République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Djerf Abdelbassit

Titre :

principe du maximum en contôle optimal stochastique

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED BOUBAKEUR**	UMK.Biskra	**Président**
Dr.	**BADREEDDINE MANSOURRI**	UMK.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**REMILI NASSIRA**	UMK.Biskra	**Examinateur**

septembre 2020

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude ,l'amour,le respect,la reconnaissance,c'est tout simplement que :Je dédie ce humble travail à :

A mes chers parants ,ils représentent pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'ont pas cessé de m'encourager et de me soutenir ; rien au monde ne vaut les efforts fournissent jour et nuit pour mon education et mon bien être.

A mes frères, soeurs et tout la famille **DJERF**.

Je n'oublie pas tous les personnes que les connais durant ces langues années d'étude.

A tous les membres de ma promotion.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord,je tiens à exprimer mes remerciement au "**ALLAH**" qui m'aide, me donné la puissance , la patiente ,le courage durant ces langues annés d'études.

Je désire aussi à remercier mon encadeur **Dr :MANSOURI BADREDDINE** ,qui m'a proposé ce thème de mémoire ,pour ses judicieux consiels ,sa patience ,sa disponbilité ,qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

J'adresse mes sincères remeciments à les membres de mon jury :

Dr :LABED BOUBAKEUR et **Dr :REMILI NASSIRA** qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'evaluer ce modest travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Calcul Stochastique **4**

1.1 **Prossus stochastique :** 4

1.1.1 **Filtration :** 4

1.1.2 **Processus adapté :** 5

1.1.3 **Processus progréssif :** 5

1.2 **Espérance conditionnelle :** 6

1.3 **Martingale :** 6

1.4 **Mouvement Brownien :** 8

1.5 **Intégrale stochastique :** 8

1.6 **Processus et Formule d'Itô :** 12

1.6.1 **Formule d'Itô :** 13

2 Equations différentielles stochastiques : **16**

3 Principe du maximum en contrôle optimal : **25**

3.1 **Classe des contrôles :** 25

3.2 **Formulation forte du problème :** 26

3.3 **Conditions nécéssaires d'optimalité :** 28

3.3.1 **Perturbations fortes :** 28

3.3.2 **Linéairisation de la solution :** 30

3.4 **Principe du maximum :** 31

3.5 Extremalité et optimalité de contrôle : 33

Conclusion **36**

Bibliographie **36**

Bibliographie **38**

Annexe : Abréviations et Notations **38**

Introduction générale :

Introduction

La théorie de contrôle optimal stochastique est utilisé essentiallement pour modéliser beaucoup de situations en finance, en gestion, science sociale ,et de façons générale dans tous les dommaines utilisant les applications des mathématiques.

L'objectif fondamental de la théorie de contrôle optimal stochastique est de minimiser un critère de performance appellé fonction de coût :

$$J(u) = E\left[\int_0^T h(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right] \tag{I}$$

où : X_t désigne la solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = \varepsilon \end{cases}$$

et u_t un processus appelé conrôle admissible (ou camande) par la quel le controlleur peut influer sur la trajectiore X_t de façon à optimiser la fonctionnelle $J(u)$.

Ce type des problèmes est une généralisation du problème de contrôle optimal déterministe (la dynamique du système modéliser par une équation déffirentielle ordinaire)

Les deux approches utilisés dans la résolution de ce genre de problème sont : la programmation dynamique et le principe de maximum de Pontriagin .

Dans ce travail ,on s'intéresse au principe de maximum ,connu aussi sous le nom de "conditions nécessaires d'optimalité" qui a été introduite par L.Pontriagin en 1956 .**Il** représente un outil fondamental dans la théorie de contrôle. il s'appuie sur l'idée suivante :

"si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionelle $J(u)$ par rapport au paramètre de perturbation $\theta \geq 0$, ceci entraine que

$$\frac{dJ(u_\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} \geq 0.\text{''}$$

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

Le première chapitre est introductif ,nous avons donné de manière bref quelque concepte de base sur le processus stochastiques, l' intégrale stochastique (l'intégrale d' **Itô**) et leurs propriétés ;puis on définit la formule d'**Itô.**

Dans la deuxième chapitre, on s'intéresse au l'EDS et le théorème d'existace et unicité de la solution forte

la trioxième chapite contient la partie esssentielle de ce mémoire ,ce chapitre est consacré à le principe de maximum de Pontiagin ,où le système est gouverné par une EDS ,nous commansons par présenter le problème de contrôle stochastique et des classes de contôle ,pius l'étude de la principe de maximum de Pontriagin.

Chapitre §1.
Calcul stochastique

Chapitre 1

Calcul Stochastique

1.1 Prossus stochastique :

Définition 1.1.1 *soit T un ensemble, on appelle un* ***processus stochastique*** *sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ intexé par T et à valeur dans $\mathbb{R}^d$, une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ d'application mésurable de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *1. si $T \subseteq \mathbb{R}_+$, nous aurons un processus à temps continu.*

2. si $T \subseteq \mathbb{N}$, nous aurons un prcessus à temps discret.

- Le processus X est continue si : $\forall w \in \Omega, t \longmapsto X_t(w)$ est continue (ses trajectoires sont continues).
- Le processus X est **càdlàg (continue à droite, limité à gauche)** si : $\forall w \in \Omega, t \longmapsto X_t(w)$ est continue à droite, limité à gauche. Même définition pour **càglàd.**

1.1.1 Filtration :

On va s'intéresse à des phénomènes dépendant de temps, Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.

Définition 1.1.2 *soit $T \subseteq \mathbb{R}_+$, une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$ (i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq s \leq t$ dans T).*

Le quarduplet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ est appellé espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.3 *La* ***filtration naturelle (ou canonnique)*** *du processus X notée $\mathcal{F}^X$ est la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X$ engendrée par le processus $(X\ )_{s\leq t}$;* ***i.e :*** $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), s \leq t\}$

Remarque 1.1.2 *Dans toute la suite,nous allons considérer des filtrations* ***complètes.(i.e :*** *$\mathcal{F}_0$ contient tout les ensembles négligeables de $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$).*

1.1.2 Processus adapté :

Définition 1.1.4 *Un processus X est* ***mésurable*** *si l'application $(t, w) \longrightarrow X_t$ de $\mathbb{R}_+ \times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-mésurable.(**i.e :** elle est mésurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.)*

Définition 1.1.5 (adaptation) *Un processus X est dit* ***adapté*** *(par rapport à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si :$\forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable .*

Remarque 1.1.3 *La filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ est la plus petite filtration qui rendre X adapté.*

1.1.3 Processus progréssif :

Définition 1.1.6 *Un procesus X est* ***progréssivement mésurable*** *par rapport à $\mathbb{F}$ si :*

pour tout $t \geq 0$, l'application $X : \underset{(t,w)\longmapsto X(t,w)}{\mathbb{R}_+ \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d}$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mésurable ; **c'est à dire :** la construction de X sur $[0, t] \times \Omega$ est mésurable par rapport $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.(où :$\mathcal{B}([0, t])$ est la borélien de $[0, t]$)

Proposition 1.1.1 *Un processus X , $\mathbb{F}$-adapté tel que toutes les trajectoires sont continues à gauche (ou à droite) est progréssivement mésurable.*

Proposition 1.1.2 *Un processus progressivement mésurable est mésurable et $\mathbb{F}$-adapté.*

1.2 Espérance conditionnelle :

soit X une variable aléatoire réelle (intégrable) définue sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.1 *L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique v.a :*

a. $\mathcal{G}$-mésurable.

b. telle que : $\int_A \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\ d\mathbb{P} = \int_A X\ d\mathbb{P}$,$\forall A \in \mathcal{G}$.

