République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

NOM ET PRENOM

Saoudi Ibrahim

Titre :

Résolution numériques d'équations intégro-différentielles de fredholm

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	KHELIL NACEUR	UMKB	Président
Dr.	**KABOUL HANANE**	UMKB	Encadreur
Dr.	REZKI IBRAHIM	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

je dédie ce modeste travail :

A mes perents, mes estimes pour eux sont immenses, je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour moi. que dieu vous préserve une longue vie heureuse.avec toute ma tendresse.

pour vous, mes chéres fréres et mes chéres soeurs.

A tout la famaille (SAOUDI)

A tout les amis.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Allah pour la volonté, la force, la santé et la patience qu'il m'a donné an de réaliser ce travail.Je tiens à exprimer ma profonde grantitude envers(Mon encadreur **Dr " KABOUL HANANE "**) qui a accepté d'encadrer ce travail.

Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail. **Dr " KHELIL NACEUR "** et **Dr " REZKI IBRAHIM "**.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques, en particulier chef de département **Pr " Mokhtar hafayed "**

Je tiens à remercier Monsieur **Pr "MOKHTARI ZOUHIR"** pour tout l'aide qu'il ma apporté et sa patience

Merci enfin à ma famille, notamment à mes parents dont l'affection et les encouragements m'ont rendue la vie vraiment plus agréable et tous mes amis.

ملخص

المعادلات التكاملية – التفاضلية لفريدوم عولجت في ميادين علمية واسعة خاصة ميدان الرياضيات التطبيقية, والهدف الأساسي من هذا العمل هو اقتراح طرق عددية لحل معادلات تكاملية- تفاضلية لفريدوم .وهذه الطرق تقوم على تقريب نواة ذات رتبة منتهية والذي يساعد على الحصول على الحل التقريبي بشكل نقطي .

الكلمات المفتاحيه : معادلات تكامليه، معادلات تكاملية - تفاضلية،طرق التصنيف

Résumé

Dans ce travail, on étudie des méthodes numériques pour résoudre des équations intégro-différentielles du Fredholm. Ces méthodes basées sur une approximation du noyau de rang fini qui permet d'obtenir la solution sous forme discrétisée.

Mots clés : équation intégrale, Equations intégro-différentielle, Méthodes de collocation

Abstract

In this work, we are going to study numeric methods of resolution Fredholm integro-differentials equations these methods rest on an approximation a kernel of finished rank, that allow to get the solution in discrete form the obtain results

must be compared with the exact solution with a high precision

Key words :integral equation, Fredholm integro-differentials equations,

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction

Les équations intégro-différentielles (E I D) s'inscrit comme un des problèmes les plus appliqués où les opérateurs différentielset intégrals apparaîtrons dans la même équation, ce type d'équations a été introduit par vito-Volterra pour le première fois dans le début des années 1900, Volterra a examiné l'augmentation de la population. Consiste son étude sur les influences héréditaires où à travers sa recherche le sujet de (E.I-D) a été établie, le deuxième limite de l'intégration est variable .

Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique, le but est de trouver résolution numérique des (E.I-D) de Fredholm où les deux limites de l'intérgation sont fixés.

Notre mémoire se compose en deux chapitres

- **Le premier chapiter :**

indroduit un rappel sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, ainsi la relation entre eux ,ainsi la théoréme du point fixe. intégrales et les équations intégro-différentielles, les théorèmes du point fixe qui assure l'existance et l'unicité de solution de l' E I D

intégro-différentielle admette une solution unique

Le deuxième chapitre

on a essayé de trouver la solution numérique d'équations intégro-différentielles de fredholm, en se basant sur la méthode de collocation utilisant les polynômes de Legendre et le polynôme de taylor ,où on a employé la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation avec laquelle on obtient la solution approximative sous forme des polynômes.

Finalement, on étudie la convergence de la méthode choisie en estimant l'erreur qui résulte de la comparaison de la solution approchée et de la solution exacte.

Chapitre 1

les déffirents types des équations intégrales et intégro-différentielles

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $\varphi(x)$ à déterminer apparaissent sous le signe intégral. Le sujet des équations intégrales est l'un des outils mathématiques les plus utiles en mathématiques pures et appliquées

1.1 Les équations intégrales

Définition 1.1.1 *Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration.*

la forme générale d'une équation intégrale est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t, \varphi(t))dt$$

où φ la fonction inconnue, K est le noyau de l'équation intégrale, f une fonction donnée, λ est un réel défini comme parametre numérique appartient à $\mathbb{R}$, h et g sont les limites d'intégration.

Il doit être noté que les limites d'intégration g et h peuvent être des variables, constants, ou mixte.

