République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

NEZZAL Wafa

Titre :

Existence et explosion en temps fini pour certain problème d'évolution

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**SOLTANI Siham**	UMKB	Président
Dr.	**BERBICHE Mohamed**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ADOUANE Saida**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À Mes chers parents, source de la vie et d'amour.

À ma chère soeur et mes chers frères, source de joie et de bonheur.

À mes grandes parents.

À tous les membres de ma famille.

À toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie **ALLAH** tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience d'achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **BERBICHE Mohamed**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse aussi mes remerciements aux **SOLTANI Siham** et **ADOUANE Saida** membres des jurys pour bien voulu examiner et juger ce travail.

Je remercie mes trés chers parents qui ont toujours été là pour moi, ils se tout sacrifié pour leur enfants n'ont épargné ni efforts ni santé. ils m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

Un salut du cœur à mes grands parents pour leurs prières et leurs encouragements.

Toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à ma chère soeur, à mes chers frères, à mes amies et à tout ma famille.

Table des matières

Introduction

La modélisation des phénomènes du monde réel à travers des équations aux dérivées partielles offre un autre outil de la recherche proportionné avec de nouvelles techniques du laboratoire.

En particulier modélisation et analyse mathématique de systèmes de réaction-diffusion, domaine de recherche en pleine effervescence. Un grand nombre de chercheurs spécialisent leur intérêt par l'explosion en temps fini des solutions de ces systèmes.

Dans notre travail aussi nous intéressons à étudier un système réaction-diffusion couplé par une équation intégro-différentielle semi-linéaire de type parabolique qui se posent dans la théorie de la cinétique des réacteurs nucléaires :

$$u_t - \Delta u = \left(\int_0^t u^p(s)\, ds \right) u^q \ \text{ sur } (0, T)$$

sous condition aux limites de Dirichlet homogène, où $p, q \geqslant 1$. A cet effet, on considére le problème aux limites à valeur initiale suivant de l'équation intégro-différentielle semi-linéaire de type parabolique :

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \left(\int_0^t u^p(s)\, ds \right) u^q && \text{in}(0, T) \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où $p, q \geqslant 1, \Omega$ est un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^N$, et u_0 est une donnée initiale continue non négative disparaissant sur la frontière $\partial\Omega$.

Notre objectif principal est de prouver l'occurrence d'un phénomène d'explosion en temps fini dans le problème de la valeur de limite initiale (1). Plus précisément, on montre le théorème suivant d'existence et de non-existence de solutions globales :

Théorème 0.0.1 *Pour des données initiales suffisamment grandes, la solution u de (1) explose en temps fini. D'un autre côté, si les données initiales sont suffisamment petites, alors la solution de (1) existe globalement.*

A notre connaissance, le problème d'explosion de (1) en particulier, lorsque $p = q = 1$ est traité dans [16]. En un coup d'œil, notre problème (1) a quelques difficultés à prouver l'existence de solutions non globales : d'abord si t est suffisamment petit, alors le terme de réaction non linéaire disparaît à zéro, c'est-à-dire,

$$\left(\int_0^t u^p(s)\, ds \right) u^q(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } t \downarrow 0.$$

Deuxièmement, il n'est pas clair si le principe de comparaison est valable pour prouver l'existence de petites solutions globales.

Le plan de ce travail est le suivant. Dans le premier chapitre on rappelle les notations et les notions fondamentales qui sont utiles dans ce travail. Dans Le deuxième chapitre, on prouve la solvabilité locale d'une classe plus large d'équations intégro-différentielles semi-linéaires de type parabolique impliquant l'équation (1) et on traite également avec le cas continu de **H**ölder ($\min\{p,q\} < 1$) de (1), on donne deux versions du principe de comparaison pour les solutions non négatives à (1) et on montre l'existence de solutions globales petites par la méthode de comparaison. Dans le troisième chapitre, on prouve l'existence de solutions d'explosion à temps fini en divisant en trois cas ($p = q$, $p > q$ et $p < q$).