Propriété 1.2.1 *soient $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabolité ,$\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$,et X, Y deux v.a*

1. La linéairité : $\forall a, b \in \mathbb{R}$:$\mathbb{E}(aX + bY/\mathcal{G})$ =$\mathbb{E}(aX/\mathcal{G})$+$\mathbb{E}(bY/\mathcal{G})$.
2. Croissance :Si $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y/\mathcal{G})$.
3. Si X est $\mathcal{G}$-mésurable alors :$\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X$.
4. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
5. Si Y est une v.a $\mathcal{G}$-mesurable alors :$\mathbb{E}(X\ Y/\mathcal{G}\ )$ =$Y\ \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$
6. Si X est indépendant de $\mathcal{G}$ alors :$\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
7. Si $\mathcal{H}$ un sous tribu de$\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors :$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X/\mathcal{H})$
8. Si ϕ une application convexe et mésurable $\mathbb{E}(\phi(X)/\mathcal{G})) \geq \phi(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}))$ (**Inégalité de Jensen)**
9. Si $X \in \mathbb{L}^P$,$\forall p \geq 1$,alors $\|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\ \|_{\mathbb{L}^p_{(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^p_{(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}}$
10. Si X est une v.a de carré intégrable, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ est la projection de X sur l'espace des v.a $\mathcal{G}$-mésurable de carré intégrable ,**càd** $\min_{\mathbf{Y}} \parallel \mathbf{X} - \mathbf{Y} \parallel_{L^2(\Omega)} = \min_Y \mathbb{E}((\mathbf{X} - \mathbf{Y})^2) = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$,Y est une v.a $\mathcal{G}$-mésurable et de carré intégrable.

1.3 Martingale :

Définition 1.3.1 *un processus stochastique $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est dit $\mathbb{F}$-martingale (respectivement sous-martingale ;sur-martingale)si :*

(i) pour tout $t \geq 0$,M_t est intégrable (**i.e :**$\mathbb{E}(|\mathbf{M}_t|) < +\infty$)

(ii) pour tout $t \geq 0$,M_t est $\mathcal{F}_t$-mésurable

(iii) $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}s) = M_s$ $\mathbb{P}-p.s$ (resp : $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}s) \geq M_s$ $\mathbb{P}-p.s$; $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}s) \leq M_s$ $\mathbb{P}-p.s$).

Remarque 1.3.1

1. le processus (M_t) est une martingale si et seulement si'l est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.
2. le processus (M_t) est une sous-martingale si et seulement si le processus l $(-M_t)$ est une sur-martingale.

Proposition 1.3.1 *Soit M_t un $\mathbb{F}$-martingale :*

1/ $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{E}(\mathbf{M}_t) = \mathbb{E}(\mathbf{M}_0)$$

2. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** mésurable , si : $\phi(M_t)$ est intégrable,alors $\phi(M_t)$ est une sous-martingale.

Théorème 1.3.1 (Théorème d'arrêt de Doob)

Soient M_t un $\mathbb{F}$-martingale à trajectoires continues à droit et uniformément intégrable, S, T deux temps d'arrêt tel que : $S \leq T$ $\mathbb{P}-p.s$, alors :

$$M_T \in L^1(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F}) \text{ et } \mathbb{E}(M_T/\mathcal{F}_S) = M_S$$

Proposition 1.3.2 (Inégalité de Doob)

Soit M_t un $\mathbb{F}$-martingale continue telle que :$\forall t \geq 0$:$M_t \in L^p(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, alors :

$$\forall t \geq 0 : \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} \mid M_s \mid^p) \leq q^p \mathbb{E}(\mid \mathbb{M}_t \mid^p)$$

1.4 Mouvement Brownien :

Définition 1.4.1 *Un processus stochastique* $\{W_t, t \geq 0\}$ *sur* $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbb{P})$ *à valeur réel est un mouvement Brownien réel standard si :*

i- $W_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s$ (Le MB issu de 0)

ii- Les trajectoires $t \longrightarrow W_t$ sont continues $\mathbb{P} - p.s$

iii- Pour tout $0 \leq s \leq t$ la v.a $W_t - W_s$ est indépendante de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$,et $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Proposition 1.4.1 *Soient* W *un MB et* $\mathcal{F}^W$ *sa filtration naturelle*

Les processus (W_t) , $(W_t^2 - t)$ et $exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ sont des $\mathcal{F}^W$-martingales.

Théorème 1.4.1 (Théorème de représentation des martingales)

Soient W_t un $\mathbb{F}-$MB et M_t un $\mathcal{F}^W$-martingale de carré intégrable, alors pour tout $t \geq 0$ il existe un unique processus $Z \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s \, dW_s$$

1.5 Intégrale stochastique :

soient $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On veut donner un sens à la processus :

$$I_t(\theta) := \int_0^t \theta_s \, dW_s. \tag{1.1}$$

$\mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega) = \{(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ processus réel càdlàg ,$(\mathcal{F}_t^W)$-adapté telle que $\mathbb{E}(\int_0^T (\theta_S)^2 ds) \prec +\infty\}$.

Construisons tout d'abord l'ntégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires.

Cas des processus élémentaire :

Définition 1.5.1 *Un processus stochastique* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *est appellé processus* ***élémentaire*** *(ou simple) s'il existe une subdivision* $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 .... \leq t_n = T$*,de l'intervalle* $[0,T]$ *et une famille des v.a* $\{\theta_j \ , 0 \leq j \leq n-1\}$ *telle que ; tout* θ_j *soit* $\mathcal{F}^W_{t_j}$*-mésurable et* $\theta_j \in L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\theta_t(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w)\mathbb{I}_{]t_j,t_{j+1}[}(t)$$

où $\mathbb{I}_A$désigne l'indicatrice de l' ensembe A.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des processus élémentaire,qui est un sous espace de $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$.