On dit que une équation intégrale est linéaire si :

$$\forall(x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad K(x,t,\varphi(t)) = k(x,t)\varphi(t)$$

où k est une fonction défine sur $\mathbb{R}^2$.

1.1.1 Equations intégrales de Fredholm

la forme standard des équations intégrales linéaires de fredholm est donnée par la forme :

$$\phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

où les limites de l'intégration sont des constantes et la fonction inconnue φ apparaît de façon linéaire sous le signe intégral, k est le noyau de l'équation intégrale, f une fonction donnée, λ est un paramètre numérique, la fonction ϕ détermine le type de l'équation intégrale linéaire de fredholm.

Si la fonction $\phi(x) = 0$, alors l'équation (1.1) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

cette équation est appelée équation intégrale linéaire de fredholm de premiére espéce.

Si la fonction $\phi(x) = 1$, alors l'équation (1.1) s'écrit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.3}$$

et s'appelle l'équation intégrale linéaire de fredholm de seconde espéce.

passant maintenant a définir un autre type d'équation intégrale connue par E.i de Volterra

1.1.2 Equations intégrales de volterra

la forme standard des équations intégrales linéaires de volterra est donnée par la forme suivante :

$$\phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.4}$$

où les limites de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue φ apparaît linéairement sous le signe intégral. k est le noyau de l'équation intégrale, f une fonction donnée, λ est un paramètre numérique, la fonction ϕ détermine le type de l'équation intégrale linéaire de volterra .

Si la fonction $\phi(x) = 1$, alors l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.5}$$

et s'appelle l'équation intégrale linéaire de volterra de seconde espéce.

Si la fonction $\phi(x) = 0$, alors l'équation (1.4) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.6}$$

cette équation est appelée l'équation intégrale linéaire de volterra de premiére espéce.

1.1.3 Equation intégrale singulière

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,t)\varphi(t)dt$$

sont appelés singuliers si l'une des limites d'intégration $g(x)$,$h(x)$ ou les deux sont infini, et l'équation précédente dite singulière si le noyau $k(x,t)$ devient illimité en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration

Dans ce texte, nous concentrerons notre préoccupation sur les équations de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{|x-t|^\alpha}\varphi(t)dt \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{1.7}$$

1.1.4 Equations intégrales à noyau de Cauchy

On considére

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{t-x}dt, \qquad a < x < b \tag{1.8}$$

qui est une équation intégrale singulière à noyau de Cauchy non homogène. Cette intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

1.2 Relation entre les équations intégrales et les équations différentielles

pour montre la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles on va montrer lemme suivant

Lemme 1.2.1 *pour tout fonction u*

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dtds = \int_a^x (x-t)u(t)dt \tag{1.9}$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} ... \int_a^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1}...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-x_1)^{n-1}u(x)dx \tag{1.10}$$

soit

$$g : s \longrightarrow \int_a^s u(t)dt$$

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dtds = \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1.g(s)ds$$

(intégration par partie)

$$
\begin{aligned}
&= [sg(s)]_a^x - \int_a^x s.g^{'}(s)ds \\
&= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s)ds \\
&= x\int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)u(t)dt
\end{aligned}
$$

1.2.1 Problémes avec conditions initiales

On considére le probléme de Cauchy de second ordre suivant

$$
\begin{cases}
u"(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\
u(0) = u_0, & u^{'}(0) = u_1^{'}
\end{cases}
$$

par L'intégration des deux cotés sur l'intervalle$[0\ x]$ de équation différentielle , on obtient

$$
u^{'}(x) = u_0^{'} + \int_0^x g(t, u(t))dt, \qquad 0 \leq x \leq 1
$$

En intégrant une seconde fois.

$$
u(x) = u_0 + u_0^{'}x + \int_0^x \int_0^s g(t, u(t))dtds
$$

par l'utilisation de relation (1.9), on obtient

$$
u(x) = u_0 + u_0^{'}x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dtds
$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espéce.

1.2.2 Probléme aux conditions limites

On considére le probléme de **Dirichlet** suivant

$$\begin{cases} u"(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \end{cases}$$

En intégrant l'équation deux fois de suite par rapport à x le longe de l'intervalle $[0, x]$, il vient

$$u'(x) = c + \int_0^x g(t, u(t))dt, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x - t)g(t, u(t))dt, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.11}$$

Pour déterminer la constante c, on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = u_1$, ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1 - t)g(t, u(t))dt,$$

