République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

ABDALLAOUI Achouak

Titre :

Principe du maximum stochastique avec un cout non linéaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	CHALA Adel	UMKB	Président
Dr.	GHOUL Abdelhak	UMKB	Encadreur
Dr.	BENABBA Fadhila	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Ce travail est dédié

A ceux qui m'ont appris le respect et le sens du devoir ;

Ceux qui ne cessent de se sacrifier pour mon bien être ;

Ceux qui m'ont protégés,

A mes chèrs parents mohammed et soaad ;

A mon frères :Abdelhak ;

A mes soeurs :Rayen,Ghofran,Israa,Ranim ;

A mes chères

amies :Hanin,Maroua,Siham,Nesrin,Nedjma,Samah,Khadija,Kanza,Hidayet,et...

A mes collègues de la promotion 2020 particulièrement ceux de la spécialitéMathématiques

REMERCIEMENTS

D'abord nous remercions **DIEU** en aide pour que nous puissions aboutir à la réussite.

Tout le respect et les mots de remerciment à mon encadreur **Dr.GHOUL Abdelhak,**pour son soutien,son aide,ses conseils,et ses dirétives du début jusqu'à la fin de ce travail.

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique **Dr.HFAYED Mokhtar**,et les enseignant qui ont participés à notre formation,et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail,**Dr.CHALA Adel** et **Dr.BENABBA Fadhila.**

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

merci à tous.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle optimale est utilisée pour modéliser beaucoup de situations en sciences de l'ingénieure, en sciences économiques et sociales et de façon plus générale dans tous les domaines utilisant les applications des mathématiques. Un problème de contrôle optimal stochastique se formule comme suit :

On considère l'EDS suivante

$$\begin{cases} dx\left(t\right)=b(t,x(t),u(t))dt+\sigma(t,x(t),u(t))dB(t), \\ x(0)=x_{0,} \end{cases}$$

avec $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0},P\right)$.

On note U l'ensemble de tous les processus $(u_t)_{t\geq 0}$ progrssivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et les èlèmentes de U sont appelés processus de contrôle.

L'objet du contrôle optimal est de minimiser (ou maximiser) la fonction de coût $J(.)$ sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles . généralemnt cette fonction de coût est donné par

$$J\left(u\left(.\right)\right)=E\left[\int_0^T g\left(u\left(t\right),t\right)dt+h\left(x\left(T\right),T\right)\right].$$

Si en partant d'un état x à l'instant t on définit pour tout processus de contrôle u_t,le coût est donné par :

$$J\left(t,x,u\right)=E\left[\int_t^T g\left(u\left(s\right),s\right)ds+h\left(x\left(T\right),T\right)\right].$$

Où g et h sont des fonctions données et x_t est la trajectoire du système controlée par u.

Dans ce mémoire nous intéressons d'étudier le principe du maximum stochastique avec un coût non linéaire . Ce mémoire est structuré de deux chapitres :

Dans le première chapitre, on va expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant des définitions, des théorèmes et quelques propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique. On parle aussi sur les théorèmes d'existence et d'unicité d'une équation différentielle stochastique (EDS).

Dans le deuxième chapitre on va étudier le problème du contrôle optimale par le principe du maximum stochastique (condition nécessaire et suffisante d'optimalité) avec un coût non linéaire.

Chapitre 1

le calcul stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastique

Définition 1.1 (Processus stochastique) $\times$*Soit* $T \subset \mathbb{R}$,*toute famille* $X = (X_t)_{t \in T}$ *de variable aléatoire á valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est appelée un processus stochastique tel que* t *est souvent interprété comme le temps.*

Définition 1.2 (Processus a trajectoire continue) $\div$*Le processus* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est dit à trajectoire continues si pour tout* $w \in \Omega$,*la fonction* $t \longmapsto X_t(w)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.3 (Càdlàg et càglàd) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite,pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continue à droite et pourvues de limites à gauche. Un processus est dit càglàd (continu à gauche,pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continue à gauche et pourvues de limites à droite.*

Définition 1.4 (Filtration) *Une filtration est une famille* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *de sous -tribu de* $\mathcal{F}$,*c'est à dire*

$$\forall 0 \leq s \leq t < \infty, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

et nous appelons $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.5 (mesurabilité) *un processus X est dit mesurable si l'application suivante,*

$$([0,+\infty[\times\Omega, B([0,+\infty[)\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

$$(t,\omega)\mapsto X_t(\omega) \text{ est mesurable}$$

Définition 1.6 (Processus adapté) *On dit $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $\mathcal{F}$-adapté si pour tout $t\geq 0$,la variable aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1 *Un processus est toujourd adapté à sa filtration naturelle.*

Définition 1.7 (Processus progressivement mesurable) *On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ si $\forall t\geq 0$,$\forall A\in B(\mathbb{R})$,*

$$\{(s,w)\diagup 0\leq s\leq t; X_s(w)\in A\}\in B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

c'est à dire que l'application sur

$$([0,t]\times\Omega, B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) : (s,\omega)\longmapsto X_s(\omega) \text{ est mesurable.}$$

Définition 1.8 (Processus de markov) *Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P\right)$ une base stochastique et $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique.*
Le processus X est un processus de markov si X est adapté et si pour tout $s,t\geq 0$ et $B\in B(\mathbb{R})$ on a :

$$P(X_{s+t}\in B/\mathcal{F}_s) = P(X_{s+t}\in B/\sigma(X_s))\, p.s.$$

Définition 1.9 (Temp d'arrêt) $\times$*une variable aléatoire $T:\Omega\to\{\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si,*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \{T=n\}\in\mathcal{F}_n$$

ou bien,de maniére équivalente,si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Définition 1.10 (Martingale)

Martingale $\div$*un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *réel,adapté et intégrable,*$(X_t)_{t\geq 0}$ *est une :*

1. martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) = X_S$.
2. sous martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) \geq X_S$.
3. sur martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) \leq X_S$.

