République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Hamida Linda

Titre :

EDS de type régime switching

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Korichi Fatiha**	UMKB	Président
Dr.	**Tamer Lazhar**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Ghoul Abdelhak**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie cet humble travail à tous mes amies et ma famille .

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce modeste travail, je tenais à remercier tout d'abord Dieu de m'avoir offert tout ce que je possède.

Je tiens à remercier en particulier : Mon promoteur Docteur TAMER LAZHAR. Qui a pris tout le soin de m'orienter et de me faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribuer à l'élaboration de ce mémoire.

A touts les enseignants- du département MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation.

A toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de prés et de loin à la réalisation de ce travail par leurs d'encouragements.

Table des matières

Introduction

La stabilité des équations différentielles stochastiques à changement de régime a récemment reçu beaucoup d'attention. Par exemple [2] ,a étudié la stabilité d'une équation de saut :

$$dX(t) = A(r(t))X(t)dt.$$

où $r(t)$ est une chaine de Markov prenant des valeurs dans $S = \{1, 2, ..., N\}$. [6] a étudié la stabilité exponentielle pour les équations différentielles stochastiques non linéaires générales à changement de régime de la forme :

$$dX(t) = f(X(t), t, r(t))dt + g(X(t), t, r(t))dB(t).$$

La plupart de ces articles concernent la stabilité asymptotique en probabilité ou en moyenne quadratique (c'est-à-dire que la solution tend vers zéro en probabilité ou en moyenne quadratique). Cependant, cette stabilité asymptotique est parfois trop forte et dans ce cas il est utile de savoir si la solution converge (ou non) en distribution (pas nécessaire pour converger vers zéro). Cette propriété est appelée stabilité asymptotique en distribution. [9] a discuté d'une telle stabilité pour une équation différentielle stochastique semi-linéaire à changement de régime de la forme :

$$dX(t) = A(r(t))X(t)dt + \sigma(X(t), r(t))dB(t).$$

L'objectif de ce mémoire est d'établir la stabilité asymptotique de la distribution d'une équation différentielle stochastique non linéaire à changement de régime de la forme :

$$dX(t) = f(X(t), r(t))dt + g(X(t), r(t))dB(t).$$

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

- Dans un premier chapitre , on présente des rappels sur le calcul de probabilité (définitions, généralité sur l'espérence conditionelle, etc...) .

- Dans le deuxième chapitre on a présenté des généralité sur les chaines de Markov (définition d'une probabilité de transition, Q-matrice, etc...)

- Dans le troisième chapitre on se consacre à l'étude de la stabilité asymptotique en distribution de la solution de notre système puis on donne un critère suffisant pour la stabilité asymptotique.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul de probabilité

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit* Ω *un ensemble de points.* $\mathcal{B}$ *la classe non vide de sous-ensembles de* Ω *est appelé un* σ*-champ si* $\mathcal{B}$ *est fermé sous complémentation et union dénombrable. L'ensemble* $B \in \mathcal{B}$ *est dit mesurable.*

L'application $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ est appelé mesure de probabilité :

1. Si $P(\Omega) = 1$.
2. Si B_k est une séquence dénombrable d'ensemble disjoints dans $\mathcal{B}$, tel que $P(\cup B_k) = \sum P(B_k)$.

Le triple $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est appelé espace de probabilité. L'ensemble $B \in \mathcal{B}$ est parfois appelé un évènement.

Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction soit $\sigma(X) = \sigma(\{\omega | X(\omega) \leq x\}, x \in \mathbb{R})$. C'est le plus petit σ-champ contenant tous les sous-ensembles du formulaire $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$. Si X est $\mathcal{B}$-mesurable, c'est si $\sigma(X)$ est dans $\mathcal{B}$, alors on appelle X une variable aléatoire.

Pour $C \in \mathcal{B}$ nous définissons $I(C)$, la fonction indicative de C, comme suite :

$$I(C)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire est appelée simple s'il existe un nombre fini de nombres réels $x_1, ..., x_k$ tel que $\sum P(X = x_i) = 1$. Alors $B_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{B}$ et $X = \sum_{i=1}^{k} x_i I(B_i)$.

L'intégrale d'une variable aléatoire est définie comme :

$$\int XdP = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum x_i P(B_i).$$

Si X est une variable aléatoire non négative son intégrale est définie comme :

$$\int XdP = \lim_{k \to \infty} \int X_k dP$$

où $\{X_k\}$ est une suite de variables aléatoires simples converge ponctullement vers X. De plus, la limite de la suite d'intégrales est indépendante de la suite croissante de fonction. Si la limite ci-dessus est finie, X est dite intégrable. Si ses parties positives et négatives, $X^+ = XI(X \geq 0)$ et $X^- = -XI(X < 0)$ sont intégrables, X est dit intégrable et on définit :

$$\int XdP = \int X^+ dP - \int X^- dP$$

La valeure moyenne de X s'écrit $E(X)$, et par définition :

$$E(X) = \int_\Omega XdP = \int_\mathbb{R} xdF(x)$$

Ici $F(x) = P(X \leq x)$ est la foncion de distribution cumulative de X. Pour une variable aléatoire X simple, alors :

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Pour $C \in \mathcal{B}$, nous écrivons :

$$\int_C X dP = \int I(C) X dP.$$

Mode de convergence

1.Une suite de variables aléatoires $\{X_k\}$ est dite converge presque certainement (P.c) si :

$$P[\lim_{k \to \infty} X_k(\omega) \text{ existe et fini}] = 1.$$

2.La suite $\{X_k\}$ converge vers X dans L_1 si $E[|X_k - X|] \to 0$ quand $k \to \infty$.

3.La suite $\{X_k\}$ converge vers X en probabilité si pour chacun $\varepsilon > 0$ la séquence :

$$P[|X_k - X| > \varepsilon] \to 0 \text{ quand } k \to \infty$$

Théorème 1.1.1 *(Radon-Nikodym) Si P et $\bar{P}$ sont deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ de telle sorte que pour chaque $B \in \mathcal{B}$, $P(B) = 0$ implique $\bar{P}(B) = 0$, alors il existe une variable aléatoire non négative Λ tel que $\bar{P}(C) = \int_C \Lambda dP$ pour tout $C \in \mathcal{B}$. Nous écrivons $d\bar{P}/dP|_{\mathcal{B}} = \Lambda$.*

Pour une preuve voir Wong et Hajek (1985). La valeure Λ est la densité de $\bar{P}$ par rapport à P. Lorsque Ω est l'espace d'échantillon fini ou discret $\Lambda(\omega) = \bar{P}/P$.

