République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Djedai Souha

Titre :

La dérivation au sens de Malliavin

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**YEKHLEF SAMIA**	UMKB	Président
Dr.	**CHIGHOUB FARID**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BEROUIS NASSIMA**	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère Dahane Zineb et mon chère père Mohamed qui m'ont couragé toujours et supporter mes décisions

à mes grands parents ,mes soeurs Hadil et Amani et Racha ,mes frères Zakari et khalil

à tous ma famille "Djedai" et "Dahane"

à mes amies, ma soeur "Leila",mes meilleures amies avec les quelles j'ai passé bons moments à la cité "Da-

lila","Khadija","Ismahane","Amina","Foufati","Maha","Nadjwa","Saadia","Wahiba" ;"Zina","Djehina","

à mes amis du groupe de français "Asma","Jass","Roumiss","Sifou","Hatem","Azaa","Ouss"

à Abdelmalek qui me courage toujours et m'as aidè dans ce mémoire

pour toute la promotion du Corona 2020 de 2 ème master mathematiques

REMERCIEMENTS

\

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Encadreur CHIGHOUB Farid. Je le remercie de m'avoir orienté, aidé et conseillé

Je suis honorée de pouvoir remercier les membres de jury, la présidente YEKHLEF Samia et l'examinatrice BEROUIS Nassima d'avoir évalué ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont contribué au succès de ce travail.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire introduit une théorie de calcul variationnel stochastique aussi appelée Calcul de Malliavin. La recherche dans ce domaine est très vivante depuis une dizaine d'années et les applications de cette théorie à la nance sont nombreuses. Cette théorie comporte une grande dominante de calcul stochastique au formalisme parfois complexe.

Il existe dans la littérature deux philosophies différentes pour considérer et définir les opérateurs de Malliavin. La première, utilisée notamment par Nualart (1995), Bally (2009) et Solé (2005), définit la dérivée de Malliavin pour des variables aléatoires très simples puis étend cette définition par densité. La deuxième, présentée par Malliavin (1978) et Friz (2005) entre autres, définit celle-ci comme une dérivée de Fréchet sur l'espace de Wiener.

le calcul de Malliavin est un calcul des variations stochastique ou, en d'autres termes, d'un calcul différentiel infini-dimensionnel sur l'espace de Wiener, c'est-à-dire sur l'espace canonique du mouvement brownien. C'est une fusion entre théorie des probabilités et calcul différentiel. Les premiers travaux sur le sujet remontent aux années 1970. Plus particulièrement, en 1976. Paul Malliavin publiait Stochastic calculus of variations and hypoettiptic operators portant sur l'existence et la régularité de la fonction de densité de vecteurs aléatoires. La première application de cette théorie était de fournir une démonstration probabiliste du théorème de Hörmander (Hörmander “sum of squares” theorem) sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques.

Ce travail est organisée de la maniére suivante :

Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux notions de base du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continus ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettent de définir l'intégrale stochastique. On y introduit aussi le Mouvement Brownien en donnant des définitions et généralisations.

Dans le deuxiéme chapitre, on commence par une introduction au calcul de Malliavin par la décomposition en chaos de Wiener, ensuite on presente la dérivée de Malliavin en définissant ses différents opérateurs et en décrivant l'un des principaux outils du calcul, qui est la formule d'ntégration par parties, et pour finir on énonce les formules de Clark-Ocone et les equations différentielles stochastiques.

Dans le troisième chapitre, nous établirons le lien vital entre le calcul de Malliavin et la structure des solutions des EDS. Nous verrons que, sous certaine conditions sur les paramètres, on peut interpréter la dériver au sense de Malliavin de processus X solution d'un EDS de type Ito. Pour faire ca, il faut d'abord introduire la version de l'espace qui correspond à l'intégrabilité dans une puissance arbitraire $p \geq 2$.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre introductif nous ressemblons les notions basiques et les résultats de calcul stochastique dont nous besoin dans les chapitres suivants.

1.1 Processus stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1 ***(Filtration)*** *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ au sens d'inclusion, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est appelée filtration de $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Définition 1.1.2 ***(Processus stochastique)*** *Soit T un ensemble, on appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'application mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.3 *Un processus est dit continue si pour presque sûrment tout $w \in \Omega, t \to X_t(w)$ est continue (les trajectoires sont continues).*

Définition 1.1.4 ***(Adaptation d'un processus)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.5 ***(Processus progressivement mesurable)*** *Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration*$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *l'application suivant*

$$([0,t] \times \Omega, B([0,t]) \otimes F_t) \rightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(t,w) \rightarrow X_t(w)$$

est mesurable.

Définition 1.1.6 *Un processus est dit continue à droite (resp à gauche) si les trajectoires sont presque sûrement continue à droite (resp à gauche).*

Définition 1.1.7 *Soient* X *et* Y *deux processus, on dit que*

– X est modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P} - p.s$

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

– X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P} - p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c'est à dire

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$$

La notion d'instinguabilité est plus forte que la notion de modification, notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite(ou à gauche)

alors X et Y sont indistinguables.

Proposition 1.1.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continue à droite (ou continue à gauche) alors* X *est mesurable et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.8 ***(Temp d'arrêt)*** *Soit* T *une variable aléatoire à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$, T *est une* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-temps d'arrêt si, pour tout* t, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *si* T *est un temps d'arrêt, on appelle tribu* *des événements antérieur à T, la tribu défini par*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

Proposition 1.1.2 *Soit T un temps d'arrêt, si X est progressivement mesurable, le processus arrété X^T-défini par*

$$X_t^T = X_{T\Lambda t}.$$

est progressivement mesurable.

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique réel $\{B_t, t \ge 0\}$ est appelé mouvement brownien standard si les conditions suivantes sont satisfaites*

- $B_0 = 0$ presque sûrement.
- B est continue, c'est à dire $t \to B_t(w)$ est continue pour presque tout w.
- Pour tout réel positifs t et s, $B_t - B_s$ suit une loi de gaussien centrée et de variance $|t-s|$.
- Pour tout $0 \le t_0 \le t_1 \le .... \le t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants.

Proposition 1.2.1 *Soit B un mouvement brownien standard*

1. Pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \ge 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma\{B_u, u \le s\}$,
2. $-B$ est aussi mouvement brownien,
3. Pour tout $c > 0$, $\left\{cB_{t|c^2}\right\}_{t \ge 0}$ est un mouvement brownien,
4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1|t}$ est un mouvement brownien.

Propriété de Markov

Théorème 1.2.1 *Pour f borélienne bornée, pour $u > t$*

$$\mathbb{E}(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u) \mid \sigma(B_t)).$$

Pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.Pour $u > t$, conditionnellement à B_t, la variable aléatoire B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u - t$, Alors

$$\mathbb{E}(1_{B_u \leq x} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(1_{B_u \leq x} \mid \sigma(B_t)) = \mathbb{E}(1_{B_u \leq x} \mid B_t).$$

pour $t \leq u$.

Proposition 1.2.2 ***(Propriété de Markov forte)***

Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors

$$\mathbb{E}(f(B_{T+s}) \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}(f(B_{T+s}) \mid \sigma(B_T))$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+T} - B_T$ est un mouvement Brownien indépendantde $\mathcal{F}_T$.

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}-$martingale si*

i) M_t est $\mathcal{F}-$adapté.

ii) Pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable.c'est à dire $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$.

iii) Pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$$

Il est à noter qu'une sur-martingale est un processus qui vérifie les propriétés (i) et (ii), et qui satisfait $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$. De façon similaire, une sous-martingale satisfait (i) et (ii)et $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.3.1 *Si B est un MB, alors $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ et $\{\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

Proposition 1.3.1 *Soit M_t une $\mathcal{F}_t$ -martingale de carré intégrable c'est à dire $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$ pour tout t, alors pour $s \leq t$, on a $\mathbb{E}\{(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s)$*

Preuve. Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right\} &= \mathbb{E}(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(M_s M_t \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_s^2 \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - 2M_s\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

■

Définition 1.3.2 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

– On dit que $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|M_t|>\alpha)} |M_t|\, dP = 0$$

– Si $p \geq 1$, on dit que $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] < \infty$$

Théorème 1.3.1 *Un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si et seulement si*

– $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^1

– $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_\varepsilon > 0$ tel que : si $A \in \mathcal{F}_t$, avec $P(A) < \alpha_\varepsilon$ alors

$$\sup_{t\geq 0} \int_A |M_t| \, dP < \varepsilon$$

1.4 Intégrale stochastique

1.4.1 Constriction de l'intégrale stochastique

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.4.1 *$H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ est dit élémentaire s'il existe une subdivision $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n = T$ et ϕ_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$mesurable et bornée*

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(w) 1_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à B comme étant le processus continu $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dB_s,$$

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1} \left(B_t - B_{t_k}\right),$$

Notons que $I(H)_t$ peut s'écrire

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left(B_{t_i \Lambda t} - B_{t_{i-1} \Lambda t}\right).$$

Propriétés de l'intégrale stochastique

1. $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.
2. $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)$ est linéaire.

3. $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T} = 0$ et $var\left(\int_0^t H_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.
4. Propriétés d'isométrie : $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.
5. $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$.