Chapitre 1

Notation et Définition Préliminaire

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω. On note :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx)$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ et mesurable } \ |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}$$

munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

munit de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{\sup} ess|f(x)| = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On définit les espaces $L^p([0,T]\times\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$L^p(\Omega) = \left\{f : [0,T] \longrightarrow \Omega,\ f \text{ et mesurable } \ \|f\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} < \infty\right\}$$

munit de la norme :

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} = \left(\int_0^T \|f(x)\|_\Omega^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} = \underset{t\in[0,T]}{\sup}\, ess \, \|f(x)\|_\Omega \text{ si } p = \infty \end{cases}$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

$C^k(\Omega)$,$k \in \mathbb{N}$,désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\succeq 0} C^k(\Omega),$$

où $C^{r,k}_{x,t}(\Omega)$,$k, r \in \mathbb{N}$, désigne l'espace des fonctions r fois continûment différentiable par rapport à x sur Ω et désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable par rapport à t sur Ω.

Théorème 1.1.1 *(Inégalité de Hölder) Soit* $1 \leq p \leq \infty$*.nous notons* p' *l'exposant conjugué de* p*, c'est-à-dire*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

si $f \in L^p(\Omega)$*et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Lorsque Ω est borné, si $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors pour $1 \leq p \leq q$ l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_\Omega |f|^q \leq \left(\int_\Omega |f|^{qr}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

où $r = \frac{p}{q}$

Proposition 1.1.1 *(Intégration par parties pour des fonctions à support compact) Pour toute fonction scalaire $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et tout champ de vecteurs $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ on définit*

$$\nabla u = \left(\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, ..., \partial_{x_d} u\right), \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} F_i$$

et on a quelques formules utiles

$$\operatorname{div}(uF) = F.(\nabla u) + (\operatorname{div} u)F,$$

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

1. *Soit $F \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs à support compact, alors on a*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F dx = 0$$

2. *Soient $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tels que u ou V soit à support compact, alors on a*

$$\int_\Omega u(\operatorname{div} V) ds = -\int_\Omega (\nabla u).V dx$$

3. *Soient $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tels que u ou v soit à support compact, alors on a*

$$\int_\Omega u(-\Delta v) dx = \int_\Omega (\nabla u) . (\nabla v)\, dx = \int_\Omega (-\Delta u) v dx$$

1.2 Espaces métriques

Définition 1.2.1 *Un espace métrique* (X, d) *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés qui suivent :*

- $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
- $\forall x, y \in X : d(x; y) = d(y; x)$ *(la symétrie).*
- $\forall x, y, z \in X : d(x; y) \leqslant d(x; z) + d(z; y)$ *(l'inégalité triangulaire).*

1. Sur $\mathbb{R}^n$ on peut considérer les distances suivantes :

$$d_\infty(x; y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i - y_i|\}$$

$$d_p(x; y) = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i| \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geqslant 1$$

2. Dans $C^0([a; b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$,$(a, b \in \mathbb{R}; a < b)$ et pour $f, g \in C^0([a, b], R)$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - g(t)|$$
$$d_1(f; g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$
$$d_2(f; g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt}$$

3. On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque X, en posant pour $x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète.

Définition 1.2.2 *(Suite de Cauchy) On dit que la suite* (x_n) *dans l'espace métrique* (X, d) *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \;\; \textit{tel que} \;\; n, m > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

on écrit alors$d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ *quand* $n, m \longrightarrow +\infty$

– *Toute suite convergente est de Cauchy.*

– *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 1.2.3 *(Espace métrique complet) L'espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *converge dans* X*.*

Définition 1.2.4 *(continuité höldérienne) Soient* $(X; d_1)$ *et* $(Y; d_2)$ *deux espaces métriques.* $f : X \longrightarrow Y$ *est une application* α*-höldérienne s'il existe une constante* k *telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments* x, y *de* X

