

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Brinis Loubna**

Titre :

**Ondelettes et analyse multirésolution**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>Bouziane Nadjette</b>	UMKB	Président
Dr. <b>Dakhia Ghania</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>Radjeh Fouzia</b>	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

## REMERCIEMENTS

Au début, Tout d'abord grâce à Dieu qui m'a donné la santé et la puissance pour accomplir cette œuvre modeste.

Je voudrais remercier mon encadreur pour son soutien **Dr." Dakhia Ghania"** pour ses précieux conseils qui m'ont aidé à remplir ce mémoire.

Je remercie également **Prof."Zouhir Mokhtari "** pour son aide pour finir ce travail.

Je remercie les membres du jury le Président **Dr." Bouziane Nadjette "**et l'examineur **"Dr.Radjeh Fouzia"**.

En fin, je remercie mes parents, ma famille et également mes amis.

# Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Table des figures	v
Introduction	1
<b>1 Analyse de Fourier</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels sur les série de Fourier . . . . .	3
1.1.1 Polynômes trigonométriques . . . . .	3
1.1.2 Séries de Fourier . . . . .	5
1.2 Transformation de Fourier . . . . .	6
1.2.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	6
1.2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	8
1.2.3 Inconvénient de la transformée de Fourier . . . . .	9
<b>2 Transformée en ondelettes</b>	<b>10</b>
2.1 Analyse de Fourier locale . . . . .	10
2.1.1 Principe d'incertitude de Heisenberg . . . . .	11
2.1.2 Atomes temps-fréquence . . . . .	12

2.1.3	Transformée de Fourier à Fenêtre glissante . . . . .	14
2.2	Analyse par transformée en ondelettes . . . . .	19
2.2.1	Transformée en ondelettes continue . . . . .	20
2.2.2	Transformée en ondelettes dyadique . . . . .	22
2.2.3	Transforme en ondelette discrète . . . . .	23
2.2.4	Analyse de régularité . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Analyse multirésolution et ondelettes orthogonales</b>	<b>27</b>
3.1	Analyse multirésolution . . . . .	27
3.1.1	Base de Riesz . . . . .	28
3.1.2	Fonction échelle . . . . .	29
3.1.3	Analyse multirésolution $r$ -régulière . . . . .	30
3.1.4	Exemples d'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	30
3.1.5	Décomposition de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	31
3.2	Ondelettes orthogonales . . . . .	32
3.2.1	Où L'on voit enfin des ondelettes orthogonales? . . . . .	33
3.2.2	Comment choisir une ondelette . . . . .	34
3.2.3	Bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	35
3.2.4	Construction des base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	36
3.2.5	Calcule pratique des ondelettes orthogonales . . . . .	38
3.3	Calcul des coefficients d'ondelettes . . . . .	42
3.3.1	Filtres miroirs en quadratiques (conjugues) . . . . .	42
3.3.2	Algorithme pyramidal . . . . .	42
	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>48</b>



# Table des figures

2.1	Boite de Heisenberg représentant un atome temps-fréquence $\phi_\gamma$ . . . . .	14
2.2	Le sinus cardinal . . . . .	15
2.3	Fenêtre de gauss en temps et fréquence . . . . .	16
2.4	Fenêtre de Hamming et Hanning . . . . .	16
2.5	Fenêtre de Causs . . . . .	17
2.6	Transformée de Fourier à fenêtre glissante . . . . .	18
2.7	Transformée par ondelettes ( <i>TO</i> ) . . . . .	21
2.8	Transformée en ondelettes dyadique $W_f(u, 2^j)$ calculée aux échelles $2^j$ calculée aux échelle $2^{-7} \leq 2^j \leq 2^{-3}$ , avec le banc de filtre section 5.5.2 de 11. . . . .	23
3.1	schématise la décomposition : les sous-espaces sont représentés symboliquement par des rectangles. . . . .	32
3.2	Algorithme pyramidal . . . . .	43

# Introduction

Nous sommes constamment environnés de signaux : radio, télévision, téléphone portable (smartphone), photo numérique, ..., et le mode de vie contemporains repose chaque jour d'avantage sur la transmission de tels signaux. Ceci implique différentes opérations, à savoir, l'acquisition (souvent analogique), la numérisation (c'est-à-dire la discrétisation et l'encodage en langage binaire), la compression (les signaux sont de plus en plus volumineux), la transmission avec un minimum de distorsion, et enfin la réception et la reconstruction du signal avec niveau de fidélité acceptable. Parmi les techniques utilisées, l'analyse de Fourier et l'analyse en ondelettes.

Joseph Fourier révéla sa fameuse théorie [8, 18] qui stipule que toute fonctions périodique peut être représe par une série infinie de sinusoides.

La transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  [8, 11, 18] est une généralisation des séries de Fourier sur la base expenetielle. L'analyse de Fourier présenté des inconvénients majeurs qui ne permettent pas une analyse satisfaisante de toutes les sortes de signaux [18].

A cause de la manque de la localisation temporelle de l'analyse de Fourier, dans les années 1940, le physicien D.Gabor [11, 8, 18] découvre la première forme de représentation temps-fréquence. Il obtient une analyse temporelle en découpant arbitrairement le signal en plages de longueur limitée [5, 1], chaque plage centrée autour du paramètre  $\mu$  de localisation en temps.

Les ondelettes ont été créées par J. Morlet [18] et A. Grossmann comme une alternative à l'analyse de Fourier. Il s'agit d'une famille de fonctions déduites d'une même fonction (applée ondelette mère) [14, 1] par opérations de translations et de dilatations. L'analyse par ondelettes donne une représentation des signaux permettant la mise en valeur simultanément des informations temporelles et fréquentielles [11] (localisation temps-fréquence). Grâce à la notion d'analyse Multirésol-

lution (AMR) introduite par S. Mallat et Y. Meyer, [13, 15, 14, 11] la théorie des bases d'ondelettes à pu être développée, notamment leur construction[13], leurs propriétés[9, 3], et algorithmes associés[11, 3, 15]

Le but de ce mémoire est l'étude des ondelettes et de l'analyse multirésolution. Il a structuré de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels sur l'analyse de Fourier et on explique la décomposition d'un signal  $f(t)$  en fréquence pour obtenir une meilleure approximation  $\hat{f}$  pour  $f$  dans la base exponentielle imaginaire.
- Dans le deuxième chapitre, on introduit l'analyse temps-fréquence. On commence par la transformée de Fourier glissante puis la transformée en ondelettes continues, dyadique et discrète
- Dans le troisième chapitre, on donne une explication théorique détaillée concernant l'analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  et la construction d'une base orthonormée d'ondelettes.

# Chapitre 1

## Analyse de Fourier

Ce chapitre donne une explication théorique concernant l'analyse de Fourier, on a rappelé les séries de Fourier et on a expliqué la théorie de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 1.1 Rappels sur les série de Fourier

Cette section donne des rappels sur les séries de Fourier, et on a expliqué comment approximé la fonction  $f(t)$  par un polynôme trigonométrique telle que  $\left\| f - \sum_{n=-N}^N x_n e_n \right\|_2$  soit le minimum.

#### 1.1.1 Polynômes trigonométriques

**Définition 1.1.1** Une fonction  $f$  est dite périodique de période " $a$ " avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+a) = f(t).$$

**Définition 1.1.2** On dit que la fonction  $p$  est un polynôme trigonométrique d'ordre  $N$  si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{2i\pi n \frac{t}{a}}, C_n \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

On note  $e_n(t) = e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$ . Cette fonction est de période "a", il en est donc de même pour le polynôme  $p$ .

On peut écrire  $p(t)$  sous forme d'une combinaison linéaire de sinus et cosinus :

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos 2\pi n \frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{a}).$$

avec

$$\begin{cases} a_n &= C_n + C_{-n} \\ b_n &= i(C_n - C_{-n}) \end{cases}.$$

Notons  $T_N$  l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égale à  $N$  définis par (1.1) quand les  $C_n$  varient. On munit cet espace vectoriel du produit scalaire :

$$(p, q) = \int_0^a p(t)\bar{q}(t) dt,$$

où  $\bar{q}$  le conjugué complexe de  $q$ .

On a bien sûr

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} a & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Cela exprime le fait que les  $(e_n)$  sont orthogonales. Ces fonctions forment donc une famille libre, il est par ailleurs clair qu'elle est génératrice. C'est donc une base de l'espace  $T_N$  qui est par conséquent de dimension  $2N + 1$ .

Nous avons donc  $(e_n, e_m) = 0$  si  $n \neq m$  et  $\|e_n\|_2 = \sqrt{a}$ . Alors  $(p, e_n) = aC_n$ . Donc

$$C_n = \frac{1}{a} \int_0^a p(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt \quad (\text{formule de Fourier}), \quad (1.2)$$

ce qui donne une expression des coefficients  $C_n$  en fonction de  $p$ . Pour la version réelle de la décomposition, on obtient :

$$\begin{cases} a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a p(t) \cos(2\pi n \frac{t}{a}) dt. \\ b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a p(t) \sin(2\pi n \frac{t}{a}) dt. \end{cases}$$

**Remarque 1.1.1** A cause de la périodicité de  $p$ , l'intégrale  $C_n = \frac{1}{a} \int_0^a p(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt$  peut être prise sur tout intervalle de longueur  $a$ . Par exemple  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ . On a alors dans ce cas les propriétés suivantes :

si  $p$  est paire alors pour tout  $n$ ,  $C_n = C_{-n}$  et donc pour tout  $n$ ,  $b_n = 0$ .

si  $p$  est impaire alors pour tout  $n$ ,  $C_n = -C_{-n}$  et donc pour tout  $n$ ,  $a_n = 0$ .

### 1.1.2 Séries de Fourier

Soit  $f \in L^2_P(0, a)$  une fonction périodique de période "a", on peut approximer la fonction  $f$  par un polynôme trigonométrique  $f_N$  ( $N$  est un entier fixé) dans l'espace  $T_N$  c-à-d  $f_N$  est une solution du problème suivant :

$$\text{Min}_{x_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{n=-N}^N x_n e_n \right\|_2.$$

Le minimum est atteint lorsque  $x_n = C_n$ , et pour cette valeur seulement, alors

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{a}},$$

ou

$$f_N(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos \frac{2i\pi n t}{a} + b_n \sin \frac{2i\pi n t}{a}).$$

et on a le théorème suivant :

**Théorème 1.1.1** (voir [8]) Si  $f \in L^2_P(0, a)$ , la meilleure approximation  $f_n$  de  $f$ , dans  $T_N$  :

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{\frac{2i\pi nt}{a}},$$

où les  $C_n$  sont définis par (1.2), tend vers  $f$  dans  $L^2_p(0, a)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . Autrement dit :

$$\int_0^a |f(t) - f_N(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty.$$

Si la fonction  $f$  n'est pas périodique, on utilise la transformation de Fourier qui est une généralisation des séries de Fourier. La transformation de Fourier repose sur la décomposition de la fonction suivant une base continue de cosinus et sinus ou de l'exponentielles imaginaires.