Définition 1.11 (Martingale locale) *un processus M est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,le processus arrêté M^{T_n} soit une martingale nulle en 0.*

Définition 1.12 (Variation totale et variation quadratique) *la variation infinitésimale d'ordre p d'un pracessus X_t défini sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$est définie par*

$$V_T^p\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p\left(\Pi_n\right)$ a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre,convergence L^p) lorsque

$$\Pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \to 0$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t sur $[0, T]$.En particulier,

1. *Si $p = 1$,la limite s'appelle la variation totale de $X_t$sur $[0, T]$.*
   - *pour tout T,V_T^1 est fini ,on dit que X est à variation finie.*
   - *pour tout T,V_T^1 est borné,on dit que X est à variation finie.*
2. *Si $p = 2$,la limite s'appelle la variation quadratique de $X_t$sur $[0, T]$ et notée $< X >_T$.*

Théorème 1.1 (Variation bornée) *un processus X_t est un processus à variation bornée sur $[0,T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire,c'est à dire que*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \text{ presque sûrement.}$$

Remarque 1.2 *Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement,alors elle vaut*

$$V_T^1 := \sup_{\Pi \in P} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|$$

presque sûrement.
où P est l'ensemble des subdivision possibles de $[0,T]$ réciprocequement,si ce supemum est fini,le processus admet une variation totale.La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueure de ses trajectoires.

1.2 Mouvement brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,et un processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ sur cet espace.
On appelle $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien avec $B_0 = 0$ si :
• $(B_t)_{t \geq 0}$ est continue.
•(Accroissements indépendants) :Pour tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ les variable $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_0} \right)$ sont indépendantes.
•(Accroissements stationnaires) :Pour $0 \leq s \leq t$,$B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne,centrée de variance $(t - s)$.

Proposition 1.1 *B est un mouvement brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré à trajectoires continues de fonction de covariance*

$$cov\left(B_s, B_t\right) = \min\left(s, t\right).$$

Proposition 1.2 *si B est un mouvement brownien alors :*

1. *$-B$ est aussi un mouvement brownien.*

2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,$\left(\frac{1}{\alpha} \times B_{\alpha^2 t}\right)$ est un mouvement brownien.*

3. *pour tout $s > 0$,$W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement brownien independant de $\mathcal{F}_s$.*

4. *le processus défini par* $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_t = tB_{1/t} \end{cases}$ *est un mouvement brownien.*

Proposition 1.3 (Propriétés de martingale) *Soit B un mouvement brownien et pour tout $t \in [0, T]$,$\mathcal{F}_t$ est la tribu $\sigma(B_s, s \leq t)$ complétée.*

1. B est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,$\left(\exp\left(\lambda \times B_t - \lambda^2 \times \frac{t}{2}\right)\right)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

3. $(B_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

Proposition 1.4 (Propriété de Markov) *La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) :pour tout s,le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par*

$$W_t = B_{t+s} - B_s,$$

est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 1.2 *Pour f borélienne bornée,et pour $u > t$,*

$$E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u) \mid \sigma(B_t))$$

preuve.. *On fait apparaitre les accroissements et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle :*

$$E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u - B_t + B_t) \mid \mathcal{F}_t) = \Phi(u - t, B_t),$$

avec

$$\Phi(u - t, x) = E(f(B_u - B_t + x)) = E(f(y + x)),$$

où y a même loi que $B_u - B_t$,soit une loi $N(0, u-t)$ par les mêmes arguments,$E(f(B_u) \mid \sigma(B_t)) = \Phi(u-t, B_t)$.*On a trés précisement*

$$\Phi(s,x) = \frac{1}{\sqrt[1]{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-\frac{(y-x)^2}{2s})dy,$$

une autre facon de décrire cette propriété est de dire que, pour $u > t$,conditionnellement à B_t, la v.a.B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u-t$.alors $E(1_{B_u} \leq x \mid \mathcal{F}_t) = E(1_{B_u} \leq x \mid \sigma(B_t)) = E(1_{B_u} \leq x \mid B_t)$,pour $u \leq t$. ■

1.3 calcul d'Itô

L'intégrale d'Itô est un des outils fondamentaux du calcul stochastique.
Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabélité filtré,et soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien standard.

1.3.1 intégrale stochastique

Définition 1.13 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un processus s'il est $(\mathcal{F}_t)$-adapté,càglàd,et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$$

pour tout $t > 0$.

cas des processus étagés :

Ce sont les processus de type

$$\theta_t^n = \sum_{t=0}^{n-1} \theta_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t),$$

où $n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$

pour tout $i = 0, ..., n$,on définit

$$\int_0^{\infty} \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

on sais que

$$E\left[\int_0^{\infty} \theta_s dB_s\right] = 0 \text{ et } var\left[\int_0^{\infty} \theta_s dB_s\right] = \int_0^{\infty} \theta_s^2 ds$$

alors

$$\int_0^{t} \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t} \right).$$

cas générale :

Soit l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus $\mathcal{F}_t$ adaptés càglàd et si θ est un bon processus,il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suit de processus étagés telle que quand $n \to +\infty$:

$$E\left[\int_0^{t} (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right] \to 0$$

Ainsi,pour tout $t > 0$,Il existe une v.a.$I_t(\theta) = \int_0^{\infty} \theta_s dBs$ de carré intégrable telle que :

$$E(I_t(\theta)) = 0 \text{ et } var(I_t(\theta)) = \int_0^{\infty} \theta_s^2 ds.$$

preuve.. On va montrer que $E(I_t(\theta)) = 0$ on a :

$$I_t(\theta) = \int_0^{\infty} \theta_s dBs = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right),$$

$I_t(\theta)$ est gaussien,car (B_t) est un processus gaussien alors

$$E(I_t(\theta)) = E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i E\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

$$= 0$$

comme $E\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)=0$,car $\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)$ sont acroissement indépendants.

pour montrer que $var\left(I_t\left(\theta\right)\right)=\int_0^\infty \theta_s^2 ds$.en effet,on a :

$$var\left(I_t\left(\theta\right)\right)=E\left(I_t^2\left(\theta\right)\right)-E\left(I_t\left(\theta\right)\right)^2$$

$$=E\left(I_t^2\left(\theta\right)\right)$$

$$=E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i^2 E\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i^2 E\left(t_{i+1}-t_i\right)$$

$$=\int_0^\infty \theta_s^2 ds.$$

■

1.3.2 Propriétés d'intégrale stochastique :

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. linéairété :

$$I_t\left(a_1\theta^1+a_2\theta^2\right)=a_1 I_t\left(\theta^1\right)+a_2 I_t\left(\theta^2\right).$$

2. propriété de martingale :

$$t\mapsto I_t\left(\theta\right)\ \text{ et } t\mapsto I_t\left(\theta\right)^2-\int\limits_0^t \theta_s^2 ds,$$

   sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues.