Ainsi, l'´equation (1.11) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x (x - t)g(t, u(t))dt - x\int_0^1 (1 - t)g(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (1 - u_0)x + \int_0^x t(1 - x)g(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1 - t)g(t, u(t))dt \end{aligned}$$

qui c'écrit encore comme une équation intégrale de **Fredholm** de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)g(t, u(t))dt$$

où

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1 - x), & t \leq x \\ x(1 - t), & t \geq x \end{cases}$$

le probléme aux limites suivant

$$\begin{cases} u"(x) = \lambda u(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \end{cases}$$

est équivalent à une équation intégrale linéaire de **Fredholm** de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

où $k(x,t)$ est donné par :

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases}$$

1.3 Equation intégro-différentielles

Dans le début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de croissance de la population, et nouveaux types d'équations développées et nommés comme équations intégro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît comme une combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégral. Dans l'électrique problème d'ingénierie, le courant $I(t)$ circulant dans un circuit fermé puisse être obtenu en forme de l'équation intégro-différentielle suivante sont classés comme les équations intégrales singulier.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^1 I(r)dr = f(t), \quad I(0) = I_0 \tag{1.12}$$

où L est l'inductance, R est la résistance, C la capacitance et $f(t)$ l'applique tension. Des exemples similaires peuvent être cités comme suit :

$$u" = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \tag{1.13}$$

$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(xt)u(t)dt, \qquad u(0) = 1 \tag{1.14}$$

Équations (1.12) et (1.13) sont des équations intégro-différentielles de Volterra type, considérant que l'equations intégro-différentielles de forme (1.14) est un equation de Fredholm type. Ces terminologies ont été conclus en raison de la présence de durée indéterminée et déterminée intégrales.

1.4 Classification des équations intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle (E,I,D) est une équation composée de deux opérations intégrale et différentiel qui impliquent la fonction inconnue φ.

soit l'équation intégro-différentielle linéaire

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^{s} \int_a^x k_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x) \tag{1.15}$$

où a_1 ; a_2.... ; a_n sont des constantes, $f(x)$, $k_m(x)(m = 0; 1....., s)$ des fonctions données, $\varphi(x)$ la fonction cherchée.

La fonction $\varphi(x)$ est assujettie à des condition initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_0', ...\varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}$$

1.4.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de $\varphi(x)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $\varphi^{(n)}$ sur le côté gauche. exemples de Fredholm intégro-différentielles

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi(t)dt, \qquad \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi(t)dt, \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

1.4.2 Équations intégro-différentielles de Volterra

L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.16}$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de φ.Autres dérivés de l'ordre inférieur peuvent apparaître avec $\varphi(n)$ sur le côté gauche. un Exemples d'équations l'integro-différentielle de Volterra sont données par

$$\varphi'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x t\varphi(t)dt, \qquad \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x t\varphi(t)dt, \qquad \varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 1$$

1.4.3 Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.17}$$

λ_1 et λ_2 sont des paramétres numériques,k_1 et k_2 les noyaux de l'équation intégrale, f est la fonction donnée φ est la fonction inconnue.

1.5 Existence et unicité de la solution des équations intégro-différentiells

Cette section est consacrée à l'étude du problème de la valeur initiale pour systèmes intégro-différentiels du type

1.5.1 Théorème du point fixe

Définition 1.5.1 *Soit une fonction $f : E \longrightarrow F$. $a \in E$ est appelé un point fixe de f si*

$$f(a) = a$$

Théorème 1.5.1 *(picard)*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante,i.e Lipschitzienne de rapport $k \in [0 \;\; 1]$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_n)_{n \in N}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach B, tel que T^n est contractant sur B, alors T a un point fixe unique.

.

Théorème 1.5.2 *(schauder)*

si E est un borné, sous-ensemble convexe fermé dans un espace de Banach B, et $T : E \longrightarrow E$ avec T complètement continue, alors T a un point fixe.

Théorème 1.5.3 *Supposons que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n], K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ tel que*

$$\int_s^t K(\sigma, s, u(s)) d\sigma \leq N$$

pour $J = [t_0 \ \ t_0 + \alpha]$ $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$ avec $u \in \Omega = \{\phi \in C[J, \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0$ et $|\phi(t) - u_0| \leq b\}$,pour certains $0 \leq \alpha \leq a$. Alors l'équation intégro-différentielle de Volterra

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s))ds \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

admet une solution unique.

Théorème 1.5.4 *(tychonoff)*

Soit B un espace complet, localement convexe,et linéaire et B_0 un sous-ensemble convexe fermé de B. soit la cartographie $T : B \longrightarrow B$ continue et $T(B_0) \subset B_0$: Si la fermeture de $T(B_0)$ est compact alors T a un point fixe dans B_0.