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant kd_1(x, y)^{\alpha}$$

Pour $a \in]0, 1]$ *fixé, l'ensemble des fonctions réelles* α*-höldériennes bornées sur* X *est un espace vectoriel, couramment noté* $C^{0,a}(X)$*.*

1.3 Théorème de point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Définition 1.3.1 *Soient* $(X; d_1)$ *et* $(Y; d_2)$ *deux espaces métriques.* $f : X \longrightarrow Y$ *est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geqslant 0$ *telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments* x, y *de* X*, l'inégalité*

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant kd_1(x, y)$$

– f est dite une contraction stricte si $0 \leqslant k < 1$.

– Un élément x de X est dite un point fixe de f si $f(x) = x$.

Théorème 1.3.1 *(point fixe de Banach (1922)) Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $f : X \longrightarrow X$ *une application contractante avec la constante de contraction* k*. Alors* f *a un unique* *point fixe* $x \in X$*. De plus nous avons la propriété suivante qui est importante : Si* $x_0 \in X$ *et* $x_n = f(x_{n-1})$*, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$$

et

$$d(x_n, x) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \ n \geqslant 1.$$

Exemple 1.3.1 *1. Soient* $X = [a;b]$ *et l'application* $f : X \longrightarrow X$ *telle que* f *est dérivable en chaque* $x \in]a;b[$ *et* $|f'(x)| \leqslant k < 1$*. Alors, on déduit du théorème des accroissements finis que :* $\forall x, y \in X$*, il existe un point* ξ *entre* x *et* y *tel que,*

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Donc

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \, |x - y| \leqslant k \, |x - y| \, .$$

Par conséquent, f *est contractante et donc elle admet un unique point fixe.*

2. Soient $X = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2.$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{3}y - 2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \right| = \frac{1}{3} \, |x - y| \, . \end{aligned}$$

Alors f est contractante et elle admet un unique point fixe .

$$x = f(x) = \frac{1}{3}x + 1 \Longrightarrow x = 3$$

donc l'unique point fixe est $x = 3$.

Remarque 1.3.1 *Si f est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées f^n est une contraction, alors f a encore un point fixe et un seul.*

Ceci résulte de l'unicité.

En effet, soit x l'unique point fixe de f^n on a $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x)$ ce qui convient à dire que $f(x)$ est aussi un point fixe de $f^n\prime x)$ et grâce à l'unicité $f(x) = x$. Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

1.4 Opérateur m-dissipatif

Définition 1.4.1 *X un espace de Banach, Soit $D \subset X$ un sous espace vectoriel. Un opérateur linéaire dans X est un couple(A, D), et $A : D \longrightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A est borné si $\|Au\|$ reste bornée lorsque $u \in \{x \in D, \|x\| \leq 1\}$. Dans le contraire, A est dit non borné.*

Définition 1.4.2 *l'opérateur $(A, D(A))$ est dit fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in X$ et $Ax_n \longrightarrow y \in X$. Alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Définition 1.4.3 *Un opérateur linéaire non borné dans X espace de banach est un couple $(A, D(A))$ ou $D(A)$ un sous-espace vectoriel de X et A une application linéaire de $D(A)$ dans X. Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A.*

Définition 1.4.4 *Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X, est dissipatif si*

$$\forall \lambda > 0, \forall u \in D(A), \quad \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

Définition 1.4.5 *Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X, est dit m-dissipatif si*

- A est dissipatif
- $\forall \lambda > 0, \forall f \in X, \ \exists u \in D(A), \, u - \lambda Au = f$

Remarque 1.4.1 *Si A est un opérateur m-dissipatif dans X, pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'équation $u - Au = f$ possède une unique solution qui vérifie $\|u\| \leq \|f\|$.*

Définition 1.4.6 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans M et $\lambda > 0$. Pourtout $f \in X$, on note $B_\lambda f$ la solution u de l'équation $u - \lambda Au = f$.*