## 1.2 Transformation de Fourier

Cette section donne l'explication théorique de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  et dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et ses propriétés principales.

### 1.2.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

**Définition 1.2.1** *Etant donnée  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on pose :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\zeta) &= \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2i\pi\zeta t}{a}} f(t) dt, \\ \overline{\mathcal{F}}f(\zeta) &= \overline{\hat{f}}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2i\pi\zeta t}{a}} f(t) dt. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}f$  est la transformée de Fourier (T.F) de  $f$ .

$\overline{\mathcal{F}}f$  est la transformée de Fourier conjuguée.

**Théorème 1.2.1 (Théorème de Riemann-Lebesgue)** (Voir [8]) *Etant donnée  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on a :*

1.  $\mathcal{F}$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$

2.  $\mathcal{F}$  est un opérateur linéaire continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  et

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

3.

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\zeta)| = 0.$$

(de même pour  $\bar{\mathcal{F}}$ )

**Théorème 1.2.2 (Inversion dans  $L^1(\mathbb{R})$ )** (Voir [8]) Si  $f$  et  $\hat{f}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  on a  $\bar{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$  en tout point  $t$  où  $f$  est continue.

**Proposition 1.2.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, on a les relations conjugaison-parité :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(f)} &= \bar{\mathcal{F}}(\bar{f}), \\ (\mathcal{F}(f))_\sigma &= \bar{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma). \end{aligned}$$

On en déduit les propriétés de parité :

Si  $f$  est paire (resp impaire)  $\Rightarrow \hat{f}$  est paire (resp impaire),

Si  $f$  est réelle paire (resp imaginaire impaire)  $\Rightarrow \hat{f}$  est réelle paire (resp imaginaire impaire).

**Proposition 1.2.2** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_a f(\zeta) &= e^{-2i\pi a \zeta} \hat{f}(\zeta), \\ \tau_a \hat{f}(\zeta) &= e^{2i\pi a t} \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

**Proposition 1.2.3** 1. Si  $t^k f(t)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\hat{f}$  est un fois dérivable et on a pour

$$k = 0, 1, \dots, n \quad \hat{f}^{(k)}(\zeta) = (2i\pi t)^k \widehat{f}(t).$$

2. Si  $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  et si toutes les dérivées  $f^{(k)}, k = 1, \dots, N$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors pour

$$k = 1, \dots, N, \quad \widehat{f^{(k)}}(\zeta) = (2i\pi\zeta)^k \hat{f}(\zeta).$$

3. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est à support borné, alors  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

### 1.2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier de la fonction indicatrice  $f = 1_{[-1,1]}$  vaut

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \zeta t} dt = 2 \frac{\sin \zeta}{\zeta}.$$

Cette fonction n'est pas intégrable car  $f$  n'est pas continue, mais elle est de carré intégrable. Le théorème 1.2.2 sur la transformée de Fourier inverse n'est pas applicable. Ceci conduit à étendre la transformée de Fourier à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions  $f$  d'énergie finie  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$ .

**Théorème 1.2.3 (Parseval-Plancherel)** (Voir [8]) Si  $h$  et  $f$  sont dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) \overline{\hat{h}(\zeta)} d\zeta, \quad (1.3)$$

Pour  $h = f$ , on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta. \quad (1.4)$$

**Théorème 1.2.4** (Voir [8]) La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  (respectivement la transformation inverse  $\overline{\mathcal{F}}$ ) se prolonge en une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Désignons toujours par  $\mathcal{F}$  (resp  $\overline{\mathcal{F}}$ ) ce prolongement on a :

1.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = f \quad p.p.$$

2.

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(\zeta)\overline{(\mathcal{F}g)(\zeta)}d\zeta.$$

3.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2.$$

**Propriété 1.2.1** (*Voir* [8])

ii) Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}(f)$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la suite  $g_n$  définie par

$$g_n(\zeta) = \int_{-n}^{+n} e^{-2i\pi\zeta t} f(t)dt.$$

iii) Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\overline{\mathcal{F}f}$  est limite dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la suite  $h_n$  définie par :

$$h_n(\zeta) = \int_{-n}^{+n} e^{2i\pi\zeta t} f(t)dt.$$

### 1.2.3 Inconvénient de la transformée de Fourier

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure statistiquement stationnaires, mais devient un problème pour l'étude de signaux non stationnaires.

# Chapitre 2

## Transformée en ondelettes

Dans ce chapitre, nous proposons des méthodes qui permettent des localisations temporelles des fréquences via une analyse de Fourier local. La transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes sont deux exemples importantes de décomposition temps-fréquence qui utilisent un ensemble continu de fonctions analysantes. Nous introduisons les transformations en ondelettes continue, dyadique et discret. Nous étudions la régularité locale et la régularité ponctuelle d'un signal à travers la décroissance de ses coefficients d'ondelettes.

### 2.1 Analyse de Fourier locale

En 1946, Gabor introduit les atomes de Fourier à fenêtre afin de mesurer les variations fréquentielles. L'idée est d'utiliser une fonction «fenêtre»  $g$  pour localiser l'analyse de Fourier, puis de faire glisser la fenêtre sur une autre position, et ainsi de suite. Les points les plus marquants de cette analyse sont caractère local de l'analyse de Fourier.

Pour obtenir de l'information de Fourier locale on a utilisé la fonction  $g$  à qui on demande d'être localisée à la fois en fréquence et en temps.

### 2.1.1 Principe d'incertitude de Heisenberg

Le principe d'incertitude nous dit que l'énergie d'une fonction et sa T.F ne peuvent être simultanément concentrée sur des intervalles arbitrairement petits. Le Dirac  $\delta(t-u)$  (au sens des distributions) a un support ponctuelle  $t = u$ , mais sa T.F  $e^{-i\omega u}$  a une énergie uniformément répartie sur toutes les fréquences. on montre que  $|\hat{f}(\omega)|$  décroît rapidement dans hautes fréquences seulement si  $f$  a des variations régulières dans le temps. par conséquent, l'énergie de  $f$  doit s'étaler sur un domaine relativement étendu.

Pour réduire l'étalement temporelle de  $f$ , on peut dilater la fonction par un facteur  $s < 1$ , sans changer son énergie totale, si

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right), \|f_s\|^2 = \|f\|^2.$$

Comme la T.F  $\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{s}\hat{f}(s\omega)$  est dilatée d'un facteur  $1/s$ , on perd en localisation fréquentielle ce qu'on a gagné en localisation temporelle. Cela met en évidence un compromis entre la localisation en temps et celle en fréquence.

Les concentrations en temps et en fréquence son limitées par le principe d'incertitude d'Heisenberg. Ce principe a une interprétation importante en mécanique quantique (Gabor, 1946), comme une incertitude de la position et de la vitesse d'une particule libre. L'état d'une particule libre se trouve unidimensionnelle est décrit par une fonction d'onde  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

La densité de probabilité pour cette particule se trouve en  $t$  est  $\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2$ . La densité de probabilité pour que sa quantité de mouvement soit  $\omega$  est  $\frac{1}{2\pi\|f\|^2} |\hat{f}(\omega)|^2$ . La position moyenne de la particule est

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt$$

et sa quantité de mouvement moyenne est

$$\xi = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Les variances autour de ces valeurs moyennes sont, respectivement :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu)^2 |f(t)|^2 dt$$

et

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Plus  $\sigma_t$  est grand , plus il y a d'incertitude sur la position de la particule libre, plus  $\sigma_\omega$  est grand, plus d'incertitude sur sa quantité de mouvement .

**Théorème 2.1.1 (Incertainde de Heisenberg)** (voir [11]) *La variance temporelle et la variance fréquentielle de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  satisfont*

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}.$$

*Cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe  $(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$  telle que*

$$f(t) = a \exp(i\xi t - b(t - u)^2).$$

## 2.1.2 Atomes temps-fréquence

Une transformée temps-fréquence linéaire corrèle le signal avec une famille de fonctions bien concentrées en temps et en fréquence. Ces fonctions sont appelées *atomes temps-frequence*, considérons une famille générale d'atomes temps-frequence  $\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in T}$ , où  $\gamma$  peut être un indice de dimension supérieur à 1. On suppose que  $\phi_\gamma \in L^2(\mathbb{R})$  et que  $\|\phi_\gamma\|_2 = 1$ . L'opérateur linéaire correspondant associe à  $f \in L^2(\mathbb{R})$  la valeur

$$Tf(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\phi_\gamma}(t) dt = (f, \phi_\gamma).$$

Le théorème de Parseval (1.3) montre que

$$Tf(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\phi_\gamma(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}_\gamma(\omega)}d\omega.$$

Si  $\phi_\gamma(t)$  est pratiquement nul pour  $t$  en dehors du voisinage d'une abscisse  $u$ , alors  $(f, \phi_\gamma)$  ne dépend que des valeurs de  $f$  dans ce voisinage.

### Boîtes d'Heisenberg associées aux atomes temps-fréquence

La tranche d'information contenue dans  $(f, \phi_\gamma)$  est représentée dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  par une région dont la position et la taille dépendent de l'étalement de  $\phi_\gamma$  en temps et en fréquence.

Comme

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1,$$

on interprète  $|\phi_\gamma(t)|^2$  comme une densité de probabilité centrée en

$$u_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t|\phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

Son étalement autour de  $u_\gamma$  est mesuré par la variance

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

La formule de Plancherel (1.4) montre que l'on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2$ . La fréquence médiane de  $\hat{\phi}_\gamma$  est donc définie par

$$\zeta_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega.$$

et son étalement autour de  $\zeta_\gamma$  vaut

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \zeta_\gamma)^2 |\phi_\gamma(\omega)|^2 d\omega.$$

La résolution temps-fréquence de  $\phi_\gamma$  est représentée dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  par une

boîte de Heisenberg, centrée en  $(u_\gamma, \zeta_\gamma)$ , de largeur temporelle  $\sigma_t(\gamma)$ , et dont la largeur fréquentielle vaut  $\sigma_\omega(\gamma)$ .