3. isométrie :pour tous bons processus φ,θ et tout $s,t\geq 0$,on a

$$E\left[I_s\left(\varphi\right)I_t\left(\theta\right)\right]=E\left[\int_0^{s\,\Lambda\,t}\theta_u\varphi_u du\right].$$

4. additivité :pour $0 \leq s \leq u \leq t$,

$$\int_0^t \theta_v dB_v = \int_s^u \theta_v dB_v + \int_u^t \theta_v dB_v.$$

5. la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$< I_t(\theta) >= \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

1.3.3 Processus d'Itô

Définition 1.14 *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabélité filtré,et soit B un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien On appelle processus d'Itô tout processus $(X_t, t \geq 0)$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds.$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable,H un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty \text{ p.s,}$$

et$V$ un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t |V_s| \, ds < \infty p.s.$$

Le coefficient V s'appelle la dérivée (ou le drift) et H son coefficient de diffusion.

étant donné un processus d'Itô X,on peut définir un processus continu adapté croissant

$$< X >_t = \int_0^t H_s^2 ds, t \geq 0.$$

Remarque 1.3 *Un processus d'Itô X est continu adapté.En particulier si H est adapté tel* *que* $\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty$ *p.s,alors*

$$\int_0^t X_s H_s dB_s,$$

est bien défini.

Proposition 1.5 (Intégration par parties) *Soient*

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dB_s. \end{cases}$$

alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_S' ds.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.3.4 Formule d'Itô

Théorème 1.3 *Soit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

un processus d'Itô,et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbb{C}^2$*.alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + 1/2 \int_0^t f''(X_s) d < X >_S,$$

où

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s := \int_0^t f'(X_s) V_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s.$$

Plus généralement,si $f : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to f(t, x) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathbb{C}^{1,2}$ (continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x) alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + 1/2 \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d < X >_s .$$

1.4 Equation différentielle stochastique (EDS)

Définition 1.15 *On se donne :*

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\delta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

X *:une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien,c'est à dire adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
on dit qu'un processus stochastique $X(.)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô ;*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \delta(t, X_t)\, dB_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq T$ si :

1. $X(.)$ est progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}(.)$.
2. $b(t, X_t) \in L^1_n(0, T)\,; \delta(t, X_t) \in L^2_{n*m}(0, T)$.
3. $X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \delta(s, X_s)\, dB_s$ P-p.s pour $0 \leq t \leq T$.

1.4.1 Existence et unicité

On considére l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \delta(t, X_t)\, dB_t \qquad (*)$$

où $b, \delta \in [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonction déterministes mesurables.

Théorème 1.4 (Existence et unicité) *soient* b *et* δ *deux fonctions continues,on suppose que'il existe une constante* κ *telle que, pour tout* $t \in [0, T]\,, x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

a) condition de lipschitz en espace,uniforme en temps

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\delta(t,x)-\delta(t,y)|\leq\kappa|x-y|.$$

b) croissance linéaire

$$|b(t,x)|+|\delta(t,x)|\leq\kappa(1+|x|).$$

c) $E|Z^2|<\infty.$

Alors pour tout $t\geq 0$ l'équation $(*)$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0,t]$.

Chapitre 2

problème de contrôle stochastique et principe du maximum

Dans ce chapitre , on va étudier le principe du maximum stochastique (PMS) avec un coût non linéaire , le but de cette étude est de trouver des conditions nécessaire d'optimalité vérifées par un contrôle optimal u^* minimisant le coût J sur U_{ad}.

2.1 Formulation du probléme :

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ une espace probabilisé filtré avec une filtration $\mathcal{F}_t$ satisfaisant aux condition habituelles.soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement browien dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Définition 2.1 (Contrôle) *On appelle contrôle tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ adapté par rapport à une filtration de carré intégrable et prend ses valeurs dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.2 (Contrôle admissible) *Soit U un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble de contrôle admissible*

$$U_{ad} = \{u : [0,T] \times \Omega \to A, \text{tel que } u \text{ est mesurable et } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique (EDS) controlée suivante :

$$\begin{cases} dx\,(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dB(t), \\ x(0) = x_{0,} \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

(H_1) :On suppose que b, σ sont continnuellement différentiable par rapport à (x, u) et leurs dérivés sont bornés.

Pour une constant $c > 0$,

1.
$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| + |\sigma(t, x, u) - \sigma(t, y, u)| \leq |x - y|\,.$$

2.
$$|b(t, x, u)| + |\sigma(t, x, u)| \leq c(1 + |x|).$$

Sous cette hypothèse et les conditions 1 et 2,l'équation (2.1) admet une solution unique $x(.) \in L^2_{\mathcal{F},p}\left([0, T]\,; \mathbb{R}\right)$,pour le donné

$$(x_0, u(.)) \in \mathbb{R} \times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0, T]\,; U\right)$$

que nous appelons tel $x(.)$ la trajectoire correspondante.