Proposition 1.4.1 *Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est m-dissipatif dans X.*

(ii) *il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe $u \in D(A)$ tel que $u - \lambda_0 Au = f$.*

1.5 Semi-groupes et ses générateurs

1.5.1 Semi-groupe fortement continus

Définition 1.5.1 *Soit X et un espace de banach ,on appelle C_0-semi-groupe ou semi groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \pounds(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $T(0) = I$,(I *est l'identité dans* X)

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;

(iii) $\lim\limits_{t \searrow 0} T(t)x = x, \forall x \in X$

Exemple 1.5.1 *Considérons l'espace $L_P\left(]0, \infty\right), 1) \leq p < \infty$, avec la norme :*

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^\infty |f(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Avec cette norme,$L_P\left(0, \infty\right), 1 \leq p < \infty$,est un espace de Banach. Définissons :

$$(T(t)f)(s) = f(t+s), \qquad \forall t \geq 0 \text{ et } s \in]0, \infty).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\|T(t)f\|_p &= \left\{\int_0^\infty |T(t)f(s)|^p\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_0^\infty |f(t+s)|^p\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\{\int_t^\infty |(f(\beta)|^p\, d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_0^\infty |(f(\beta)|^p\, d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1$ *,*$\forall t \geq 0$.

Il est évident que $T(0) = I$ *et* $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\searrow 0} \|T(t)f - f\|_p &= \lim_{t\searrow 0} \left\{\int_0^\infty |(T(t)f)(s) - f(s)|^p\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{t\searrow 0} \left\{\int_0^\infty |f(t+s) - f(s)|^p\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} = 0\end{aligned}$$

Par suite $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $L_P\,]0,\infty)$ *.*

Définition 1.5.2 *soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu.*

On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contraction si

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.5.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un* $C_0\_$ *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un opérateur linéaire* A *défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{x \in X, \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\right\}.$$

par

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

$D(A)$ s'appelle domaine de A.

Exemple 1.5.2 *La suite de l'exemple 1.5.1,nous prouvons que le générateur infinitésimale du $C_0\_$ semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire A définit sur l'ensemble*

$$D(A) = \{f \in L^p(0,\infty) \,|\, f' \in L^p(0,\infty)\}$$

par

$$Af = f'$$

Soit $A : D(A) \subset L^p\,]0,\infty) \longrightarrow L^p\,]0,\infty)$ le générateur infinitésimal du $C_0\_$ semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f \in D(A)$, alors nous avons :

$$Af(\alpha) = \lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha)$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in L_P\,]0,\infty) \,|\, f' \in L_P\,]0,\infty)\,.\}$$

Si $f \in L_P\,]0,\infty)$ tel que $f' \in L_P\,]0,\infty)$, alors on a :

$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f'\right\|_p = \left\{\int_0^\infty \left|\frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right|^p d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\left|\frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| &= \left|\frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| \\ &= \left|\left[\frac{1}{t}f(\tau)\right]\Big|_\alpha^{\alpha+t} - \left[\frac{1}{t}f'(\tau)\tau\right]\Big|_\alpha^{\alpha+t}\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}\int_\alpha^{\alpha+1}[f'(\tau) - f'(\alpha)]\,d\tau\right| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α si $t \searrow 0$. Alors :

$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f'\right\|_p \longrightarrow 0 \quad si \quad t \searrow 0$$

et on voit que :

$$\{f \in L^p\,]0,\infty)\,|\,f' \in L^p\,]0,\infty)\} \subset D(A)$$

Par conséquent :

$$D(A) = \{f \in L^p\,]0,\infty)\,|\,f' \in L^p\,]0,\infty)\}$$

et

$$Af = f'$$

Théorème 1.5.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 sur X. Il existe une constante $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{pour } 0 \leq t < \infty$$