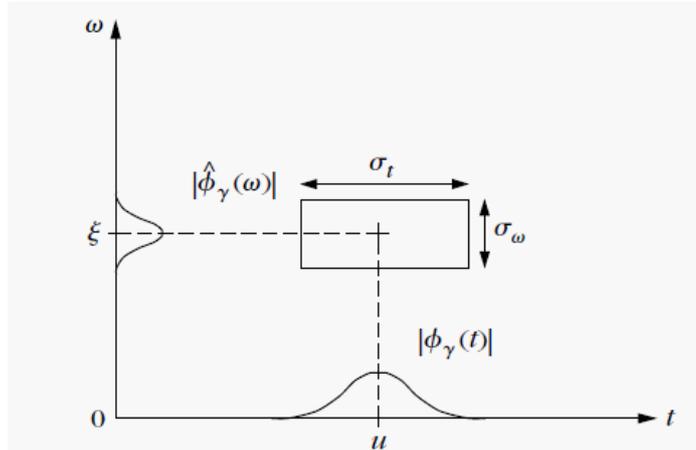
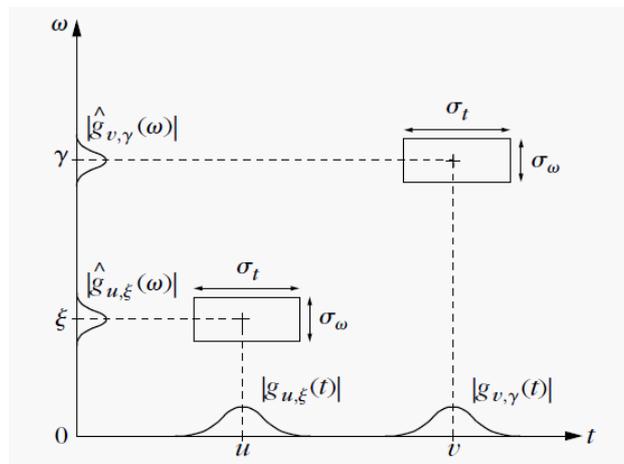


FIG. 2.1 – Boîte de Heisenberg représentant un atome temps-fréquence  $\phi_\gamma$

### 2.1.3 Transformée de Fourier à Fenêtre glissante

Un atome de Fourier à fenêtre s'obtient à partir d'une fenêtre  $g$ , que l'on translate de  $u$  et que l'on module à la fréquence  $\zeta$  :

$$\phi_\gamma(t) = g_{u,\zeta}(t) = e^{i\zeta t} g(t - \mu).$$



Boîtes de Heisenberg de deux atomes de  
Fourier à fenêtre  $g_\mu, \zeta$  et  $g_v, \gamma$

**Fonction fenêtre :**

une fonction fenêtre est une fonction régulière, qui est bien localisée c-à-d qui est nulle en dehors d'une certaine zone qui s'appelle son support.

La première idée consiste à tronquer le signal en ne le considérant que sur un intervalle fini  $[-A, A]$  c'est-à-dire pour on multiplie le signal  $f(t)$  par le créneau  $\chi_{[-A,A]}$  et on va calculer sa transformée de Fourier, alors :

$$\hat{g}(\lambda) = \widehat{r_A \cdot f}(\lambda) = \left( \sin \frac{2\pi A \lambda}{\pi \lambda} \right) * \hat{f}(\lambda) = (s_A * \hat{f})(\lambda).$$

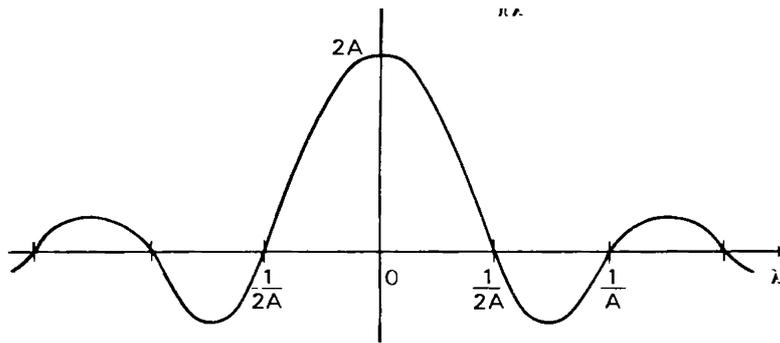


FIG. 2.2 – Le sinus cardinal

L'approximation de  $\hat{f}$  par  $\hat{g}$  est d'autant meilleure que  $A$  est grand, c'est-à-dire que  $s_A$  approche mieux l'impulsion de Dirac. Mais les calculs deviennent vite très volumineux. Surtout, le sinus cardinal s'amortit très lentement et présente des lobes importants près de l'origine. Afin de les diminuer, on utilise de préférence des fonctions plus régulières, toutes appelées fenêtres, concentrées autour de l'origine :

**Fenêtre triangulaire :** Elle est de la forme

$$g(t) = \left( 1 - \frac{|t|}{A} \right) \chi_{[-A,A]}(t), A > 0.$$

la fonction  $g(t)$  est bien régulière sur  $[-A, A]$  mais sa transformée de Fourier  $\hat{g}(t) = \frac{1}{A} \left( \frac{\sin \pi A \lambda}{\pi \lambda} \right)^2$  est

lente.

C'est pour ça on cherche autre fenêtre qui est bien localisée.

titre

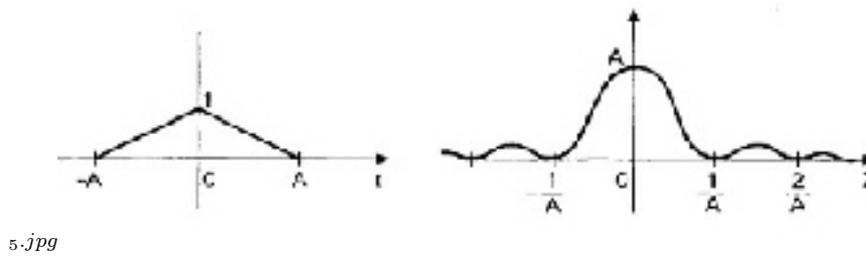


FIG. 2.3 – Fenêtre de gauss en temps et fréquence

### Fenêtres de Hamming et Hanning :

Elles sont de la formes

$$g(t) = \left[ a + (1 - a) \cos \frac{2\pi t}{a} \right] r_A(t).$$

Si  $a = 0.54$ , on obtient la fenêtre de Hamming.

Si  $a = 0.5$ , on obtient la fenêtre de Hanning.

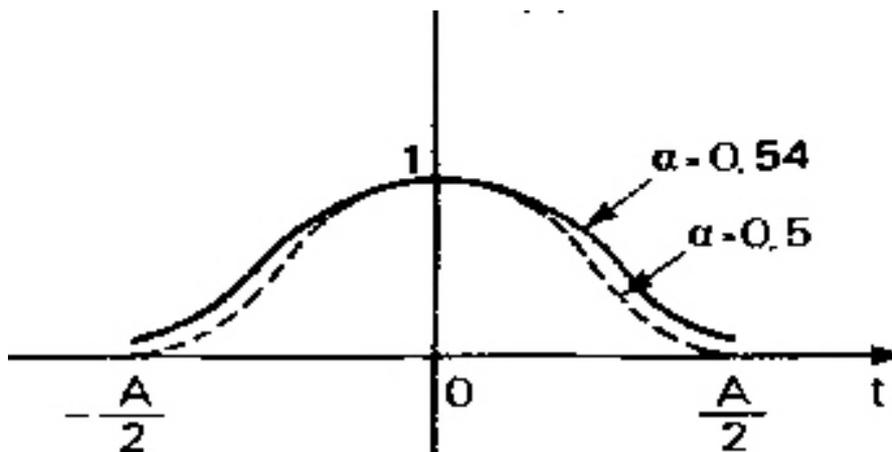


FIG. 2.4 – Fenêtre de Hamming et Hanning

**Fenêtre de Gauss** Elle est de la forme  $g(t) = Ae^{-at^2}$  ( $a, A > 0$ ) cette fenêtre est très utilisée

La constante  $A$  est choisie de façon à avoir que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = 1, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Cette fenêtre est utilisée par Gabor dans sa transformée.

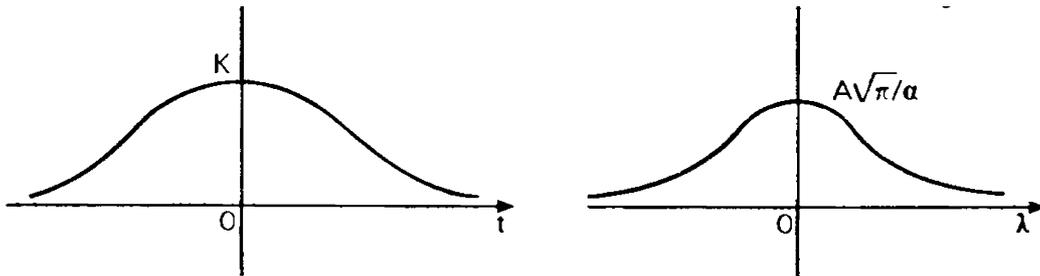


FIG. 2.5 – Fenêtre de Gauss

### Formules de D.Gabor

D.Gabor, dans les années 1940, a utilisé essentiellement la fenêtre de Gauss  $g(t) = \pi^{1/4}e^{-\frac{1}{2}t^2}$ . Un des mérites de D.Gabor a été d'expliciter la formule inverse donnant  $f$  à partir des  $Sf(\lambda, b)$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 2.1.2** (voir [8]) Soit  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une fenêtre telle que  $|\hat{g}|$  soit une fonction paire et  $\|g\|_2 = 1$  on pose :

$$g_{\lambda b}(t) = e^{2i\pi\lambda t} g_{\lambda b}(t - b), (\lambda, b \in \mathbb{R}).$$

pour tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  on considère les coefficients :

$$S_f(\lambda, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{g}_{\lambda b}(t) dt,$$

Alors on a :

a) Conservation de l'énergie :

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |S_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

**b) La formule de reconstruction**

$$f(x) = \int \int_{\mathbb{R}^2} S_f(\lambda, b) g_{\lambda b}(x) d\lambda db.$$

au sens suivant : si

$$g_A(x) = \int \int_{\substack{|\lambda| < A \\ b \in \mathbb{R}}} S_f(\lambda, b) g_{\lambda b}(x) d\lambda db.$$

Alors  $\lim_{A \rightarrow +\infty} g_A(x) \rightarrow f(x)$  dans  $L^2$  quant  $A \rightarrow +\infty$ .

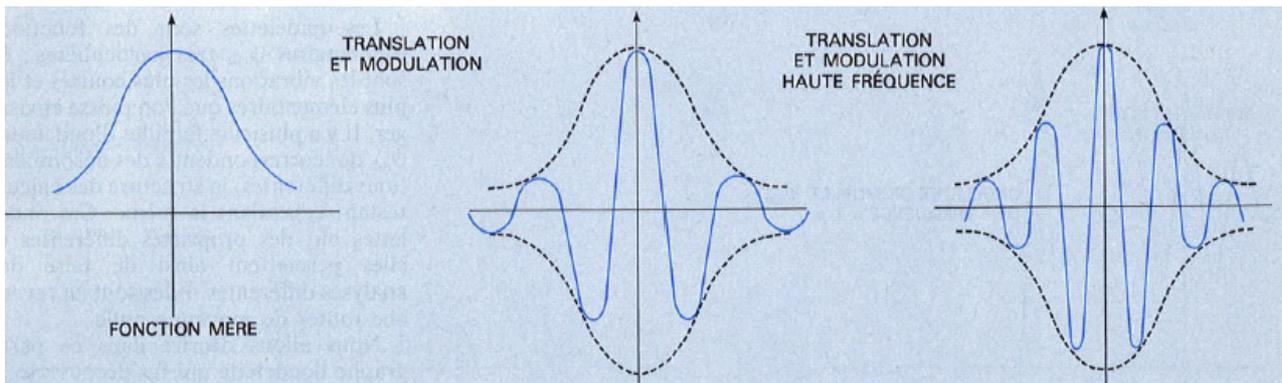


FIG. 2.6 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante

**Inconvénient de la  $TFF_g$**  L'étude d'un signal avec la ( $TFF_g$ ) permet d'obtenir à la fois une information sur le temps et sur la fréquence, mais la résolution d'analyse est fixée par le choix de la taille :

- Si la fenêtre est trop petite, les basses fréquences n'y seront pas contenues
- Si la fenêtre est trop grande, l'information sur les hautes fréquences est noyée dans l'information concernant la totalité de l'intervalle contenu dans la fenêtre.