Théorème 1.5.5 *supposons que*

i) $f \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $g \in C\left[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+\right]$

$g(t, u)$ et monotone non décroissante dans u pour chaque $T \in J$ et

$$|f(t, x)| \leq g(t, |x|), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$

ii) $K \in C\left[\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right]$, $G \in C\left[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+\right]$

$G(t, s, u)$ monotone non décroissante dans u pour $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ et

$$|K(t, s, x)| \leq G(t, s, |x|), (t, s, x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n$$

iii) pour chaque $(u_0 \succ 0)$, l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) + \int_0^t G(t, s, u(s))ds \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

a une solution $u(t)$ pour $t \succ t_0$

$i\nu)$ $\int_s^t |K(\sigma, s, x(s))|\, d\sigma \leq N \qquad$ pour $\quad t, s \in \mathbb{R}_+, x \in C\,[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$

Ensuite, pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$ de tel que $|x_0| \leq u_0$, il existe une solution $u(t)$ de (1.18) pour $t \geq t_0$ satisfaisant $|x(t)| \leq u(t), \quad t \geq t_0$

Les résultats en point fixe qui seront discutés sont de deux types. Le premier type traite avec des contractions et sont appelés théorèmes de point fixe de Banach. La deuxième type traite des mappages compacts et est plus impliqué. Noms associés à

ces résultats sont Schauder et tychonoff.

Chapitre 2

Résolution numérique des équations intégro-différentiells de fredholm

La résolution des équations intégro-différentielles est très difficile, donc on doit résoudre numériquement

l'objectif est de trouver une solution approchée de la solution exacte. Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équations intégro-différentielles linéaires on se basant sur la méthod de collocation, utilisant Polynôme de Legendre et les polynômes de taylor, où on emploit la matrice oppérationnelle d'intégration et de dérivation, les solutions approximatives sont donnée sous forme des polynômes.

L'etude de la convergence de la méthode est nécessaire aussi bien que la vitesse de la convergence, en estimant les erreurs pour ces méthodes avec comparaison des solutions approchées avec la solution exacte.

2.1 Méthode de collocation(Polynôme de Legendre)

2.1.1 Polynômes de Legendre

Définition 2.1.1 *Pour tout entier n, p_n est un polynôme unitaire de degré n et on a*

$$p_n = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n), \qquad\qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

Notons que pour tout $n, p_n(1) = 2^n(n!)^2/(2n!)$.

Les polynômes de Legendre, que nous désignerons dans la suite par une lettre majuscule P_n, sont proportionnels aux polynômes p_n et normalisés de façon que $P_n(1)$ soit égal à 1. Ils sont donc donnés, grâce à la formule de Rodrigues, par

$$P_n(x) = \frac{n!}{2^n(n!)}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}p_n(x), \quad n = 0, 1....$$

Ainsi, le coefficient de x^ndans l'expression de P_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.On a par exemple

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (1/2)(3x^2-1)$

$P_3(x) = (1/2)(5x^3-3x), \quad P_4(x) = (1/8)(35x^4-30x^2+3)$

Théorème 2.1.1 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$||P_n||^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = 2/(2n+1)$$

Théorème 2.1.2 *La suite des polynômes de Legendre (P_n) est une base orthogonale de l'espace L^2 $((-1,1),dx)$. Toute fonction f de $L^2((1,1),dx)$ se développe de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)P_n \qquad \text{avec} \qquad c_n(f) = \frac{2n+1}{2}\langle f, P_n\rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=0}^{N}c_n(f)P_n\right\|_{L^2}=0$$

On notera que le polynôme de Legendre de f, de degré n, donné par

$$L_nf(x)=\sum_{n=0}^{n}c_k(f)P_k(x)$$

réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f par des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Propriétés des polynômes de Legendre

$i)$**L'orthogonalité**

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P_n(x)Q_m(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2m+1}, & \text{si } m=n\\ 0 \quad \text{si} & m\neq n\end{cases}$$

$ii)$ **Parité** Pour tout entier naturel n et pour tout x, on a

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\qquad \text{en particulier}\qquad P_n(-1)=(-1)^n$$

Ainsi pour n pair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances paires de x et pour n impair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.