Preuve. Voir [4] ■

Proposition 1.5.1 *Soit $T(t)$ un C_0_semi groupe et soit A son générateur infinitésimal alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+1} T(s)xds = T(t)x$$

(ii) *pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$$

(iii) *si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

(iv) *pour $x \in D(A)$ et $t > s \geq 0$*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$$

Preuve. Voir [4]. ■

1.5.2 Semi-groupes engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit X un espace de Banach et A un opérateur m-disspatif dans X, de domaine dense. Pour $\lambda > 0$, et on pose

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

tel que $A_\lambda = AB_\lambda = \frac{B_\lambda - I}{\lambda}$ et B_λ opérateur (définition (1.4.6))

Théorème 1.5.2 *Pour tout $x \in X$, la suite de fonction $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0;T]$ vers une fonction $u \in C([0,\infty[, X)$, quand $\lambda \longrightarrow 0$. Si on pose $T(t)x = u(t)$, pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a :*

$$T(t) \in \pounds(X) \quad et \quad \|T(t)\| \leq 1, \quad t \geq 0$$

$$T(0) = I$$

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall s, t \geq 0$$

De plus, pour tout $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty[, D(A)) \cap C^1([0,\infty[, X) \\ u' = Au, \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Enfin, pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, on a :

$$T(t)Ax = AT(t)x$$

Preuve. Voir [3] ■

1.5.3 Semi-groupes de contraction

Définition 1.5.4 *Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est dite semi-groupe de contraction sur X, si $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.*

Définition 1.5.5 *Le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ à une limite dans } X \text{ quand } h \longrightarrow 0 \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Proposition 1.5.2 *Soit $T(t)$ un semi-groupe de contraction sur X, et A son générateur. Alors A est m-dissipatif et $D(A)$ est dense.*

Preuve. En trois étapes :

Etape 1. Pour tout $x \in D(A), \lambda > 0$ et $h > 0$, on a

$$\left\| x - \lambda \frac{T(h)x - x}{h} \right\| \geq \left\| \left(1 + \frac{\lambda}{h}\right) x \right\| - \frac{\lambda}{h} \|T(h)x\| \geq \|x\|$$

d'où le résultat, en faisant $h \longrightarrow 0$.alors A est dissipatif.

Etape 2. On définit l'opérateur B par

$$B(x) = \int_0^\infty e^{-t} T(t)xdt, \qquad \text{pour tout } x \in X$$

Il est clair que $B \in \pounds\,(x)$, avec $\|B\| \leq 1$. Pour $u \in X$ et $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} Bx &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-t}(T(t+h)x - T(t)x)dt \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-(t-h)} T(t)xdt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-t} T(t)xdt \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \int_0^\infty e^{-t} T(t)xdt - \frac{e^h}{h} \int_0^\infty e^{-t} T(t)xdt \\
&= Bx - x
\end{aligned}$$

et donc $Bx \in D(A)$, avec $ABx = Bx - x$, soit $Bx - ABx = x$. alors A est m-dissipatif

Etape 3. Pour tout $x \in X$ et $t > 0$, on pose

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds$$

Il est clair que $x_t \longrightarrow x$, lorsque $t \longrightarrow 0$. Pour montrer que $D(A)$ est dense, il suffit de montrer que $x_t \in D(A)$ pour tout $t > 0$. Or on a pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} t\frac{T(t) - I}{h} x_t &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x\ ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x\mathrm{ds} \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\ ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x\mathrm{ds} \end{aligned}$$

Lorsque $h \longrightarrow 0$, le membre de droite converge vers $T(t)x - x$, et donc $x_t \in D(A)$ avec

$$Ax_t = \frac{T(t)x - x}{t}$$

■

Théorème 1.5.3 *(Théorème de Hille-Yosida-Phillips) Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m-dissipatif de domaine dense.*

Preuve. la premiére implication est prouvé (proposition (1.5.2)) ,pour la 2éme implication supposons que A est m-dissipatif de domaine dense, et soit $T(t)$ le semi-groupe associé à A par le théorème (α). Il est immédiat que $T(t)$ est un semi-groupe de contraction. Notons L son générateur et montrons que $L = A$.