Donc la taille fixe de la fenêtre est un gros inconvénient. L'outil idéal serait une fenêtre qui s'adapte aux variations de fréquence dans le signal à analyser. Cet outil existe, il s'agit de la récente analyse en ondelettes.

On a vu qu'il n'y avait pas de base de  $L^2(\mathbb{R})$  qui une bonne localisation uniforme à la fois en temps et en fréquence. De plus, les fonctions analysantes  $g_{\lambda b}$  oscillent de plus en plus grand  $\zeta$  tend vers  $+\infty$ , et cela conduit à des instabilités numérique.

Pour ces raisons J.Morlet a introduit au début des années 80 une autre représentation en ondelettes :

## 2.2 Analyse par transformée en ondelettes

Pour analyser des composantes transitoires de durées différentes, il est nécessaire d'utiliser des atomes dont les supports temporelles ont des tailles variables. Pour cela, la transformée en ondelettes décompose les signaux sur une famille d'ondelettes translatées et dilatées.

**Définition 2.2.1 (Ondelette mère)** On appelle ondelette mère (analysante) une fonction  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui est dans  $L^2(\mathbb{R})$  et satisfait les conditions suivantes

1.

$$C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < \infty.$$

Ce qui implique  $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dx = 0$ .

2.

$$\|\Psi\|_2 = 1.$$

La famille des fonctions ou ondelettes est définie par :

$$\Psi_{u,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{x-u}{s}\right), s \in \mathbb{R}_+^*, u \in \mathbb{R}.$$

avec :

- $s$  : paramètre d'échelle donne la taille de support d'ondelette.
- $u$  : paramètre de position.

Ainsi, on a défini une famille d'atomes temps fréquence en dilatant l'ondelette  $\Psi$  par un facteur  $s$ , et en translatant par  $u$ .

**Exemple 2.2.1** *Ondelettes de Shannon, Meyer, Battle-Lémarié...*

**Remarque 2.2.1** *La T.F des ondelette est donnée par :*

$$\hat{\Psi}_{u,s}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda x} \Psi_{u,s}(x) dx = \sqrt{s} \hat{\Psi}(s\lambda) e^{-2i\pi u\lambda}.$$

## 2.2.1 Transformée en ondelettes continue

**Définition 2.2.2** *La transformée en ondelettes continue (TOC) utilisant l'ondelette  $\Psi$  est définie comme :*

$$\forall (s, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, Wf(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Psi} \left( \frac{t-u}{s} \right) dt. \quad (2.1)$$

avec  $Wf(u, s)$  sont des coefficients d'ondelettes.

**Remarque 2.2.2** *La transformée en TOC, utilisant l'ondelette  $\Psi$  est équivalent à :*

$$\forall (s, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, Wf(u, s) = \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{\Psi}(s\lambda)} e^{2i\pi u\lambda} d\lambda.$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la formule de Parseval :

$$Wf(u, s) = (f, \Psi_{u,s}) = (\hat{f}, \hat{\Psi}_{u,s}).$$

■

**Remarque 2.2.3** *Si on pose :*

$$\tilde{\Psi}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\Psi} \left( \frac{-x}{s} \right),$$

On obtient d'après (2.1) :

$$\forall (s, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, Wf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{\Psi}_s(t - u) dt,$$

Donc :

$$\forall (s, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, Wf(u, s) = f(t) * \tilde{\Psi}_s(u).$$

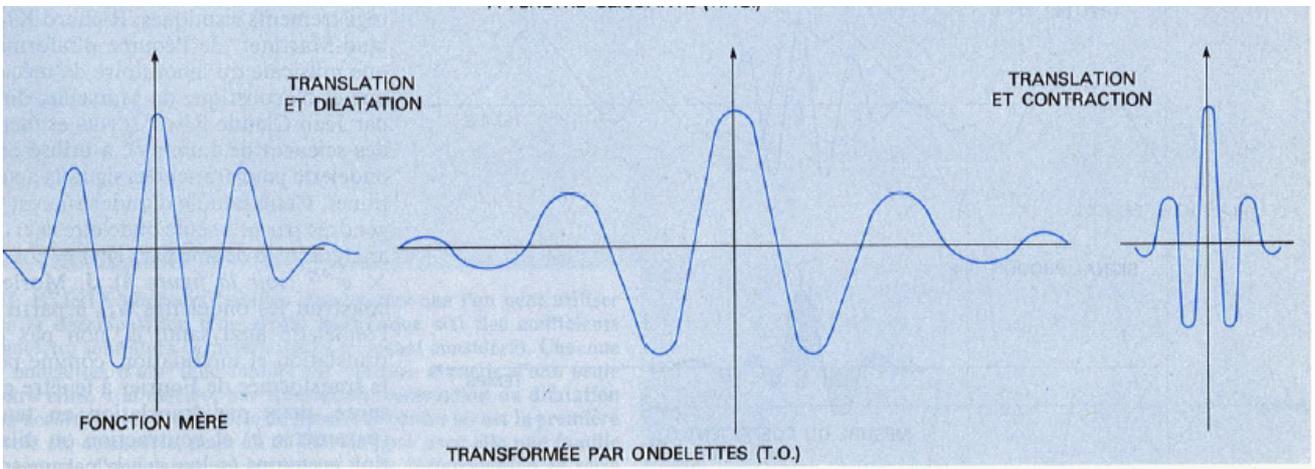


FIG. 2.7 – Transformée par ondelettes (TO)

**Exemple 2.2.2** Soit  $S(t) = \sin(2\pi\omega t)$ . Alors  $\hat{S}(\lambda) = \frac{1}{2i}(\delta_\omega + \delta_{-\omega})$

$$\begin{aligned} W_S(u, s) &= \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} S(t) \overline{\Psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} \hat{S}(\lambda) \overline{\Psi}(s\lambda) e^{2i\pi u\lambda} d\lambda, \\ &= \frac{\sqrt{s}}{2i} \int_{\mathbb{R}} (\delta_\omega + \delta_{-\omega}) \overline{\Psi}(s\lambda) e^{2i\pi u\lambda} d\lambda, \\ &= \frac{\sqrt{s}}{2i} \left[ e^{2i\pi u s\omega} \overline{\Psi}(s\omega) - e^{-2i\pi u s\omega} \overline{\Psi}(-s\omega) \right], \end{aligned}$$

Si  $\hat{\Psi}$  est paire

$$W_S(u, s) = \sqrt{s} \overline{\Psi}(s\omega) \sin(2\pi\omega u), s > 0, u \in \mathbb{R}.$$

### Ondelettes réelles et complexes :

Les ondelettes réelles sont bien adaptées pour détection de changements brusques dans un signal. Les ondelettes complexes (ou analytique) sont utilisées pour séparer la phase et l'amplitude des composantes d'un signal.

**Inversion de la transformée en ondelettes continue** Le théorème suivant montre que la *TOC* est une transformation inversible qui conserve l'énergie du signal si l'ondelette vérifie la condition d'admissibilité suivante :

$$C_{\Psi} = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|}{\omega} d\omega < +\infty.$$

Si  $\Psi$  vérifie la condition ci dessus, alors l'ondelette est dite admissibilité. On peut remarquer que la condition d'admissible. impose nécessairement que  $\hat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0$  c'est à dire que l'ondelette soit de moyenne nulle.

**Théorème 2.2.1** Soit  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$  une ondelette admissible alors pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$  on a :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \frac{duds}{s^2}.$$

De plus, la *TOC* conserve l'énergie du signal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |W_f(u, s)|^2 \frac{duds}{s^2}.$$

### 2.2.2 Transformée en ondelettes dyadique

La transformée en ondelettes dyadique est une représentation invariante par translation car le paramètre de translation  $u$  n'est pas échantillonné. Pour construire cette représentation, l'échelle  $s$  est discrétisée, mais pas le paramètre de translation  $u$ , l'échelle est échantillonnée sur une suite dyadique  $\{2^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

**Définition 2.2.3** La transformée en ondelettes dyadique de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est définie par

$$W_f(u, 2^j) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right) dt = f * \tilde{\Psi}_{2^j}(u),$$

avec

$$\tilde{\Psi}_{2^j}(u) = \Psi_{2^j}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi_{2^j}\left(-\frac{t}{2^j}\right).$$

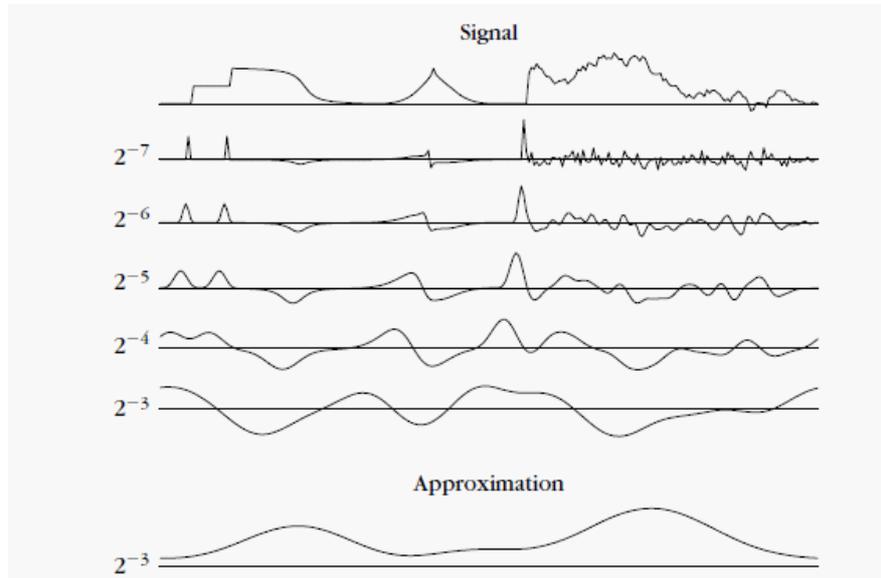


FIG. 2.8 – Transformée en ondelettes dyadique  $W_f(u, 2^j)$  calculée aux échelles  $2^j$  calculée aux échelle  $2^{-7} \leq 2^j \leq 2^{-3}$ , avec le banc de filtre section 5.5.2 de 11.

