction de covariance. En général, il est facile de constater que le processus est gaussien, centré et a trajectoires continues.

Proposition 2.6 : *Soit $B = \{B_t; 0 \leq t < +\infty\}$ un mouvement Brownien.*

- i) **Symétrie :** Si B est un MB alors $(-B)$ en est un aussi.
- ii) **Propriété d'échelle (autosimilarité) :** Si B est un mouvement Brownien alors pour tout $c > 0$, $B_t^c = \frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}$ est encore un mouvement Brownien (standard).
- iii) **Invariance par translation :** Le mouvement Brownien translaté de $h > 0$, $\bar{B}_t^h = B_{t+h} - B_h$ est encore un mouvement Brownien standard, indépendant du mouvement Brownien arrêté en h $(B_t)_{0 \leq t \leq h}$.
- iv) **Comportement analogue en 0 et en $+\infty$:** $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est encore un mouvement Brownien standard

Preuve. D'après la définition (2.3) et la proposition (2.3) on a :

i) **Symétrie :**

1. $(-B_0) = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$
2. On a : $(-B_t)$ est de même loi que B_t . En effet : $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, donc $-B_t$ est symétrique, ainsi $-B_t \stackrel{d}{=} B_t$, alors :

$$-B_t \sim \mathcal{N}(0, t).$$

3. $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $cov((-B_t)(-B_s)) = \mathbb{E}[(-B_t)(-B_s)] = \mathbb{E}[B_t B_s] = \min(t, s)$.
4. L'application $t \mapsto (-B_t)$ est continue $\mathbb{P}.p.s.$

ii) **Propriété d'échelle (autosimilarité) :**

1. $\forall c > 0$, $B_0^c = \frac{1}{\sqrt{c}}B_0 = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$

2. Il est clair que $(B_t^c)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré.
3. $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t^c, B_s^c) &= \frac{1}{(\sqrt{c})^2} \text{Cov}(B_{ct}, B_{cs}) \\ &= \frac{1}{c} \min(ct, cs) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

4. L'application $t \mapsto B_t^c$ est continue $\mathbb{P}.p.s.$

iii) **Invariance par translation** : Soit $h > 0$, alors :

1. $\bar{B}_0^h = B_{0+h} - B_h = \bar{B}_t^h = B_h - B_h = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$
2. $\forall t > 0$, \bar{B}_t^h suit la loi normale $\mathcal{N}(0, t)$.
3. Pour $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{B}_t^h, \bar{B}_s^h) &= \text{Cov}(B_{t+h} - B_h, B_{s+h} - B_h) \\ &= K(t+h, s+h) - K(t+h, h) - K(h, s+h) + K(h) \\ &= s + h - h - h + h = s = \min(s, t). \end{aligned}$$

4. Les deux applications $s \mapsto B_{t+s}$ et $s \mapsto -B_s$, $\mathbb{P}.p.s$ sont continues donc l'application $t \mapsto B_{t+s} - B_s$ l'est aussi.

iv) **Comportement analogue en 0 et en $+\infty$** : $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$.

1. $\tilde{B}_0 = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$
2. Il est clair que $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré.
3. $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) &= ts \text{Cov}\left(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}\right) \\ &= ts \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{ts}{\max(t, s)} = \min(t, s). \end{aligned}$$

4. L'application $t \mapsto \tilde{B}_t$ est continue, $\mathbb{P}.p.s.$

■

Propriétés des trajectoires du mouvement Brownien

Détaillons maintenant les propriétés des trajectoires d'un mouvement Brownien de dimension

1. On sait déjà qu'elles sont continues.

Proposition 2.7 : Si B est un mouvement Brownien, alors presque sûrement :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty.$$

De plus, la vitesse de convergence est moins grande que celle de $t : \frac{B_t}{t} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow +\infty$.

Proposition 2.8 (Comportement à l'infini) : Si B est un mouvement Brownien, alors presque sûrement :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left\{ \limsup_t \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \right\} \right) &\geq \mathbb{P} \left(\left\{ \limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{M \in \mathbb{N}} \left\{ \limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M \right\} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\forall M \in \mathbb{N} : \mathbb{P} \left(\left\{ \limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M \right\} \right) \geq \limsup_n \mathbb{P} (B_n \geq M\sqrt{n}),$$

et

$$\mathbb{P} (B_n \geq M\sqrt{n}) = \mathbb{P} (B_1 \geq M) > 0.$$

D'autre part $\left\{ \limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M \right\}$ est un évènement de la tribu asymptotique des $(B_n - B_{n-1})_n$ qui sont indépendantes donc a pour probabilité 0 ou 1, et vu ce qui précède cela ne peut être que. ■