Pour $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a (théorème (α))

$$T(h)x = x + \int_0^h T(s)Ads$$

et donc $x \in D(L)$ avec $Lx = Ax$. Par conséquent, $G(A) \subset G(L)$.

Finalement, soit $v \in D(L)$. Puisque A est m-dissipatif, il existe $x \in D(A)$ tel que

$$x - Ax = v - Lv$$

et puisque $G(A) \subset G(L)$, on a

$$(x - v) - L(x - v) = 0$$

L étant dissipatif, on a $x = v$, et donc

$$G(L) \subset G(A)$$

Par suite

$$A = L$$

■

1.5.4 Equations non-homogènes

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif et à domaine $D(A)$ dense dans X. Etant donnée $x \in X$ et $f : [0; T] \longrightarrow X$. On a le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ u' + Au = f(t) \qquad\qquad t \in [0; T] \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Lemme 1.5.1 *Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], X)$. On considère une solution $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ du problème (1.1). Alors on*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \forall t \in [0; T] \tag{1.2}$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. On pose

$$v(s) = T(t-s)u(s), \text{ pour } s \in [0, t].$$

Soit $s \in [0, t]$ et $h \in]0, t-s[$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{v(s+h)-v(s)}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(t-s-h)u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(t-s-h)u(s+h) - T(t-s-h+h)u(s) + u(s) - u(s)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} T(t-s-h) \frac{u(s+h) - u(s) - T(h)u(s) + u(s)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} T(t-s-h) \left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h} u(s) \right) \\
&= T(t-s)\left(u'(s) - Au(s)\right) \\
&= T(t-s)f(s)
\end{aligned}$$

Puisque $T(t-.)f(.) \in C([0, t], X)$, on en déduit que $v \in C^1([0, t[, X)$ et

$$v'(s) = T(t-s)f(s), \text{pour tout } s \in [0, t[\tag{1.3}$$

On intègre (1.3) entre 0 et $\tau < t$, puis on fait tendre τ vers t, on obtient

$$v(t) = v(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

ainsi

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \forall t \in [0; T]$$

■

Corollaire 1.5.1 *Pour tout $x \in D(A)$ et $f \in C([0, T], X)$, le problème (1.1) possède au plus une solution.*

Lemme 1.5.2 *Pour tout $x \in X$ et $f \in L^1([0, T], X)$, la formule (1.2) définit une fonction $u \in$*

$C([0,T],X)$. *De plus,on a*

$$\|u\|_{C([0,T],X)} \leq \|x\| + \|f\|_{L^1([0,T],X)}$$

Preuve. Le résultat est claire lorsque $f \in C([0,T],X)$, et s'obtient par densité dans le cas général.

■

Proposition 1.5.3 *Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T],X)$. On suppose que $f \in L^1([0,T],D(A))$ alors u donnée par (1.2) est la solution de (1.1).*

Preuve. En trois étapes. On pose

$$v_t = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

Etape 1 : On a $v \in C^1([0,T],X)$. En effet, lorsque $f \in L^1([0,T],D(A))$, on écrit pour $t \in [0,t[$ et $h \in [0,t-s]$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t T(t-s)\frac{T(h)-I}{h}f(s)ds + \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$$

et on fait $h \longrightarrow 0$. On remarque que

$$\frac{T(h)-I}{h}f \longrightarrow Af \text{ dans } L^1([0,T],X) \text{ lorsque } h \longrightarrow 0$$

et on applique le lemme (1.5.2), il vient

$$\frac{d^+v}{dt}(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds + f(t) \text{ pour tout } t \in [0,T[$$