Exemple 1.5.1 *Soient la subdivision* $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n = t, \forall n \in \mathbb{N}$ *telle que pour* $i = \overline{0, n-1}, t_i = i\frac{t}{n}, t_{i+1} - t_i = \frac{t}{n}$ *et* W *un MB où* $W_{t_i} = W_i$ *;on définie la processus simple par :*

$$\forall (t,w) \in [0,t]\times\Omega, H_n(t,w) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(w)\ \mathbb{I}_{[t_i,t_{i+1}[}(t) \tag{1.2}$$

Définition 1.5.2 *On définie l'intégrale stochastique* (1.1) *pour les processus simples* $\theta(t,w)$ *par :*

$$\begin{aligned} I_t(\theta) &:= \int_0^t \theta_s\, dW_s = \int_0^t (\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w)\mathbb{I}_{]t_j,t_{j+1}[}(s)dW_s \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) \int_0^t \mathbb{I}_{]t_j,t_{j+1}[}(s)dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) \int_{t_j}^{t_{j+1}} dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(W_{j+1} - W_j) \end{aligned}$$

Cas des processus général :

On va maintenant définir l'intégrale stochastique puor des processus de $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$.

Lemme 1.5.1 *L'ensemble des processus élémentaires* $\mathcal{E}$ *est dense dans* $\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$*. Alors pour tout* $\theta \in \mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)$*,il existe existe une suite* θ^n *d'élément de* $\mathcal{E}$ *telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\theta^n - \theta\|_{\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T]\times\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} E(\int_0^T |\theta^n - \theta|^2 dt) = 0$$

Donc l'intégrale stochastique (1.1) *vaut :*

$$\int_0^t \theta_s \, dW_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \theta_s^n \, dW_s.$$

Exemple 1.5.2 *Calculons* $\int_0^t W_s \, dW_s$.

On prend sans démonstration que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|H_n(t,w) - W(t,w\|_{\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)} = 0$$

où :$H_n(t,w)$ *est la processus simple qui définie dans* (1.2) ; *Alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^t W_s \, dW_s &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^t H_n(s) dW_s \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^t (\sum_{i=0}^{n-1} W_i \; \mathbb{I}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)) dW_s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_i \; (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_i \; \triangle W_i =^{(1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [\triangle(W_i^2) - (\triangle W_i)^2] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} [\sum_{i=0}^{n-1} (\triangle(W_i^2) - \sum_{i=0}^{n-1} ((\triangle W_i)^2)] \\
&=^{(2)} \frac{1}{2} (W_t^2 - \lim_{n\longmapsto\infty} \sum_{i=0}^{n-1} ((\triangle W_i)^2 \\
&=^{(3)} \frac{1}{2} (W_t^2 - t).
\end{aligned}$$

où : (1) *:* $\triangle(W_i^2) = W_{i+1}^2 - W_i^2 = (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 2W_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = (\triangle W_i)^2 + 2W_i \triangle W_i$ *;alors* $W_i \triangle W_i = \frac{1}{2}(\triangle(W_i^2) - (\triangle W_i)^2)$.

(2) : $\sum_{i=0}^{n-1} (\triangle(W_i^2) = W_{\frac{t}{n}}^2 - W_0^2 + W_{2\frac{t}{n}}^2 - W_{\frac{t}{n}}^2 + ... + W_{n\frac{t}{n}}^2 - W_{n-1\frac{t}{n}}^2 = W_{n\frac{t}{n}}^2 - W_0^2 = W_t^2$.

(3) :$\lim_{n\longmapsto\infty} \sum_{i=0}^{n-1} ((\triangle W_i)^2 = t$ (la variation quadratique du MB).

Propriété 1.5.1 *Soient* $(Wt, t \in [0,T])$,*un MB réel et* $\{\theta_t, t \in [0,T]\}$ *un processus de* $\mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$.

1. $\theta \longmapsto I_t(\theta)$ est linéaire
2. $t \longmapsto I_t(\theta)$ est continue $\mathbb{P} - p.s$

3. **Additivité : pour $\mathbf{0} \leq u \leq t \leq T$**

$$\int_0^t \theta_s \, dW_s = \int_0^u \theta_s \, dW_s + \int_u^t \theta_s \, dW_s$$

4. le processus $(I_t(\theta))_{t\in[0,T]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$.

5. **Isométrie d'Itô :**

$$\mathbb{E}[(\int_0^t \theta_s \, dW_s)^2] = \mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 \, ds).$$

6. **properiétie de martingale ;** pour tout $\mathbf{0} \leq u \leq t \leq T$

a- Le processus $I_t(\theta)$ est une $\mathcal{F}_t^W$-martingale,de plus :

$\forall t \geq 0, \mathbb{E}(I_t(\theta)) = 0$ et $\forall s, t \geq 0 : cov(\theta_t, \theta_s) = \mathbb{E}(\int_0^{t\wedge s} \theta_u^2 \, du)$.

b- $M_t = I_t - \int_0^t \theta_s^2 \, ds$ est une $\mathcal{F}_t^W$-martingale.

7. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\prec I_t(\theta) \succ = \int_0^t \theta_s^2 \, ds$$

8. La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donné par :

$$\prec I_t(\theta), I_u(\phi) \succ = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \, \phi_s ds$$

Proposition 1.5.1 (Intégrale de Wiener) *Si le processus θ n'est pas aléatoire (**i.e :** c'est une fonction f ne dépend que de temps t);en plus des propriétés précédents ,l' intégrale* (1.1) *appelée **Intégrale de Wiener** tel que :*

$$\int_0^t f(s) dW_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(s) ds)$$

Remarque 1.5.1 *On peut généralisé l'intégrale stochastique pour des processus de $\mathbb{L}^2_{loc}([0,T] \times \Omega) = \{(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ processus càdlàg ,$(\mathcal{F}_t^W)$-adapté telle que $\int_0^T (\theta_S)^2 ds \prec +\infty \quad p.s\}$,et dans ce cas I_t est $\mathcal{F}_t^W$-**martingale locale.***

1.6 Processus et Formule d'Itô :

Tout d'abord,soient $\phi \in C^1(\mathbb{R}+)$ et $\psi \in C^1(\mathbb{R})$;Alors la formule de dérivation des fonctions composées donne comme suit :

$$\phi(\psi(t)) = \phi(\psi(0)) + \int_0^t \phi'(\psi(s))\, d\psi(s).$$

Nous objective va étre d'obtenir une formule analogue si l'on remplace ψ par un MB W (ou généralement par un processus d'Itô).

Définition 1.6.1 *On dit qu'un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$ est d'**Itô** s'il s'écrive sous la forme :*

$$Y_t = y + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \delta_s dW_s \tag{1.3}$$

où : b est un processus $\mathcal{F}_t^W$-adapté,tels que : $\int_0^t |b_s| ds \prec \infty \quad \mathbb{P} - p.s$;$\delta \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$ et $Y_0 = y$ est une v.a $\mathcal{F}_0$-mésurable.