### 2.2.3 Transforme en ondelette discrète

On restreint les paramètres de dilatation-translation  $(a, b)$  à un sous-ensemble dicret, ce qui est étudiés par I.Daubechies, A.Grossman et Y.Meyer, on choisit

$$a_m = a^{-m}, \quad b_n = n\beta a^{-m}, \quad (a > 1, \beta \neq 0) \text{ avec } \Psi_{a_m b_n} = a^{m/2} \Psi(a^m x - n\beta).$$

Pour des fins de strabilité numérique, I.Daubecheis a étudié dans quelles conditions l'application

$$W : f \rightarrow W_f = W_f(a_m, b_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\Psi}_{a_m, b_n}(x) dx$$

de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  est injective, mais aussi d'inverse continue sur son domaine. Cette condition se traduit par l'existence de deux constantes positives  $A$  et  $B$  telles que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\Psi_{a_m, b_n}, f|^2 \leq B\|f\|^2.$$

et on a la formule de reconstruction définie par

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} W_f(a_m, b_n) \Psi_{a_m, b_n} + R_f.$$

où le reste  $R_f$  est estimé par  $\|R_f\| \leq \mathcal{O}(\frac{B}{A} - 1)\|f\|$ . Si  $\frac{B}{A} \sim 1$ , le terme d'erreur  $R_f$  peut être négligé et la reconstruction est numériquement satisfaisante.

Pour d'autres types d'applications on préfère utiliser des bases orthonormées d'ondelettes dans le but de réduire autant que possible la redondance de la famille  $(\Psi_{a_m, b_n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ .

Compte tenu de la redondance d'informations données par les coefficients  $W_f(a, b)$  sur la base des  $\Psi_{a,b}$ .

Soit  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ , régulière telle que  $(\Psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ , on peut décomposer tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en série double

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \Psi_{j,k}) \Psi_{j,k}(x)$$

avec

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k).$$

Ces coefficients sont définies par

$$W_{j,k} = (f, \Psi_{j,k}) = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \Psi(2^j x - k) dx$$

et qui sont indépendantes les uns des autres.

Les paramètres de dilatation-translation  $(a, b) = (2^j, 2^{-j}k)$  correspondent à la discétisation de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .

Le réseau des paramètres de dilatation-translation considéré dans ce cas est la collection de tous les intervalles dyadiques

$$I(j, k) = [k2^j, (k + 1)2^{-j}[, (j, k \in \mathbb{Z}).$$

### 2.2.4 Analyse de régularité

L'analyse de Fourier permet de caractériser la régularité globale d'une fonction. La transformée en ondelettes permet d'analyser la régularité ponctuelle d'une fonction.

Un signal est régulier si on peut l'approximer localement par un polynôme.

Supposons que  $f$  soit différentiable  $m$  fois sur  $[v - h, v + h]$ , Soit  $p_v$  son polynôme de Taylor au voisinage de  $v$  :

$$p_v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(v)}{k!} (t - v)^k.$$

**Définition 2.2.4** Une fonction  $f$  est ponctuellement lipschitz  $\alpha > 0$  en  $v$ , s'il existe  $K > 0$  et un polynôme  $p_v$  de degré  $m = [\alpha]$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t) - p_v(t)| < K |t - v|^\alpha. \quad (2.2)$$

- Une fonction  $f$  est uniformément Lipschitz  $\alpha$  sur  $[a, b]$  si elle vérifie (2.2) pour tout  $v \in [a, b]$ , avec une constante  $K$  indépendante de  $v$
- La régularité lipschitzienne de  $f$  en  $v$  ou sur  $[a, b]$  est le *sup* des  $\alpha$  pour lesquels  $f$  est lipschitz  $\alpha$ .

**Définition 2.2.5** On dit que  $\Psi$  a  $q = [\alpha]$  moments nuls si

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(t) t^k dt = 0, \forall k < q. \quad (2.3)$$

On va mesurer  $\alpha$  à partir de  $|W_f(u, s)|$  lorsque  $u$  est au voisinage de  $v$ .

On suppose que l'ondelette  $\Psi$  a  $n$  moments nuls et qu'elle est  $C^n$  avec des dérivées à décroissance rapide. On a pour tout  $0 \leq K \leq n$  et  $m \in \mathbb{R}$ , il existe  $C_m$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\Psi^{(K)}(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}. \quad (2.4)$$

Le théorème suivant lie la régularité lipschitzienne de  $f$  sur un intervalle à l'amplitude de sa transformée en ondelettes aux fines échelles .

**Théorème 2.2.2** (voir [11]) *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est uniformément Lipschitz  $\alpha \leq n$  sur  $[a, b]$  alors il existe  $A > 0$  tel que*

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+, |W_f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2}. \quad (2.5)$$

*Réciproquement, supposons que  $f$  soit bornée et que  $Wf(u, s)$  vérifie (2.5) pour un  $\alpha < n$  non entier. Alors  $f$  est uniformément Lipschitz  $\alpha$  sur  $[a + \zeta, b - \zeta]$ , pour tout  $\zeta > 0$ .*

**Théorème 2.2.3** (voir [11]) *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est Lipschitz  $\alpha \leq n$  en  $v$ , alors il existe  $A$  tel que*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |W_f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left|\frac{u-v}{s}\right|^\alpha\right).$$

*Réciproquement, si  $\alpha < n$  n'est pas entier et s'il existe  $A$  et  $\alpha'$  tels que*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |W_f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left|\frac{u-v}{s}\right|^{\alpha'}\right)$$

*alors  $f$  Lipschitz  $\alpha$  en  $v$ .*

Ce théorème donne une condition nécessaire et une condition suffisante sur la transformée en ondelettes pour estimer la régularité lipschitzienne ponctuelle de  $f$  en un point  $v$ .

# Chapitre 3

## Analyse multirésolution et ondelettes orthogonales

L'analyse multirésolution permet de décomposer des signaux mono ou multidimensionnels sur une base orthonormée des fonctions d'échelles et sur une base des fonctions ondelettes. Par conséquent, cette famille d'ondelettes orthonormales par analyse multirésolution réduit à néant toute redondance.

Dans ce chapitre, on explique comment la théorie des ondelettes a été développée et comment on construit une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  grâce à l'analyse multirésolution. On présente quelques familles des ondelettes orthogonales, et un algorithme qui permet de calculer les coefficients d'ondelettes.

### 3.1 Analyse multirésolution

L'idée de l'AMR d'un signal consiste à le représenter comme une limite de ses approximations successives, où chaque approximation est une version de la précédente. Cette section présente les principes de multirésolution, et quelques exemples sur l'analyse multirésolution isométriques.

**Définition 3.1.1 (Analyse multirésolution)** Une analyse multirésolution (A.M.R) est par la définition de Yves Meyer, une suite croissante de sous-espace fermé (sevf)  $V_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1. les  $V_j$  sont omboités, c'est à dire :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}, \quad (3.1)$$

2. l'intersection de tous  $V_j$  est une fonction nulle, et  $L^2(\mathbb{R})$  est l'union fermé de tout  $V_j$  c'est à dire :

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \quad \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \text{ dense dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.2)$$

3. dilatation :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad (3.3)$$

4. translation :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0, \quad (3.4)$$

5. base de Riesz :

il existe une fonction  $g \in S(\mathbb{R})$  telle que la suite  $g(x - k)$  soit base de Riesz (3.1.2) de  $V_0$ .

$$(3.5)$$

### 3.1.1 Base de Riesz

**Définition 3.1.2 (Base de Riesz)** Si  $H$  est un espace de hilbert, une famille  $j \in J$ , de vecteurs de  $H$  est une base de Riesz de  $H$  si  $e_j$  est une famille totale dans  $H$  (les combinaisons linéaires finie des  $e_j$  forment une partie dense dans  $H$ ) et s'il existe deux constantes  $C_2 \geq C_1 > 0$  telle que, pour tout suite finie des coefficients  $\alpha_j, j \in J$  on ait

$$C_1 \left( \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{j \in J} \alpha_j e_j \right\| \leq C_2 \left( \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

**Proposition 3.1.1** (voir [3]) Une famille  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz de l'espace  $V_0$

qu'elle engendre si et seulement si il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  telle que

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega - 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

### 3.1.2 Fonction échelle

Dans les conditions de multirésolution et à partir de  $g$ , on montre qu'il existe une fonction  $\varphi$  appartient à l'espace  $V_0$  telle que la suite  $\varphi(x - k)$  soit une base orthonormée de  $V_0$  appelée fonction d'échelle.

Le théorème suivant orthogonalise la base de Riesz  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est construit une base orthonormée de chacun des espaces  $V_j$  en dilatant et en translatant une unique fonction d'échelle  $\varphi$ .

**Théorème 3.1.1** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multirésolution et  $\varphi$  la fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{g(\omega)}{\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega - 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}},$$

On pose

$$\varphi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{x - k}{2^j}\right),$$

Alors la famille  $\{\varphi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 3.1.2** (voir [4]) La fonction  $\varphi$  vérifie deux propriétés importantes :

1.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0) = 1 \text{ qui liée à la propriété (3.2).}$$

2.  $\varphi$  satisfait l'identité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1,$$

ou encore

$$\int |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} = 2\pi\delta_{0,k}.$$

qui expriment l'orthonormalité de la suite  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  analyse multirésolution.

### 3.1.3 Analyse multirésolution $r$ -régulière

**Définition 3.1.3** *A.M.R est dite  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ) si l'on peut choisir la fonction  $g$  intervenant dans (3.5), l'on ait*

$$\left| \left( \frac{d}{dx} \right)^q g(x) \right| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}$$

pour  $0 \leq q \leq r$ , et pour tout entier  $m \geq 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3.1.4 Exemples d'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

#### Analyse multirésolution de Haar

Un exemple plus simple d'analyse multirésolution est celle de Haar. Les  $V_j$  sont des sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$  formés des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  dont la restriction à chaque intervalle  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est une fonction constante. La fonction  $g$  de  $V_0$  est alors la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$ .

#### Espaces embêtés de spline d'ordre $r$

Un second exemple d'analyse multirésolution ( $r$ -régulière) est celle venant de suites emboîtées de fonctions splines d'ordre  $r$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$  associées à des raffinements de maillages. Dans ce cas, les  $V_j$  sont des sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$  formés des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et dont la restriction à chaque intervalle  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est un polynôme de degré  $\leq r$ .

Un choix possible de la fonction  $g$  de  $V_0$  est fourni par le produit de convolution  $g = \chi * \chi * \dots * \chi$ ,  $(r+1)$  fois, où  $\chi$  est le créneau centré en 0 de longueur 1.

Pour beaucoup d'applications, on souhaite avoir une approximation régulière, alors, on augmente

simultanément le degré des polynômes et la régularité globale de l'approximant en choisissant  $r$  grand.