1.4.2 Processus d'Itô

Définition 1.4.2 *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que*

$$\mathbb{P}-p.s. \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s.$

$$\int_0^T |K_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |H_s|^2 < \infty.$$

Théorème 1.4.1 ***(Première formule d'Itô)*** *Supposons f de classe C^2 Alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds$$

Si f est à dérivées bornées.

Cette formule s'écrit sous forme

$$\begin{aligned} df\left(X_t\right) &= f'\left(X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} f''\left(X_t\right) H_t^2 dt \\ &= \left[f'\left(X_t\right) K_t + \frac{1}{2} f''\left(X_t\right) H_t^2\right] dt + f'\left(X_t\right) H_t dB_t \\ &= f'\left(X_t\right) K_t dt + \frac{1}{2} f''\left(X_t\right) d\left\langle X_t\right\rangle + f'\left(X_t\right) H_t dB_t. \end{aligned}$$

On utilise souvent la notation

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) dX_t dX_t$$

On introduit les règles de calcul suivantes

$$(dt)^2 = dtdB_t = dB_tdt = 0 \text{ et } (dB_t)^2 = dt.$$

Théorème 1.4.2 ***(Deuxième formule d'Itô)*** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a*

$$f(t, X_t) = f(0, x_0) + \int_0^t f'(s, X_s)ds + \int_0^t f'(s, X_s)dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{"}_{xx}(s, X_s)H_s^2 ds$$

On peut écrire cette formule sous formule sous forme différentielle

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= f'_t(t, X_t)dt + \frac{1}{2}f^{"}_{xx}(t, X_t)H_t^2 dt + f^{'}_x(t, X_t)dX_t \\ &= f'(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f^{"}_{xx}(t, X_t)d\langle X\rangle_t \\ &= \left[f'(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)K_t + \frac{1}{2}f^{"}_{xx}(t, X_t)H_t^2\right]dt + f'_x(t, X_t)H_t dB_t. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.3 ***(Troisième formule d'Itô)*** *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp de x_2) de coefficient de dérive K^1 (resp de K^2), de coefficient de diffusion H^1 (resp de H^2) et portés respectivement par deux brownien B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que K^i, H^i est $\mathcal{F}_t^{B^i}$-adapté. doit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées.*

On a

$$\begin{aligned} f\left(X_t^1, X_t^2\right) &= f\left(x_1, x_2\right) + \int_0^t f_1^{'}\left(X_s^1, X_s^2\right)dX_s^1 + \int_0^t f_2^{'}\left(X_s^1, X_s^2\right)dX_s^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[f^{"}_{11}\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(H_s^1\right)^2 + 2\rho f^{"}_{12}\left(X_s^1, X_s^2\right)H_s^1H_s^2 + f^{"}_{22}\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(H_s^2\right)^2\right]ds. \end{aligned}$$

où $f_1^{'}$ désigne la dérivée par rapport à x_i et $f^{"}_{ij}$ la dérivée sencond par rapport à x_j puis $x_i, i, j = 1, 2$.

Proposition 1.4.1 ***(Formule d'intégration par parties)*** *Avec les mêmes notations que dans*

(1.4.2) *On a*

$$X_t^1 X_t^2 = x_1 x_2 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \rho \int_0^t H_s^1 H_s^2 ds,$$

On retrouve l'expression du crochet de X_1 *et* X_2

$$\langle X_1, X_2 \rangle_t = \rho \int_0^t H_s^1 H_s^2 ds,$$

et la formule d'intégration par parties s'écrit

$$d\left(X^1 X^2\right)_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + d\langle X^1, X^2 \rangle_t.$$

1.5 Equations différentielles stochastiques

1.5.1 Définitions et notations

On se place toujours sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on se donne B un mouvement brownien $d-$dimensionnel sur cette espace. x une variable aléatoire de carrée intégrable et indépendante de mouvement brownien B. On considère la filtration définie pour tout t positif, par

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ \sigma \left\{ x, B_s; s \leq t \right\} \cup \mathcal{N} \right\}$$

Soit T un réel strictement positif, On considère deux fonctions $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$, qui sont mesurable. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique (EDS) suivant

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

En fait cette équation doit être interpretée au sens d'une équation intégrale, à savoir

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,\ 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

Le coefficient b s'appelle coefficient dérive et σ coefficient de diffusion de l'EDS.

Définition 1.5.1 *On appelle solution (forte) de l'EDS, tout processus continu X_t tel que*

1. *X_t est progressivement mesurable ;*
2. *$\mathbb{P}-p.s.$, $\int_0^t \left\{ |b(s, X_s)| + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \right\} ds < \infty$;*
3. *$\mathbb{P}-p.s.$, on a : $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, 0 \leq t \leq T$.*

On notera par

$$\mathcal{S}^2 = \left\{ X \text{ progressivement mesurable, tels que } \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < \infty \right\},$$

$\mathcal{S}^2$ est un espace de Banach constitué des processus X_t muni de la norme $\|X\| = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, et $\mathcal{S}_c^2$ le sous espace de $\mathcal{S}^2$ formé des processus continus.

Lemme 1.5.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t,

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Proposition 1.5.1 ***(Inégalité de Holder)*** *Soit p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec $p, q \in \left]1, \infty\right[, X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$*

Alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Pour $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left[\mathbb{E}\left[|X|^2\right]\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E}\left[|Y|^2\right]\right]^{\frac{1}{2}}.$$

1.5.2 Existance et unicité

Nous avons présenter le résultat suivant, dû à Itô

Théorème 1.5.1 *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$*

1. *Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|; \tag{1.2}$$

2. *Croissance linéaire*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|); \tag{1.3}$$

3. $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$.

   Alors l'EDS posséde une unique solution (continue) appartient à $\mathcal{S}^2$ et donc à $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. On définit ϕ pour $X \in \mathcal{S}_c^2$, posons, pour tout $t \in [0, T]$

$$\phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

Le processus $\phi(X)$ est bien définit et est continu si $X \in \mathcal{S}_c^2$.

Pour chaque étape, on a recours a l'estimation suivante

Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{S}_c^2$, alors

$$\begin{aligned}\left|\phi(X)_t - \phi(Y)_t\right|^2 &= \left|\int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s - \int_0^t b(s, Y_s)\, ds - \int_0^t \sigma(s, Y_s)\, dB_s\right|^2 \\ &= \left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2\end{aligned}$$

Et comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, ona a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$

$$\begin{aligned}\left|\phi(X)_t - \phi(Y)_t\right|^2 &\leq 2\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2 \\ &\leq 2 \sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie des intégrales stochastiques, il vient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\phi(X)_t - \phi(Y)_t\right|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + \sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|\, ds\right)^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right]\end{aligned}$$

Ainsi L'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\phi(X)_t - \phi(Y)_t\right|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u 1^2 ds\right)\left(\int_0^u (b(s, X_s) - b(s, Y_s))^2\, ds\right)\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right] \\ &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u (b(s, X_s) - b(s, Y_s))^2\, ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right]\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour tout $u \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\phi(X)_t - \phi(Y)_t|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2 |X_s - Y_s|^2 ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2 |X_s - Y_s|^2 ds\right] \\
&\leq 2K^2 (T+4)\, \mathbb{E}\left[\int_0^u |X_s - Y_s|^2 ds\right] \\
&\leq 2K^2 (T+4)\, \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq s} \int_0^u |X_t - Y_t|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

On pose $C = 2K^2 (T+4)$,

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\phi(X)_t - \phi(Y)_t|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq s} \int_0^u |X_t - Y_t|^2 ds\right] \tag{1.4}$$

De plus, notant $\phi(0)$ le processus nul,

$$\phi(0)_t = x + \int_0^t b(s,0)\, ds + \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s.$$

Alors

$$|\phi(0)_t|^2 = \left|x + \int_0^t b(s,0)\, ds + \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s\right|^2.$$

Comme $(a+b+c)^3 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, ona pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
|\phi(0)_t|^2 &\leq 3\left[x^2 + \left(\int_0^t b(s,0)\, ds\right)^2 + \left(\int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 3\left[x^2 + \sup_{0 \leq t \leq T}\left(\int_0^t b(s,0)\, ds\right)^2 + \sup_{0 \leq t \leq T}\left(\int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\phi(0)_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[x^2 + \sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t b(s,0)\, ds\right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s\right|^2\right].$$

D'aprés l'inégalité de Doob et l'isométriede l'intégrale stochastique,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2\right]+3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2\right]\\
&\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\left|b\left(s,0\right)\right|ds\right)^2\right]+12\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\left|\sigma\left(s,0\right)\right|^2ds\right]\\
&\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left|b\left(s,0\right)\right|ds\right)^2\right]+12\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\sigma\left(s,0\right)\right|^2ds\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi d'aprés l'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right]\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3T\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|b\left(s,0\right)\right|^2ds\right]+12\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\sigma\left(s,0\right)\right|^2ds\right].
$$

D'aprés la condition croissance linéaire, on trouve que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right]\\
&\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3T\left[\int_0^T\left|b\left(s,0\right)\right|^2ds\right]+12\left[\int_0^T\left|\sigma\left(s,0\right)\right|^2ds\right]\\
&\leq 3\mathbb{E}\left[x^2\right]+3T\left[\int_0^T K^2\left(1+\left|0\right|\right)^2ds\right]+12\left[\int_0^T K^2\left(1+\left|0\right|\right)^2ds\right]\\
&=3\left(\mathbb{E}\left[x^2\right]+K^2T^2+4K^2T\right).
\end{aligned}
$$

Alors on obtient l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right] &\leq 3\left(\mathbb{E}\left[x^2\right]+K^2T^2+4K^2T\right)\\
&<\infty.
\end{aligned}
$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(X\right)_t-\phi\left(0\right)_t\right|^2\right] &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t-0\right|^2 ds\right] \\
&\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t-0\right|^2 ds\right] \\
&\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t-0\right|^2\right] ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(X\right)_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right]+C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t-0\right|^2\right] ds \\
&\leq \infty
\end{aligned}$$

Les estimations montrent alors que le processus $\phi\left(X\right)\in\mathcal{S}^2$, donc $\phi\left(X\right)\in\mathcal{S}_c^2$ dès que $X\in\mathcal{S}_c^2$.