Remarque 1.6.1 *Le processus d'**Itô** est presque sùrement continu et progressivement mésurable .*

La forme déffirentielle du processus d'Itô est :

$$\begin{cases} dY_t = b_t dt + \delta_t dW_t \\ \qquad Y_0 = y \end{cases}$$

Proposition 1.6.1 *La variation quadratique sur $[0,t]$ d'un processus d'Itô Y donné par :*

$$\prec Y \succ_t = \prec \int_0^t \delta_s dW_s \succ = \int_0^t \delta_s^2 ds$$

Proposition 1.6.2 *La covariation quadratique entre deux processus d'Itô Y^1, Y^2 donnés par :*

$$dY_t^i = b_t^i dt + \delta_t^i dW_t \,;\, i = 1, 2$$

$$Y_0^1 = x \,;\, Y_0^2 = y.$$

vaut :

$$\prec Y^1, Y^2 \succ_t := \quad \prec \int_0^t \delta_s^1 dW_s, \int_0^t \delta_s^2 dW_s \succ \quad = \int_0^t \delta_s^1 \ \delta_s^2 ds$$

1.6.1 Formule d'Itô :

La formule d'Itô est un outil permet de calculer les intégrales stochastiques sans repasser par des suites approximantes .

Théorème 1.6.1 (Première formule d'Itô) *soient* $\{Y_t, t \geq 0\}$*un processus d'Itô réel et* $f : \underset{(x) \longmapsto f(x)}{\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}}$ *de classe* $C^2(\mathbb{R})$.*On a alors :*

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t f'(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Y_s) d\langle Y \rangle_s$$

ou de forme déffirentielle :

$$df(Y_t) = f'(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} f''(Yt) d\langle Y \rangle_t$$

Théorème 1.6.2 ($2^{ème}$formule d'Itô) *soient* $\{Y_t, t \geq 0\}$*un processus d'Itô réel et* $f : \underset{(t,x) \longmapsto f(t,x)}{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}}$;*telle que* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors* $(f(t, Y_t))_{t \geq 0}$ *est une* ***processus d'It****ô,telle que :*

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, Y_s) d \prec Y \succ_s \tag{1.4}$$

ou de forme déffirentielle :

$$df(t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, Y_t) d \prec Y \succ_t$$

où : $d \prec Y \succ_t = \delta_t^2 dt.$

Proposition 1.6.3 (Formule d'intégration par partie) *soient* X *et* Y *deux processus d'Itô ,on a :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s$$

ou bien :

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$$

Chapitre §2.
Equations différentielles stochastiques :

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques :

Définition 2.0.2 *Une équation différentielle stochastique est une équation différentielle ordinaire avec une partie aléatoire, qui l'appelle* ***Bruit Blanc,*** *en général c'est une MB ; il est donnée sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = \varepsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

ou sous forme d'intégrale :

$$X_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

où : $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications borélliennes,et $b(t, X_t)$ appelé le coéfficient de drift(La dérive), $\sigma(t, X_t)$ appelé le coéfficient de diffusion (volatilité), ε est une v.a $\mathcal{F}_0$-mésurable.

Définition 2.0.3 *Une solution de l'EDS (2.1) est un processus X continue , $(\mathcal{F}_t)$-adapté et vérifié* $\forall t \geq 0$:

1.

$$\int_0^t (\mid b(s, X_s) \mid ds + \sigma^2(s, X_s)ds) \prec \infty \quad \mathbb{P} - p.s$$

2 X vérifié :

$$X_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dWs \quad \mathbb{P} - p.s$$

$$X_0 = \varepsilon \ \ \mathbb{P} - p.s$$

On notera S^2 l'espace de Banach constitué par les processus X ,progréssivement mésurable,$\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t}$ $X_t \mid^2) \prec \infty$,muni de la norme $\parallel X \parallel^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t \mid^2\right]$

Le probleme est sous des quelles conditions vérifiées par b et σ pour que l'équation (2.1) admet une unique solution forte .

Théorème 2.0.3 *si b et σ sont deux fonctions continues telles que :*

i- Condition de Lipschitz :$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \exists k \succ 0$:

$$\mid b(t,x) - \mu(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq k \mid x - y \mid \tag{2.2}$$

ii- Condition de la croissance linéaire : $\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \exists M \succ 0$:

$$\mid b(t,x) \mid + \mid \sigma(t,x) \mid \leq M(1+ \mid x \mid) \tag{2.3}$$

iii- ε une va indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ tel que :

$$E(|\varepsilon|^2) \prec \infty$$

Alors pour tout $t \geq 0$, l'EDS (2.1) admet une solution forte unique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ continue , $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adapté et :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) \prec \infty$$

la preuve du théorème précédent est basé sur les deux lemmes suivantes :

Lemme 2.0.1 (de Gronwall) *soit f une fonction positive intégrable telle que :*

$$\forall t \in [0,T] : \quad f(t) = \beta + c\int_0^t f(s)ds$$

où : β, c des constantes positives ;alors

$$f(t) \leq \beta \exp(ct) \quad \forall t \in [0,T]$$

Lemme 2.0.2 ***(Inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy)***

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \sigma(s,X_s)\ dW_s \mid^2\right] \leq c\ E\left[\int_0^t \mid \sigma(s,X_s) \mid^2 ds\right]$$

où ; c constante positive.

Preuve.

1. **Unicité :**

■

soient $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ deux solutions de l'équation (2.1) tel que $X_0 = Y_0 = \varepsilon$,alors :

$$\parallel X - Y \parallel^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t - Y_t \mid^2\right] = \mathbb{E}\Bigg[\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s - \int_0^t b(s,Y_s)ds - \int_0^t \sigma(s,Y$$

$$= \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dW_s \mid^2\right]$$

par inégalité de **YOUNG** $\{(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2\}$

$$\leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(2 \mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds \mid^2 + 2 \mid \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dW_s \mid^2\right)\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[2\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds \mid^2 + 2\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dW_s \mid^2\right]$$

et de l'Inégalité de **Hölder** $\{\left(\int f \times g ds\right)^2 \leq \int f^2 ds \times \int g^2 ds\}$

$$\leq 2T\ \mathbb{E} \int_0^t \mid b(s, X_s) - b(s, Y_s) \mid^2 ds + 2\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s \mid^2\right)$$

de l'inégalité de **B-D-G :**

$$\leq 2T\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid b(s, X_s) - b(s, Y_s) \mid^2 ds\right) + 2c\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) \mid^2 ds\right)$$

en appliquant la condition (2.2) :

$$\begin{aligned} &\leq 2TK^2\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - Y_s \mid^2 ds\right) + 2cK^2\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - Y_s \mid^2 ds\right) \\ &\leq \left(2TK^2 \ + 2cK^2\right)\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - Y_s \mid^2 ds\right) \\ &\leq M\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \sup_{s\in[0,T]} \mid X_s - Y_s \mid^2 ds\right) \end{aligned}$$

par le lemme de **Gronwall :**

$$\leq 0 \times \exp\left(M\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t - Y_t \mid^2\right)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t - Y_t \mid^2\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \forall t \in [0, T] : X_t = Y_t \ \ \mathbb{P} - p.s \ (X \text{ et } Y \text{ sont indistinguable })$$

Ce qui preuve l'unicité forte de la solution.