Si A, B sont deux évènement, alors nous définissons la probabilité de A conditionnée par B comme :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

à condition de $P(B) > 0$. Autrement dit $P(A/B)$ n'est pas toujours défini.

1.2 Espérance conditionnelle et quelques propriétés

Soit $X \in L_1$ et $\mathcal{A}$ est un sous-σ-champ de $\mathcal{B}$. Si X est non négative et intégrable on peut utiliser le théorème de Radon-Nikodym pour déduire l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable notée par $E(X|\mathcal{A})$, qui est déterminée de façon unique, sauf sur un évènement de probabilité nulle, de telle sorte que :

$$\int_A XdP = \int_A E[X|\mathcal{A}]dP \tag{1.1}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$. Pour une variable aléatoire intégrable X nous définissons $E[X|A]$ comme $E[X^+|\mathcal{A}] - E[X^-|\mathcal{A}]$. $E(X|\mathcal{A})$ est appelé l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{A}$. Si A est un évènement, alors nous écrivons $P(A|\mathcal{A}) = E(I(A)|\mathcal{A})$.

Ce qui suit est une liste de résultats classiques.

1) Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux sous-σ-champ de $\mathcal{B}$ telque $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, on a :

$$E(E(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = E(E(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = E(X|\mathcal{A}_1) \tag{1.2}$$

2) Si X,$Y, XY \in L_1$, et Y est $\mathcal{A}$-mesurable, on a :

$$E(XY|\mathcal{A}) = YE(X|\mathcal{A}) \tag{1.3}$$

3) Si X et Y sont indépendant, on a :

$$E(X|\sigma(Y)) = E(X) \tag{1.4}$$

1.3 Formule d'Itô

Pour deux semimartingale X_t et Y_t, la règle de produit d'Itô donne le produit :

$$X_tY_t = \int_0^t X_{s^-}dY_s + \int_0^t Y_{s^-}dX_s + [X,Y]_t.$$

où :

$$[X,Y]_t = \lim_{n\to\infty} (en\ prob) \left\{ X_0Y_0 + \sum_{0\leq k\leq 2^n} \left[\left(X_{t(k+1)2^{-n}} - X_{tk2^{-n}}\right) \times \left(Y_{t(k+1)2^{-n}} - Y_{tk2^{-n}}\right) \right] \right\}$$

est la variation quadratique de X et Y.

Si le processus $[X,Y]_t$ est a un compensateur, cela est indiqué par $\langle X,Y\rangle_t$, et appelé la variation quadratique prévisible de X et Y. Si la partie martingale de la semimartingale est discontinue, alors :

$$[X,Y]_t = X_0Y_0 + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

Théorème 1.3.1 *(La règle d'Ito) Soit f une fonction deux fois continument différentiable sur $\mathbb{R}$ et X est une semimartingale réele. Alors $f(X_t)$ est aussi une semimartingale et :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s^-})dX_s + \sum_{0<s\leq t} (f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[X,X]_s^c.$$

Théorème 1.3.2 *(L'inégalité de Gronwall) Supposons que la fonction continue $g(t)$ satisfait :*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

avec $\beta \geq 0$ et $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors :

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) \exp(\beta(t-s)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 1.3.3 *(L'intégalité de Jensen) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et soit X une variable aléatoire intégrable telle que $\phi(X)$ est intégrable. Alors pour espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $\mathcal{A}$ est un sous-champ de $\mathcal{B}$, alors*

$$\phi(E[X|\mathcal{A}]) \leq E[\phi(X)|\mathcal{A}].$$

Théorème 1.3.4 *(Fubini) Soit $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, P_2)$ sont deux espaces de probabilité complét et soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$. Alors pour $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$,*

$$\int_{A_1 \times A_2} f d(P_1 \times P_2) = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f dP_2 \right) dP_1 = \int_{A_2} \left(\int_{A_1} f dP_1 \right) dP_2.$$

1.4 Représentation martingale à temps continu :

On Considère un processus de Markov $\{X_t\}$, $t \geq 0$, défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P), dont l'espace d'état est l'ensemble :

$$S = \{e_1, ..., e_N\}.$$

Pour tout $0 \leq i \leq N$ on écrit $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)'$ un vecteur d'unité (colonne) de $\mathbb{R}^N$

Ecrivons $p_t^i = P(X_t = e_i), 0 \leq i \leq N$. Nous supposons que pour une famille de matrice $A_t, p_t = \left(p_t^1, ..., p_t^N\right)'$ satisfait l'équation de Kolmogorov :

$$\frac{dP_t}{dt} = A_t p_t \tag{1.5}$$

$A_t = (a_{ij}(t)), t \geq 0$, est dite Q-matrice de processus alors :

$$a_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ji}(t). \tag{1.6}$$

La matrice de transition associée à A sera notée $\Phi(t, s)$, alors avec I la matrice d'identité

$N \times N$:

$$\frac{d\Phi(t,s)}{dt} = A_t \Phi(t,s), \quad \Phi(s,s) = I. \tag{1.7}$$

$$\frac{d\Phi(t,s)}{ds} = -\Phi(t,s) A_s, \quad \Phi(t,t) = I. \tag{1.8}$$

[Si A_t est constante $\Phi(t,s) = \exp(t-s)A$].

Considérons le processus dans l'état $x \in S$ au temps s et écrire $X_{s,t}(x)$ pour son état plus tard $t \geq s$. Alors $E[X_{s,t}(x)] = E_{s,x}[X_t] = \Phi(t;s)x$. Ecrire $\mathcal{F}_t^s$ pour la filtration complète droite continue générée par $\sigma\{X_r : s \leq r \leq t\}$, et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0$.

Lemme 1.4.1 *$V_t := X_t - X_0 - \int_0^t A_r X_{r^-} dr$ est un $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale.*

Preuve. Suppose $0 \leq s \leq t$. Alors :

$$\begin{aligned} E[V_t - V_s | \mathcal{F}_s] &= E\left[X_t - X_s - \int_s^t A_r X_{r^-} dr | Fs\right] \\ &= E\left[X_t - X_s \int_s^t A_r X_{r^-} dr | X_s\right] \\ &= E\left[X_t - X_s - \int_s^t A_r X_r dr | X_s\right]. \end{aligned}$$

■

Car $X_r = X_{r^-} = \lim\limits_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} X_{r-\varepsilon}$ pour chacun $\omega \in \Omega$, sauf pour beaucoup de r c'est :

$$\begin{aligned} &= E[X_t | X_s] - X_s - \int_s^t A_r E[X_r | X_s] dr \\ &= \Phi(t,s) X_s - X_s - \int_s^t A_r \Phi(r,s) X_s dr = 0 \end{aligned}$$

par (1.7). Donc :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t A_r X_r dr + V_t \\ &= X_0 + \int_0^t A_r X_{r^-} dr + V_t. \end{aligned} \tag{1.9}$$

On donne maintenent un résultat de représentation de martingale.