<u>Existance :</u> On définit alors par récurrence une suite de processus de $\mathcal{S}_c^2$

$$X^0=0, et X^{n+1}=\phi\left(X^n\right)=x+\int_0^t b\left(s,X_s^n\right)ds+\int_0^t \sigma\left(s,Y_s^n\right)dB_s.$$

On voudrait montrer que la suite converge vers une limite qui répresente la solution de l'EDS. pour cela, nous allons majorer $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1}-X_t^n$ est uniformément convergente sur $[0,T]$ on a

$$\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2=\left|\phi\left(X^n\right)_t-\phi\left(X^{n-1}\right)_t\right|^2.$$

on obtient à l'aide de l'inégalité (1.4)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\phi\left(X^n\right)_t-\phi\left(X^{n-1}\right)_t\right|^2\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds_1\right] \\ &\leq C\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right] ds_1\end{aligned}$$

et par récurrence, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq C^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{sn-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_n}\left|X_t^1\right|^2\right] ds_n...ds_3ds_2ds_1.$$

donc on trouve que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right],$$

soit encore, notant D est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(D\frac{(CT)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{\mathbb{L}_2},$$

alors

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{\mathbb{L}_2}\leq\sqrt{D}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

En sommant sur n, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{\mathbb{L}_1} &\leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{\mathbb{L}_2} \\ &\leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s.$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$, X_n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X continue. De plus $X\in\mathcal{S}_c^2$ puisque la convergence à lieu $\mathcal{S}^2$. On vérifie trés facilement que X est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1}=\phi\left(X^n\right).$

En effet

$$\begin{aligned}X &= \lim_{n\to\infty}\left(X^{n+1}\right) &&= \lim_{n\to\infty}\phi\left(X^n\right) \\ & &&= \phi\left(\lim_{n\to\infty}X^n\right) \\ & &&= \phi\left(X\right).\end{aligned}$$

<u>Unicité :</u> Soient X et Y sont deux solutions de l'EDS (1.1) dans $\mathcal{S}_c^2$ alors $X=\phi\left(X\right)$ et $Y=\phi\left(Y\right).$ l'inégalité (1.4) donne alors, pour tout $u\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\left|X_t-Y_t\right|^2 ds\right]$$

On applique le lemme de Gronwall on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\leq a\exp\left(Ct\right),$$

avec

$$g\left(t\right)=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right], a=0, b=C,$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]=0$$

ce qui prouve que X_t et Y_t sont indistinguable. Ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS ■

Chapitre 2

Généralité sur le calcul de Malliavin

2.1 Décomposition en chaos de Wiener

La décomposition chaotique de Wiener-Itô est un resultat fondamentale en analyse stochastique, et dans le calcul de Malliavin. Itô démontra qu'on pouvait l'exprimer en termes d'intégrales d'Itô itérées.

Définition 2.1.1 *Soit f une fonction déterministe définit sur*

$$M_n = \{(t_1, ..., t_n) \in [0,T]^n : 0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n \leq T\}, \text{ pour } n > 1.$$

Pour toute fonction $f \in L^2(M_n)$ l'intégrale d'Itô n fois itérée définit par

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1, ..., t_n) dB_{t_1} ... dB_{t_n}.$$

Nous fixons $J_0(f) = f$, pour $f \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.1.1 *D'après les propriétés de l'ntégrale d'itô on a directement*

1 $J_n(f) \in L^2(P)$, par l'isométie d'Itô $\| J_n(f) \|^2_{L^2(P)} = \| f \|^2_{L^2(M_n)}$.

2 si $g \in L^2(M_k)$ et $f \in L^2(M_n)$ $(k \prec n)$, alors

$$E\left[J_k(g)J_n(f)\right] = \begin{cases} \langle g; f\rangle_{L^2(M_n)} & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

où :

$$\langle g; f\rangle_{L^2(M_n)} = \int_0^T \int_0^{m_n} \dots \int_0^{m_2} g(m_1, ..., m_n) f(m_1, ..., m_n) dm_1 ... dm_n,$$

est le produit scalaire de $L^2(M_n)$.

Remarque 2.1.1 *On peut remarquer facilement que si $f \in L^2(M_n)$ alors $J_n(f) \in L^2(P)$.*

Preuve. On a

Si $k < n$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[J_k(g)J_n(f)\right] \\
&= \int_0^T \int_0^{m_k} \dots \int_0^{m_2} (g(m_1, ..., m_k)\mathbb{E}\left[(\int_0^{m_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, ., t_{n-k}, m_1, ..., m_k) dB_{t_1} ... dB_{t_{n-k}})\right] dB^2_{m_1} ... dB^2_{m_k} \\
&\vdots \\
&= \int_0^T \int_0^{m_k} \dots \int_0^{m_2} g(m_1, ..., m_k)\mathbb{E}\left[(\int_0^{m_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, ., t_{n-k}, m_1, ..., m_k) dB_{t_1} ... dB_{t_{n-k}}))\right] dm_1 ... dm_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $k = n$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[J_n(g)J_n(f)\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}\left[(\int_0^{m_n} ... \int_0^{m_2} g(m_1,...,m_n)dB_{m_1}...dB_{m_n})(\int_0^{m_n} ... \int_0^{t_2} f(m_1,....,m_n)dB_{t_1}dB_{m_1}...dB_{m_n}) \right], \\
&= \int_0^T \int_0^{m_n} ... \int_0^{m_2} \mathbb{E}\left[(g(m_1,...,m_n))(\int_0^{t_2} f(m_1,....,m_n)dB_{t_1}) \right] dB_{m_1}...dB_{m_n}dB_{m_1}...dB_{m_n}, \\
&= \int_0^T \int_0^{m_n} ... \int_0^{m_2} g(m_1,...,m_n)\mathbb{E}\left[(\int_0^{t_2} f(m_1,....,m_n)dB_{t_1}) \right] dB^2_{m_1}...dB^2_{m_n}, \\
&\vdots \\
&= \int_0^T \int_0^{m_n} ... \int_0^{m_2} g(m_1,...,m_n)f(m_1,....,m_n)dm_1...dm_n, \\
&= \langle g; f \rangle_{L^2(M_n)}.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.2 *On dit que la fonction $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ est symétrique si $f(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)}) = f(t_1, ..., t_n)$, pour $\sigma \in \sum_n$ {toutes les permutations de $(1, ..., n)$}.*

La symétrisation d'une fonction $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\tilde{f}(t_1, ..., t_n) = \frac{1}{n!} \sum f(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)}), \text{ pour } \sigma \in \sum_n .$$

La fonction $f = \tilde{f}$ si et seulement si f est symétrique.

Si la fonction $f \in L^2_s([0,T]^n)$, alors

$$\| f \|^2_{L^2([0,T]^n)} = n! \| f \|^2_{L^2(M_n)} .$$

Définition 2.1.3 *Soit $f \in L^2_s([0,T]^n)$ (i.e f une fonction symétrique carrée intégrable sur $[0,T]^n$).*

On appelle aussi l'intégrale d'Itô n-fois itéré la variable aléatoire

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_{[0,T]^n} f(t_1, ..., t_n) dB_{t_1} dB_{t_2} .. dB_{t_n}, \\ &= n! \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1, ..., t_n) dB_{t_1} ... dB_{t_n}, \\ &= n! J_n(f), \end{aligned}$$

I_0 désigne identité de $\mathbb{R}$, on a par suite

$$\| I_n(f) \|_{L^2(\Omega)} = \| n! J_n(f) \|_{L^2(\Omega)} = n! \| f \|^2_{L^2(M_n)}$$

2.1.1 Intégrales itérées d'Itô et les polynômes d'Hermite

Une formule utile pour calculer les intégrales itérées d'Itô a été donner au moyen des polynômes d'Hermite. Les polynômes d'Hermite sont les fonctions $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies, pour $n \in N^*$, par

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

En fait, les permiers polynômes d'Hermite sont

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1 \\ h_1(x) &= x \\ h_2(x) &= x^2 - 1 \\ h_3(x) &= x^3 - 3x \\ h_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1 *Soient $g \in L^2([0,T])$ et $G = g^{\otimes n}$. On a alors*

$$n!J_n(G) = \| g \|^n_{L^2([0,T])} \; h_n \left(\frac{\int_0^T g(t)dB_t}{\| g \|_{L^2([0,T])}} \right)$$