Proposition 2.9 : *Presque sûrement, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- i) $\sup_{t \in [0,1]} B_t > 0$.
- ii) $\inf_{t \in [0,1]} B_t < 0$.
- iii) *Il existe $t \in]0, 1[$, tel que $B_t = 0$.*

Preuve. Les deux premiers points sont équivalents par symétrie $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(-B)$. S'ils sont faux, ils le sont donc simultanément. Mais alors on aurait $B_t = 0$, ce qui est absurde. Ils sont donc vrais. Par continuité, le troisième est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires et des deux premiers points. ■

Proposition 2.10 : *Pour tout $\varepsilon > 0$: B_t a un zéro p.s sur $]0, \varepsilon[$.*

Preuve. Le processus $\tilde{B}_t = \frac{B_{\varepsilon t}}{\sqrt{\varepsilon}}$, $t \in [0, 1]$ est un mouvement Brownien pour lequel il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que : $\tilde{B}_{t_0} = 0$, c'est à dire $B(\varepsilon t_0) = 0$. Le point $t_1 = \varepsilon t_0 \in]0, \varepsilon[$ vérifie la proposition. ■

On a une conséquence immédiate de ce résultat :

Proposition 2.11 : *Les trajectoires du MB ne sont p.s pas dérivables.*

Preuve. Par la propriété de translation, il suffit de montrer la non dérivabilité en 0, c'est à dire montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_t - B_0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{t}.$$

n'existe pas. Or par retournement du temps $\frac{B_t}{t} = \tilde{B}_{\frac{1}{t}}$ où \tilde{B} est encore un MB. Mais d'après la proposition précédente(proposition 2.7) :

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \tilde{B}_s = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{s \rightarrow +\infty} \tilde{B}_s = -\infty,$$

avec $s = \frac{1}{t}$, ce qui montre que la limite cherchée n'existe pas. ■

2.2.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est un processus stochastique qui a des formes différentes et des définitions. Il peut être défini comme un processus de comptage, qui est un processus stochastique qui représente le nombre aléatoire de points ou d'événements jusqu'à un certain temps. Le nombre de points du processus qui sont situés dans l'intervalle de zéro à un moment donné est une variable aléatoire de Poisson qui dépend de ce moment-là et d'autres paramètres. Ce procédé présente les nombres naturels que son espace d'état et les nombres non négatifs que l'ensemble d'indices. Ce processus est aussi appelé le processus de comptage de Poisson, car il peut être interprété comme un exemple d'un processus de comptage.

Définition 2.21 : *Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t \geq 0}$ telles que :*

- i) $N(0) = 0$;
- ii) $\forall t \geq 0, N(t) \in \mathbb{N}^*$;
- iii) $t \mapsto N(t)$ est croissante.

Graphique du processus de comptage

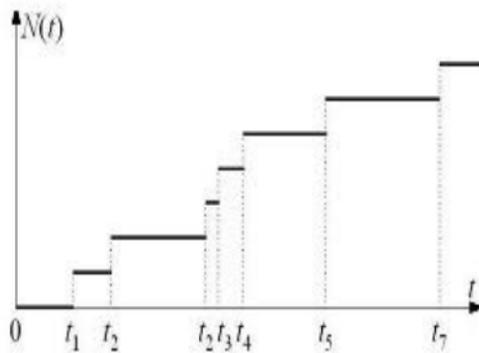


FIG. 2.3 – Processus de comptage

Proposition 2.12 : *Du point de vue de la modélisation :*

$$\forall 0 \leq a \leq b, \quad N(b) - N(a)$$

représente le nombre de « tops » se produisant dans l'intervalle de temps $[a, b[$.

Définition 2.22 : Un processus de comptage est un processus discret à temps continu.

Définition 2.23 : Si le nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps fixé est λ , alors la probabilité qu'il existe exactement k occurrences (k étant un entier naturel, $k = 0, 1, 2, \dots$) est

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

où λ est un nombre réel strictement positif. On dit alors que X suit la loi de Poisson de paramètre λ , noté $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Définition 2.24 : Un processus de Poisson de densité $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ tel que :

1. Le processus est à accroissement indépendants :

$$\forall t_0 \leq t_1 < \dots < t_k,$$

les variables aléatoires :

$$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0},$$

sont indépendantes.

2. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$: $N(s+t) - N(s)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Exemple 2.4 : (**Guichet**) Ici, N_t représente le nombre de clients qui sont arrivés au guichet avant l'instant t . L'hypothèse sur les sauts d'amplitude 1 exprime le fait que les clients arrivent un par un au guichet. En revanche, les hypothèses i) et ii), qui posent des conditions sur $N_{t+s} - N_s$ (le nombre de clients arrivés au guichet dans l'intervalle de temps $]s, t+s]$), sont plus discutables. Malgré cela, une telle modélisation est une approximation raisonnable de la réalité, qui a en plus la vertu de pouvoir donner des solutions quantitatives simples.