2.2 Fonction de coût :

Soit g et h deux fonctions définies comme suit

$$g : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R},$$

et

$$h : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R},$$

et soit x_t la solution forte de l'EDS controlée,on définie la fonction de coût par :

$$J(u(.)) = E\left[\int_0^T g(u(t), t)\, dt + h(x(T), T)\right]. \tag{2.2}$$

avec

- $g(u, t) = L\exp(-\beta t) \times \frac{u^{1-R}}{1-R}$.
- $h(x, T) = k \times \frac{x^{1-R}}{1-R}$.
- $L, k, \beta > 0$ et $R \in (0, 1)$.

Remarque 2.1 *On remarque que les fonctions g et h ne satisfont pas la condition de croissance linéaire ou quadratique.*

Nous traitons un tel cas en utilise la méthode variationnelle classique et obtenons une principale maximale locale alors nous réécrivons la fonction de coût comme suitee :

$$J(u(.)) = E\left[\int_0^T L\exp(-\beta t)\frac{u(t)^{1-R}}{1-R}dt + k\frac{x(T)^{1-R}}{1-R}\right]. \tag{2.3}$$

2.2.1 Hamiltonien :

l'hamiltonien associé à notre problème de contrôle

$$H : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est défini par :

$$H(t, x, u, p, q) =< p, b(t, x, u) > + < q, \sigma(t, x, u) > +g(u, t)$$

$$= pb(t, x, u) + q\sigma(t, x, u) + L\exp(-\beta t) \times \frac{u^{1-R}}{1-R}.$$

2.3 l'équation et l'inégalité variationnelle

Pour dériver l'inégalité "var" on a besoin de quelle que hypothèse sur la solution optimale.

$$(H_2) : u(t) > 0; x(T) > 0; E\left[\int_0^T u(t)^{-2R} dt\right] < \infty; E\left[x(T)^{-2R}\right] < \infty.$$

Soit $u^*(.)$ un contrôle optimal pour (2.1) et (2.3),et $x^*(.)$ l'optimal correspondant.

Soit $u(.) \in L^2_{\mathcal{F},p}([0,T];U)$ donné tel que

$$(u^*(.) + u(.)) \in U_{ad}.$$

nous prenons la perturbation convexe

$$u^\rho(.) = u^*(.) + \rho u(.), 0 \leq \rho \leq 1.$$

Si U_{ad} est convexe,alors $u^\rho(.) \in U_{ad}$.nous désignons par $x^\rho(.)$ la trajectoire du système de contrôle (2.1) correspondant à $u^\rho(.)$.

on introduit l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} dx^{1,\rho}(t) = [b_x(t, x^*(t), u^*(t))x^{1,\rho}(t) + b_u(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\ +[\sigma_x(t, x^*(t), u^*(t)) x^{1,\rho}(t) + \sigma_u(t, x^*(t), u^*(t)) u(t)] dBt. \\ x^{1,\rho}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Avec $x^{1,\rho}(t)$ est la solution de l'équation (2.4).

Lemme 2.1 *Soient $x^*(t)$ et $x^\rho(t)$ les solutions de (2.1) associés respectivement à $u^*(t)$ et $u^\rho(t)$,et soit*

$$\tilde{x}^\rho(t) = \rho^{-1}(x^\rho(t) - x^*(t)) - x^{1,\rho}(t), \tag{2.5}$$

sous l'épouthèse (H_1) on a :

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} E\left|\tilde{x}^\rho(t)\right|^2 = 0, \qquad (*)$$

preuve.. on a :

$$x^*(t) = x + \int_0^t b(s, x^*(s), u^*(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x^*(s), u^*(s))dBs.$$

$$x^\rho(t) = x + \int_0^t b(s, x^\rho(s), u^\rho(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x^\rho(s), u^\rho(s))dBs.$$

par soustraction on obtient :

$$x^\rho(t) - x^*(t) = \int_0^t \left[b\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^*(s))\right] ds$$

$$+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - \sigma(s, x^*(s), u^*(s))\right] dBs.$$

En ajoutant le terme $\int_0^t b(s, x^*(s), u^\rho(s))ds$ et $\int_0^t \sigma(s, x^*(s), u^\rho(s))dBs$,on trouve :

$$x^\rho(t) - x^*(t) = \int_0^t b\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^\rho(s))ds + \int_0^t b\left(s, x^*(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^*(s))ds$$

$$+ \int_0^t \sigma\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - \sigma(s, x^*(s), u^\rho(s))dBs + \int_0^t \sigma\left(s, x^*(s), u^\rho(s)\right) - \sigma(s, x^*(s), u^*(s))dBs.$$

avec la valeur absolue :

$$\left|x^\rho(t) - x^*(t)\right| \leq \int_0^t \left|b\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^\rho(s))\right| ds$$

$$+ \int_0^t \left|b\left(s, x^*(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^*(s))\right| ds$$

$$+ \int_0^t \left|\sigma\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - \sigma(s, x^*(s), u^\rho(s))\right| dBs$$

$$+ \int_0^t \left|\sigma\left(s, x^*(s), u^\rho(s)\right) - \sigma(s, x^*(s), u^*(s))\right| dBs.$$

En passant à l'espérance,on a :

$$E\left|x^\rho(t) - x^*(t)\right|^2 \leq \int_0^t E\left|b\left(s, x^\rho(s), u^\rho(s)\right) - b(s, x^*(s), u^\rho(s))\right|^2 ds$$

$$+\int_0^t E\left|b\left(s,x^*(s),u^\rho(s)\right)-b(s,x^*(s),u^*(s))\right|^2 ds$$

$$+\int_0^t E\left|\sigma\left(s,x^\rho(s),u^\rho(s)\right)-\sigma(s,x^*(s),u^\rho(s))\right|^2 ds$$

$$+\int_0^t E\left|\sigma\left(s,x^*(s),u^\rho(s)\right)-\sigma(s,x^*(s),u^*(s))\right|^2 ds.$$