Remarque 2.1.2 *La notation tensorielle utilisée dans l'énoncé du théorème s'explique comme suit $g^{\otimes n} = g \otimes \cdots \otimes g$ est une fonction de n variables telle que*

$$g^{\otimes n}(x_1, ..., x_n) = g(x_1)...g(x_n).$$

Exemple 2.1.1 *On calcule ainsi, en choisissant $g \equiv 1$ et $n = 3$*

$$6\int_0^T\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} dB_{t_1}dB_{t_2}dB_{t_3} = T^{3/2}h_3(\frac{B_T}{T^{1/2}}) = B_T^3 - 3TB_T$$

2.1.2 Expression du chaos de Winer-Itô

Théorème 2.1.2 *Soit $\Phi \in L^2(\Omega)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable. Il existe une unique suite de fonctions déterministes $(f_n) \subset L^2(M_n)$ telle que*

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(f_n),$$

et on a l'isométrie

$$\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{L^2(M_n)}.$$

Théorème 2.1.3 *Soit $\Phi \in L^2(\Omega)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable. Il existe une unique suite de fonctions déterministes $f_n \in L^2_s(M_n)$ telle que*

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

en plus on a l'isométrie

$$\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|f_n\|^2_{L^2([0.T]^n)}.$$

Exemple 2.1.2 *Calculons les décompositions de $\Phi_t = B_t(B_T - B_t)$. On a*

$$\begin{aligned}
B_t(B_T - B_t) &= B_t\int_t^T dB_{t_2} \\
&= \int_t^T\int_0^t dB_{t_1}dB_{t_2} \\
&= \int_t^T\int_0^{t_2} 1_{\{t_1<t<t_2\}}dB_{t_1}dB_{t_2}
\end{aligned}$$

d'où $\Phi_t = J_2(1_{\{t1<t<t2\}})$. Pour la décomposition symétrique, il suffit de calculer la symétrisée de $1_{\{t1<t<t2\}}$:

$$\Phi_t = I_2(\frac{1}{2}(1_{\{t_1<t<t_2\}} + 1_{\{t_1<t<t_2\}}))$$

Théorème 2.1.4 *Soit $h_n(x)$ le n polynôme d'Hermite et $g \in L^2([0,T])$ une fonction de norme 1. Alors*

$$\begin{aligned}
n!h_n(B\,(g)) &= \int_{[0,T]^n} g\,(t_1)\,..g\,(t_n)\,dB_{t_1}...dB_{t_n}, \\
&= I_n(g^{\otimes n}),
\end{aligned}$$

où

$$g^{\otimes n}(t_1, ..., t_n) = g(t_1)...g(t_n).$$

Par conséquent, on obtient que l'intégrale I_n, est une surjection de $L^2([0,T]^n)$ sur H_n, et avec la décomposition en chaos, que toute variable aléatoire $\Phi \in L^2(\Omega)$ peut-être développée en série d'intégrales multiples

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

où $f_o = E(\Phi)$. Il s'agit de la décomposition en chaos de Wiener-Itô. Les fonctions f_n, de cette représentation sont uniquement déterminées par Φ et symétriques. Ainsi, $f_n \in L^2_s([0,T]^n)$ pour chaque

n. Comme il s'agit d'une décomposition orthogonale, si

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

alors

$$\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|f_n\|^2_{L^2([0.T]^n)}.$$

2.2 Opérateurs au sens de Malliavin

2.2.1 La dérivée de Malliavin sur des espaces simples

Dans cette section on se restreindra, pour simplifer, à l'intervalle [0.1].

On considère un espace de probabilité $(\Omega\ ,\mathcal{F},\mathbb{P})$.sur lequel est défni un mouvement brownien noté $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ et on note $\mathcal{F}_t\ = \sigma(B_s\,;\ s \leq t)$. On subdivise l'intervalle $[0,1]$ à l'aide des $t_k^n = k2^{-n}$ pour $n \in N^*$ et $k \in \{0, ..., 2^n\}$. On note également $\Delta_k^n = B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}$ les accroissements du mouvement brownien et $\Delta_n = \left(\Delta_0^n, ..., \Delta_{2^n-1}^n\right)$.

Nous introduisons maintenant les espaces simples sur lesquels on va définir les deux opérateur. $C_p^\infty\left(\mathbb{R}^{2^n}\right)$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à croissance au plus polynômial à l'infini.

Définition 2.2.1 (L'ensembles des fonctionnelles simples) *Soit*

$$S_n = \left\{f\left(\Delta_0^n, ..., \Delta_{2^{n-1}}^n\right),\ f \in C_p^\infty(R^{2^n})\right\}.$$

Les S_n forment une suite croissante d'ensembles inclus dans $L^2(\Omega)$. Les éléments de $S = \cup_{n\geq 1} Sn$ s'appellent fonctionnelles simples.

Cet ensemble nous permettra de défnir la dérivée de Malliavin. L'espace des fonctionnelles simples est construit de telle sorte qu'apparaîsse clairement la dépendance d'une variable aléatoire de S_n

avec les accroissements du brownien. De façon analogue, nous défnissons les ensembles qui serviront à construire l'intégrale de Skorokhod.

Définition 2.2.2 (L'ensemble des processus simples) *Soit*

$$P_n = \left\{ \sum_{i=0}^{2^n-1} 1_{\left[t_i^n, t_{i+1}^{n+1}\right[} (t)\, F_i\,(\omega)\,;(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega \ \ et \ F_k \in S_n \right\}.$$

Les P_n forment une suite croissante d'ensembles inclus dans $L^2([0,1]\times\Omega)$. Les éléments de $P = \underset{n\geq 1}{\cup} P_n$ s'appellent processus simples.

Nous pouvons désormais introduire les opérateurs sur ces espaces.

Définition 2.2.3 (L'opérateur de dérivation au sens de Malliavin)

Soit $F \in S$, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F = f(\Delta^n)$. L'opérateur de dérivation, au sens de Malliavin, de la fonctionnelle simple F en un point $s \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$ est la fonction $D : S_n \longrightarrow P_n$ définie par $D_s F = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Delta^n)$, c'est-à-dire $\forall s \in [0,1]$

$$D_s F = \sum_{i=0.}^{2^n-1} 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(s) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Delta^n).$$

Il est logique que cet opérateur de dérivation associe à une variable aléatoire un processus. A partir de cette défnition, on constate déjà que pour une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-adaptée et pour $s > t$ on a $D_s F = 0$, une variable aléatoire caractérisée à une date donnée ne dépend pas des accroissements postérieurs du brownien.

Exemple 2.2.1 *On calcule la dérivée au sens de Malliavin de B_1. Notons que $B_1 = \Delta_1^1$ donc*

$$D_s B_1 = 1_{[0,1]}(s).$$

Définition 2.2.4 (L'opérateur d'intégration au sens de Skorokhod) *Soit $u \in \mathbf{P}$, alors $\exists n \in N^*$ tel que $u \in \mathbf{P}_n$. L'opérateur d'intégration, au sens de Skorokhod, du processus simple u est alors* *la fonction* $\delta : \mathbf{P}_n - \longrightarrow S_n$ *définie par :*

$$\delta(u) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i(\Delta^n)\Delta_i^n - \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\Delta^n)\Delta_i^n \frac{1}{2^n}$$

avec :

$$u(t,\omega) = \sum_{i=0}^{2^n-1} 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) F_i(\omega) \;\; et \; F_i = f_i(\Delta^n)$$

Notons que le premier terme de ces deux sommes correspond à une intégrale usuelle d'Itô. Le second terme prend en compte, le fait que le processus n'est pas nécessairement adapté. Ce deuxième terme est nécessaire pour obtenir la relation d'intégration par parties et a été intégré dans la dé nition dans ce but. Nous reviendrons sur ce point dans la partie relative aux propriétés de ces opérateurs.

Si on définit les processus prévisibles par :

$$\forall k \in \{0, ..., 2^n - 1\}, f_k(\Delta^n) = f_k(\Delta_0^n, ..., \Delta_{k-1}^n)$$

On remarque que lorsque le processus simple u est prévisible, le second terme de cette somme s'annule. Quand on étend cette propriété par densité, les processus adaptés étant des limites de processus prévisibles, les intégrales de Skorokhod coïncident avec celles d'Itô.

Définition 2.2.5 *L'espace de Cameron-Martin est défini comme*

$$H = \left\{ \zeta \in \Omega : \exists g \in L^2([0,T]) : \zeta(t) = \int_0^t g(s)ds \right\}.$$

Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. qui a des dérivées au sens de Gâteaux dans toutes les directions $\zeta \in H$ au sens fort, c'est 'a dire que la limite

$$\mathcal{D}_\zeta F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\omega + \zeta) - F(\omega)}{\varepsilon},$$

existe dans $L^2(\Omega)$. Donc F est dérivable au sens de Malliavin s'il existe un processus $\psi \in L^2([0,T] \times \Omega)$

tel que

$$\mathcal{D}_\zeta F = \int_0^T \psi_t(\omega)\, g(s) ds.$$

On pose alors

$$\mathcal{D}_\zeta F(\omega) = \psi_t(\omega)$$

Le processus $\mathcal{D}F(\cdot) \in L^2([0,T] \times \Omega)$ est appellé la dérivée de Malliavin de F.

L'ensemble de toutes les v.a. dérivables au sens de Malliavin est noté $\mathcal{D}^{1,2}$.