### Analyse multirésolution de Shanon

Un troisième exemple est l'analyse multirésolution de Shanon. Ici,  $V_0$  est le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  formé de fonction dont la transformée de Fourier est portée par l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . La fonction  $g$  est alors  $g(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  forment une base orthonormée de  $V_0$ .

Cet exemple ne conduit pas à une analyse multirésolution régulière, car la fonction  $g$  n'a pas la décroissance nécessaire.

### Analyse multirésolution dite de Littewood-Paley

Cette exemple est une correction de l'exemple (3.1.4).  $V_0$  est défini de sorte que la fonction  $g$  appartienne à la classe  $S(\mathbb{R})$  de Schwartz des fonctions à décroissance rapide.

On part d'une fonction  $\theta \in D(\mathbb{R})$ , réelle paire, telle que

$$\begin{aligned} \theta(\zeta) &= 1, & \text{si } \zeta \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ \theta(\zeta) &= 0, & \text{si } \zeta \in ]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[ \\ \theta^2(\zeta) + \theta^2(\zeta - 1) &= 1, & \text{si } \zeta \in [0, 1] \end{aligned}$$

On construit alors [14] l'analyse multirésolution à partir de  $\theta$ , et la fonction  $g$  est définie telle que  $\hat{g} = \theta$ , ie,  $g = \mathcal{F}^{-1}\theta$  où  $\mathcal{F}^{-1}$  est la transformée de Fourier inverse (1.2.2).

C'est cette analyse multirésolution qui conduit à l'ondelette  $C^\infty$  de Meyer.

### 3.1.5 Décomposition de l'espace $L^2(\mathbb{R})$

On définit  $W_j$  comme le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ , alors on a les résultat suivant :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \tag{3.7}$$

On a donc les décompositions de  $L^2(\mathbb{R})$  suivantes :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus_{j \geq 0} W_j,$$

et

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (3.8)$$

L'espace  $W_j$  vérifie également la propriété d'invariance par échelle

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}. \quad (3.9)$$

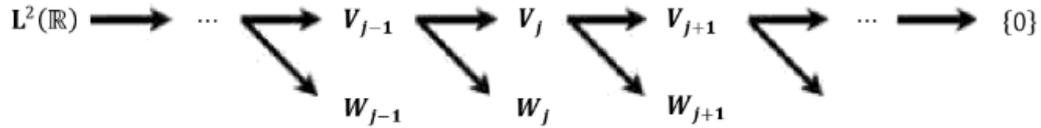


FIG. 3.1 – schématise la décomposition : les sous-espaces sont représentés symboliquement par des rectangles.

## 3.2 Ondelettes orthogonales

On sent bien maintenant que, eu égard à la redondance d'informations donnée par les coefficients  $W_f(a, b)$  sur la «base» des  $\Psi_{a,b}$ , le défi était de trouver une famille, que nous noterons encore  $\Psi_{j,k}$  pour simplifier ( $j, k \in \mathbb{Z}$ ), d'ondelettes orthogonales sur lesquelles on pourrait décomposer tout signal  $f \in L^2$  en série double :

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \Psi_{j,k}) \Psi_{j,k}(x),$$

avec

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k).$$

On aurait ainsi une base orthogonale, au sens usuel, de l'espace de Hilbert  $L^2$ , avec des coefficients  $W_f(j, k)$  indépendants les uns des autres.

### 3.2.1 Où l'on voit enfin des ondelettes orthogonales ?

Les ondelettes orthogonales contiennent les détails nécessaires à l'augmentation de l'approximation de la résolution de l'approximation d'un signal. L'approximation de  $f$  aux échelles  $2^j$  est donnée par la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$  :

$$P_{V_j} f(x) = \sum \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n},$$

puisque  $V_{j-1} \subset V_j$  chacun des espaces  $V_j$  peut être décomposés en

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}. \quad (3.10)$$

On note par  $P_{W_j}$  la projection orthogonale sur  $W_j$ . De (3.10) nous voyons que

$$P_{V_j} f(x) = P_{V_{j-1}} f(x) + P_{W_{j-1}} f(x).$$

Le  $P_{W_j} f$  fournit les «détails» de  $f$  qui existent à échelle  $2^{j-1}$  et qui sont absents échelle plus grossière  $2^j$ .

Le théorème suivant montre que l'on peut construire une base orthonormée de  $W_j$  par translation et dilatation d'une ondelette  $\Psi$  :

**Théorème 3.2.1** (voir [11]) *Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle et  $h$  son filtre miroir conjugué (3.3.1). Soit  $\Psi$  la fonction dont la transformé de Fourier vaut*

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

avec

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)},$$

on pose

$$\Psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi \left( \frac{t - 2^j n}{\sqrt{2^j}} \right),$$

pour tout échelle  $2^j$ ,  $\{\Psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forme base orthonormée de  $W_j$ . sur l'ensemble des échelle  $\{\Psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Le lemme suivant donne des condition nécessaires et suffisantes sur  $\hat{g}$  pour construire une base orthonormale d'ondelettes.

**Lemme 3.2.1** *La famille  $\{\Psi_{j,n}\}$  est une base orthonormée de  $W_j$  si et seulement si*

$$|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2.$$

### 3.2.2 Comment choisir une ondelette

#### Moments nuls

On rappelle que  $\Psi$  a  $r$  moments nuls si elle vérifié (2.3). Ceci signifie que  $\Psi$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $r - 1$ . Le théorème suivant relié le nombre de moments nuls de  $\Psi$  aux dérivées de  $\hat{\Psi}(\omega)$  qui s'annulent en  $\omega = 0$  et au nombre de zéro de  $\hat{h}(\omega)$  en  $\omega = \pi$ . Il montre également que les polynômes de degré  $r - 1$  sont alors reproduits la fonction d'échelle.

**Théorème 3.2.2 ( Moments nuls )** *(voir [11]) Soit  $\Psi$  et  $\varphi$  une ondelette et une fonction d'échelle qui génèrent une base orthogonale. On suppose que  $|\varphi(t)| = O\left((1+t^2)^{-r/2-1}\right)$ . Les quatre proposition suivant sont équivalent*

- i) *l'ondelette  $\Psi$  a  $r$  moment nuls*
- ii)  *$\hat{\Psi}(\omega)$  et ses  $r - 1$  premières dérivées sont nulles  $\omega = 0$ .*
- iii)  *$\hat{h}(\omega)$  et ses  $r - 1$  premières dérivées sont nulles  $\omega = \pi$ .*

iv) pour tout  $0 \leq k \leq p$ ,

$$q_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k \varphi(t-k) \text{ est un polynome de degré } k.$$

### Taille du support

Si  $f$  a une singularité isolé en  $t_0$  et si  $t_0$  est dans le support de  $\Psi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j/2}t - n)$ , alors  $\langle f, \Psi_{j,n} \rangle$  peut être de grande amplitude. Si  $\Psi$  un support compact de taille  $K$ , il existe, à chaque échelle  $2^j$ ,  $K$  ondelettes  $\Psi_{j,n}$  dont le support contienne  $t_0$ . Pour minimiser le nombre de coefficients de grande amplitude de la transformée en ondelettes d'un signal  $f$ , il est possible de diminuer la taille du support  $\Psi$ . Ainsi, si le support de  $h$  (et de la fonction d'échelle  $\varphi$ ) est  $[N_1, N_2]$ , alors le support de  $\Psi$  est  $\left[ \frac{(N_1 - N_2 + 1)}{2}, \frac{(N_2 - N_1 + 1)}{2} \right]$ .

Si  $\Psi$  a  $r$  moments nuls alors son support est au moins de taille  $2r - 1$ . Il y a donc lieu de faire un compromis entre la taille du support et le nombre de moments nuls.

### Régularité

La régularité de  $\Psi$  est liée au nombre de  $\hat{h}(\omega)$  en  $\omega = \pi$ .

Pour illustrer la notion de régularité d'une ondelette, nous qualifierons une ondelette «très lisse» par terme «ondelette régulière». Cette notion de régularité d'une ondelette ou «douceur» de l'ondelette est évidemment liée au nombre de ses dérivées continues appelé parfois «l'ordre de régularité». La régularité de l'ondelette joue un rôle appréciable lors de la reconstruction d'un signal.

### 3.2.3 Bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$

Soit  $m \in \mathbb{N}$  un entier. Une fonction  $\Psi(x)$  d'une variable réelle sera appelée une ondelette (de base) de classe  $m$  si les quatre propriétés suivantes, en apparence contradictoires, sont satisfaites

a) si  $m = 0$ ,  $\Psi(x)$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$  et, si  $m \geq 1$ ,  $\Psi(x)$ , ainsi que toutes ses dérivées, jusqu'à l'ordre  $m$ , appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$

b)  $\Psi(x)$ , ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , est à décroissance rapide à l'infini.

c)  $\int_{\mathbb{R}} x^k \Psi(x) dx = 0$  pour  $0 \leq k \leq m$

d) la collection des  $2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$  est base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 3.2.4 Construction des base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

Pour construire une ondelette à partir de l'AMR on commence par remplacer  $g$  par une fonction  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , soit une base orthonormée de  $V_0$ .

En désignant par  $\hat{\varphi}$  et  $\hat{g}$  les transformées de Fourier de  $\varphi$  et de  $g$ , on a alors

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \chi(\zeta) \hat{g}(\zeta) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\zeta + 2k\pi)|^2 \right]^{-1/2},$$

où  $|\chi(\zeta)| = 1$ ,  $\chi(\zeta + 2\pi) = \chi(\zeta)$  étant par ailleurs arbitraire. La condition (3.6) implique  $c_1 \leq \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\zeta + 2k\pi)|^2 \right]^{1/2} \leq c_2$  et le choix  $\chi(\zeta) = 1$  conduira à  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ .

Désignons par  $W_j$  le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . On a d'après (3.7), (3.8), (3.9)

La construction des ondelettes à partir des analyses multirésolutions découle du lemme évident suivant :

**Lemme 3.2.2** *Si  $\Psi(x)$  appartient à la classe  $S(\mathbb{R})$  et si  $\Psi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormée de  $W_0$ , alors  $\Psi(x)$  est une ondelette.*

En effet, par simple changement d'échelle, on en déduit que  $2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormée de  $W_j$ . Par construction,  $L^2(\mathbb{R})$  est la somme hilbertienne directe des  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Il en résulte que  $2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Il reste à construire  $\Psi(x)$ . Nous déterminerons, en fait, la transformée de Fourier par une fonction arbitraire  $\chi(\zeta)$  vérifiant  $|\chi(\zeta)| = 1$ ,  $\chi(\zeta + 2\pi) = \chi(\zeta)$  et indéfiniment dérivable. La fonction  $\Psi(x)$  n'est pas unique.