$iii)$ **Relation derécurrence**

$$\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)=xP_n(x)$$

$iv)$ **Equation différentielle** Pour tout entier naturel n, on a

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

Principe de la méthode

Soit l'équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm d'ordre m suivante

$$\sum_{k=0}^{m} F_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)dt, \qquad (-1 \leq x, t \leq 1) \tag{2.1}$$

Avec conditions mixtes

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(-1) + b_{jk}y^{(k)}(1) + c_{jk}y^{(k)}(0)) = \mu_j \ , \qquad j = 0, 1, 2, ..., m-1 \tag{2.2}$$

où les constantes a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, λ et μ_j sont des constantes invariantes

approximation polynôme de Legendre

il suffit de trouver une solution exprimée sous la forme de l'approximation comme suit

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x),$$

$$A = (a_0, a_1, ..., a_n)$$

$$P(x) = (P_0(x), P_1(x), ..P_n(x))$$

où $P_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2......N$ sont les polynomes de legendre,a_n pour $n = 0, 1, 2, ..., N$ sont des coefficients de legendre et $F_k(x), g(x), K(x,t)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle, $-1 \leq x, t \leq 1$

Méthode de solution

par recurrence on a

$$P^{(k)}(x) = P(x)(\Pi^T)^k A$$

$$y(x) = p(x).A \ , \qquad\qquad y^{(k)} = P(x)(\Pi^T)^k A$$

$$\Pi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Relations matricielles fondamentales

On écrit (2.1) sous forme :

$$D(x) = G(x) + \lambda I_f(x)$$

telle que

$$D(x) = \sum_{k=0}^{m} F_k(x) y^{(k)}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda I_f(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,t) y(t) dt$$

et

$$D = \sum_{k=0}^{m} F_k P(\Pi^T).A \qquad \text{et} \qquad I_f = P(x).k_l Q A$$

où

$$D = \begin{pmatrix} D(x_0) \\ D(x_1) \\ D(x_2) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}, \quad \lambda I_f = \begin{pmatrix} \lambda I_f(x_0) \\ \lambda I_f(x_1) \\ \lambda I_f(x_2) \\ \vdots \\ \lambda I_f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$I_f(x) = \int_{-1}^{1} P(x).k_l.P^T(t).P(t).A dt = P(x).k_l.A \int_{-1}^{1} P^T(t).P(t) dt$$

on a

$$\int_{-1}^{1} P^T(t).P(t)dt = Q = [q_{m.n}] = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} \ , & \text{si} \ \ m = n \\ 0 & \text{si} \ \ m \neq n \end{cases}$$

$$K(x,t) = P(x).k_l.P^T(t)$$

$$I_f(x) = P(x).k_l.Q.A$$

et en le simplifiant ,on obtient l'équation matricielle

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m} F_k P(\Pi^T)^k - \lambda P K_l Q \right\} A = G \tag{2.3}$$

ce qui correspond à un systéme d'équations algébriques $(N-1)$ pour les $(N-1)$ coefficients de legendre inconnus $a_0, a_1, ..., a_N$.briévement, nous pouvons écrire l'équation matricielle (2.3) sous la forme

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \tag{2.4}$$

où

$$\mathbf{W}= [w_{pq}] = \sum_{k=0}^{m} F_k P(\Pi^T)^k - \lambda P K_l Q \qquad p,q = 0,1,.....N;$$

$$G = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad \cdots \quad g(x_N)]^T \, .$$

et d'autre part ,pour la condition mixtes(2.2)

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(1) + c_{jk}P(0)] \left[\Pi^T\right]^k A = \mu_j \ , \qquad j = 0,1,2,.....,m-1$$

peut s'écrire

$$U_jA = [\mu_j] \tag{2.5}$$

telle que

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(1) + c_{jk}P(0)] \left[\Pi^T\right]^k$$
$$= [\mu_{j0} \quad \mu_{j1} \qquad\qquad \mu_{jN}]$$

pour obtenir la solution de l'équation (2.1), sous la condition (2.2), en remplaçant les matrices de lignes (2.5) par les m derniéres lignes de la matrice (2.4) on a alors la nouvelle matrice augmentéé

$$\left[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}\right] = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g(x_{N-m}) \\ \mu_{00} & \mu_{01} & \cdots & \mu_{0N} & ; & \mu_0 \\ \mu_{10} & \mu_{11} & \cdots & \mu_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & ; & \vdots \\ \mu_{m-1,0} & \mu_{m-1,1} & \cdots & \mu_{m-1,N} & ; & \mu_{m-1} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

si rang $\mathbf{W}$ =rang$\left[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}\right] = N+1$, alors on peut écrire

$$A = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$$

les coefficients a_n $(n = 0, 1, ..., N)$ sont uniquement déterminés par (2.6). Au moyen du système (2.4), nous pouvons également obtenir des solutions particulières.

2.2 Polynôme de taylor

Principe de la méthode

Dans cette étude, une méthode matricielle appelée méthode de collocation de Taylor est présentée pour résoudre numériquement les équations intégro-différentielles de fredhom par une série de Taylor . En utilisant les points de collocation de Taylor, cette méthode transforme l'équation intégro-différentielle en une équation matricielle qui correspond à un système des équations algébriques linéaires.

soit l'équation intégro-différentielle de fredholm d'ordre m

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad a \leq x, t \leq b. \tag{2.7}$$

où P, f, K sont des fonction connues, définis sur l'intervalle $[a, b]$ λ est un paramètre réel, y est la fonction inconnue.