2. L'existance : pour montrer l'existance on définie alors par récurrence la suite :

$$\begin{cases} X_t^n = \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dW_s \\ X_t^0 = \varepsilon \end{cases}$$

alors :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right) dW_s$$

en utilisant les memes téchnique que pour l'unicité (inégalité de **YOUNG,Hölder,B-D-G,et la condtion** (2.2)) on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid^2\right] \leq K' \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \mid X_s^n - X_s^{n-1} \mid^2\right]$$

pour $n = 0$,et de la condition (2.3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^1 - X_t^0 \mid^2\right] &\leq 2\mathbb{E} \sup_{s\in[0,T]} \mid \int_0^t b(s, X_s^0) ds \mid^2 + 2\mathbb{E} \sup_{s\in[0,T]} \mid \int_0^t \sigma(s, X_s^0) dW_s \mid^2 \\
&\leq 2T\mathbb{E} \int_0^t \mid b(s, X_s^0) \mid^2 ds + 2c\mathbb{E} \int_0^t \mid \sigma(s, X_s^0) \mid^2 ds \\
&\leq 2TK^2 \int_0^t \left[1 + \mathbb{E}\left(\mid X_s^0 \mid^2\right)\right] ds + 2cK^2 \int_0^t \left[1 + \mathbb{E}\left(\mid X_s^0 \mid^2\right)\right] ds \\
&\leq M \ \left[1 + \mathbb{E}\left(\mid X_s^0 \mid^2\right)\right] \times t \\
&\leq M \ T \ \left[1 + \mathbb{E}\left(\mid \varepsilon \mid^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Posons $D = M \ \ T \ \left[1 + \mathbb{E}\left(\mid \varepsilon \mid^2\right)\right]$, donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^1 - X_t^0 \mid^2\right] \leq D$$

Par récurrence sur n ,il résulte :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid^2\right] &\leq \frac{M^n \times T^n}{n!} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^1 - X_t^0 \mid^2\right] \\
&\leq \frac{M^n \times T^n}{n!} D
\end{aligned}$$

De dernier résultat ,il est claire que :

$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid^2\right] \longrightarrow 0$ quant $n \longrightarrow 0$;**c-à-d :** X_t^n est une suite de Cauchy dans S^2 (qui est complet

Donc elle est convergente vers un processus limite X ,$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}-$adapté

$$\lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t$$

Si on fait un tendre de $n \to \infty$

par le lemme de Fatou et l'inégalité de **B-D-G** et la condition(2.2) **,**on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \left(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^n)\right) dW_s \mid^2\right) &\leq \lim_{n\to\infty} c\mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\right) \leq c \lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s\right. \\ &\leq c\mathbb{E}\left(\int_0^t \lim_{n\to\infty} \sup \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\right) = 0\end{aligned}$$

donc

$$\sigma(t,X_t^n) \to \sigma(t,X_t) \ \text{ quand } n \to \infty \text{ dans } S^2$$

et par l'inégalité de **Hölder** et la condition (2.3) **:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,X_s^n)\right) ds \mid^2\right) &\leq CT \lim_{n\to\infty} \ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\right) \\ &\leq CT \lim_{n\to\infty} \ \sup \ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\right) \\ &\leq CT \ \mathbb{E}\left(\int_0^t \lim_{n\to\infty} \ \sup \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\right) = 0\end{aligned}$$

donc :

$$b(t,X_t^n) \to b(t,X_t) \ \text{ quand } n \to \infty \text{ dans } S^2$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t = \varepsilon + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$$

3. il reste à démontrer :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) \prec \infty$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2 \preceq 3a^2+3b^2+3c^2$ et on passant aux espérance on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) &\preceq 3\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) + 3\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid \int_0^t b(s,X_s)ds \mid^2) + 3\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \mid^2) \\
&\leq 3\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) + 3T\mathbb{E}(\mid \int_0^t \mid b(s,X_s) \mid^2 ds) + 3c\mathbb{E}(\mid \int_0^t \mid \sigma(s,X_s) \mid^2 ds) \\
&\leq 3\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) + 3Tk\int_0^t \mathbb{E}(1+\mid X_s \mid^2)ds + 3ck\int_0^t \mathbb{E}(1+\mid X_s \mid^2)ds \\
&\leq 3\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) + 3T^2k + 3Tk\int_0^t \mathbb{E}(\mid X_s \mid^2)ds + 3cTk + 3ck\int_0^t \mathbb{E}(\mid X_s \mid^2)ds
\end{aligned}$$

posonons $k' = \sup(3ck, 3Tk)$ et comme $\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) \prec \infty$ alors $M = 3\mathbb{E}(\mid \varepsilon \mid^2) + 3T^2k + 3cTk$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) &\leq k' + M\int_0^t \mathbb{E}(\mid X_s \mid^2)ds \\
&\leq k' + M\int_0^t \mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_s \mid^2)ds
\end{aligned}$$

en appliquant le lemme de Gronwal on obtient :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) \leq k'\exp(Mt) \quad \forall t \in [0,T]$$

ce que implique que :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\preceq t\prec\infty} \mid X_t \mid^2) \leq M' \qquad \text{où} : M' = k'\exp(Mt) \prec \infty$$

d'où le résultat.

Exemple 2.0.1 (Le Mouvement Brownien géométrique) *On considère l'équation differen-*

tielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{E1}$$

où : b et σ sont des réels.

L'équation $(E2)$ admet une solution unique de la forme :

$$X_t = x \exp(bt + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Preuve. L'EDS $(E2)$ équivalant à :

$$\frac{dX_t}{X_t} = bdt + \sigma dW_t$$

■

Par intégration,on trouve :

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t bds + \int_0^t \sigma dW_s$$

Pour le terme $\int_0^t \frac{dX_s}{X_s}$, par la formule d'Ito (sur$f(x) = \ln(x), x \succ 0$),on obtient

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X_t^2}) d\langle X \rangle_t = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X_t^2})\sigma^2 X_t^2 dt$$
$$\iff \frac{dX_t}{X_t} = d \ln X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Alors

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \ln X_t - \ln x + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

Donc

$$\ln X_t = \ln x - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds + \int_0^t bds + \int_0^t \sigma dW_s$$

d'où le résultat.

Chapitre §3.
Principe du maximum en contrôle optimal :

Chapitre 3

Principe du maximum en contrôle optimal :

Dans cette section nous étudions la méthode de la principe de Pontriagin (PM) pour résoudre un problème de contôle stochastique .Où le problème formulé dans (I) est en horizon fini $(T \prec \infty)$, le coéfficient de duffision ne dépend pas de la variable de contrôle u (n'est pas contrôlé) et le coût défini par : $J(u) = \mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$.

3.1 Classe des contrôles :

Contrôle admissible : On appelle contrôle admissible tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mésurable et $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeur dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$.