Lemme 1.4.2

$$X_t = \Phi(t,0)\left(X_0 + \int_0^t \Phi(r,0)^{-1} dV_r\right). \tag{1.10}$$

Preuve. La preuve résulte de (1.9) par variation de constants. Alternativement, défférenciez (1.10). ■

Si x, y sont des vecteurs (colonnes) de $\mathbb{R}^N$ nous écrivons $\langle x, y\rangle = x'y$ pour le produit scalaire . On considère deux indices $0 \leq i, j \leq N$ avec $i \neq j$. Alors :

$$\begin{aligned}\langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' dX_s &= \langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' \Delta X_s \\ &= \langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' (X_s - X_{s^-}) \\ &= I(X_{s^-} = e_i, X_s = e_j).\end{aligned}$$

On défini la martingale :

$$V_t^{ij} := \int_0^t \langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' dV_s.$$

Alors :

$$V_t^{ij} = \int_0^t \langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' dX_s - \int_0^t \langle X_{s^-}, e_i\rangle e_j' A_s X_{s^-} ds.$$

et écrivons $\mathcal{J}_t^{ij}$ pour le nombre de sauts du processus X de e_i à e_j jusqu'au temps t, c'est :

$$\begin{aligned}&= \mathcal{J}_t^{ij} - \textstyle\int_0^t \langle X_{s^-}, e_i\rangle a_{ji}(s) ds \\ &= \mathcal{J}_t^{ij} - \textstyle\int_0^t \langle X_s, e_i\rangle a_{ji}(s) ds\end{aligned}$$

car $X_s = X_{s^-}$ pour chacun ω, sauf pour un nombre considérable de s. C'est -à-dire, pour $i \neq j$,

$$\mathcal{J}_t^{ij} = \int_0^t \langle X_s, e_i\rangle a_{ji}(s) ds + V_t^{ij}.$$

Pour fixe $j, 0 \leq i \leq N$, écrire $\mathcal{J}_t^j$ pour le nombre de sauts de l'état e_j, à l'instant t. Alors :

$$\mathcal{J}_t^j = \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_t^{ij} = \sum_{i=1}^N \int_0^t \langle X_s, e_i\rangle a_{ji}(s) ds + V_t^j.$$

où V_t^j est la martingale $\sum\limits_{i=1}^{N} V_t^{ij}$. Enfin, écrire $\mathcal{J}_t$ pour le nombre total de sauts (de toutes sortes) du processus X jusqu'au temps t. Alors :

$$\mathcal{J}_t = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{J}_t^j = \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t \langle X_s, e_i \rangle \, a_{ji}(s) ds + Q_t.$$

où Q_t est la martingale $\sum\limits_{j=1}^{N} V_t^j$. Cependant de (1.6).

$$a_{ii}(s) = -\sum_{j=1}^{N} a_{ji}(s).$$

Alors :

$$\mathcal{J}_t = -\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \langle X_s, e_i \rangle \, a_{ii}(s) ds + Q_t. \tag{1.11}$$

Lemme 1.4.3

$$\langle V, V \rangle_t = diag \int_0^t A_r X_{r^-} dr - \int_0^t (diag X_{r^-}) A_r' dr - \int_0^t A_r (diag X_{r^-}) dr.$$

Preuve. Rappel de preuve $X_t \in S$ est l'un des vecteurs unitaires e_i. Donc :

$$X_t X_t' = diag X_t. \tag{1.12}$$

■

Maintenant par la règle du produit :

$$\begin{aligned} X_t X_t' = \quad & X_0 X_0' + \textstyle\int_0^t X_{r^-} (A_r X_{r^-})' dr \\ & + \textstyle\int_0^t X_{r^-} dV_r' + \int_0^t (A_r X_{r^-}) X_{r^-}' dr \\ & + \textstyle\int_0^t dV_r X_{r^-}' + \langle V, V \rangle_t + ([V, V]_t - \langle V, V \rangle_t). \end{aligned}$$

où $[V,V]_t - \langle V,V\rangle_t$ est un $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale. Cependant, un calcul simple montre :

$$X_{r^-}(A_r X_{r^-})' = (diag X_{r^-})A_r'.$$

et :

$$(A_r X_{r^-})X_{r^-}' = A_r(diag X_{r^-})'$$

Donc :

$$\begin{aligned} X_t X_t' = & \quad X_0 X_0' + \int_0^t (diag X_{r^-})A_r' dr \\ & + \int_0^t A_r(diag X_{r^-})dr + \langle V,V\rangle_t + martingale. \end{aligned} \tag{1.13}$$

et de (1.12) :

$$X_t X_t' = diag X_t = diag X_0 + diag \int_0^t A_r X_{r^-}\,dr + diag V_t. \tag{1.14}$$

Les décompositions semimartingales (1.13) et (1.14) doit ètre la mème, donc égaliser les termes prévisibles :

$$\langle V,V\rangle_t = diag \int_0^t A_r X_{r^-} dr - \int_0^t (diag X_{r^-})A_r' dr - \int_0^t A_r(diag X_{r^-})dr.$$

On donne maitenant le résultat de représentation suivant.

Remarque 1.4.1 *Une fonction de $X_t \in S$ peut ètre représenté par un vecteur :*

$$f(t) = (f_1(t), ..., f_N(t))' \in \mathbb{R}^N$$

pour $f(t,X_t) = f(t)'X_t = \langle f(t), X_t\rangle$ où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$.

Nous avons donc la règle de différenciation et le résultat de représentation suivant :

Lemme 1.4.4 *Supposons que les composants de $f(t)$ sont différenciables en t. Alors :*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) \;\; &= f(0,X_0) + \int_0^t \langle f'(r), X_r\rangle\, dr + \int_0^t \langle f(r), A_r X_{r^-}\rangle\, dr \\ & + \int_0^t \langle f(r), dV_r\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ici, $\int_0^t \langle f(r), dV_r \rangle$ est un $\mathcal{F}_t$-martigale. Aussi :

$$f(t, X_t) = \langle f(t), \Phi(t,0)X_0 \rangle + \int_0^t \langle f(t), \Phi(t,r)dV_r \rangle \,. \tag{1.16}$$

Cela donne la représentation martingale de $f(t, X_t)$.