Définition 2.2.6 *Un polynôme de Wiener est une v.a. $F : \Omega \to R$ de la forme*

$$F(\omega) = \varphi(\theta_1, ..., \theta_n),$$

où φ est un polynôme à n variables et

$$\theta_i = \int_0^T f_i(t) dB_t, \text{ avec } f_i \in L^2([0,T]).$$

L'ensemble des polynômes de Wiener sera noté P, qu'il dense dans $L^2(\Omega)$. La dérivée de Malliavin des éléments de P est facile à calculer.

Définition 2.2.7 *Soit $F \in \mathcal{P}$ de la forme*

$$F(\omega) = \varphi(\theta_1, ..., \theta_n),$$

Alors $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ et

$$\mathcal{D}_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\theta_1, ..., \theta_n) f_i(t).$$

Proposition 2.2.1 *On dit que les opérateurs D et δ sont fermés si (F_n) est une suite de S qui tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et si (DF_n) tend vers u dans $L^2([0,1] \times \Omega)$, alors $u = 0$. Il en va de même pour δ.*

La défnition de l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$ sur lequel on peut étendre la notion de dérivée au sens de Malliavin.est

$$\mathcal{D}^{1,2} = \begin{cases} F \in L^2(\Omega),\ \ tq\ \exists (F_n)_n \ suite\ de\ S\ \ tq \\ \qquad F_n \longrightarrow F \qquad Dans\ L^2(\Omega) \\ \quad DF_n \longrightarrow u \qquad Dans\ L^2([0,1]\times\Omega) \end{cases}$$

on pose alors pour $F \in \mathcal{D}^{1,2}$, $DF = u$.

Remarque 2.2.1 *La défnition de DF ne dépend pas de la suite (F_n) car l'opérateur D est fermé.*

On défnit également l'espace $Dom(\delta)$ sur lequel on étend la notion d'intégrale de Skorokhod.

Définition 2.2.8 *On appelle $Dom(\delta)$ l'ensemble des $u \in L^2([0,1]\times\Omega)$ tel qu'il existe une suite (u_n) de P telle que*

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \qquad Dans\ L^2([0,1]\times\Omega), \\ \delta(u_n) \longrightarrow F \qquad\quad Dans\ L^2(\Omega). \end{cases}$$

On défnit alors pour un tel u, $F = \delta(u)$.

La fermeture de l'opérateur δ implique que le résultat ne dépend pas de la suite choisie.

Théorème 2.2.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de Lipschitz, c'est-à-dire telle que*

$$\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq K \parallel x - y \parallel,$$

pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$. Si $F = (F_1, ..., F_n)$ un vecteur aléatoire tel que $F_i \in \mathcal{D}^{1,2}$ $\forall i$. Alors $\varphi(F) \in D^{1,2}$ et il existe un vecteur aléatoire $G = (G_1, ..., G_n)$ borné par la constante de Lipschitz de φ et tel que

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{n} G_i DF_i,$$

De plus, si la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$G_i = \partial_i \varphi(F),$$

alors

$$D\left(\varphi\left(F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\partial_{i}\varphi\left(F\right)DF_{i}.$$

de $\mathcal{D}^{1,2}$

Remarque 2.2.2 *Dans l'exemple suivant, on observe que la dérivée de Malliavin est la dérivée naturelle de l'intégrale de Wiener. Cette relation vient du fait que les intégrales stochastiques de Wiener et d'Itô sont des cas particuliers de l'intégrale de Skorohod.*

Exemple 2.2.2 *Si f est un élément de $L^2([0,T])$, alors l'intégrale de Wiener*

$$\int_0^T f(s)dB_s,$$

est différentiabte au sens de Malliavin, c'est-à-dire qu'elle est élément de $\mathcal{D}^{1,2}$ et sa dérivée est

$$D_t\left(\int_0^T f(s)dB_s\right)=f(t).$$

2.2.2 Formule d'intégration par parties

Proposition 2.2.2 (Formule d'intégration par parties) $\forall F\in D^{1,2},\forall u\in Dom(\delta)$ *on a*

$$E\left[\int_0^1 D_S F.u_s ds\right]=E\left(F.\delta\left(u\right)\right).$$

On a donc la relation d'adjonction suivante

$$< DF,u >_{L^2([0,T]\times\Omega)}=< F,\delta(u) >_{L^2_{(\Omega)}}.$$

Pour démontrer cette proposition on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.2.1 *soit χ une v.a.r. de loi $N(0,\sigma^2)$, alors pour φ, $g \in C^1(\mathbb{R})$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\varphi\prime\left(\chi\right)g\left(\chi\right)\right]=\mathbb{E}\left[\varphi\left(\chi\right)\left(\frac{\chi}{\sigma^2}g\left(\chi\right)-g\prime\left(\chi\right)\right)\right].$$

Preuve. Cela résulte d'un calcul direct par intégration par parties. ■

Preuve. On se donne $F\in S_n, u\in P_n$et on utilise la défnition de D_sF

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^1 D_S F.u_s ds\right] &= \sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\chi^n\right)f_k\left(\chi^n\right)\right]\frac{1}{2^n}, \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{E}\left[f\left(\chi^n\right)\left(\frac{\chi^n}{2^{-n}}f_k\left(\chi^n\right)-\partial_k f_k\left(\chi^n\right)\right)\right]\frac{1}{2^n}, \text{(d'aprés lemme)} \\
&= \mathbb{E}\left[F.\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}f\left(\chi^n\right)\chi^n-\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\chi^n\right)\frac{1}{2^n}\right)\right], \\
&= \mathbb{E}\left[F.\delta\left(u\right)\right].
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Formules de calcul et de commutation

Proposition 2.2.3 (Formule de dérivation en chaîne) $\forall F_1,...,F_d\in\mathcal{D}^{1,2}$, $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^d)$ *on a* $\varphi(F_1,...,F_d)\in\mathcal{D}^{1,2}$ *ainsi que la formule de dérivation (dite de dérivation en chaîne)*

$$D_t\varphi(F_1,...,F_d)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(F_1,...,F_d)F_i(t).$$

Cette formule de commutation permet également de calculer de nombreuses dérivées au sens de Malliavin.

Exemple 2.2.3 *nous pouvons maintenant calculer la dérivée de Malliavin $D_t(exp(B_t))$, où $t\in[0,1]$ à l'aide de la formule de dérivation en chaîne*

$$D_t(exp(B_t))=exp(B_t)1_{[0,t]}(t),$$

Définition 2.2.9 *Soit $f_n \in L_s^2([0,T]^n)$. Alors $I_n(f_n) \in \mathcal{D}^{1,2}$ et $D_t(I_n(f_n)) = nI_{n-1}(f_n(\cdot,t))$, où le terme de droite est une notation pour l'intégrale d'Itô $(n-1)$ fois itérée par rapport aux $n-1$ première variables $t_1,...,t_{n-1}$ de $f(t_1,t_2,...,t_{n-1},t)$ (la variable t n'est donc pas intégrée).*

Théorème 2.2.2 *Soit $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\Omega)$. Alors $F \in \mathcal{D}^{1,2}$si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \parallel f_n \parallel_{L^2([0,T]^n)}^2 < \infty,$$

et dans ce cas-là on a

$$D_tF = \sum_{n=0}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot,t)),$$

L'idée de la démonstration se base sur un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}&\parallel DF_m - DF_k \parallel_{L^2([0,T]\times\Omega)}^2 = \parallel \sum_{n=0}^{m} nI_{n-1}(f_n(\cdot,\cdot)) \parallel_{L^2([0,T]\times\Omega)}^2 \\ &= \sum_{n=k+1}^{m} nn! \parallel f_n \parallel_{L^2([0,T]^n)}^2 .\end{aligned}$$

pour $F_m = \sum\limits_{n=0}^{m} I_n(f_n)$.

Extension au cas multi-dimensionnel

Dans cette section nous traitons le cas multi-dimensionnel. Soit un brownien d-dimensionnel $B = (B_1, B_2, ..., B_d)$, et les accroissements correspondants $\Delta_k^n = (\Delta_k^{1,n}, ..., \Delta_k^{d,n})$. Maintenant, nous modifions les défnitions des fonctionnelles simples pour qu'elles correspondent à des fonctions C^∞ aux dérivées de croissance au plus polynômial à l'infini de ces accroissements. Soit une variable aléatoire réelle, $F = f(\Delta_0^n, ..., \Delta_{2^n-1}^n)$, la dérivée au sens de Malliavin est alors un processus vectoriel

$$D_s^iF = \frac{\partial F}{\partial \Delta_s^i} = \frac{\partial f}{\partial x_k^i\,(\Delta^n)} \text{ si } t_k^n \leq s \leq t_{k+1}^n,$$

$$DF = (D^1F, ..., D^dF) \quad \text{et} \quad < DF, DG >= \sum_{k=1}^{d} \int_0^1 D_s^i F.D_s^i G ds.$$

On obtient également les dérivées d'ordres supérieurs. Pour α multi-indice tel que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = k$,

$$D_s^i F = \frac{\partial^k F}{\partial \Delta_{s_1}^{\alpha_1}, ..., \partial \Delta_{s_k}^{\alpha_k}}.$$

Remarque 2.2.3 *Quand la variable aléatoire F est de dimension m, la dérivée au sens de Malliavin est alors une matrice de dimensions $m \times d$.*

On redéfinit l'intégrale de Skorokhod multi-dimensionnelle. On la définit sur des processus simples $u(t, \omega) = \sum_{k=1}^{d} 1_{[t_k^n, t_{k+1}^n[} f_k(\Delta^n)$. Alors $\delta_i = \sum_{k=1}^{d} f_k(\Delta^n)\Delta_k^{n,i} - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_k}{\partial x_k^i}(\Delta_k^n)\frac{1}{2^n} = \int_0^1 u_s dB_s^i$. C'est l'intégrale par rapport au Mouvement Brownien B_i. La formule d'intégration par parties devient :

$$\mathbb{E} \int_0^1 \sum_{k=1}^{d} D_s^i F.u_s^i ds = \sum_{k=1}^{d} \mathbb{E}\left(F\delta_i\left(u^i\right)\right) = \mathbb{E}\left(F\delta\left(u\right)\right).$$

Enfin on introduit la matrice de covariance de Malliavin.