Les conditions (de fasson général)

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik}y^{(k)}(a) + b_{ik}y^{(k)}(b) + c_{ik}y^{(k)}(c)] = \gamma_i, \qquad i = 0, 1, ...m-1 \tag{2.8}$$

Où a_{ik} ; b_{ik} ; c_{ik} et γ_i sont des constants avec $a \leq c \leq b$.

la solution approximative est exprimée par la série de Taylor suivant :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad a \leq x \leq b \tag{2.9}$$

où $y^{(n)}(c)$ sont les coefficients de Taylor à déterminer.

Relations matricielles fondamentales

Convertissons les expressions définies en (2.7), (2.8) et (2.9) en formes matricielles.

d'abord considérons la solution $y(x)$ définie par la série de Taylor (2.9) et alors nous pouvons mettre sous forme de matrice

$$[y(x)] = \mathbf{X}\mathbf{M}_0\mathbf{A}$$

où

$$\mathbf{X} = [1 \ \ (x-c) \ \ (x-c)^2 \ \ \ldots \ \ (x-c)^N]$$

$$\mathbf{A} = [y^{(0)}(c) \ \ y^{(1)}(c) \ \ y^{(2)}(c) \ \ldots \ y^{(N)}(c)]^t$$

et

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N!} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une telle solution, nous pouvons utiliser la méthode de matrice suivante, qui est une méthode collocation de Taylor . Cette méthode est basée sur le calcul des coefficients de Taylor au moyen des points de collocation de Taylor permettant ainsi de trouver la matrice **A** contenant les coefficients de Taylor inconnus.

Premièrement, nous substituons les points de collocation de Taylor définis par

$$x_i = a + i\frac{b-a}{N}, \quad i = (0, 1, ..., N), \quad x_0 = a, \ x_n = b$$

On pose (2.7) sous forme

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x_i) y^{(k)}(x_i) = f(x_i) + \lambda \mathbf{I}(x_i) \tag{2.10}$$

où

$$\mathbf{I}(x_i) = \int_a^b K(x_i, t) y(t) dt$$

on peut alors écrire le système (2.10) sous forme matricielle

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{Y}^{(0)} + \mathbf{P}_1 \mathbf{Y}^{(1)} + \cdots + \mathbf{P}_m \mathbf{Y}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}_k \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{F} + \lambda \mathbf{I} \tag{2.11}$$

où

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^k = \begin{pmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I(x_0) \\ I(x_1) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{pmatrix}$$

Forme matricielle pour la partie différentielle

Supposons que la dérivée k de la fonction (2.9) par rapport à x ait l'expansion de la série de Taylor définie par

$$y^{(k)}(x_i) = \sum_{n=k}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{(n-k)!}(x_i - c)^{n-k}, \qquad a \leq x \leq b$$

où $y^{(k)}(x)(k = 0, 1, ..., N)$ sont des coefficients de Taylor, clairement $y^{(0)}(x) = y(x)$.Puis en substituant les points de collocation de Taylor dans cette expression, nous obtenons les formes matricielles

$$[y^{(k)}(x_i)] = \mathbf{X}_{x_i}\mathbf{M}_k\mathbf{A}, \qquad (k = 0, 1, ..., N) \tag{2.12}$$

ou l'équation matricielle

$$y^{(k)}(c_r) = \mathbf{C}_r\mathbf{M}_k\mathbf{A}$$

où

$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 1 & (c_r - c) & (c_r - c)^2 \; ... \; (c_r - c)^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-k)!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire l'équation matricielle. (2.11) comme

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}_k \mathbf{C} \mathbf{M}_k\right) \mathbf{A} = \mathbf{F} + \lambda \mathbf{I} \tag{2.13}$$

Forme matricielle pour la partie intégrale

Le noyau $k(x,t)$ peut être approximmé par la série de Taylor de degré N sur($x = c$ et $t = c$) sous la forme

$$k(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} k_{nm} (x-c)^n (t-c)^m$$

$$k_{nm} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} k(c,c)}{\partial x^n dt^m}, \quad n, m = 0, 1, ..., N.$$

Alors la représentation matricielle de $k(x,t)$ peut être donné par

$$[k(x,t)] = \mathbf{X} \mathbf{K} \mathbf{T}^t \tag{2.14}$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \dots & (x-c)^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = [1 \;\; (t-c) \;\; (t-c)^2 \;\; \dots \;\; (t-c)^N]$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & \cdots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ k_{N0} & k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{pmatrix}$$