De plus comme $(a+b+c)^2 \leq 3a^2+3b^2+3c^2$ alors :

$$E\left|x^\rho(t)-x^*(t)\right|^2 \leq 3\int_0^t E\left|b\left(s,x^\rho(s),u^\rho(s)\right)-b(s,x^*(s),u^\rho(s))\right|^2 ds$$

$$+3\int_0^t E\left|b\left(s,x^*(s),u^\rho(s)\right)-b(s,x^*(s),u^*(s))\right|^2 ds$$

$$+3\int_0^t E\left|\sigma\left(s,x^\rho(s),u^\rho(s)\right)-\sigma(s,x^*(s),u^\rho(s))\right|^2 ds$$

$$+3\int_0^t E\left|\sigma\left(s,x^*(s),u^\rho(s)\right)-\sigma(s,x^*(s),u^*(s))\right|^2 ds.$$

On sait que b et σ sont lipshitziennes en x et u ,on a :

$$E\left[\left|x_t^\rho-x_t^*\right|^2\right] \leq 6\int_0^t E\left[\left|x_s^\rho-x_s^*\right|^2\right] ds+6\int_0^t E\left[\left|u_s^\rho-u_s^*\right|^2\right] ds.$$

et par passage au sup sur $[0,T]$,on obtient :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\rho-x_t^*\right|^2\right] \leq 6\int_0^t E\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|x_s^\rho-x_s^*\right|^2\right] ds+6\int_0^t E\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|u_s^\rho-u_s^*\right|^2\right] ds.$$

Et on a

$$u^\rho\left(.\right)=u^*\left(.\right)+\rho u\left(.\right),$$

alors on obtient :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\rho-x_t^*\right|^2\right] \leq 6\int_0^t E\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|x_s^\rho-x_s^*\right|^2\right] ds+M_t^\rho,$$

Où

$$M_t^\rho = 6\rho^2 \int_0^t E\left[\sup_{s\in[0,T]} |u_s|^2\right] ds.$$

comme

$$E\left[\sup_{s\in[0,T]} |u_s|^2\right] < \infty$$

alors on a :

$$M_t^\rho \leq k\rho^2.$$

Ceci implique que :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\rho - x_t^*|^2\right] \leq 6\int_0^t E\left[\sup_{s\in[0,T]} |x_s^\rho - x_s^*|^2\right] ds + k\rho^2.$$

En applique le lemme de Gronwall,on obtient :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\rho - x_t^*|^2\right] \leq k\rho^2 \exp(6t),$$

alors :

$$\lim_{\rho\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\rho - x_t^*|^2\right] \leq \lim_{\rho\to 0} k\rho^2 \exp(6t) = 0. \tag{2.6}$$

maintenant en dérive (2.5),on obtient :

$$d\tilde{x}^\rho(t) = \frac{1}{\rho}(dx^\rho(t) - dx^*(t)) - dx^{1,\rho}(t).$$

telle que

$$dx^\rho(t) = b(t, x^\rho(t), u^\rho(t))dt + \sigma(t, x^\rho(t), u^\rho(t))dB(t).$$

et

$$dx^*(t) = b(t, x^*(t), u^*(t))dt + \sigma(t, x^*(t), u^*(t))dB(t).$$

En remplaçant $dx^\rho(t), dx^*(t)$ et $dx^{1,\rho}(t)$ par leurs valeurs,on obtient :

$$d\tilde{x}^\rho(t) = \frac{1}{\rho}\left[b(t, x^\rho(t), u^\rho(t))dt + \sigma(t, x^\rho(t), u^\rho(t))dB(t)\right]$$

$$-\frac{1}{\rho}\left[b(t,x^*(t),u^*(t))dt+\sigma(t,x^*(t),u^*(t))dB(t)\right]$$

$$-\left[b_x(t,x^*(t),u^*(t))x^{1,\rho}(t)+b_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dt$$

$$-\left[\sigma_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)x^{1,\rho}(t)+\sigma_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dBt.$$

Ceci qui nous donne :

$$d\tilde{x}^\rho(t)=\frac{1}{\rho}\left[b(t,x^\rho(t),u^\rho(t))-b(t,x^*(t),u^*(t))\right]dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\sigma(t,x^\rho(t),u^\rho(t))-\sigma(t,x^*(t),u^*(t))\right]dB\left(t\right)$$

$$-\left[b_x(t,x^*(t),u^*(t))x^{1,\rho}(t)+b_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dt$$

$$-\left[\sigma_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)x^{1,\rho}(t)+\sigma_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dBt. \tag{2.7}$$

Par le développement de Taylor avec rèste intégrale aux points (x,u) et l'ordre 1 des fonctions $b(t,x^\rho(t),u^\rho(t))$ et $\sigma(t,x^\rho(t),u^\rho(t))$,on a :

$$b(t,x^\rho(t),u^\rho(t))=b(t,x^*(t),u^*(t))+<\int_0^1 b_x\left(t,x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right),u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda,(x_t^\rho-x_t^*)>$$

$$+<\int_0^1 b_u\left(t,x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right),u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda,(u_t^\rho-u_t^*)>$$

alors

$$b(t,x^\rho(t),u^\rho(t))-b(t,x^*(t),u^*(t))=\int_0^1 b_x\left(t,x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right),u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda(x_t^\rho-x_t^*)$$

$$+\int_0^1 b_u\left(t,x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right),u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda(u_t^\rho-u_t^*).$$

et

$$\sigma(t,x^\rho(t),u^\rho(t))-\sigma(t,x^*(t),u^*(t))=\int_0^1 \sigma_x\left(t,x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right),u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda(x_t^\rho-x_t^*)$$

$$+\int_0^1 \sigma_u\left(t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right)d\lambda(u_t^\rho-u_t^*).$$

En remplaçant ces deux dans (2.7),on obtient :

$$d\tilde{x}^\rho(t)=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 b_x\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]d\lambda(x_t^\rho-x_t^*)\right]dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 b_u\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]d\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 \sigma_x\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]d\lambda(x_t^\rho-x_t^*)\right]dB(t)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 \sigma_u\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]d\lambda(u_t^\rho-u_t^*)\right]dB\left(t\right)$$

$$-\left[b_x(t,x^*(t),u^*(t))x^{1,\rho}(t)+b_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dt$$

$$-\left[\sigma_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)x^{1,\rho}(t)+\sigma_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dBt.$$