Définition 2.2.10 (matrice de covariance de Malliavin) *Soit $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ avec $F_i \in \mathcal{D}^{1,2}$, on introduit la matrice de covariance de Malliavin de la variable aléatoire n-dimensionnelle F par $\sigma_F = (\sigma_F^{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où*

$$\sigma_F^{ij} = \left\langle DF^i, DF^j \right\rangle = \sum_{k=1}^{d} \int_0^1 D_s^k F^i D_s^k F^j ds.$$

Exemple 2.2.4 *On considère des diffusions sans drift $F^i = c_i + \sum_{k=1}^{d} \int_0^1 h_s^{i,j} dB_s^j$ on a donc $D_s^k F^i = h_s^{ik}$ d'où la matrice de covariance*

$$\left\langle DF^i, DF^j \right\rangle = \sum_{k=1}^{d} \int_0^1 h_s^{i,k} h_s^{j,k} ds.$$

On retrouve

$$\sigma_{ij} = E\left[F^i - c_i\right] E\left[F^j - c_i\right]$$

c'est-à-dire la matrice de covariance usuelle.

2.3 Intégrale de Skorokhod

La dérivée de Malliavin est un opérateur non-borné et fermé sur l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$ lequel est dense dans $L^2(\Omega)$. On peut donc définir son opérateur adjoint, noté δ et appelé opérateur de divergence ou intégrale de Skorkhod. Par définition d'un opérateur adjoint, le domaine de δ est l'ensemble des éléments μ de$L^2([0,T]\times\Omega)$ qui sont tels que :

$$Dom(\delta)=\left\{\mu\in L^2([0,T]\times\Omega),\exists c\left(\mu\right):\mid\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T D_t\left(F\right)\mu_t dt\right]\mid\leq c\left(\mu\right)\parallel F\parallel_{L^2(\Omega)}\forall F\in\mathcal{D}^{1,2}\right\}.$$

pour tout $F\in\mathcal{D}^{1,2}$, où c est une constante pouvant dépendre de μ. Pour chaque élément μ dans $Dom(\delta)$, on peut caractériser $\delta(\mu)$ avec l'équation suivante :$\delta:Dom(\delta)\to L^2(\Omega)$

$$\mathbb{E}\left[F\delta(\mu)\right]=\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T D_t\left(F\right)\mu\left(t\right)dt\right], \tag{2.1}$$

pour tout $F\in\mathcal{D}^{1,2}$.On remarque qu'il s'agit d'une égalité de produits scalaires respectivement dans $L^2(\Omega)$et $L^2([0,T]\times\Omega)$.

$$\langle\delta(\mu),F\rangle_{L^2(\Omega)}=\langle\mu,DF\rangle_{L^2([0,T]\times\Omega)} \tag{2,2}$$

L'équation (2.1) est souvent appelée formule d'intégration par parties. On peut aussi représenter l'opérateur δ à l'aide des décompositions chaotiques.

Proposition 2.3.1 *Si (u_t) est un processus adapté on a*

$$D_s\left(\int\limits_0^1 u_t dB_t\right)=u_s+\int\limits_0^1 D_s u_t dB_t$$

ainsi que

$$D_s\left(\int\limits_0^1 u_t dt\right)=\int\limits_0^1 D_s u_t dt,$$

de plus $D_s u_t = 0$ pour $s > t$ et que L'intégrale de Skorokhod est une intégrale d'Itô.

Proposition 2.3.2 *Soit F une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable appartenant à $\mathcal{D}^{1,2}$. Alors, pour tout u appartenant à $Dom(\delta)$ on a*

$$\delta(Fu) = F.\delta(u) - \int_0^T D_t F.u(t)\, dt.$$

Dans ce qui suit, on utilisera régulièrement cette formule pour expliciter les intégrales de Skorokhod. En général, dans les applications, u est adapté et on peut calculer les intégrales stochastiques d'Itô.

Proposition 2.3.3 *Soit $\mu \in L^2([0,T] \times \Omega)$. Alors $\mu \in Dom(\delta)$ et*

$$\int_0^T \mu_t \delta B_t = \int_0^T \mu_t dB_t,$$

où le terme de droite est une intégrale d'Itô.

Ce résultat montre que l'intégrale de Skorohod des processus adaptés est bien connue. Donnons une règle de calcul très utile pour calculer l'intégrale de Skorohod d'un processus non nécessairement adapté.

Proposition 2.3.4 *Soient $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ et $u \in Dom(\delta)$ tels que $F\mu \in L^2([0,T] \times \Omega)$. Alors on a $F\mu \in Dom(\delta)$ et*

$$\delta(F\mu) = F\delta(\mu) - \int_0^T D_t F \mu_t dt.$$

L'idée de la démonstration, il suffit d'utiliser la formule de la dérivée d'un produit et la relation de dualité (2.2), pour une v.a. régulière G,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F\delta(\mu)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T D_t(GF)\,\mu_t dt\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T (D_t G)\, F\mu_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T (D_t F)\, G\mu_t dt\right], \\
&= \mathbb{E}[G\delta(F\mu)] + \mathbb{E}\left[G\int_0^T D_t F \mu_t dt\right].
\end{aligned}$$

On conclut ensuite par densité.

Exemple 2.3.1 *Dans cet exemple de processus, l'intégrale de Skorokhod n'est pas l'intégrale d'Itô,* B_T *n'est pas adapté, donc la proposition* (2.3.3) *ne s'applique pas. Il est naturel de définir*

$$\int_0^T B_T dB_t = B_T \int_0^T dB_t$$

ce qui nous donne

$$\int_0^T B_T dB_t = B_T^2$$

alors que, par la proposition (2.3.4),

$$\delta\left(B_T\right) = B_T \delta\left(1\right) - \int_0^T D_s B_T dt = B_T^2 - \int_0^T 1_{t \leq T} dt = B_T^2 - T.$$

Comme pour la dérivée de Malliavin, on peut exprimer l'intégrale de Skorokhod en termes de la décomposition en chaos de Wiener.

Proposition 2.3.5 *Soit* μ *un élément de* $L^2([0,T] \times \Omega)$ *de la forme*

$$\mu\left(t\right) = \sum_{n \geq 0} 1_n \left(f_n\left(\cdot, t\right)\right).$$

Alors, μ est élément du domaine de δ si et seulement si la somme $\sum_{n \geq 0} 1_{n+1}\left(\tilde{f}_n\right)$ converge dans $L^2(\Omega)$, où $\tilde{f}_n$ est la symétrisation de f_n,. Dans ce cas,

$$\delta\left(\mu\right) = \sum_{n \geq 0} 1_{n+1}\left(\tilde{f}_n\right).$$

La formule d'intégration par parties est intéressante lorsque le processus μ est adapté : dans ce cas l'intégrale de Skorokhod coïncide avec l'intégrale d'Itô.

Proposition 2.3.6 *L'éspace (fermé) des processus adaptés de carré intégrable* $L_a^2([0,T] \times \Omega)$*est* *contenu dans* $Dom(\delta)$ *et, si* $\mu \in L_a^2([0,T] \times \Omega)$, *alors*

$$\delta(\mu) = \int_0^T \mu(t)\, dB_t.$$

Lemme 2.3.1 *Soit* $\mu \in L^2([0,T] \times \Omega)$ *un processus tel que*

1. μ_t est un élément de $\mathcal{D}^{1,2}$,

2. $D_s\mu_t$ est un élément de $Dom(\delta)$ pour tout $s \in [0,T]$,

3. $\delta(D_s\mu)$est un élément de $L^2([0,T] \times \Omega)$.

Alors $\delta(\mu) \in \mathcal{D}^{1,2}$ et $D_s\delta(\mu) = \mu_s + \delta(D_s\mu)$.