Notons par $\mathbb{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles .

$$\mathbb{U} = \{u : [0,T] \times \Omega \to A \diagup u \text{ est mésurable et } (\mathcal{F}_t)\text{-adapté } \}$$

Contrôle optimal : On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal si :

$$J(\hat{u}) \leq J(u), \forall u \in \mathbb{U} \ , \ \ (J(\hat{u}) = \inf_{u \in \mathbb{U}} J(u) \ )$$

Contrôle presque-optimal : Soit $\varepsilon \succ 0$,un contrôle u^{ε} est dit presque-optimal (ou ε-optimal) si :

$$\forall u \in \mathbb{U} : J(u^{\varepsilon}) \leq J(u) + \varepsilon$$

contrôle feed-back : soit u un contôle $\mathcal{F}_t-$adapté et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendré par la processus X ,on dit que u est feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ .on dit aussi un contrôle est feed-back si et seulement si u dépent de X.

Remarque 3.1.1 *les classes de contrôle exposé ci-dessus n'est bien entendu pas exhaustive .Il existede nombreux autres classes de ccontrôle (contrôle relaxé,arrêt optimal, ergodique ....)*

Pour les problémes des contrôles ,il exist essentiellement deux méthodes de résolutions ce type des problémes, le principe de maximum (PM) de Pontryagin (conditions nécéssaires d'optimalité) et le principe de la programation dynamique (PD).
Dans ce mémoire ,nous intéréssons juste au principe de maximum de Pontryagin pour les problèmes de contrôle optimal.

3.2 Formulation forte du problème :

soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré ,(W_t) un MB standard et A un borélien de $\mathbb{R}^n$.

Considérons l'EDS contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) + \sigma(t, X_t) \\ X_0 = \varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

où :

$b : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times A \to \mathbb{R}^n$ une fonction borélenne telle que $b(t,x,a)$ est continue en a, uniformément en t et x.

$$\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ une fonction borélienne .}$$

ε : une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-adapté ,indépendante de $(W_t)_t$ telle que :

$\mathbb{E}(|\varepsilon|^2) \prec \infty$

On suppose que $b(t,x,a)$ et $\sigma(t,x)$ sont dérivables et à dérivées continues,bornées ;vérifiant :

il existe une constante $K \succ 0$ indépendante de (t,a) tel que :$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||b(t,x,a) - b(t,y,a)|| \leq K||x-y|| \text{ et } ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq K||x-y|| \tag{3.1}$$

$$||b(t,,x,a)|| \leq K(1+||x||) \text{ et } ||\sigma(t,x)|| \leq K(1+||x||) \tag{3.2}$$

Lemme 3.2.1 *Sous les conditions* (3.1) *et* (3.2) *l'équation* (3) *admet une une solution forte unique* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *telle que :* $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} ||X_t||^2\right] \prec \infty$.*Cette solution est donnée par :*

$$X_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

Maintenant,on définit la fonction de coût par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$$

où : X_T est la solution de l'équation (3) prise au temps terminal T.

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 qui vérifié :

il existe un constante $c \succ 0$ tel que :

$$|g(x)| \leq c(1 + ||x||) \tag{3.3}$$

$$|g_x| \leq c \text{ où } g_x \text{ désigne le gradient de } g \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.1 *Le coût $J(u)$ est bien définie (**i,e :**$|J(u)| \prec \infty$)*

car : $\mid J(u) \mid \leq \mathbb{E} \mid g(X_T) \mid \leq c(1 + ||X_T||) \prec \infty$

3.3 Conditions nécéssaires d'optimalité :

Pour établir les conditions nécéssaires d'optimalité vérifiées par $\hat{u}$,en faisant des comparaisons avec des contrôles qui sont proches (voisins) de $\hat{u}$;pour cela on définit :

3.3.1 Perturbations fortes :

Soient $\hat{u}$ un contrôle optimal (qui supposerons exist),$t_0 \in [0, T]$,$v \in \mathbb{U}$.

Pour h assez petit , on définit :

$$u_t^h = \begin{cases} \hat{u}_t \text{ si } t \in [0, t_0[\\ v_t \text{ si } t \in [t_{0,}, t_0 + h] \\ \hat{u}_t \text{ si } t \in]t_0 + h, T] \end{cases}$$

le contrôle u_t^h est évidement admissible appartient à $\mathbb{U}$.

Remarque 3.3.1 *Par définition u^h ne diffère de $\hat{u}$ que sur l'intervelle $[t_{0,}, t_0 + h]$.*
Maintenant,nous étudions la variation des trajectoires $\hat{X}$ et X^h,on obtient l'estimation suivante :

Lemme 3.3.1 *soient X^u et X^v les solutions correspondantes aux contrôles u et v (respectivement,$u \neq v$) de l'équation (3) ,alors on a :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^u - X_t^v \mid\right)^2\right] \leq M \quad \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid u_s - v_s \mid^2 ds\right)$$

où : M est une constante positive.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t^u - X_t^v \mid\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s^u, u_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^u)dW_s - \varepsilon + \int_0^t b(s, X_s^v, v_s)ds + \right.\right. \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t \mid b(s, X_s^u, u_s) - b(s, X_s^v, v_s) \mid ds + \int_0^t \mid \sigma(s, X_s^u) - \sigma(s, X_s^v) \mid d\right.\right.\right. \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(2 \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t \mid b(s, X_s^u, u_s) - b(s, X_s^v, v_s) \mid ds\right)^2 + 2 \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t \mid \sigma(s, X_s^u) - \right.\right.\right. \\
&\leq 2T \; \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid b(s, X_s^u, u_s) - b(s, X_s^v, v_s) \mid^2 ds\right) + 2c \; \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid \sigma(s, X_s^u) - \sigma(s, X_s^v)\right. \\
&\leq 2T \; \mathbb{E}\left(\int_0^t \mid b(s, X_s^u, u_s) - b(s, X_s^v, v_s) \mid^2 ds\right) +
\end{aligned}$$

Si on applique le Lemme précédent aux $\hat{X}$ et X^h (les solutions correspondantes aux contrôles $\hat{u}$ et u^h),alors on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \hat{X}_t - X_t^h \mid\right)^2\right] \leq M.h^2$$

c-à-d : $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \hat{X}_t - X_t^h \mid\right)^2\right] \longrightarrow 0$,quand $h \longrightarrow 0$.
Par conséquent l'appllication $h \longrightarrow X^h$ est continue en moyenne quadratique au point $h = 0$,donc l'application $h \longrightarrow J(u^h)$ est continue aussi au point $h = 0$. ∎

Remarque 3.3.2 *Si l'application $h \longrightarrow J(u^h)$ est dérivable au point $h = 0$ alors :*

$$J(u^h) = J(\hat{u}) + h\frac{dJ(u^h)}{dh} \mid_{h=0} + O(h) \;\; avec \; O(h) \;\; \rightarrow_{h\rightarrow 0} 0$$

comme $\hat{u}$ est un contrôle optimal ,alors $J(\hat{u}) \leq J(u^h)$ $\forall h$,et par conséquent $\frac{dJ(u^h)}{dh} \mid_{h=0} \geq 0$

ça nous guide de poser la question : est ce que la l'application $J(u^h)$ est dérivable au piont $h = 0$! ! ,et quelle est sa dérivée $\frac{dJ(u^h)}{dh} \mid_{h=0}$? ?.