Chapitre 2

Chaine de Markov à temps continu (CMTC)

2.1 Probabilité de transition

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ une famille de variables aléatoires discrètes prenant des valeurs dans un ensemble Ω et qui évolue dans le temps comme suit :

1. Si l'état actuel est i, le temps jusqu'à ce que l'état soit changé a une distribution exponentielle avec paramètre q_i.
2. Lorsque l'état i est parti, un nouvel état $j \neq i$ est choisi en fonction des probabilités de transition d'une chaine de Markov à temps discrèt.

Alors $\{X(t), t \geq 0\}$ est appelé une chaine de Markov à temps continu (CMTC). Ainsi, le (CMTC) $\{X(t), t \geq 0\}$ est composé d'une chaine de Markov à temps discrèt $\{X(t), t \geq 0\}$, la chaine de saut, pour les transitions et les variables aléatoires exponentielles pour les temps d'attente. Les q_i sont appelés les paramètres de temps d'attente.

La CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ a la propriété de Markov à chaque instant, i.e, pour $s, t \geq 0$, et $i, j \in \Omega$:

$$\Pr\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(t+u) : 0 \leq u \leq s\} = \Pr\{X(t+s) = j | X(s) = i\}.$$

En plus, $\Pr\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$ est indépendant de t, alors la chaine de Markov à temps continu aurait des probabilités de transition stationnaires non homogènes. Nous pouvons définir les probabilités de transition comme :

$$p_{ij}(t) = \Pr\{X(t+s)=j|X(s)=i\}.$$

La probabilité qu'une chaine de Markov, commençant de l'état i, soit dans l'état j après un temps supplémentaire t de $p_{ij}(t)$. Alors :

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j\in\Omega}, t \geq 0.$$

est la matrice de probabilité de transition du CMTC.

2.2 $Q-$Matrice

Soit p_{ij} la probabilités de transition d'une chaine de Markov $(i \neq j)$ et considérons la chaine a l' état i. Le temps d'attente est de loi exponontielle de paramètre $\exp(q_i)$ et lorsqu'il part, la chaine de saut à l'état j avec une probabilité p_{ij}. Maintenant, si nous considérons la chaine uniquement lorsqu'elle est a l'état i et que nous ignorons tout le reste, nous pouvons voir les sauts de i comme processus de Poissons de paramètre q_i. Pour tout autre état les sauts de i à j sont alors des processus de Poisson de paramètre q_ip_{ij}. Ainsi, pour toute paire d'états i et j nous pouvons déifnir le taux de transition entre i et j comme :

$$q_{ij} = q_ip_{ij},$$

de plus , on obtient aussi

$$q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij} = -q_i, i \in \Omega.$$

et $Q = [q_{ij}]_{i,j\in\Omega}$ est la $Q-$Matrice ou le générateur infinitésimal ou simplement la matrice du générateur de la CMTC. Une propriété importante de la matrice du générateur est que ses sommes de lignes sont nulles, i.e :

$$\sum_{j\in\Omega} q_{ij} = 0, i \in \Omega.$$

Puisque le générateur décrit complètement la chaine de Markov, si nous avons Q. Nous pouvons récupérer les paramètres de temps d'attente comme :

$$q_i = -q_{ii}, i \in \Omega.$$

et les probabilité de saut comme :

$$p_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, j \neq i.$$

Notez que $p_{ii} = 0, \forall i \in \Omega$, puisque les p_{ij} donnent la distribution de probabilité lorsque la chaine quitte un état et qu'il ne peut y avoir de sauts d'un état à son autre.

2.3 Equations de chapman-Kolmogorov

Soit $P(t)$ la matrice de transition d'une chaine de Markov à temps continu avec espace d'état Ω. On a :

1. $p_{ij}(t) > 0, i, j \in \Omega, t \geq 0.$
2. $\sum_{j\in\Omega} p_{ij}(t) = 1, \forall i \in \Omega, t \geq 0.$
3. $p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in\Omega} p_{ik}(s)p_{kj}(t).$

Considérons un élément $p_{ij}(s+t)$ de $P(s+t)$ et condition sur un état intermédiaire k à l'instant s pour obtenir :

$$\begin{aligned} P_{ij}(s+t) &= \sum_{k\in\Omega} \Pr\left\{X(s+t)=j|X(s)=k\right\} \Pr\left\{X(s)=k|x(0)=i\right\} \\ &= \sum_{k\in\Omega} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \end{aligned}$$

qui est le $(i,j)ème$ entrée dans la matrice $P(s)P(t)$. Par conséquent :

$$P(t) = P(s)P(t), s, t \in \Omega.$$

Equations de Kolmogorov progressive, rétrograde

Le générateur Q satisfait l'équations rétrograde :

$$P'(t) = QP(t).$$

Lemme 2.3.1

$$\begin{aligned} \textit{1) } \lim_{h\to 0}\tfrac{1-q_{ii}(h)}{h} &= q_i. \\ \textit{2) } \lim_{h\to 0}\tfrac{1-q_{ik}(h)}{h} &= q_{ik}. \end{aligned}$$

Soit

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & si\ i \neq j \\ q_i & si\ i = j \end{cases},$$

alors les equations de Kolmogorov progressive, rétrograde peuvent être écrites comme :

$$p'_{ij}(t) = \sum_k r_{ik}p_{kj}(t) \quad et \quad p'_{ij}(t) = \sum_k r_{kj}p_{ik}(t).$$

Si on définit la matrice $R = [r_{ij}]$, alors les équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$P'(t) = RP(t) \quad et \quad P'(t) = P(t)R.$$

Cela indique une solution :

$$P(t) = e^{Rt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Rt)^k}{k!}.$$

où R^0 est la matrice d'identité I.

Chapitre 3

Propiété de stabilité d'une EDS

3.1 Equations différentielles stochastiques à changement de régime

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité complet de filtration $\mathcal{F}_t$ satisfaisant les conditions usuelle (i.e. $\mathcal{F}_t$ continue à droite et $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles p-nuls). Soit $B(t) = (B_t^1, ..., B_t^m)^T$ un mouvement Brawnien à m-dimensions défini sur cet espace de probabilité, $|.|$ désigne la norme euclidienne pour les vecteurs ou la norme de trace d'une matrice.