En remplaçant $(x^p(t)-x^*(t))=\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^{1,\rho}(t))$ et $(u^\rho(t)-u^*(t))=\rho u$ on a :

$$d\tilde{x}^\rho(t)=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 b_x\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda\rho u\right]d\lambda\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^{1,\rho}(t))\right]dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 b_u\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda\rho u\right]d\lambda\rho u\right]dt$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 \sigma_x\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda\rho u\right]d\lambda\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^{1,\rho}(t))\right]dB(t)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 \sigma_u\left[t, x_t^*+\lambda\left(x_t^p-x_t^*\right), u_t^*+\lambda\rho u\right]d\lambda\rho u\right]dB\left(t\right)$$

$$-\left[b_x(t,x^*(t),u^*(t))x^{1,\rho}(t)+b_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dt$$

$$-\left[\sigma_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)x^{1,\rho}(t)+\sigma_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)u(t)\right]dBt.$$

où $\tilde{x}^\rho(t)$ donnée par

$$\tilde{x}^\rho(t)=\int_0^t\left[\int_0^1 b_x\left[s, x_s^*+\lambda\left(x_s^p-x_s^*\right), u_s^*+\lambda\rho u\right]\tilde{x}^\rho(s)d\lambda\right]ds$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^1 b_x\left[s, x_s^* + \lambda\left(x_s^p - x_s^*\right), u_s^* + \lambda\rho u\right] x^{1,\rho}(s) d\lambda\right] ds$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^1 b_u\left[s, x_s^* + \lambda\left(x_s^p - x_s^*\right), u_s^* + \lambda\rho u\right] u(s) d\lambda\right] ds$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^1 \sigma_x\left[s, x_s^* + \lambda\left(x_s^p - x_s^*\right), u_s^* + \lambda\rho u\right] \tilde{x}^{\rho}(s) d\lambda\right] dBs$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^1 \sigma_x\left[s, x_s^* + \lambda\left(x_s^p - x_s^*\right), u_s^* + \lambda\rho u\right] x^{1,\rho}(s) d\lambda\right] dBs$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^1 \sigma_u\left[s, x_s^* + \lambda\left(x_s^p - x_s^*\right), u_s^* + \lambda\rho u\right] u(s) d\lambda\right] dBs$$

$$-\int_0^t \left[b_x(s, x^*(s), u^*(s)) x^{1,\rho}(s) + b_u\left(s, x^*(s), u^*(s)\right) u(s)\right] ds$$

$$-\int_0^t \left[\sigma_x\left(s, x^*(s), u^*(s)\right) x^{1,\rho}(s) + \sigma_u\left(s, x^*(s), u^*(s)\right) u(s)\right] dBs.$$

et en passant aux l'éspérance carrées on a :

$$E\left|\tilde{x}^{\rho}(t)\right|^2 \leq k \int_0^t E\left|\int_0^1 b_x\left[t, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u\right] \tilde{x}^{\rho}(s) d\lambda\right|^2 dt$$

$$+k \int_0^t E\left|\int_0^1 \sigma_x\left[t, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u\right] \tilde{x}^{\rho}(s) d\lambda\right|^2 dt + \beta^{\rho}.$$

où β^{ρ} est donne par :

$$\beta^{\rho} = k \int_0^t E\left|\int_0^1 \left\{b_x(s, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u) - b_x(t, x^*(t), u^*(t))\right\} \tilde{x}^{1,\rho}(s) d\lambda\right|^2 dt$$

$$+k \int_0^t E\left|\int_0^1 \left\{b_u(s, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u) - b_u(t, x^*(t), u^*(t))\right\} u d\lambda\right|^2 dt$$

$$+k \int_0^t E\left|\int_0^1 \left\{\sigma_x(s, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u) - \sigma_x(t, x^*(t), u^*(t))\right\} \tilde{x}^{1,\rho}(s) d\lambda\right|^2 dt$$

$$+k \int_0^t E\left|\int_0^1 \left\{\sigma_u(s, x^*(t) + \lambda\left(x^p(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\rho u) - \sigma_u(t, x^*(t), u^*(t))\right\} u d\lambda\right|^2 dt.$$

puisque b_x et σ_x sont continue et avec passage à la limite quand ρ tend vers 0 on obtient :

$$\lim_{\rho\to 0} \beta^\rho = 0.$$

comme b_x et σ_x sont bornées,alors (2.7) devient :

$$E\left|\tilde{x}^\rho(t)\right|^2 \leq 2kM \int_0^t E\left|\tilde{x}^\rho(t)\right|^2 dt + \beta^\rho$$

finalement,en utilisant le lemme de Gronwall on obtient :

$$\lim_{\rho\to 0} E\left|\frac{x^\rho(t) - x^*(t)}{\rho} - x^{1,\rho}(t)\right|^2 = 0. \tag{2.8}$$

d'aprés et (2.8) la relation $(*)$ est vérifié. ■

Lemme 2.2 *sous* (H_1),(H_2) *on a :*

$$E\left[\int_0^T L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt + kx^*(T)^{-R}x^{1,\rho}(T)\right] \leq 0. \tag{$**$}$$

preuve.. *par cette condition*

$$J(u^\rho(.)) - J(u^*(.)) \leq 0,$$

on obtient

$$E\left\{\int_0^T \frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^\rho(t)^{1-R} - u^*(t)^{1-R}\right]dt + \frac{k}{1-R}\left[x^\rho(T)^{1-R} - x^*(T)^{1-R}\right]\right\} \leq 0 \tag{2.9}$$

nous manipulons d'abord le premièr terme de (2.9)*.notant*

$$A_t = \{(t,\omega) : u(t) \geq 0)\}$$

et 1_A *la fonction caractéristique de l'ensemble* A *que nous avons :*

$$E\int_0^T \frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^\rho(t)^{1-R} - u^*(t)^{1-R}\right]dt = I_1 + I_2 \tag{2.10}$$