Preuve. En appliquant le théorème (2.2.2) et la proposition (2.3.5) à la décomposition en chaos de Wiener de μ on obtient

$$\begin{aligned} D_s\delta(\mu) &= D_s\delta\left(\sum_{n\geq 0} 1_n(f_n(\cdot,t))\right), \\ &= D_s\left(\sum_{n\geq 0} 1_{n+1}\left(\tilde{f}_n\right)\right), \\ &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\, 1_n\left(\tilde{f}_n(\cdot,s)\right). \end{aligned}$$

D'autre part on calcule

$$\begin{aligned} \delta(D_s\mu) &= \delta\left(D_s\sum_{n\geq 0} 1_n(f_n(\cdot,t))\right), \\ &= \delta\left(\sum_{n\geq 0} n 1_{n-1}(f_n(\cdot,s,t))\right), \\ &= \sum_{n\geq 0} n 1_n\left(\tilde{f}_n(\cdot,s,\cdot)\right). \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que le positionnement de la variable supplémentaire s parmi les autres variables $t_1, .., t_n$ n'a pas d'importance dans la symétrisation de f_n pour conclure. Notons qu'on peut voir ce résultat comme une expression pour le commutateur des deux opérateurs D et δ. Il est donc possible de le prouver à l'aide de théorèmes d'analyse fonctionnelle abstraite. ■

Nous présentons la propriété de commutativité entre l'intégrale de Skorokhod et la dérivée de Malliavin. Celle-ci sera particulièrement intéressante lorsque le processus intégré au sens de Skorokhod sera adapté.

Proposition 2.3.7 *Soit u un processus élément de $L^2([0,T]\times\Omega)$ tel que $u(t) = \sum\limits_{n\geq 0} 1_n\left(f_n\left(\cdot,t\right)\right)$. Alors, $u\in L^{1,2}$si et seulement si*

$$\sum_{n\geq 1} nn!\|f_n\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < \infty.$$

Dans ce cas, $u(t)\in\mathcal{D}^{1,2}$ pour presque tout $t\in[0,T]$.

2.3.1 Formule de Clark-Ocone

Nous avons introuduit l'intégrale de Skorohod, qui est l'opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin, maintenant on vas démontrer le théorème de représentation de Clark-Ocone. Avant de présenter la formule de Clark-Ocone, voici un lemme nous indiquant comment se comportent les décompositions chaotiques par rapport à une espérance conditionnelle.

Lemme 2.3.2 *Considérons la variable aléatoire $F = I_n(f)$, où $f\in L^2_s([0,T]^n)$ et où $n\geq 1$. Alors,*

$$\mathbb{E}\left[F\mid F_t\right] = I_n(fI^{\otimes n}_{[0,t]}).$$

Ce lemme a une forme similaire lorsque F est représentée par une somme infinie. Conséquemment, pour $0<s<T$, si $F\in\mathcal{D}^{1,2}$ et si F est $\mathcal{F}_s$-mesurable, alors $D_tF = 0$ presque partout sur $]s,T]\times\Omega$. Voici finalement la formule de représentation de Clark-Ocone.

Proposition 2.3.8 *Si $F\in\mathcal{D}^{1,2}$, alors*

$$F = \mathbb{E}\left[F\right] + \int_0^T \mathbb{E}\left[D_t\left(F\right)\mid F_t\right]dB_t.$$

Preuve. Supposons que $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$. Alors, en appliquant dans l'ordre le théorème (2.2.2) et le lemme précédent, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[D_t(F) \mid F_t\right] &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{E}\left[I_{n-1}\left(f_n(t_1,..,t_{n-1},t)\right) \mid F_t\right], \\
&= \sum_{n\geq 1} nI_{n-1}(f_n(t_1,..,t_{n-1},t) l_{[0,t]}(t_1) \ldots\ldots l_{[0,t]}(t_{n-1})), \\
&= \sum_{n\geq 1} nI_{n-1}(f_n(t_1,..,t_{n-1},t) l_{\{t_1\vee..\vee t_{n-1}\leq t\}}).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition (2.3.3) et la proposition (2.3.5), on a que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E}\left[D_t(F) \mid F_t\right] dB_t &= \delta\left(\mathbb{E}\left[D_t(F) \mid F_t\right]\right), \\
&= \sum_{n\geq 1} I_n(f_n), \\
&= F - \mathbb{E}\left[F\right].
\end{aligned}$$

■

Cette formule a été généralisée aux variables aléatoires dans l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$.

Chapitre 3

Dérivée au sens de Malliavin d'un processus de diffusion

On suppose que $B = (B_t)_{t\geq 0}$, avec $B_t = \left(B_t^1, ..., B_t^d\right)$, est un mouvement brownien d-dimensionnel. Considérons l'équation différentielle stochastique à m dimensions

$$dX_t = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(X_t) dB_t^j + b(X_t)dt. \tag{3.1}$$

avec une condition initiale $X_t = x_0 \in \mathbb{R}^m$, où les coefficients $\sigma_j, b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq d$ sont des fonctions mesurables. Par définition, une solution de l'équation (3.1) est un processus adapté $X = (X_t)_{t\geq 0}$ tel que, pour tout $T > 0$ et $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t \mid^p\right) \prec \infty$$

et X satisfait l'équation intégrale

$$X_t = x_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(X_s) dB_s^j + \int_0^t b(X_s)ds. \tag{3.2}$$

Le résultat suivant est bien connu.

Théorème 3.0.1 *Supposons que les coefficients $\sigma_j, b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq d$ satisfont la condition de Lipschitz, pour tout x,$y \in \mathbb{R}^m$,*

$$\max_j (\mid \sigma_j(x) - \sigma_j(y) \mid, \mid b(x) - b(y) \mid) \leq K \mid x - y \mid . \tag{3.3}$$

Il existe alors une solution unique X à l'équation (3.2).Lorsque les coefficients de l'équation (3.1) sont continument différentiables, les composants de les solutions sont différentiables au sens de Malliavin.

Proposition 3.0.9 *Supposons que les coefficients σ_j, b sont dans $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$. Alors, pour tout $t \geq 0$ et $i = 1, .., m$, $X_t^i \in \mathbb{D}^{1,\infty}$, et pour $r \leq t$ et $j = 1, .., d$,*

$$D_r^j X_t = \sigma_j(X_r) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{d} \partial_k \sigma_l(X_s) D_r^j X_s^k dB_s^l + \sum_{k=1}^{m} \partial_k b(X_s) D_r^j X_s^k ds. \tag{3.4}$$

Preuve. Pour simplifier, nous supposons que $b = 0$. Considérons les approximations de Picard données par

$$X_t^{(0)} = x_0$$

et

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(X_s^{(n)}) dB_s^j,$$

si $n \geq 0$.on va prouver la récurrence suivante par induction sur n. Prétendre $X_t^{(n),i} \in \mathbb{D}^{1,\infty}$ pour tout $i = 1, ..., m$, $t \geq 0$. De plus, pour tout $p > 1$ et $t \geq 0$,

$$\psi_n(t) = \sup_{0 \leq r \leq t} \mathbb{E}\left(\sup_{s \in [r,t]} \mid D_r X_s^{(n)} \mid^p \right) \prec \infty, \tag{3.5}$$

et, pour tout $T > 0$ et $t \in [0, T]$

$$\psi_{n+1}(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \psi_n(s) \, ds, \tag{3.6}$$

pour certaines constantes c_1, c_2 en fonction de T. Clairement, la relation est vrie pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vrie pour n. Par l'application de la propriété (11) de l'opérateur de divergence et de la règle de chaîne, pour tout $r \leq t$, $i = 1, ..., m$, et $l = 1, ..., d$, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_r^l X_t^{(n+1),i} &= D_r^l \left(\sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_j^i(X_s^{(n)}) dB_s^j \right), \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{l,j} \sigma_l^i(X_r^{(n)}) + \int_r^t D_r^l \left(\sigma_j^i(X_s^{(n)}) \right) dB_s^j \right), \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{l,j} \sigma_l^i(X_r^{(n)}) + \sum_{k=1}^{m} \int_r^t \partial_k \sigma_j(X_s^{(n)}) D_r^l X_s^{(n),k} dB_s^j \right). \end{aligned}$$

A partir de ces égalités et de la condition (3.5), nous voyons que $X_t^{(n+1),i} \in \mathbb{D}^{1,\infty}$ et nous obtenons, en utilisant l'inégalité de Burkholder–David–Gundy et l'inégalité de Hölder,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{r \leq s \leq t} \mid D_r X_s^{(n+1)} \mid^p \right) \leq c_p \left(\gamma_p + T^{(p-1)/2} k^p \int_r^t \mathbb{E} \left(\mid D_r^j X_s^{(n)} \mid^p \right) ds \right), \tag{3.7}$$

où

$$\gamma_p = \sup_{n,j} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \mid \sigma_j \left(X_t^{(n)} \right) \mid^p \right) \prec \infty.$$

Donc (3.5) et (3.6) valent pour $n+1$ et la relation est prouvée. Nous savons que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq T} \mid X_s^{(n)} - X_s \mid^p \right) \to 0$$

si n tend vers l'infini. Par le lemme de Gronwall appliqué à (3.6), nous déduisons que les dérivés de la séquence $X_t^{(n),i}$, est bornée dans $L^p(\Omega; H)$ uniformément en n pour tout $p \geq 2$. Cela implique que les variables aléatoires X_t^i appartiennent à $\mathbb{D}^{1,\infty}$. Enfin, en appliquant l'opérateur D à l'équation (3.2) on en déduit l'équation différentielle stochastique linéaire (3.4) pour la dérivée de X_t^i. Ceci complète la preuve de la proposition. ■