En outre, la représentation matricielle de $y(x)$ et $y(t)$ sont

$$y(x) = \mathbf{XM}_0\mathbf{A}, \qquad y(t) = \mathbf{TM}_0\mathbf{A} \tag{2.15}$$

Substitution des expressions (2.14) et (2.15) dans l'intégrale$I(x_i)$définie dans l'équation (2.10).

$$[I(x)] = \int_a^b \left\{\mathbf{XKT}^t\mathbf{TM}_0\mathbf{A}\right\} dt = \mathbf{XKHM}_0\mathbf{A} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_{nm}] = \int_a^b \mathbf{T}^t\mathbf{T}dt, \quad \mathbf{h}_{nm} = \frac{(b-c)^{n+m+1} - (a-c)^{n+m+1}}{n+m+1}, \qquad n, m = 0, 1, ..., N.$$

De (2.16) on obtient la matrice $\mathbf{I}$ sous la forme

$$\mathbf{I} = \mathbf{CKHM}_0\mathbf{A} \tag{2.17}$$

Enfin, en substituant (2.17) dans l'expression (2.13), nous avons l'équation matricielle

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}_k\mathbf{CM}_k - \lambda\mathbf{CKHM}_0\right)\mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{2.18}$$

qui est la relation fondamentale pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm définie sur l'intervalle $a \leq x \leq b$.

On peut aussi écrire l'équation (2.18) sous la forme

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F} \tag{2.19}$$

ce qui correspond à un système de $(N+1)$ équations algébriques avec les coefficients de Taylor inconnus,Alors on peut écrire

$$\mathbf{W} = [w_{ij}] = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}_k \mathbf{C} \mathbf{M}_k = \lambda \mathbf{C K H M}_0 \ , \qquad i,j = 0,1,.....,N.$$

Ensuite, nous pouvons trouver les coefficients inconnus au moyen de la matrice augmentée de l'équation (2.19)

$$[\mathbf{W};\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Dans l'équation (2.19) si $|\mathbf{W}| \neq 0$ on obtient

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{F} \tag{2.21}$$

les coefficients inconnus sont uniquement déterminés par l'équation (2.21) et ainsi nous trouvons une solution particulière de l'équation intégro-différentielle de Fredholm dans la série de Taylor.

former la représentation matricielle des conditions. pour l'intervalle $a \leq x \leq b$, les conditions (2.8) se réduisent à

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ij} y^{(j)}(a) + b_{ij} y^{(j)}(b) + c_{ij} y^{(j)}(c)] = \gamma_i \tag{2.22}$$

$$i = 0,1,.....,m-1. \qquad\qquad a \leq c \leq b$$

En utilisant la relation (2.12), nous trouvons les représentations matricielles des fonctions aux points a, b et c dans les formes

$$\begin{aligned}\left[y^{(j)}(a)\right] &= \mathbf{P}\mathbf{M}_j\mathbf{A} \\ \left[y^{(j)}(b)\right] &= \mathbf{Q}\mathbf{M}_j\mathbf{A} \\ \left[y^{(j)}(c)\right] &= \mathbf{R}\mathbf{M}_j\mathbf{A}\end{aligned} \tag{2.23}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix}1 & (a-c) & (a-c)^2 & \dots & (a-c)^N\end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix}1 & (b-c) & (b-c)^2 & \dots & (b-c)^N\end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0]\end{aligned}$$

En substituant les représentations matricielles (2.23) dans l'équation(2.22), nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{m-1}[a_{ij}\mathbf{P} + b_{ij}\mathbf{Q} + c_{ij}\mathbf{R}]\mathbf{M}_j\mathbf{A} = [\gamma_i]$$

définir $\mathbf{U}_i$ par

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=0}^{m-1}[a_{ij}\mathbf{P} + b_{ij}\mathbf{Q} + c_{ij}\mathbf{R}]\mathbf{M}_j = [u_{i0} \;\; u_{i1} \;\; u_{i2} \;\; \dots \;\; u_{iN}]\,, \qquad i = 0, 1, ...m-1$$

la forme matricielle pour les conditions (2.8) peut être écrite comme suit

$$\mathbf{U}_i\mathbf{A} = [\gamma_i] \qquad \text{ou :} \qquad [\mathbf{U_i};\gamma_i]$$

Avec :

$$[\mathbf{U_i};\gamma_i] = [u_{i0} \;\; u_{i1} \;\; u_{i2} \;\; \dots \;\; u_{iN};\gamma_i] \tag{2.24}$$

Par conséquent, en remplaçant les m matrices de lignes (2.24) par par les m dernières lignes de la matrice augmentée (2.20),on résulte la nouvelle matrice augmentée.

$$\left[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{F}}\right]$$

où

$$\widetilde{\mathbf{W}}=\begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{F}}=\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-m}) \\ \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{pmatrix}$$

si,$\left|\widetilde{\mathbf{W}}\right| \neq 0$ on peut écrire

$$A=(\widetilde{\mathbf{W}})^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$$

et ainsi la matrice **A** est déterminée de façon unique,On peut alors dire que l'équation intégro-différentielle (2.7) avec conditions (2.22) a une solution unique sous la forme (2.9).