Soit $r(t), t \geq 0$, une chaine de Markov continue à droite sur l'espace de probabilité prenant des valeurs dans un espace d'états fini $S = \{1, 2, ..., N\}$ avec le générateur $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ donné par :

$$P\left\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\right\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & si\ i \neq j \\ 1 + \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & si\ i = j \end{cases}$$

où $\Delta > 0$. Ici $\gamma_{ij} > 0$ est le aux de transition de i à j tandis que :

$$\gamma_{ii} = -\sum_{i \neq j} \gamma_{ij}.$$

On suppose que la chaine de Markov $r(.)$ est indépendante du mouvement Brawnien $B(.)$.

On considère une équation différentielle stochastique a changement de régime de la forme :

$$\begin{cases} dX(t) & = f(X(t), r(t))dt + g(X(t), r(t))dB(t). \\ X(0) & = x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \geq 0 \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

$$f : \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^n \quad et \quad g : \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^{n \times m}$$

vérifions les hypothèse suivantes :

1 f et g sont localement Lipschitz , c'est-à-dire que pour chaque $k = 1, 2, ...,$ il existe un $h_k > 0$ tel que :

$$|f(x,i) - f(y,i)| + |g(x,i) - g(y,i)| \leq h_k \, |x - y| \, , \text{ pour tout } i \in S, x, y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |x| \curlyvee |y| \leq k$$

2 f et g satisfont la condition de croissance linéaire c'est-à-dire ile exsite $h > 0$ tel que

$$|f(x,i)| + |g(x,i)| \leq h \left(|x| + 1 \right), \text{ pour tout } i \in S, x \in \mathbb{R}^n,$$

sous les hypothèse $(1 - 2)$, eq (3.1) admet une solution unique et continue , voir [6].

Soit $C^2(\mathbb{R}^n \times S, \mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions non négatives $V(x,i)$ sur $\mathbb{R}^n \times S$ qui sont continues et deux fois différentiables en x. Soit $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times S, \mathbb{R}^+)$, on défini un opérateur LV de $\mathbb{R}^n \times S$ à $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} LV(x,i) = & \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} V(x,j) + V_x(x,i) f(x,i) \\ & + \tfrac{1}{2} trace \left[g^T(x,i) V_{xx}(x,i) g(x,i) \right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

où :

$$V_x(x,i) = \left(\frac{\partial V(x,i)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V(x,i)}{\partial x_n} \right), \quad V_x(x,i) = \left(\frac{\partial^2 V(x,i)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}.$$

Lemme 3.1.1 *Soit $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$ et τ_1, τ_2 deux temps d'arrèt bornés tels que $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ a.s. Si $V(X(t), r(t))$ et $LV(X(t), r(t))$ sont bornés pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$ de probabilité*

1, *alors :*

$$EV(X(\tau_2), r(\tau_2)) = EV(X(\tau_1), r(\tau_1)) + E\int_{\tau_1}^{\tau_2} LV(X(s), r(s))ds. \tag{3.3}$$

Preuve. Voir [6] . ■

Soit $y(t)$= $(X(t), r(t))$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times S$. Alors $y(t)$ est un processus de Markov homogène . Soit $p(t, x, i, dy \times \{j\})$ la probabilité de transition du processus $y(t)$. Soit $P(t, x, i, A \times B)$ la probabilité de l'évènement $\{y(t) \in A \times B\}$ sachant la condition initiale $y(0) = (x, i)$,i.e :

$$P(t, x, i, A \times B) = \sum_{j \in B} \int_A p(t, x, i, dy \times \{j\}).$$

Définition 3.1.1 *Le processus $y(t)$ est dit asymptotiquement stable en distribution s'il existe une mesure de probabilité $\pi(.,.)$ sur $\mathbb{R}^n \times S$ telle que la probabilité de transition $p(t, x, i, dy \times \{j\})$ de $y(t)$ converge faiblement vers $\pi(dy \times \{j\})$ lorsque $t \to \infty$ pour tous $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$. Eq.(3.1) est dit asymptotiquement stable en distribution si $y(t)$ est asymptotiquement stable en distribution.*

3.2 Stabilité asymptotique en distribution :

Dans cette section on donne quelques conditions suffisants pour la stabilité asymptotique en distribution du processus $y(t) = (X(t), r(t))$ de l'eq.(3.1). Soit $r_i(t)$ la chaine de Markov partant de l'état $i \in S$ à $t = 0$ et notons par $X^{x,i}(t)$ la solution de l'eq.(3.1) aux conditions initiales $X(0) = x \in \mathbb{R}^n$ et $r(0) = i$.

Définition 3.2.1 *On dit que l'équation (3.1) a la propriété (P1) si pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$ telle que :*

$$P\{|X^{x,i}(t)| \geq R\} < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

Définition 3.2.2 *On dit que l'équation (3.1) a la propriété (P2) si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout* *sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe un $T = T(\varepsilon, K) > 0$ tel que :*

$$P\left\{\left|X^{x,i}(t) - X^{y,i}(t)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \geq T \text{ et } (x, y, i) \in K \times K \times S. \tag{3.5}$$

On observe que la propriété $(P1)$ garantit que pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$, la famille des probabilités de transition $\{p\,(t, x, i, dy \times \{j\}) : t \geq 0\}$ est tendu, c'est a dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble compact $K = K\,(\varepsilon, x, i)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$P\,(t, x, i, K \times S) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.6}$$

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(1-2)$. *Si l'Eq.*(3.1) *a les propriété* $(P1)$ *et* $(P2)$, *alors l'Eq.*(3.1) *est asymptotiquement stable en distribution.*

Pour la preuve de ce théorème, nous allons brièvement introduise plus de notation. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$ les mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times S$. Soit $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$, on défini la distance $d_{\mathcal{L}}$ comme suit :

$$d_{\mathcal{L}}(P_1, P_2) = \sup_{f \in L}\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n} f(x, i) P_1(dx, i) - \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n} f(x, i) P_2(dx, i)\right|. \tag{3.7}$$

et :

$$\mathrm{L} = \{f : \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R} : |f(x, i) - f(y, j)| \leq |x - y| + |i - j| \text{ et } |f(.,.)| \leq 1\} \tag{3.8}$$

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(1-2)$ *, pour tout $p > 0$ et tout sous-ensmble compact K de $\mathbb{R}^n$:*

$$\sup_{(x,i) \in K \times S} E \sup_{0 \leq s \leq t} \left|X^{x,i}(s)\right|^p < \infty, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.9}$$

Lemme 3.2.2 *Sous les hypothèses* $(1-2)$ *et si l'eq.*(3.1) *à la propriété*$(P2)$. *Alors, pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$:*

$$\lim_{t \to \infty} d_{\mathcal{L}}(p(t, x, i, . \times .), p(t, y, i, . \times .)) = 0. \tag{3.10}$$

uniformément en $x, y \in K$ et $i, j \in S$.