où

$$I_1 = E\int_0^T 1_{A_t}\frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^\rho(t)^{1-R} - u^*(t)^{1-R}\right]dt,$$

$$I_2 = E\int_0^T 1_{A_t^c}\frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^\rho(t)^{1-R} - u^*(t)^{1-R}\right]dt,$$

par la formule de taylor,nous avons :

$$I_1 = \rho E\int_0^T 1_{A_t}L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt$$

$$+\rho E\int_0^T 1_{A_t}L\exp(-\beta t)\left[(u^*(t)+\theta\rho u(t))^{-R} - u^*(t)^{-R}\right]u(t)dt. \tag{2.11}$$

avec $\theta \in (0,1)$.*Puisque*

$$\lim_{\rho\to 0} 1_{A_t}L^2\exp(-2\beta t)\left[(u^*(t)+\theta\rho u(t))^{-R} - u^*(t)^{-R}\right]^2 = 0,$$

et

$$\left|1_{A_t}L^2\exp(-2\beta t)\left[(u^*(t)+\theta\rho u(t))^{-R} - u^*(t)^{-R}\right]^2\right| \le 4L^2u^*(t)^{-2R},$$

Il résulte du théorème de convergence de lebesgue que

$$\lim_{\rho\to 0} E\int_0^T 1_{A_t}L\exp(-\beta t)\left[(u^*(t)+\theta\rho u(t))^{-R} - u^*(t)^{-R}\right]u(t)dt = 0.$$

donc à partir de (2.11),*nous avons*

$$I_1 = \rho E\int_0^T 1_{A_t}L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt + 0(\rho). \tag{2.12}$$

pour I_2,*nous pouvons déduire que*

$$I_2 = E\int_0^T 1_{A_t^c}\frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)u^*(t)^{1-R}\left[(1+\rho\frac{u(t)}{u^*(t)})^{1-R} - 1\right]dt$$

$$= \rho E\int_0^T 1_{A_t^c}L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt + \rho^2 I(\rho) \tag{2.13}$$

avec

$$I(\rho) = E\int_0^T 1_{A_t^c}\frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)u^*(t)^{1-R}(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u(t)}{u^*(t)}\right)^2\rho^0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$$
$$\left(\frac{u(t)}{u^*(t)}\right)^3\rho + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u(t)}{u^*(t)}\right)^n\rho^{n-2})dt$$

et $\alpha = 1-R > 0$.*puisque :*

$$E\int_0^T |u^*(t)|^{1-R}\,dt \leq u\left[E\int_0^T |u^*(t)|^2\,dt\right]^{(1-R)/2} < +\infty,$$

$$E\int_0^T \left|u^1(t)\right|^{1-R}dt \leq u\left[E\int_0^T \left|u^1(t)\right|^2 dt\right]^{(1-R)/2} < +\infty,$$

et remaquant que

$$1_{A_t^c}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u(t)}{u^*(t)}\right)^n\rho^{n-2} \leq 0, \qquad n = 2, 3, ...,$$

nous avons cela pour les petits ρ,

$$0 \leq -I(\rho) \leq -I(1) = E\int_0^T 1_{A_t^c}L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt$$

$$+E\int_0^T 1_{A_t^c}\frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^*(t)^{1-R} - u^1(t)^{1-R}\right]dt < +\infty$$

ainsi ,il résulte de (2.13) *que*

$$I_2 = \rho E\int_0^T 1_{A_t^c}L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt + o(\rho) \tag{2.14}$$

intégrant (2.10), (2.12) *à* (2.14) *il s'ensuit que*

$$E\int_0^T \frac{L}{1-R}\exp(-\beta t)\left[u^\rho(t)^{1-R} - u^*(t)^{1-R}\right]dt = \rho E\int_0^T L\exp(-\beta t)u^*(t)^{-R}u(t)dt + o(\rho). \tag{2.15}$$

grâce à $(*)$ *de la même façon , nous pouvons manipuler le deuxième terme de* $(**)$ *dénoter*

$$A_\rho = \left\{x^* : x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T) \geq 0\right\}$$

ainsi

$$E\left\{I_{A_\rho}\frac{k}{1-R}\left[x^\rho(T)^{1-R} - x^*(T)^{1-R}\right]\right\} = \rho E\left\{I_{A_\rho} k x^*(T)^{-R}\left(x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)\right)\right\}$$

$$+\rho E\left\{I_{A_\rho} k\left[\left\{x^*(T) + \theta\rho\left(x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)\right)\right\}^{-R} - x^*(T)^{-R}\right]\left(x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)\right)\right\}$$

$$= \rho E\left\{I_{A_\rho} k x^*(T)^{-R} x^{1,\rho}(T)\right\} + 0\left(\rho\right). \tag{2.16}$$

$$E\left\{I_{A^c_\rho}\frac{k}{1-R}\left[x^\rho(T)^{1-R} - x^*(T)^{1-R}\right]\right\} = E\left\{I_{A^c_\rho}\frac{k}{1-R}x^*(T)^{1-R}\left[\left(1 + \rho\frac{x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)}{x^*(T)}\right)^{1-R} - 1\right]\right\}$$

$$= \rho E\left\{I_{A^c_\rho} k x^*(T)^{-R}\left(x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)\right) + \rho^2 I'(\rho)\right\} \tag{2.17}$$

avec

$$I'(\rho) = E(I_{A^c_\rho}\frac{k}{1-R}x^*(T)^{1-R}(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)}{x^*(T)}\right)^2\rho^0 +$$

$$... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^\rho(T)}{x^*(T)}\right)^n\rho^n + ...)).$$

puisque

$$0 \leq -I'(\rho) \leq -I'(1) = E\left\{I_{A^c_\rho}\left\{kx^*(T)^{-R}\left(x^{1,\rho}(T) + \tilde{x}^1(T)\right) + \frac{k}{1-R}x^*(T)^{1-R} - \frac{k}{1-R}x^1(T)^{1-R}\right\}\right\}$$

$$= E\left\{I_{A^c_\rho}\left\{kx^*(T)^{-R}\left(x^1(T) - x^*(T)\right) + \frac{k}{1-R}\left(x^*(T)^{1-R} - x^1(T)^{1-R}\right)\right\}\right\} < +\infty,$$

il découle de (2.17) *que :*

$$E\left\{I_{A^c_\rho}\frac{k}{1-R}\left[x^\rho(T)^{1-R} - x^*(T)^{1-R}\right]\right\} = \rho E\left\{I_{A^c_\rho} k x^*(T)^{-R} x^{1,\rho}(T)\right\} + 0(p). \tag{2.18}$$