Considérons le processus de diffusion dans $\mathbb{R}$

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \;\; X = x_0,$$

où σ et b sont globalement des fonctions de Lipschitz dans $C^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t > 0$, X_t appartient à $\mathbb{D}^{1,\infty}$ et la dérivée de Malliavin $(D_r X_t)_{r \leq t}$ satisfait l'équation linéaire suivante

$$D_r X_t = \sigma(X_r) + \int_r^t \sigma\prime(X_s) D_r(X_s) dB_s + \int_r^t b\prime(X_s) D_r(X_s) ds.$$

Par conséquent, selon la formule d'Itô,

$$D_r X_t = \sigma(X_t) \exp\left(\int_r^t \sigma\prime(X_s) dB_s + \int_r^t \left(b(X_s) - \frac{1}{2} (\sigma\prime)^2 (X_s) \right) ds \right).$$

Considérons le processus à valeurs matricielles $m \times \ m$ défini par

$$Y_t = I_m + \sum_{l=1}^{d} \int_0^t \partial\sigma_l(X_s) Y_s dB_s^l + \int_0^t \partial b(X_s) Y_s ds,$$

où I_m désigne la matrice d'identité d'ordre m et $\partial\sigma_l$ désigne la matrice jacobienne $m \times m$ de la fonction σ_l. C'est

$$(\partial\sigma_l)_j^i = \partial_j \sigma_l^i.$$

De la même manière, ∂b désigne la matrice jacobienne $m \times m$ de b. Si les coefficients d'équation (3.2) sont de classe $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, alors il existe une version de la solution $X_t(x_0)$ à cette équation qui est continuellement différenciable en x_0, et pour laquelle Y_t est la matrice jacobienne $\partial X_t \ / \partial x_0$:

$$Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x_0}.$$

Proposition 3.0.10 *Pour tout $t \in [0, T]$ la matrice Y_t est inversible. Son Z_t inverse satisfait*

$$Z_t = I_m - \sum_{l=1}^{d} \int_0^t Z_s \partial\sigma_l(X_s) dB_s^l - \int_0^t Z_s \left(\partial b(X_s) - \sum_{l=1}^{d} \partial\sigma_l(X_s) \partial\sigma_l(X_s) \right) ds.$$

Preuve. Au moyen de la formule d'Itô, on peut vérifier que $Z_t Y_t = Y_t Z_t = I_m$, ce qui implique que

$Z_t = Y_t^{-1}$. En fait,

$$\begin{aligned}
Z_tY_t &= I_m + \sum_{l=1}^{d}\int_0^t Z_s\partial\sigma_l\left(X_s\right)Y_sdB_s^l + \int_0^t Z_s\partial b\left(X_s\right)Y_sds \\
&- \sum_{l=1}^{d}\int_0^t Z_s\partial\sigma_l\left(X_s\right)Y_sdB_s^l \\
&- \int_0^t Z_s\left(\partial b\left(X_s\right) - \sum_{l=1}^{d}\partial\sigma_l\left(X_s\right)\partial\sigma_l\left(X_s\right)\right)Y_sds \\
&- \int_0^t Z_s\left(\sum_{l=1}^{d}\partial\sigma_l\left(X_s\right)\partial\sigma_l\left(X_s\right)\right)Y_sds \\
&= I_m.
\end{aligned}$$

De même, on peut montrer que $Y_tZ_t = I_m$. ∎

Lemme 3.0.3 *La matrice* $\left(D_rX_t\right)_j^i = D_r^jX_t^i$ *peut être exprimée comme*

$$D_rX_t = Y_tY_r^{-1}\sigma\left(X_r\right), \tag{3.8}$$

où σ désigne la matrice $m \times d$ avec les colonnes $\sigma_1, ..., \sigma_d$.

Preuve. Il suffit de vérifier que le processus $\varphi_{t,r} = Y_tY_r^{-1}\sigma\left(X_r\right), t \geq r$ satisfait

$$\varphi_{t,r} = \sigma\left(X_r\right) + \sum_{l=1}^{d}\int_r^t \partial\sigma_l\left(X_s\right)\varphi_{s,r}dB_s^l + \int_r^t \partial b\left(X_s\right)\varphi_{s,r}ds.$$

En réalité,

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(X_r\right) + \sum_{l=1}^{d}\int_r^t \partial\sigma_l\left(X_s\right)\left(Y_sY_r^{-1}\sigma\left(X_r\right)\right)dB_s^l + \int_r^t \partial b\left(X_s\right)\left(Y_sY_r^{-1}\sigma\left(X_r\right)\right)ds \\
&= \sigma\left(X_r\right) + \left(Y_t - Y_r\right)Y_r^{-1}\sigma\left(X_r\right) = Y_tY_r^{-1}\sigma\left(X_r\right).
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ∎

Considérons la matrice de Malliavin de X_t, notée $\gamma_{X_t} = Q_t$ et donnée par

$$Q_t^{i,j} = \sum_{l=1}^{d} \int_0^t D_s^l X_t^i D_s^l X_t^j ds.$$

Autrement dit, $Q_t = \int_0^t (D_s X_t) (D_s X_t)^T ds$. L'équation (3.8) conduit à

$$Q_t = Y_t C_t Y_t^T, \tag{3.9}$$

où

$$C_t = \int_0^t Y_s^{-1} \sigma \sigma^T (X_s) \left(Y_s^{-1}\right)^T ds.$$

Compte tenu du fait que Y_t est inversible, la non-dégénérescence de la matrice Q_t dépendra uniquement sur la non-dégénérescence de la matrice C_t, appelée matrice de Malliavine réduite.

Conclusion

En conclusion, on a trouvé que le calcul de Malliavin est un ensemble de techniques mathématiques et des idées qui étendent le champ mathématique du calcul différentiel infini-dimensionnel sur l'espace de Wiener, il permet le calcul des dérivés de variables aléatoires. Le calcul a été appliquée aux EDS.ainsi, le calcul permet une intégration par parties avec des variables aléatoires. Pour faire ca, il faut d'abord introduire la version de l'espace qui correspond à l'intégrabilité dans une puissance arbitraire $p \geq 2$. Notons que, cette opération peut étre utiliser dans la finance mathématique pour calculer la sensibilité des instruments financiers dérivés

Bibliographie

[1] Nualart, D. (2006). The Malliavin calculus and related topics (Vol. 1995). Berlin : Springer.

[2] Renaud, J. F. (2007). Calcul de Malliavin, processus de Lévy et applications en finance : quelques contributions.

[3] Nualart, D., & Nualart, E. (2018). Introduction to Malliavin calculus (Vol. 9). Cambridge University Press.

[4] Malliavin, P., & Thalmaier, A. (2006). Stochastic calculus of variations in mathematical finance. Springer Science & Business Media.

[5] Di Nunno, G., Oksendal, B. K., & Proske, F. (2009). Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance (Vol. 2). Berlin : Springer.

[6] Peccati, G., & Reitzner, M. (Eds.). (2016). Stochastic analysis for Poisson point processes : Malliavin calculus, Wiener-Itô chaos expansions and stochastic geometry (Vol. 7). Springer.

[7] Friz, P. (2005). An introduction to Malliavin calculus. Notes de cours.Gradshteyn, I. & Ryzhik, I. (2007). Table Of Integrals, Series And Products.Elsevier.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$v.a$	:	variable aléatoire.
$v.a.r$	:	variable aléatoire réelle.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\mathbb{P} - p.s$	:	probabilité presque sûrement.
$M.B$	:	Mouvement Brownien.
$i.e$	:	c'est-à-dire.
$E.D.S$	:	équation différentielle stochastique
1	:	fonction indicatrice.
$T\Lambda t$	:	$min(T, t)$.
$B\left(\mathbb{R}^d\right)$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$
$Dom(\delta)$	:	le domaine de δ

.

Résumé

A travers ce travail, nous avons présenté le Calcul de Malliavin , et étudie certaines propriétés élémentaires .
Le calcul de Malliavin nous permet de calculer le différentiel infini-dimensionnel sur l'espace de Wiener. On a commencé par un rappel des définitions et propriétés de base sur le calcul stochastique, puis on a introduit les concepts d'espace de Wiener, la dérivée de Malliavin et son adjoint, enfin on a appliqué la dérivée au sens de Malliavin au processues de diffusion où on a utilisé des propotition et des théormes qui nous ont permis de démontrer le Théorème de Hörmander.

Abstract

.

Through this work, we have presented the Malliavin Calculus and study some elementary properties.The Malliavin calculus allows us to calculate the infinite-dimensional differential on the Wiener space.We started with a reminder of the basic definitions and properties on the stochastic calculus, then we introduced the concepts of Wiener space, the derivative of Malliavin and its adjunct, finally we applied the derivative within the meaning of Malliavin to the process of diffusion where we used propositions and theorms which allowed us to prove Hörmander's Theorem.

ملخص

يسمح لنا حساب ماليفين بحساب التفاضل اللانهائي الأبعاد على مساحة وينر.
بدأنا بتذكير بالتعاريف والخصائص الأساسية في حساب التفاضل والتكامل العشوائي ، ثم قدمنا مفاهيم فضاء وينر ، مشتق ماليافين وملاحقه ، وأخيراً طبقنا المشتق ضمن معنى ماليافين على عملية الانتشار حيث استخدمنا الافتراضات والمظاهر التي سمحت لنا بإثبات نظرية هورماندر.