Preuve. Pour toute paire $i, j \in S$, définissons le temps d'arrèt :

$$\beta_{ij} = \inf \{t \geq 0 : r_i(t) = r_j(t)\}. \tag{3.11}$$

■

Rappelons que $r_i(t)$ est la chaine de Markov partant de l'état $i \in S$ à $t = 0$ et en raison de l'ergodicité de la chaine de Markov, $\beta_{ij} < \infty$ a.s . Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif T tel que :

$$P\left\{\beta_{ij} \leq T\right\} > 1 - \tfrac{\varepsilon}{8}, \quad \forall i, j \in S. \tag{3.12}$$

Pour un tel T, d'après le lemme(3.1.1) , il existe un $R > 0$ suffisamment grand pour :

$$P(\Omega_{x,i}) > 1 - \tfrac{\varepsilon}{16}, \quad \forall (x, i) \in K \times S.$$

où $\Omega_{x,i} = \{|X^{x,i}(t)| \leq R, \forall t \in [0, T]\}$.

Maintenant, pour tout $x, y \in K$ et $i, j \in S$. Soit I_G la fonction indicatrice de l'ensemble G et soit $\Omega_1 = \Omega_{x,i} \cap \Omega_{y,j}$. Pour tout $f \in$Ł et $t \geq T$, alors :

$$\begin{aligned}
&|Ef(X^{x,i}(t), r_i(t)) - Ef(X^{y,j}(t), r_j(t))| \\
&\leq 2P\left\{\beta_{ij} > T\right\} + E\left(I_{\left\{\beta_{ij} \leq T\right\}}|f(X^{x,i}(t), r_i(t)) - f(X^{y,j}(t), r_j(t))|\right) \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{4} + E\left[I_{\left\{\beta_{ij} \leq T\right\}} E(|f(X^{x,i}(t), r_i(t)) - f(X^{y,j}(t), r_j(t))||\mathcal{F}_{\beta_{ij}})\right] \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{4} + E[I_{\left\{\beta_{ij} \leq T\right\}} E|f(X^{u,k}(t - \beta_{ij}), r_k(t - \beta_{ij})) - f(X^{v,k}(t - \beta_{ij}), r_k(t - \beta_{ij}))|] \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{4} + E[I_{\left\{\beta_{ij} \leq T\right\}} E(2 \wedge |X^{u,k}(t - \beta_{ij}) - X^{v,k}(t - \beta_{ij}))|] \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{4} + 2P(\Omega - \Omega_1) + E[I_{\Omega_1 \cap \left\{\beta_{ij} \leq T\right\}} E(2 \wedge X^{u,k}(t - \beta_{ij}) - X^{v,k}(t - \beta_{ij})|)].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où $u = X^{x,i}(\beta_{ij}), v = X^{y,j}(\beta_{ij})$ et $K = r_i(\beta_{ij}) = r_j(\beta_{ij})$. Notons que, étant donné $\omega \in \Omega_1 \cap \left\{\beta_{ij} \leq T\right\}, |u| \vee |v| \leq R$. Donc, par la propriété $(P2)$, il existe une constante T_1 telle que :

$$E\left(2 \wedge \left|X^{u,k}(t-\beta_{ij}) - X^{v,k}(t-\beta_{ij})\right|\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \geq T + T_1. \tag{3.14}$$

Il résulte donc de $(3.13)-(3.14)$ que :

$$|Ef(X^{x,i}(t), r_i(t)) - Ef(X^{y,j}(t), r_j(t))| \leq \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \geq T + T_1.$$

dès que :

$$d_{\mathcal{L}}(p(t,x,i,.\times.), p(t,y,j,.\times.)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T + T_1.$$

pour tous $x, y \in K$ et $i, j \in S$. La preuve est complète.

Lemme 3.2.3 *Sous les hypothèses* $(1-2)$. *Si l'eq.*(3.1) *à les propriétés* $(P1)$ *et* $(P2)$*, alors pour tout* $(x,i) \in \mathbb{R}^n \times S$,$\{p(t,x,i,.\times.) : t \geq 0\}$ *est de Cauchy dans l'espace* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$ *de métrique* $d_{\mathcal{L}}$.

Preuve. Pour tout $(x,i) \in \mathbb{R}^n \times S$. Nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $T > 0$ tel que :

$$d_{\mathrm{L}}(p(t+s,x,i,.\times.), p(t,x,i,.\times.)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T, \quad s > 0.$$

■

C'est équivalent à :

$$\sup_{f \in \mathrm{L}} |Ef(X^{x,i}(t+s), r_i(t+s)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T, \quad s > 0. \tag{3.15}$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}$ et $t, s > 0$:

$$\begin{aligned}
&|Ef(X^{x,i}(t+s), r_i(t+s)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| \\
&= |E[E(f(X^{x,i}(t+s), r_i(t+s))|\mathcal{F}_s)] - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| \\
&= |\sum_{l=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} Ef(X^{z,l}(t), r_l(t)) p(s, x, i, dz \times \{l\}) - Ef(X^{y,j}(t), r_i(t))| \\
&\leq \sum_{l=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} |Ef(X^{z,l}(t), r_l(t)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| p(s, x, i, dz \times \{l\}) \\
&\leq 2P(s, x, i, \bar{B}_R \times S) + \sum_{l=1}^{N} \int_{B_R} |Ef(X^{z,l}(t), r_l(t)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| p(s, x, i, dz \times \{l\}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ et $\bar{B}_R = \mathbb{R}^n - B_R$. Par la propriété $(P1)$ (ou (3.5)), il existe un nombre positive R suffisamment grand pour que :

$$P(s, x, i, \bar{B}_R \times S) < \tfrac{\varepsilon}{4}, \quad \forall s \geq 0. \tag{3.17}$$

Par contre, d'après le lemme (3.2.1), il existe un $T > 0$ tel que :

$$\sup_{f \in \mathcal{L}} |Ef(X^{z,l}(t), r_l(t)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \geq T. \tag{3.18}$$

pour tout $(z, l) \in B_R \times S$. Remplacement (3.17) et (3.18) dans (3.16) on obtient :

$$|Ef(X^{x,i}(t+s), r_i(t+s)) - Ef(X^{x,i}(t), r_i(t))| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T, \quad s > 0.$$

Puisque f est arbitraire, l'inégalité (3.15) est vérifiée.