3.3.2 Linéairisation de la solution :

La solution de l'équation (3) correspondante à u^h est donnée par :

$$X_t^h = X_{t_0}^h + \int_{t_0}^{t_0+h} b(s, X_s^h, v_s)ds + \int_{t_0}^{t_0+h} \sigma(s, X_s^h)dW_s + \int_{t_0+h}^{t} b(s, X_s^h, \hat{u}_s)ds + \int_{t_0+h}^{t} \sigma(s, X_s^h)dW_s$$

avec :

$$X_{t_0}^h = \varepsilon + \int_0^{t_0} b(s, X_s^h, \hat{u}_s)ds + \int_0^{t_0} \sigma(s, X_s^h)dW_s$$

possons : $\triangle X_t = X_t^h - \hat{X}_t$

$$\triangle X_t = \triangle X_{t_0+h} + \int_{t_0+h}^{t} \left(b(s, X_s^h, \hat{u}_s) - b(s, \hat{X}_s, \hat{u}_s)\right) ds + \int_{t_0+h}^{t} \left(\sigma(s, X_s^h) - \sigma(s, \hat{X}_s)\right) dW_s$$

Soit Z_t solution de de l'équation linéaire suivante :

$$\begin{cases} dZ_t = b_x(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t)Z_t dt + \sigma_x(t, \hat{X}_t)Z_t dW_t \\ Z_{t_0} = b(t_0, \hat{X}_{t_0}, v_{t_0}) - b(t_0, \hat{X}_{t_0}, \hat{u}_{t_0}) \end{cases} \tag{4}$$

L'équation (4) est une équation linéaire à coéfficients (b_x,σ_x) bornés,donc d'aprés le théorème (2.0.3) elle admet une solution forte unique à trajectoires continues ,et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid Z_t \mid\right)^2\right] \prec \infty$$

Proposition 3.3.1 *On suppose que les hypothèses de* [3.1] *et* [3.2] *sont satisfaites ,alors on :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid \frac{\triangle X_t}{h} - Z_t \mid^2\right)\right] \longmapsto 0, quand \;\; h \to 0.$$

Par conséquence,l'application $h \longrightarrow X^h$ *est dérivable en moyenne quadratique au point* $h = 0$ *,et sa dérivée est donnée par :*

$$\frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0} = \lim_{h\to 0} \frac{X_t^h - \hat{X}_t}{h} = Z_t \qquad \text{(dans l'espase } L^2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}))$$

Remarque 3.3.3 *si on calcule formellement* $\frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0}$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0} &= \int_{t_0}^t \frac{db(s, X_s^h, \hat{u}_s)}{dh}\mid_{h=0} ds + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma(s, X_s^h)}{dh}\mid_{h=0} dW_s \\ &= \int_{t_0}^t b_x(s, X_s^h, \hat{u}_s)\ \frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0} \quad ds + \int_{t_0}^t \sigma_x(s, X_s^h)\ \frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0} dW_s\end{aligned}$$

Si on pose :$\frac{dX_t^h}{dh}\mid_{h=0} = Z_t$,on aura :

$$\begin{aligned}Z_t &= \int_{t_0}^t b_x(s, X_s^h, \hat{u}_s) Z_t \quad ds + \int_{t_0}^t \sigma_x(s, X_s^h) Z_t dW_s \\ &\Longrightarrow dZ_t = b_x(t, X_t^h, \hat{u}_t)\ Z_t \quad dt + \sigma_x(t, X_t^h)\ Z_t\ dW_t\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.1 *L'application* $h \longrightarrow J(u^h) = \mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$ *est dérivale en moyenne quadratique au point* $h = 0$ *et sa dérivée est donnée par :*

$$\frac{dJ(u^h)}{dh}\mid_{h=0} = \mathbb{E}\left[\langle g_x(\hat{X}_T), Z_T\rangle\right]$$

où : g_x est le gradient de g en x ,et $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

3.4 Principe du maximum :

Théorème 3.4.1 *Si* $\hat{u}$ *est un contrôle optimal minimise le coût* $J(u)$ *sur l'ensemble* $\mathbb{U}$ *,alors il exist un processus* p_t *(que l'apelle le processus* ***adjoint*** *)* $\mathcal{F}_t$*-adapté ,tel que :*

$\forall v \in \mathbb{U}$:

$$\mathbb{E}\left[\langle p_t\ , b(t, \hat{X}_t, v_t)\rangle\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle p_t\ , b(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t)\rangle\right] \quad dt\_pp$$

où :

$$p_t \ = -\mathbb{E}\left[\phi^{'}(T,t)\ .g_x(\hat{X}_T)\ /\ \mathcal{F}_t\right]$$

$\phi^{'}$:la transposée de la résolvante de l'équation (4)

Preuve. Soit $\phi(t,t_0)$ solution de l'équation linéaire :

$$\begin{cases} d\phi(t,t_0) = b_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \phi(t,t_0)\ dt + \sigma_x(t,\hat{X}_t)\ \phi(t,t_0)\ dW_t \\ \phi(t_0,t_0) = \mathbb{I}_n \end{cases} \tag{5}$$

l'équation (5) admet une solution forte unique (d'aprés le théorème (2.0.3)) $\phi(t,t_0)$,donc la solution de l'équation (4) est donnée par :

$$Z_t = \phi(t,t_0)\ Z_{t_0} = \phi(t,t_0)\ \left(b(t_0,\hat{X}_{t_0},v_{t_0}) - b(t_0,\hat{X}_{t_0},\hat{u}_{t_0})\right)$$
$$\Longrightarrow Z_T = \phi(T,t)\ \left(b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\right)$$

donc ,de la corollaire précédent on aura :

$$\frac{dJ(u^h)}{dh}\ |_{h=0} = \mathbb{E}\left[\langle g_x(\hat{X}_T),Z_T\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\langle g_x(\hat{X}_T),\phi(T,t)\ \left(b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\right)\rangle\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\langle \phi'(T,t)\ g_x(\hat{X}_T), b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t\rangle\right]$$

posons : $\bar{p}_t = \phi'(T,t)\ g_x(\hat{X}_T)$

$$\frac{dJ(u^h)}{dh}\ |_{h=0} = \mathbb{E}\left[\langle\ \bar{p}_t, b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right]$$