Théorème 2.3 : *Le temps d'attente entre deux événements successifs suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que si $T_0 = 0$ et pour tout $n \in \{1, 2, \dots\}$,*

$$T_n := \text{l'instant auquel se produit le } n\text{-ième événement,}$$

alors pour tout entier positif n et pour tout nombre réel positif t :

$$\mathbb{P}[T_n - T_{n-1} \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Preuve. : Soit X , le temps d'attente avant que le premier événement survienne. Pour tout nombre réel positif x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq x] &= 1 - \mathbb{P}[X > x] \\ &= 1 - \mathbb{P}[N(x) = 0] \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_n - T_{n-1} \leq t] &= 1 - \mathbb{P}[T_n - T_{n-1} > t] \\ &= 1 - \mathbb{P}[N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0] \\ &= 1 - \mathbb{P}[N(t) = 0], \text{ D'après la stationnairété.} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.13 : *Si N est un processus de Poisson alors :*

i) *la somme :*

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

est presque sûrement finie pour tout $t \geq 0$.

ii) *les trajectoires de N sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille 1 seulement.*

iii) *les trajectoires sont càdlàg.*

iv) $\forall t > 0, \mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1.$

v) $\forall t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (2.1)$$

En particulier on a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \text{Var}(N_t) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1)).$$

Remarque 2.3 : On a :

$$N(1) \sim \mathbb{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[N(1)] = \lambda,$$

ce qui signifie que le nombre moyen d'évènements survenant en une unité de temps est égal à λ .

Proposition 2.14 : Un processus de Poisson est localement continu :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 1) = 0.$$

Proposition 2.15 : Les relations suivantes sont triviales à vérifier :

- a) $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$.
- c) $\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1})$.
- d) $\mathbb{P}(N(t) \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq t)$.
- e) $\mathbb{P}(s < T_n < t) = \mathbb{P}(N(s) < n \leq N(t))$.

Théorème 2.4 :

1) Lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \lambda \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

2) Lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{n}{T_n} \xrightarrow{p.s.} \lambda \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \left(\lambda \frac{T_n}{n} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Processus de Poisson composés

Définition 2.25 : Un processus de Poisson composé est un processus aléatoire indexé par le temps qui s'écrit

$$Z_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n,$$

où :

- $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$ est un processus de Poisson.
- Y_n est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes de (N_t) .

Remarque 2.4 : Le processus de Poisson composé est une généralisation du processus de Poisson permettant des sauts de hauteur aléatoire.

Définition 2.26 : Un processus de Poisson composé $\{Z_t : t \geq 0\}$ a des accroissements stationnaires et indépendants. Sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_{Z_t}(u) = e^{\nu t(\phi_{Y_t}(u)-1)},$$

où

- ϕ_{Y_t} est la fonction caractéristique des variables Y_n .
- ν est l'intensité du processus $\{Y_t : t \geq 0\}$ sous-jacent au processus $\{Z_t : t \geq 0\}$.

Exemple 2.5 : Arrivées d'avion dans un aéroport : chaque avion transporte un certain nombre de passagers.

Proposition 2.16 : Un processus de Poisson composé est clairement un processus càdlàg et constant par morceaux.

Proposition 2.17 : Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé, on a :

$$\mathbb{E}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y^2).$$

Théorème 2.5 : Si Y_1 admet un moment d'ordre 1, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$ la variable aléatoire Z_t possède un moment d'ordre 1 et

$$\mathbb{E}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1),$$

où λ est l'intensité du processus de Poisson $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$.

Preuve. Fixons t et montrons que Z_t est intégrable.

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_t|) &= \sum_{n \geq 1} \int \mathbf{1}_{N_t=n} \left| \sum_{k=1}^n Y_k \right| d\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{N_t=n} \left| \sum_{k=1}^n Y_k \right| \right). \end{aligned}$$

Mais $\mathbf{1}_{N_t=n}$ et $\left| \sum_{k=1}^n Y_k \right|$ sont indépendants, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_t|) &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_t = n) \mathbb{P} \left(\left| \sum_{k=1}^n Y_k \right| \right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_t = n) n \mathbb{P}(|Y_1|) \\ &\leq \mathbb{E}(N_t) \mathbb{E}(Y_1). \end{aligned}$$

Or N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt d'où $\mathbb{E}(|Z_t|) < \lambda t \mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$.