On donne maintenant la preuve du théorème (3.2.1) .

Preuve. (de théorème (3.2.1)) Par définition, nous devons montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\pi(. \times .) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$ telle que pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$, les probabilités de transition $\{p(t, x, i, . \times .) : t \geq 0\}$ convergent faiblement vers $\pi(. \times .)$. En rappelant le fait bien connu que la convergence faible des mesures de probabilité est un concept métrique nous devons donc montrer que pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$:

$$\lim_{t\to\infty} d_{\mathrm{L}}(p(t, x, i, . \times .), \pi(. \times .)) = 0. \tag{3.19}$$

■

Par le lemme (3.2.2), $\{p(t, x, i, . \times .) : t \geq 0\}$ est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$ avec la métrique d_{L}. Il exsite donc un $\pi(. \times .) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times S)$ unique tel que :

$$\lim_{t\to\infty} d_{\mathcal{L}}(p(t, 0, 1, . \times .), \pi(. \times .)) = 0.$$

Maintenant, pour tout $(x, i) \in \mathbb{R}^n \times S$, par le lemme (3.2.1) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} d_{\mathcal{L}}(p(t, x, i, . \times .), \pi(. \times .)) \\
&\leq \lim_{t\to\infty} [d_{\mathrm{L}}(p(t, 0, 1, . \times .), \pi(. \times .)) + d_{\mathrm{L}}(p(t, x, i, . \times .), p(t, 0, 1, . \times .))] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'ou le résultat.

3.3 Conditions suffisantes pour les propriétés $(P1)$ et $(P2)$:

Le théorème (3.2.1) dépent des propriétés $(P1)$ et $(P2)$. Il est donc nécessaire d'établir des conditions suffisants pour ces propriétés pour que le théorème (3.2.1) soit applicable. D'autre part, la propriété $(P1)$ concerne la propriété de tandu et la propriété $(P2)$ est associée à la stabilité asymptotique uniforméme.

Soit $\mathcal{K}$ la famille des fonctions non décroissantes $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que $\mu(0) = 0$ tandis que $\mathcal{K}_\infty$ désigne la famille des fonctions $\mu \in \mathcal{K}$ telles que $\mu(u) \to \infty$ comme $u \to \infty$.

Le lemme suivant donne un critère pour la propriété $(P1)$.

Lemme 3.3.1 *Supposons qu'il existe une fonction* $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+); \mu \in \mathcal{K}_\infty$ *et des nombres positifs* β *et* λ_1 *tels que :*

$$\mu(|x|) \leq V(x,i). \tag{3.20}$$

et :

$$LV(x,i) \leq -\lambda_1 V(x,i) + \beta. \tag{3.21}$$

pour tous $(x,i) \in \mathbb{R}^n \times S$. Alors l'eq.(3.1) à la propriété $(P1)$.

Preuve. Soit $(x,i) \in \mathbb{R}^n \times S$ et $X^{x,i}(t) = X(t)$. Soit k un entier positif. On défini le temps d'arrèt :

$$\rho_k = \inf\{t > 0 : |X(t)| \geq k\}.$$

■

Clairement, $\rho_k \to \infty$ presque sùrement si $k \to \infty$. Soit $t_k = \rho_k \wedge t$ pour tout $t \geq 0$. La formule d'Ito généralisée (i.e.Lemme(3.1.1)) montre que :

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda_1 t_k} V(X(t_k), r_i(t_k))] &= V(x,i) + E\int_0^{t_k} e^{\lambda_1 s} LV(X(s), r_i(s))ds \\ &\quad + \lambda_1 E\int_0^{t_k} e^{\lambda_1 s} V(X(s), r_i(s)ds. \end{aligned}$$

Par les conditions (3.20) et (3.21) :

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda_1 t_k} V(X(t_k), r_i(t_k))] &\leq V(x,i) + \beta\int_0^{t} e^{\lambda_1 s} ds \\ &= V(x,i) + \tfrac{\beta}{\lambda_1}[e^{\lambda_1 t} - 1]. \end{aligned}$$

Lorsque $k \to \infty$:

$$EV(X(t), r_i(t)) \leq \frac{1}{c_1}(\frac{\beta}{\lambda_1} + V(x,i)). \tag{3.22}$$

Ceci, avec (3.20), nous donne :

$$E\mu(|X(t)|) \leq C, \quad \forall t \geq 0.$$

où C désigne le terme de droite de (3.22).

Par conséquent :

$$P\{|X(t)| \geq R\} \leq \frac{E\mu(|X(t)|)}{R} \leq \frac{C}{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant R suffisamment grand pour que $C/R < \varepsilon$, alors nous obtenons le résultat.

On établi maintenant un critère pour la propriété $(P2)$. Clairement, nous devons considérer la différence entre deux solutions de l'équation (3.1) à partir de valeurs initiales différentes, alors :

$$\begin{aligned} X^{x,i}(t) - X^{y,i}(t) = \quad & x - y + \int_0^t [f(X^{x,i}(s), r_i(s)) - f(X^{y,i}(s), r_i(s))]ds \\ & + \int_0^t [g(X^{x,i}(s), r_i(s)) - g(X^{y,i}(s), r_i(s))]dB(s). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour une fonction $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+)$, on définit un opérateur $\mathcal{L}\ U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}$ associé à l'eq.(3.23) par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U(x,y,i) = \quad & \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} U(x-y,j) + U_x(x-y,i)[f(x,i) - f(y,i)] \\ & + \frac{1}{2} trace([g(x,i) - g(y,i)]^T U_{xx}(x-y,i)[g(x,i) - g(y,i)]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Lemme 3.3.2 *S'il existe des fonctions $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+), \mu_1 \in \mathcal{K}$ telles que :*

$$U(0,i) = 0, \quad \forall i \in S. \tag{3.25}$$

$$\mu_1(|x|) \leq U(x,i), \quad \forall (x,i) \in \mathbb{R}^n \times S. \tag{3.26}$$

$$(x,y,i) \leq -\mu_2(|x-y|), \quad \forall (x,y,i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S. \tag{3.27}$$

alors l'Eq.(3.1) a la propriété $(P2)$:

Preuve. Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, par la continuité de U et (3.25), on peut choisir $\alpha \in (0, \varepsilon)$

suffisamment petit pour que :

$$\frac{\sup_{|x|\leq\alpha,i\in S}U(x,i)}{\mu_1(\varepsilon)}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.28}$$