2.3 Estimation d'erreurs

Soit $E_N(x)$ est la fonction d'erreur qui provient du solution mise en polynome de legendre ou polynome de Taylor.

$$E_N(x):[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$E_N(x)=\sum_{k=0}^{m}F_k(x)y^{(k)}(x)-f(x)-\lambda I(x), \qquad \forall x\in[a,b]$$

Les erreurs de calcul sont minimales, si $E_N(x)$ est équivalente à la fonction nulle sur les noeuds

$x_0; x_1, ..., x_N$.

$$E(x_i) = D(x_i) - f(x_i) - \lambda I(x_i) \cong 0$$

On définit la solution d'erreurs absolues

$$E_N(x) = |y(x) - y_N(x)|$$

Pour trouver les erreurs de calcul sur les noeuds de l'intervalle donnée, on écrit

$$E_N(x_i) = |y(x_i) - y_N(x_i)|, \qquad i = 0, 1, ..., N$$

Avec $y(x)$: la valeur de solution exacte

Et $y_N(x)$: est le polynôme du solution approchée, polynôme de (legendre ou de Taylor)

Exemple 2.3.1 *Soit l'equation intégro-differentielle de Fredholm de deuxième ordre*

$$\begin{cases} \varphi"(x) + x\varphi'(x) - x\varphi(x) = \exp(x) - 2\sin(x) - \int_{-1}^{1} \sin(x)\exp(-t)\varphi(t)dt \\ \varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est :$\varphi(x) = \exp(x)$

pour $N = 9$ et $\lambda = 1$

Comparaison des solutions approchées de l'equation intégro-différentielle de Fredholm et la solution exacte par la méthode de collocation de legendre.

x_i	sol exacte	sol approchée(legendre)	erreur
-1	0.3678794	0.3678795	-0.0000001
-0.8	0.4493289	0.4493288	0.0000001
-0.6	0.5488116	0.5488116	0.0000001
-0.4	0.6703200	0.6703201	-0.0000001
-0.2	0.8187307	0.8187307	0.0000001
0	1.0000000	1.0000000	0.0000001
0.2	1.2214027	1.2214027	0.0000001
0.4	1.4918246	1.4918247	-0.0000001
0.6	1.8221188	1.8221189	-0.0000001
0.8	2.2255409	2.2255408	0.0000001
1.0	2.7182818	2.7182818	0.0000000

TAB. 2.1 – Comparaison des solutions approchées de l'equation intégro-différentielle de Fredholm et la solution exacte par la méthode de collocation de legendre

Conclusion

En conclusion,

Notre but est de faire un résolution numérique des équations intégro-différentielle de type de Fredholm dont on ne connait pas leurs solutions numériques, on a intéressés à des équations intégro-différentielles (E.I-D) de Fredholm linéaire

Bibliographie

[1] A. Rahmoune (2018) Equations intégrales linéaires et non linéaires.

[2] Bildik, N., Konuralp, A., & Yalçınbaş, S. (2010). Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 59(6), 1909-1917.

[3] Chebli, H. (2001). Analyse hilbertienne. UVT.

[4] Lakshmikantham, V. (1995). Theory of integro-differential equations (Vol. 1). CRC press.

[5] .Karamete, A., & Sezer, M. (2002). A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 79(9), 987-1000.

[6] Lakshmikantham, V. (1995). Theory of integro-differential equations (Vol. 1). CRC press.

[7] Rahman, M. (2007). Integral equations and their applications. WIT press

[8] Sezer, M., & Gülsu, M. (2006). Polynomial approach for the most general linear Fredholm integrodifferential-difference equations using Taylor matrix method. International journal of mathematics and mathematical sciences, 2006

[9] Wazwaz, A. M. (2011). Linear and nonlinear integral equations (Vol. 639). Berlin : Springer.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

φ	:	La fonction inconnue.
$k(x,t)$	:	Noyau de l'équation.
$f(x)$	:	fonction donnée.
λ	:	Constant.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des réel..
(E,d)	:	espace métrique complet.
p_n	:	polynômes de Legendre.
$y(x)$	:	série de Taylor .
E	:	l'erreur.
EID	:	Equation intégro-différentielles