Pour construire  $\Psi(x)$ , on observe que  $W_0 \subset V_1$  et que  $\sqrt{2}\varphi(2x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormée de  $V_1$ . On a donc

$$\Psi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \varphi(2x + k),$$

ou

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \overline{\varphi(2x+k)} dx.$$

Si  $\Psi$  et  $\varphi$  appartiennent à  $S(\mathbb{R})$ , la suite  $\beta_k, k \in \mathbb{Z}$ , est à décroissance rapide et  $m_1(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ik\zeta}$  est indéfiniment dérivable.

En passant aux transformée de Fourier, il vient

$$\hat{\Psi}(2\zeta) = m_1(\zeta) \hat{\varphi}(\zeta). \quad (3.11)$$

Nous avons de même  $V_0 \subset V_1$  et donc

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(2x+k)$$

ou

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x+k)} dx.$$

On pose  $m_0(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\zeta}$  et l'on obtient

$$\hat{\varphi}(2\zeta) = m_0(\zeta) \hat{\varphi}(\zeta).$$

Nous disposons maintenant de deux bases orthonormée de  $V_1$ , à savoir  $\sqrt{2}\varphi(2x-k), k \in \mathbb{Z}$ , d'une part et  $\{\Psi(x-k), \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  d'autre part. Ces deux bases orthonormées conduisent à un opérateur unitaire échangent les cordonnées dans ces deux base. Il en résulte que la matrice

$$S(\zeta) = \begin{pmatrix} m_0(\zeta) & m_1(\zeta) \\ m_0(\zeta + \pi) & m_1(\zeta + \pi) \end{pmatrix}$$

est unitaire pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, Si  $S(\zeta)$  est unitaire, (3.11) d'éfinit une ondelette  $\Psi(x)$  vérifiant les conditions

du lemme (3.2.2). Un choix possible est donné par  $m_1(\zeta) = e^{-i\zeta} \overline{m_0(\zeta + \pi)}$ . Il revient à choisir  $\beta_k = (-1)^{k+1} \alpha_{-k-1}$  et les autres choix consiste multiplier  $m_1(\zeta)$  par une fonction  $\chi(\zeta)$ , indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période  $\pi$  telle que  $|\chi(\zeta)| = 1, \forall \zeta \in \mathbb{R}$ .

posons  $\varphi_k(x) = \varphi(x - k)$ . alors l'ensemble constitué des fonctions  $\varphi_k$ , puisque  $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \dots$

Il en résulte que l'on a, pour tout fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}(x). \quad (3.12)$$

L'algorithme (3.12) est beaucoup plus performant que la version rudimentaire fournie par

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}(x).$$

### 3.2.5 Calcule pratique des ondelettes orthogonales

#### Ondelette splines

Les ondelettes splines sont des ondelettes qui à décroissance exponentielle et sont numériquement à support compact. Pour ces ondelettes, l'analyse multirésolution considérée est le second exemple (3.1.4), celle construite à partir des fonctions spline d'un degré  $r$  impair, c'est à dire des fonctions de classe  $C^{r-1}$ , et qui sont des polynôme de degré  $\leq r$  par morceaux.

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \in C^{r-1}(\mathbb{R}) \text{ et } f_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[} \text{ est un polynôme de degré } \leq r\}.$$

**Ondelette spline de degré 1**      On a cas splines d'ordre 1,

$$g(x) = \sup(1 - |x|, 0) \text{ et } \hat{g}(\zeta) = \frac{\sin^2 \zeta/2}{(\zeta/2)^2}.$$

Cela conduit à

$$\sigma(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\hat{g}(\zeta + 2k\pi))^2 = \frac{2 + \cos \zeta}{3}.$$

A partir de l'identité  $\sigma(\zeta) = \frac{2 + \cos \zeta}{3}$ , deux voies s'offrent à nous. On peut d'abord observer que

$$2 + \cos \zeta = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) |1 + re^{i\zeta}|^2 \quad \text{où } r = 2 - \sqrt{3}.$$

Cela fournit une base orthonormée de  $V_0$  de la forme  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , où

$$\hat{\varphi}(\zeta) = (3 + \sqrt{3}) \frac{1}{1 + re^{i\zeta}} \hat{g}(\zeta),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) = (3 + \sqrt{3}) [g(x) + rg(x+1) + r^2(x+2) + \dots].$$

Le support de  $\varphi(x)$  est inclus dans  $]-\infty, 1]$ . Quitte à remplacer  $\varphi(x)$  par  $\varphi(x+1)$ , on peut assurer que le support de  $\varphi(x)$  soit inclus dans  $]-\infty, 0]$ .

Passons au calcul de l'ondelette correspondante.

On commence par expliciter la fonction  $m_0(\zeta)$ . On a

$$m_0(\zeta) = \cos^2 \zeta / 2 \frac{1 - re^{i\zeta}}{1 - re^{2i\zeta}},$$

et

$$m_1(\zeta) = e^{i\zeta} \overline{m_0(\zeta + \pi)} = e^{-i\zeta} \sin^2 \zeta / 2 \frac{1 + re^{-i\zeta}}{1 - re^{2i\zeta}}.$$

Finalement  $\Psi \in V_1$  est définie par

$$\hat{\Psi}(2\zeta) = m_1(\zeta) \hat{\varphi}(\zeta).$$

Cette fonction  $\Psi(x)$  est l'ondelette de Strömberg (découvert par J.O. Strömberg en 1981).

### Ondelettes de Shannon, Meyer, et Battle-Lémarié

On étudie quelques classes importantes d'ondelettes dont les transformées de Fourier se calculent se formule générale de théorème (3.2.1) :

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-i\omega}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.13)$$

**Ondelette de Shannon** L'ondelette de Shannon se construit à partir de l'approximation multirésolution du même nom, qui approxime les fonctions par leur restriction à des intervalles à basses fréquences. Elle correspond à  $\hat{\varphi} = 1_{[-\pi, \pi]}$  et  $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}1_{[-\pi/2, \pi/2]}$  pour  $\omega \in [-\pi, \pi]$ . De (3.13) on déduit que

$$\hat{\Psi}(\omega) = \begin{cases} \exp(-i\omega/2) & \text{si } \omega \in [-2\pi, \pi] \cup [\pi, 2\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où

$$\Psi(t) = \frac{\sin 2\pi(t-1/2)}{2\pi(t-1/2)} - \frac{\sin \pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)}.$$

Cette ondelette est de classe  $C^\infty$  mais décroît lentement à l'infini. Ceci vient du fait que  $\hat{\Psi}(\omega)$  est à support compact mais a des discontinuités en  $\pm\pi$  et  $\pm 2\pi$ . Comme  $\hat{\Psi}(\omega)$  est nul sur un voisinage de  $\omega = 0$ , toutes ses dérivées sont nulles en  $\omega = 0$ , et a un nombre infini de moments nuls.

**Ondelette de Meyer** Ce sont ondelettes régulières, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide. En effet,  $\varphi$  et  $\Psi$  sont de classe  $C^\infty$  car leur transformée de Fourier est à support compact,  $\hat{\Psi}(\omega) = 0$ , ou voisinage de  $\omega = 0$ , toutes ses dérivées sont nulles en  $\omega = 0$ , ce qui montre que  $\Psi$  a une infinité de moments nuls.

L'ondelette de Meyer est orthogonale et symétrique mais n'est pas à support compact.

Ces ondelettes se construisent dans le domaine fréquentiel avec des filtres miroirs conjugués  $\hat{h}(\omega)$  qui sont de classe  $C^n$  et qui vérifient :

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } \omega \in [-\pi/3, \pi/3], \\ 0 & \text{si } \omega \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{cases}$$

La fonction d'échelle  $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{P=1}^{+\infty} 2^{-1/2} \hat{h}(2^{-P}\omega)$  peut vérifier que

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 2^{-1/2} \hat{h}(\omega/2) & \text{si } |\omega| \leq 4\pi/3, \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq 4\pi/3. \end{cases}$$

L'ondelette correspondante (3.13) vaut

$$\hat{\Psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| \leq 2\pi/3, \\ 2^{-1/2} \hat{g}(\omega/2) & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3, \\ 2^{-1/2} \exp(-i\omega/2) \hat{h}(\omega/4) & \text{si } 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3, \\ 0 & \text{si } |\omega| > 8\pi/3. \end{cases}$$

**L'ondtette de Battle-lémarié** Les ondelettes splines polynômiales, dues à Battle et Lemarié se calculent à partir les approximations multirésolution par splines.

Les expressions  $\hat{\varphi}(\omega)$  et de  $\hat{h}(\omega)$  sont données respectivement par

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\exp(-i\zeta\omega/2)}{\omega^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\omega)}} \text{ avec } S_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^n},$$

$$\hat{h}(\omega) = \exp\left(\frac{-i\omega\zeta}{2}\right) \sqrt{\frac{S_{2m+2}(\omega)}{2^{2m+1} S_{2m+2}(2\omega)}},$$

Pour des splines de degré  $m$ ,  $\hat{h}(\omega)$  et ses  $m$  premières dérivées sont nulles en  $\omega = \pi$ .

On montre que  $\Psi$  a  $m + 1$  moments nuls. On déduit de (3.13) que

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{\exp(-i\omega\zeta)}{\omega^{m+1}} \sqrt{\frac{S_{2m+2}(\omega/2 + \pi)}{S_{2m+2}(\omega) S_{2m+2}(\omega/2)}}.$$

Cette ondelette  $\Psi$  est à décroissance exponentielle. Comme c'est un spline polynômial de degré  $m$ , elle est  $m - 1$  fois continûment dérivable. Les ondelettes splines polynômiales sont moins régulières que les ondelettes de Meyer mais décroissent plus vite à l'infini. Pour  $m$  impair,  $\Psi$  est symétrique par rapport à  $1/2$ . Pour  $m$  pair, elle est antisymétrique par rapport à  $1/2$ .

### 3.3 Calcul des coefficients d'ondelettes

Dans ce section on a calculée rapidement les coefficients d'ondelettes on a utilisée l'algorithme pyramidal (3.3.2) qui basée sur un filtre de mémoires conjugués.

#### 3.3.1 Filtres miroirs en quadratiques (conjugués)

Le calcul suivant montre que toute fonction d'échelle est déterminée par un filtre numérique appelé " *filtre méroir conjugué* ",

De l'équation (3.3) et des inclusions  $V_0 \subset V_1$ ,  $W_0 \subset V_1$ , on déduit l'existence de filtres discrets  $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k) \text{ avec } h_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \sqrt{2} \varphi(2x - k) dx.$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) \text{ avec } g_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) \cdot \sqrt{2} \varphi(2x - k) dx.$$

Un choix possible pour le filtre  $g$  est (le filtre  $h$  étant imposé par les espace  $V_j$ )

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}.$$

$h$  et  $g$  sont appelés filtres miroirs en quadrature.