De la même façon et en utilisant le Théorème de convergence dominée, on peut montrer cette fois que

$$\mathbb{E}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1)$$

■

Conclusion

- ◀ Un processus stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps.
- ◀ La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'est-à-dire non prévisible avec certitude.

Bibliographie

- [1] A. Alexandre POPIER. Calcul stochastique, applications en finance. ENSAI, 3A, GDRIF. Semestre 1
- [2] B. Lapeyre D. Lembreton. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance Université Paris-Est, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France, Université Paris-Est, Professeur à l'École des Ponts ParisTech, France. 2012 Pages 53-54.
- [3] B. Solaimen. Processus stochastique pour l'ingénieur. Collection technique et scientifique des télécommunications. Press polytechniques et universitaires romandes
- [3] H. Guiol. Calcul stochastique avancé. TIMB-TIMC-IMAG 2005.
- [4] J. Jean-Christophe Breton. Processus Gaussiens. Master IMA 2ème année. Université de La Rochelle Septembre–Décembre 2006
- [5] J. Jacob. Mouvement brownien et calcul stochastique. Université Pierre et Marie Curie 2007-2008
- [6] J. Yves Ouvrard. Probabilités, TOME 2 master agrégation. Université Joseph Fourier de Grenoble 2009. Page 159.
- [7] M. Bossy InRia. Introduction à la modélisation financière en temps continu et calcul stochastique. 16 Novembre 2013.
- [8] M. Jeanblanc. cours de calcul stochastique. M2IF EVRY septembre 2006.
- [9] N. Guillin-Plantard. Introduction au calcul stochastique. 13 novembre 2009
- [10] O. Lévêque. Cours De Probabilités et calcul stochastiques. Semestre d'hiver 2004-2005.
- [11] P. Bougerol. Calcul stochastique, M2-Probabilités et finance. Université Pierre, et Marie, Paris 6 2011-2012.

- [12] P. Priouret. Introduction aux processus de diffusion. Université Pierre et Marie Curie. Master de sciences et technologies. Mathématiques et applications. Spécialité Probabilités et applications. Filière Probabilités et Finances Deuxième année. Année 2004/2005

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{N}, \mathbb{R}	: Ensemble des nombres naturels réels respectivement.
\mathbb{F}	: Filtration.
$\sigma(M)$: La tribu engendrée par M .
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: Loi normale de paramètre m et σ^2 .
$\mathbb{P}(A)$: La probabilité d'événement A .
\mathbb{P}	: Une mesure de probabilité sur Ω .
\mathbb{T}	: Intervalle de temps, ou ensemble d'indices.
$\mathbf{1}_A$: Fonction indicatrice de A : vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon
$\mathbb{V}ar(X)$: Variance de la variable aléatoire X
$Cov(X, Y)$: Covariance des variables aléatoires X et Y .
$\mathbb{P}\text{-}p.s$: Presque sûrement pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .

Annexe B : Rappel

▲ Lemme de Fatou

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace mesuré. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty[$, la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :

$$\mathbb{P} \left[\liminf_n A_n \right] \leq \liminf_n \mathbb{P} [A_n].$$

▲ Lemme de Borel-Cantelli

Si la somme des probabilités d'une suite $(A_n)_n$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

▲ Inégalité de Cauchy-Schwartz

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est l'inégalité de Holder pour $p = 2$, $q = 2$ et

$$\mathbb{E} [XY] \leq (\mathbb{E} [X^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} [Y^2])^{\frac{1}{2}}.$$

▲ Inégalité de Tchebychev

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E} (Y)$ l'espérance de Y . Alors, pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P} (Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E} (Y)}{a}.$$

▲ Convergence presque sûre

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \right) = 1.$$

▲ Théorème de convergence dominée

Théorème 2.6 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) , à valeurs réelles ou complexes, telle que :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f ;
- il existe une fonction intégrable g telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Résumé

Dans notre travail, nous nous intéressons à certaines propriétés d'une classe de processus stochastiques à accroissements stationnaires, processus adapté, dérivabilité et intégrabilité.....

Le but principal est d'étudier deux exemples de processus stochastique :
Mouvement Brownien et Processus de Poisson.

Abstract

In our work, we are interested in certain properties of a class of stochastic processes with stationary increments, adapted process, differentiability and integrability....

The main goal is to study two examples of stochastic processes:
Brownian movement and Poisson Process.

الملخص

في عملنا ، نحن مهتمون بخصائص معينة لفئة من العمليات العشوائية ذات الزيادات الثابتة ، والعملية المتكيفة ، والتفاضلية ، والتكامل.

الهدف الرئيسي هو دراسة مثالين للعمليات العشوائية: الحركة البراونية و عملية بواسون.