■

Soit K tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x,y\in K$ et $i\in S$. On défini les temps d'arrèt :

$$\tau_\alpha=\inf\{t\geq 0:|X^{x,i}(t)-X^{y,i}(t)|\leq\alpha\}.$$

et :

$$\tau_\beta=\inf\{t\geq 0:|X^{x,i}(t)-X^{y,i}(t)|\geq\beta\}.$$

où $\beta>\alpha$. Soit $t_\beta=\tau_\beta\wedge t$. Par la formule d'Ito généralisée et (3.26), on peut déduire que pour tout $t>0$:

$$\begin{aligned}\mu_1(\beta)P\{\tau_\beta\leq t\} &\leq EU(X^{x,i}(t_\beta)-X^{y,i}(t_\beta),r_i(t_k))\\ &=U(x-y,i)+E\int_0^{t_\beta}(X^{x,i}(s),X^{y,i}(s),r_i(s))ds\\ &\leq U(x-y,i).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$P\{\tau_\beta\leq t\}\leq\frac{U(x-y,i)}{\mu_1(\beta)}.$$

Notont que $U(x-y,i)$ est borné lorsque $(x,y,i)\in K\times K\times S$, cela implique qu'il existe un $\beta=\beta(K,\varepsilon)>0$ tel que :

$$P\{\tau_\beta<\infty\}\leq\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.29}$$

Pour β fixé et soit $t_\alpha=\tau_\alpha\wedge\tau_\beta\wedge t$. Par la farmule d'Ito généralisée et (3.27) en déduire que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq EU(X^{x,i}(t_\alpha) - X^{y,i}(t_\alpha), r_i(t_\alpha)) \\ &= U(x-y,i) + E\int_0^{t_\alpha}(X^{x,i}(s), X^{y,i}(s), r_i(s))ds \\ &\leq U(x-y,i) - \mu_2(\alpha)E(t_\alpha \wedge T_\alpha \wedge t). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$tP\{\tau_\alpha \wedge \tau_\beta \leq T\} \leq E(\tau_\alpha \wedge \tau_\beta \wedge t) \leq \frac{U(x-y,i)}{\mu_2(\alpha)}.$$

alors il existe donc une constante $T = T(K, \varepsilon) > 0$ telle que :

$$P\{\tau_\alpha \wedge \tau_\beta \leq T\} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par (3.29), on a :

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{\varepsilon}{4} < P\{\tau_\alpha \wedge \tau_\beta \leq T\} &\leq P\{\tau_\alpha \leq T\} + P\{\tau_\beta < \infty\} \\ &\leq P\{\tau_\alpha \leq T\} + \tfrac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

qui donne :

$$P\{\tau_\alpha \leq T\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.30}$$

Maintenant, on défini le temps d'arrèt :

$$\sigma = \inf\left\{t \geq \tau_\alpha \wedge T : |X^{x,i}(t) - X^{y,i}(t) \geq \varepsilon\right\}.$$

Soit $t > T$:

$$\begin{aligned}
&P(\{\tau_\alpha \leq T\} \cap \{\sigma \leq t\})\mu_1(\varepsilon) \\
&\leq EI_{\{\tau_\alpha \leq T, \sigma \leq t\}} U(X^{x,i}(\sigma \wedge t) - X^{y,i}(\sigma \wedge t), r_i(\sigma \wedge t)) \\
&\leq EI_{\{\tau_\alpha \leq T\}} U(X^{x,i}(\tau_\alpha \wedge t) - X^{y,i}(\tau_\alpha \wedge t), r_i(\tau_\alpha \wedge t)) \\
&\leq EI_{\{\tau_\alpha \leq T\}} U(X^{x,i}(\tau_\alpha) - X^{y,i}(\tau_\alpha), r_i(\tau_\alpha)) \\
&\leq P\{\tau_\alpha \leq T\} \sup\nolimits_{|x|, i \in S} U(x, i).
\end{aligned}$$

Ceci, avec (3.28), donne :

$$P(\{\tau_\alpha \leq T\} \cap \{\sigma \leq t\}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.31}$$

Par (3.30) et (3.31), on obtient :

$$P\{\sigma \leq t\} \leq P(\{\tau_\alpha \leq T\} \cap \{\sigma \leq t\}) + P\{\tau_\alpha > T\} < \varepsilon.$$

Si $t \to \infty$ on obtien :

$$P\{\sigma < \infty\} \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout $(x, y, i) \in K \times K \times S$, :

$$P\{|X^{x,i}(t) - X^{y,i}(t)| < \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t > T.$$

d'ou le résultat.

Bibliographie

[1] Anderson, W.J., 1991. Continuous-Time Markov Chains. Springer, Berlin.

[2] Basak, G.K., Bisi, A., Ghosh, M.K., 1996. Stability of a random diffusion with linear drift. J. Math. Anal.Appl. 202, 604–622.

[3] Berman, A., Plemmons, R.J., 1994. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. SIAM, Philadelphia, PA.

[4] Ikeda, N., Watanabe, S., 1981. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, Amsterdam.

[5] Ji, Y., Chizeck, H.J., 1990. Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. IEEE Trans. Automat. Control. 35, 777–788.

[6] Mao, X., 1999. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching. Stochastic Process. Appl. 79, 45–67.

[7] Mao, X., Matasov, A., Piunovskiy, A.B., 2000. Stochastic differential delay equations with Markovian switching. Bernoulli 6, 73–90.

[8] Mariton, M., 1990. Jump Linear Systems in Automatic Control. Marcel-Dekker, New York.

[9] Shaikhet, L., 1996. Stability of stochastic hereditary systems with Markov switching. Theory Stochastic Process. 2, 180–184.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة الاستقرار المقارب بمفهوم التوزيع للمعادلة التفاضلية العشوائية ذات النظام المتغير . في المحور الاول نعطي تعاريف اساسية حول الحساب الاحتمالي ثم نقوم بإعطاء عموميات حول سلاسل ماركوف وفي الاخير ندرس الاستقرار المقارب بمفهوم التوزيع للمعادلة التفاضلية العشوائية ذات النظام المتغير.

Résumé

Dans notre mémoire on s'intéresse à la stabilité asymptotique en distribution d'une équation différentielle stochastique à changement de régime. On a présenté des définitions de base sur le calcul de probabilité, ensuite on a présenté des généralités sur les chaines de Markov, et en fin on a étudié la stabilité asymptotique en distribution d'une EDS à changement

Abstract

In our memory we are interested of the asymptotic stability in distribution to the stochastic differential equation with regime switching . We presented basic definitions about the probability calculus, then we presented generalities on Markov chains, and finally we studied the asymptotic stability in distribution of the SDE with regime switching.