#### 3.3.2 Algorithme pyramidal

Les algorithmes d'analyse et de synthèse sur bases orthonormées d'ondelettes des algorithmes rapides, basés sur des convolutions avec des filtres discrets. Le calcul de  $N$  coefficients s'effectue en  $O(N)$  opérations si les ondelettes sont à support compact[11], sinon en  $O(N \log_2 N)$  opérations si les ondelettes sont à support compact, sinon en  $O(N \log_2 N)$  opérations (dans ce dernier cas, les convolutions sont effectuées à l'aide de la FFT).

Le calcul de la transformée d'une fonction suivant une base d'ondelettes  $\{\Psi_k^j, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  utilise la structure multiéchelle des espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'une analyse multirésolution. Dans le cas des ondelettes à support compact, ils ont logueur finie  $L$ .

Les filtres miroirs en quadrature (3.3.1) vont permettre de calculer les coefficients d'ondelettes de la fonction  $f$  à l'aide du schéma suivant :

Soient  $s_k^j$  et  $d_k^j$  respectivement les coordonnées de  $f$  dans la base  $\{\Psi_k^j = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  de  $W_j$ . Comme ces bases sont orthonormées,  $s_k^j$  et  $d_k^j$  sont donnés par les produit scalaires :

$$s_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_k(x) dx \text{ et } d_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Psi_k^j(x) dx.$$

Les coefficients  $(s_k^{j-1})_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(d_k^{j-1})_{k \in \mathbb{Z}}$  se déduisent de  $(s_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  par les convolutions dicrètes suivies de décimations avec avec les filtres  $h$  et  $g$  (convolution habituelle mais on décale l'entrée de deux points à chaque étape) :

$$s_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n s_{2k+n}^j.$$

$$d_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n s_{2k+n}^j.$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients de  $f$  sur les bases  $(\Psi_k^{j-1})_k$  de  $W_{j-1}$  et  $(\varphi_k^{j-k})_k$  de  $V_{j-1}$  à partir des coefficients de  $f$  sur le base  $(\varphi_k^j)_k$  de  $V_j$ . Connaissant la décomposition  $(s_k^0)_{k=0, N-1}$  d'une fonction de l'espace  $V_0$  suivant les  $\varphi(x - k)$ , on peut calculer  $N$  coefficients d'ondelettes dans les espaces  $W_j, j \leq 0$  par l'algorithme récursif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} (s_k^0)_{k=0, N-1} & \rightarrow & (s_k^{-1})_{k=0, \frac{N}{2}-1} & \rightarrow & (s_k^{-2})_{k=0, \frac{N}{4}-1} & \rightarrow & (s_k^{-3})_{k=0, \frac{N}{8}-1} \dots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & (d_k^{-1})_{k=0, \frac{N}{2}-1} & & (d_k^{-2})_{k=0, \frac{N}{4}-1} & & (d_k^{-3})_{k=0, \frac{N}{8}-1} \dots \end{array}$$

FIG. 3.2 – Algorithme pyramidal

Cette étape sera appelé analyse, l'opération inverse sera appelée synthèse.

La formule de synthèse, déduite de (3.7) est la suivante :

$$s_k^{j+1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} s_n^j + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} a_n^j.$$

et l'on utilise l'algorithme pyramidal (3.2) dans le sens inverse. A cette étape, les coefficients d'ondelettes "omis" dans l'analyse entraînent des erreurs lors de la synthèse aux bords de l'intervalle d'étude  $[0, N]$ .

# Bibliographie

- [1] Amroui, R. (2015). Application de l'Algorithme KS et de l'Ondelette discrète au traitement d'images satellitaires. Doctoral dissertation, Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.
- [2] Bacry, E., Mallat, S., & Papanicolaou, G. (1992). A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 26(7), 793-834.
- [3] Charton, P., & Perrier, V. (1995). Produits rapides matrice-vecteur en bases d'ondelettes : application à la résolution numérique d'équations aux dérivés partielles. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 29(6), 701-747.
- [4] Cohen, A. (1990). Construction de Bases D'Ondelettes  $\alpha$ -Höldériennes. *Revista Matematica Iberoamericana*, 6(3), 91-108.
- [5] Coulibaly, M. (1992). Analyse par ondelettes : quelques aspects numériques et applications à des signaux océaniques simulés et à l'estimation de densité de probabilité .Doctoral dissertation. Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- [6] Coutel, S. (2006). Outils ondelettes pour l'analyse des systèmes dynamiques : application à l'analyse multimodale et à la cartographie d'évènements transitoires. Doctoral dissertation. L'institut National des Sciences Appliquées. Lyon.
- [7] Damerval, C. (2008). Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'images. Application à la détection de région d'intérêt. Doctoral dissertation. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

- [8] Gasquet, C., & Witomski, P. (2000). *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Dunod.
- [9] Goswami, J. C., & Chan, A. K. (2011). *Fundamentals of wavelets : theory, algorithms, and applications* (Vol. 233). John Wiley & Sons.
- [10] Jean, Paoul Nuacu. *Les ondelettes*. (2015). Faculté de science. Université de Sherbrook. Canada.
- [11] Mallat, S. (2000). *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions Ecole Polytechnique.
- [12] Meyer, Y., Jaffard, S., & Rioul, O. (1987). *L'analyse par ondelettes*. *Pour la science*, 119, 28-37.
- [13] Meyer, Y. (1990). *Construction de bases orthonormées d'ondelettes*. In *Colloquium Mathematicum* (Vol. 60, No. 1, pp. 141-149). Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.
- [14] Meyer, Y. (1990). *Ondelette et opérateurs I. Le concours de Ministère de la recherche et la technologie (DIST)*. ISBN 2 7056 6125 0.
- [15] Meyer, Y. (1993). *Ondelettes et algorithmes concurrents*. In 14<sup>e</sup> Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1993. GRETSI,
- [16] Ouahabi, A . (2012). *Analyse multirésolution pour signal et l'image*. ISBN 978-2-7462-2394-3. Paris.
- [17] Perrier, V. (2005). *Application de la théorie des ondelettes*. Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [18] Pierre, J., Pierre, G., & Lemarié-Rieusset. (2016). *Séries de Fourier et ondelettes*. ISBN 978-2-84225-161-1. Paris.



# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

## Abréviations

- $TF$  : Transformée de Fourier.  
 $TFF_g$  : Transformée de Fourier à fenêtre.  
 $TO$  : Transformée en ondelettes.  
 $TOC$  : Transformée en ondelettes continue.  
 $AMR$  : Analyse multirésolution.

## Notation

- $f(t)$  : Signal en temps contenue.  
 $\delta(t)$  : Distribution de Dirac.  
 $1_{[a,b]}$  : Fonction indicatrice, valant 1 dans  $[a, b]$  et 0 en dehors.  
 $f_\sigma(x)$  : La symétrisée  $f_\sigma$  de  $f$  est défini par  $f_\sigma(x) = f(-x)$ .  
 $\tau_a f(x)$  : la translate de  $\tau_a f(\zeta)$  de  $f$  est la fonction définie par  $\tau_a f(x) = f(x - a)$ .  
 $\mathcal{F}f(\zeta)$  : Transformée de Fourier.  
 $\overline{\mathcal{F}f}(\zeta)$  : Transformée de Fourier conjugué.  
 $\hat{f}(\zeta)$  : Transformée de Fourier  $\mathcal{F}f(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$ .  
 $S_f(u, s)$  : Transformée de Fourier à fenêtre.  
 $W_f(\lambda, b)$  : Transformée en ondelettes de  $f$ .

$T_N$	:	L'ensemble des polynômes trigonométriques $p$ de degré $\leq N$ défini par : $T_N = \left\{ \sum_{n=-N}^N C_n e^{2i\pi n t/a}, C_n \in \mathbb{C}, \forall n \in [-N, N] \right\}.$
$L_p^2(0, a)$	:	L'espace des fonctions périodiques de période $a$ telle que $L_p^2(0, a) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ de période } a \text{ et } \int_0^a  f(t) ^2 dt \leq \infty \right\}$ on le munit de produit scalaire $(f, g) = \int_0^a f(t) \bar{g}(t) dt$ le produit scalaire associée $\ f\ _2 = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_0^a  f(t) ^2 dt \right)^{1/2}.$
$L^1(\mathbb{R})$	:	L'espace des fonctions intégrables telle que : $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}}  f(t)  dt \leq \infty \right\}.$
$L^2(\mathbb{R})$	:	Espace des fonctions d'énergies finies : $\int_{\mathbb{R}}  f(t) ^2 dt < \infty.$
$l^2(\mathbb{Z})$	:	Signaux discrets d'énergies finies : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  f[n] ^2 < \infty.$
$C^\infty$	:	Fonctions indéfiniment différentiables.
$S(\mathbb{R})$	:	Espace de Schwartz.
$U \oplus V$	:	Somme directe de deux espaces vectoriels.
$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} U_j$	:	Somme directe de suite des espaces vectoriels.
$g_{\lambda, b}(t)$	:	La fonction fenêtre.
$\Psi_{u, s}$	:	Ondelette de mère.
$P_{V_j}$	:	Opérateur de projection orthogonal de $V_j$ sur $V$ .
$f * g$	:	Produit de convolution en temps contenu.
$(f, g)$	:	Produit scalaire.
$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)$	:	Dérivée de $f$ à l'ordre $p$ .

## Résumé

On s'intéresse à l'étude de la transformée en ondelettes qui est une alternative à la transformée de Fourier. Les coefficients d'ondelettes réalisent une analyse à la fois en temps et en fréquence.

Dans ce mémoire, on explique comment les ondelettes sont calculées à partir d'une ondelette mère qui est développée sur la base d'une analyse multirésolution.

Cette dernière permet de décomposer l'espace des fonctions de carré intégrable en somme discrète orthogonale de sous espaces d'ondelettes. A la fin, on donne un algorithme pour le calcul rapide des coefficient d'ondelette.

**Mots clés :** Ondelettes, Analyse multirésolution, Fonction échelle.

## Abstract

We are interested in the study of the wavelet transform, which is an alternative to the Fourier transform. Wavelet coefficients perform both time and frequency analysis.

This paper explains how wavelets are calculated from a mother wavelet that is developed based on a multiresolution analysis.

This last one allows decomposing the space of function of the intégrable square in the orthogonal discrete sum of subspaces of wavelets. At the end, we give an algorithm for the quick calculation of wavelet coefficient.

**Keywords:** Wavelet, multiresolution analysis, scale function.

## الملخص

نهتم بدراسة التحويل بالموجات الذي يعد بديلاً لتحويل فورييه. معاملات الموجات تقوم بتحليل الوقت والتردد.

تشرح هذه المذكرة كيفية حساب الموجات من خلال موجة أصلية التي يتم تطويرها على أساس تحليل متعدد الدقة.

ويسمح هذا الأخير بتفكيك فضاءات المربعات القابلة للتكامل إلى مجموع مباشر متعامد لفضاءات جزئية للموجات. في النهاية، نعطي خوارزمية للحساب السريع لمعامل الموجة.

**الكلمات المفتاحية:** الموجات, تحليل متعدد الدقة, دالة نطاق.