Le processus $\bar{p}_t$ n'est pas nécéssairement adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$,pour cela on pose :

$$p_t = -\mathbb{E}\left(\bar{p}_t/\mathcal{F}_t\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{dJ(u^h)}{dh}\mid_{h=0} &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\langle\ \bar{p}_t, b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right]/\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left[\langle\ \mathbb{E}\ (\bar{p}_t/\mathcal{F}_t), \mathbb{E}\ (b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ )/\ \mathcal{F}_t\ \rangle\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\langle\ \mathbb{E}\ (\bar{p}_t/\mathcal{F}_t), b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle\ -p_t, b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right]
\end{aligned}$$

comme $\hat{u}$ est un contrôle optimal ($\frac{dJ(u^h)}{dh}\mid_{h=0}\geq 0$) ,alors :

$$\mathbb{E}\left[\langle\ -p_t, b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right] \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{U}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\langle\ p_t, b(t,\hat{X}_t,v_t) - b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right] \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\langle\ p_t, b(t,\hat{X}_t,v_t)\ \rangle\right] \leq \mathbb{E}\left(\left[\langle\ p_t, b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\ \rangle\right]\right) \quad \forall v \in \mathbb{U}\ dt - pp$$

d'où le résultat. ■

3.5 Extremalité et optimalité de contrôle :

Un probleme intéressant est celui qui consiste à regarder si les conditions nécessaires (ou principe de maximum) vérifiées par un contrôle $\hat{u}$ sont aussi suffisantes.

Généralement ces conditions nécessaires d'optimalité ne sont pas suffisantes.Mais sur des hypothèses supplémentaires,on peut obtenir ce résultat.

On considère le problème de contrôle défini dans (I) avec le coût $J(u) = \mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$ à minimiser sur l'ensemble des contôles admissibles $\mathbb{U}$,X_T est la solution de l'équation (3) prise au temps final T et b,σ, g vérifient les mêmes hypothèses .

Ce que précède ,on a vu s'il existe un contrôle optimal :

si $\hat{u} \in \mathbb{U}$,tel que $J(\hat{u}) \leq J(v) \;\; \forall v \in \mathbb{U}$,alors il existe un processus p_t,$\mathcal{F}_t -$ adapté ,tel que :
$\langle p_t, b(t, \hat{X}_t, v)\rangle \;\leq\; \langle p_t, b(t, \hat{X}_t, \hat{u})\rangle \quad \forall v \in \mathbb{U} \;\; dt - pp$,$\mathbb{P} - ps$

où :

$$p_t = -\mathbb{E}\left[\phi^{'}(T,t)\;.g_x(\hat{X}_T)\;/\;\mathcal{F}_t\right]$$

le théorème suivant va nous donner des hypothèses pour lesquelles les conditions nécessaires sont suffisantes .

Théorème 3.5.1 *Si on a les conditions suivantes :*

1. $\hat{u}$ est un contrôle optimal vérifié les condtitions nécessaires d'optimalité .
2. $\sigma^j(t,x) = D^j(t)\;x + L^j(t) \;\; j = 1, ...n$

où : σ^j est la $j^{ème}$ colonne de la matrice σ et :

$$D^j : [0,T] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$L^j : [0,T] \to \mathbb{R}^n$$

3. $g(x)$ convexe

4. C est un sous ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que :

pour tout $t \in [0,T]$: $H^*(t,x,p)$ est concave en x sur C ,où :

$$H^*(t,x,p) = \sup_{u \in \mathbb{U}} H(t,x,p,u)$$
$$H(t,x,p,u) = \langle p, b(t,x,u)\rangle$$

Alors pour tout $\theta \in [0,1]$ et pour toute constante K_0 on a :

$$J(\hat{u}) \leq \inf_{u \in \mathbb{U}} J(u) + K_0 \left(\mathbb{P}\left\{\inf_{u \in \mathbb{U}} \tau(u)\right\}\right)^{\theta}$$

où : $\tau(u)$ est le premier temps de sortie de x de l'ensemble C.

Remarque 3.5.1 *Ce dernier théorème ne nous donne pas des conditions suffisantes ,car le controle u n'est optimal ,mais il est presque optimal dans le sens où si on pose* $\varepsilon = K_0 \left(\mathbb{P}\left\{\inf_{u\in\mathbb{U}} \tau(u)\right\}\right)^{\theta}$ *on obtient :*

$$J(\hat{u}) \leq \inf_{u\in\mathbb{U}} J(u) + \varepsilon, \forall \varepsilon \succ 0$$

Corollaire 3.5.1 *Sous les hypothèse du théorème*(3.5.1) *et si* $C = \mathbb{R}^n$ ***i.e :*** $H^*(t,x,p)$ *est concave en x sur* $\mathbb{R}^n$*,Alors $\hat{u}$ est un contrôle optimal.*

Proposition 3.5.1 *sous les hypothèses du théorème* (3.5.1) *sauf la condition* (4.)*,et si* $b(t,x,u)$ *est linéaire en x (**i.e :*** $b(t,x,u) = \alpha(t)\ x + \beta(t,u)$*), Alors $\hat{u}$ est un contrôle optimal.*

Conclusion

Dans ce travail , nous avons discuté un outil essentiel pour la résolution de poblème de contrôle optimal sontochastique ,où le système dynamique gouverné par un EDS non linéaire et de coéfficient de duffision non contrôlé ,qu'on l'appelle le principe de maximum.et on va donné sur des quelles hypothèses les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Bibliographie

[1] BAHLALI Seïd,thèse de magister, principe de maximum en contrôle optimal stochastique.

[2] H. Pham(2007) :optimisation et controle stochastique appliqués à la finance .

[3] Lawrence C.Evans (2013) :An Introduction to Stochastique Différential Equations .

[4] .M.JEANBLANC(2006) :cours de calcul stochastique

[5] H.Guiol (2006) :calcul stochastique avancé.

[6] L.Gallardo (2008) :Mouvement Brownient et calcule d'Itô.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

v.a.r	variable aléatoire réelle.
MB	mouvement brownien.
EDS	équation différentielle stochastique.
IS	intégrale stochastique.
PM	principe de maximum.
PD	programation dynamique.
càdlàg	continue à droite, limité à gauche.
càglàd	continue à gauche, limité à droite.
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	espace de probabilité.
$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbb{P})$	espace de probabilité filtré.
$\mathbb{U}$	l'ensemble de contrôle admissible.
$J(u)$	La fonction de coût.
u	contrôle admissible.
$\hat{u}$	contrôle optimal.
$\langle .,. \rangle$	le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
p_t	processus adjoint.
$\mathbb{P}-ps$	presque surement par rapport la mésure de probabilitée $\mathbb{P}$.
dt_pp	presque partout par rapport la mésure de Lebesgue dt.
B-D-G	**Inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy**

Résumé

Dans ce travail, on étudie les conditions nécessaires d'optimalité pour un système dynamique gouverné par des équations différentielles stochastiques de coéfficient de diffusion non contrôlée.

MotsClé : Equations Différentielles Stochastique , processus adjointes, contrôle optimal, le principe d'optimisation .

Abstract

In this work, we study the necessary conditions of optimality for dynamic systems governed by stochastic differential equations of uncontrolled diffusion coefficient .

Key words : stochastic differential equations,assistant processus ,optimal conrol,the principe of optimization.