Intégrant (2.16) *et* (2.18)*,on a :*

$$E\left[x^{\rho}(T)^{1-R}-x^{*}(T)^{1-R}\right]=\rho E\left\{kx^{*}(T)^{-R}x^{1,\rho}(T)\right\}+0(p). \tag{2.19}$$

par conséquent,(2.9) , (2.15) *et* (2.19) *donnent*

$$\rho E\left[\int_{0}^{T}L\exp(-\beta t)u^{*}(t)^{-R}u(t)dt+Kx^{*}(T)^{-R}x^{1,\rho}(T)\right]+0(\rho)\leq 0. \tag{2.20}$$

prenant $\rho\rightarrow 0$ *sur* (2.17)*, alors la relation* $(**)$ *est vérifié.* ■

2.4 Equation adjoint

Soit u_t^* un contrôle optimal et soit x_t^* la trajectoire optimal correspondant . ensuit , nous consédirons un couple (p_t^*,q_t^*) des processus adaptés de carrés intégrable associés à (x^*,u^*) l'équation adjoint est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire donner sous la forme :

$$\begin{cases} -dp^{*}(t)=\left[b_{x}(t,x^{*}(t),u^{*}(t))p^{*}(t)+\sigma_{x}(t,x^{*}(t),u^{*}(t))q^{*}(t)\right]dt-q^{*}(t)dB(t), \\ p^{*}(T)=Kx^{*}(T)^{-R}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Sous les deux hypothèse précédent $(H_1),(H_2)$ on sait qu'il existe un triple unique

$$(p^{*}(.),q^{*}(.),k^{*}(.,.))\in L_{\mathcal{F}}^{2}\left([0,T];\mathbb{R}\right)\times L_{\mathcal{F},p}^{2}\left([0,T];\mathbb{R}\right)\times L_{\mathcal{F},p}^{2}\left([0,T];\mathbb{R}\right)$$

qui satisfait (2.21) .

En appliquant la formule d'Itô à

$$<p^{*}(t),x^{1,\rho}(t)>,$$

on peut vérifier à partir de lemme précédent que

$$E\int_0^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(.), k^*(., .))u(t)dt \leq 0,$$

donc pour tout $\bar{u} \in U$,nous avons

$$< H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), k^*(t, .)), \bar{u}(t) - u^*(t) > \leq 0, \tag{2.22}$$

donc le principe du maximum est énoncé dans le theorème suivant

Théorème 2.1 *soit* $u^*(t)$ *un contrôle optimal pour le problème de contrôle optimal* (2.1) , (2.2) *et* $x^*(.)$ *la trajectoire optimal correspondante et* $p^*(t)$ *la solution de l'équation adjointe* (2.21) *,sous l'hypothèse* $(H_1), (H_2)$ *on a pour tout* $\bar{u} \in U$,

$$< H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(.), k^*(., .)), \bar{u}(t) - u^*(t) > \leq 0,$$

Conclusion

.................conclusion ....

Dans ce mémoire , nous nous intéressé aux problèmes de contrôles dans lesquels des systèmes sont gouvernés par des équations différentielles stochastique.

La première partie est basée sur le calcule stochastique , le calcul d'Itô et l'équation différentielle stochastique et l'éxistence et l'unicité de cette équation , et cette étude nous aide dans la deuxième partie.

Dans la deuxième partie , nous avons parlé sur le principe du maximums stochastique avec une fonction de coût non linéaire c-à-d ne pas vérifier la condition d'croissance linéaire.L'objectif principale de cette étude est de trouver des conditions nécessaires d'optimalité vériffées par un contrôle optimale minimisant le coût

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1982). Lectures on stochastic control. In Nonlinear filtering and stochastic control (pp. 1-62). Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] Jeanblanc, M. (2002). Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance.

[3] Briand, P. (2001).Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[5] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

[6] Xu, W. S. (1998). Maximum principle for a stochastic optimal control problem and application to portfolio/consumption choice. Journal of optimization theory and applications, 98(3), 719-731.

Annexe A : Logiciel *R*

Lemme 2.3 (lemme de Gronwall) *Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ,telle que pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)ds.$$

où a et b sont constant ,alors :

$$f(t) \leq a \exp(bt), 0 \leq t \leq T.$$

Développement de Taylor avec rèste intégrale

Théorème 2.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{m+1} on a :*

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Inégalité de Doob

Théorème 2.3 (Inégalité de Doob) *Si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale continue ,on a*

$$E\left[\sup_{t\leq T} |M_T|^2\right] \leq 4E(|M_t|^2).$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	Espace de probabilité filtré.
B_t	Mouvement Brownien.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$B(\mathbb{R}^d)$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
E	Espérance par rapport à la probabilité P.
sup	Sépérieur.
inf	Inférieur.
càdlàg	Continue à droite pourvu de limite à gauche.
càglàd	Continu àgauche pourvu de limite à droite.
exp	exponentiel.

EDS	Equation différentielle stochastique.
$< .,. >$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
U_{ad}	L'ensemble des corntrôles admissibles.
u	contrôle admissible.
u^*	contrôle optimal.
u^ρ	Contrôle perturbé.
$J(.)$	fonction de coût.
PMS	Principe du maximum stochastique.
$H(t,x,u,p,q)$	Hmiltonien.