Dans les deux cas, on a

$$\frac{d^+v}{dt}(t) \in C([0,T[\,,X)$$

et donc

$$v \in C^1([0,T[\,,X)$$

Etape 2 : $v \in C^1([0,T[,X)$. De la même façon, on montre que ex$\frac{d^-v}{dt}(t)$ existe est égale à $\lim\limits_{t\longrightarrow T} v'(t)$,Soit $t \in [0,t[$ et $h \in [0,t-s]$. On a

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds\end{aligned}$$

En faisnt $h \longrightarrow 0$, on obtient

$$v(t) \in D(A)$$

et

$$Av(t) = v'(t) - f(t)$$

Par fermeture du graphe, ceci reste vrai pour $t = T$. il résulte que

$$v \in C([0,T[\,,D(A))$$

et que v vérifie l'équation du problème (1.1).

Etape 3 : On a

$$u(t) = T(t)x + v(t) \in C([0,T]\,,D(A)) \cap C^1([0,T]\,,X)$$

De plus

$$u'(t) = AT(t)x + Av(t) + f(t) = Au(t) + f(t), \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

On a donc (1.1) est immédiat. ■

Corollaire 1.5.2 *Soit $u_0 \in X, f \in C([0,T[,X)$ et u donnée par (1.2). Supposons que l'une des deux conditions suivantes a lieu :*

(i) $u \in C([0,T[,D(A))$

(ii) $u \in C^1([0,T[,X)$

Alors u est la solution de (1.1).

1.6 Principe de maximum

Le principe maximum admet de nombreux formulations, on va présenter les principe du maximum faible et fort, méthode des sous-solutions et sur-solutions pour les opérateurs parabolique.

1.6.1 Principe maximum faible et fort

Soit Ω étant un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$.On pose

$$\Gamma = (\{t=0\} \times \bar{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega) \text{ (la frontière parabolique de } (0,T) \times \bar{\Omega})$$

P désigne un opérateur aux dérivées partielles de la forme

$$Pu = \sum_{i,j} a_{i,j}(t,x)\partial^2_{i,j}u + \sum_i b_i(t,x)\partial_i u + c(t,x) - u_t,$$

où les fonctions $a_{i,j}, b_i$ et c sont supposées continues sur $((0,T) \times \bar{\Omega})$, et la matrice $(a_{i,j}(t,x))$ est symétrique définie positive pour tout $(t,x) \in ([0,T] \times \Omega)$.

Théorème 1.6.1 *(Principe du maximum faible) On suppse que $c \equiv 0$. Soit $u \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}([0,T] \times \Omega)$ telle que $Pu \geq 0$ (resp. $Pu \leq 0$) dans $([0,T] \times \Omega)$. Alors*

$$\max_{([0,T]\times\bar{\Omega})} u = \max_{\Gamma} u \text{ (resp. } \min_{([0,T]\times\bar{\Omega})} u = \min_{\Gamma} u).$$

Corollaire 1.6.1 *On suppse que $c \leq 0$. soit $u \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}([0,T] \times \Omega)$ telle que $Pu \geq 0$ (resp. $Pu \leq 0$) dans $([0,T] \times \Omega)$. Alors*

$$\max_{([0,T]\times\bar{\Omega})} u = \max_{\Gamma} u^{+} \text{(resp. } \min_{([0,T]\times\bar{\Omega})} u = \min_{\Gamma} u^{-}).$$

En particulier, si $Pu = 0$ dans $([0,T] \times \Omega)$ alors

$$\max_{([0,T]\times\bar{\Omega})} |u| = \max_{\Gamma} |u|$$

Théorème 1.6.2 *(Principe du maximum fort) Soit* $u \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}([0,T] \times \Omega)$ *telle que* $Pu \geq 0$ *dans* $([0,T] \times \Omega)$ *et nous posons* $M = \max\limits_{([0,T] \times \bar{\Omega})} u$. *On suppose que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $c = 0$,

(ii) $c \leq 0$ *et* $M \geq 0$,

(iii) $M = 0$,

et que $u = M$ *en* $(t_0, x_0) \in ([0,T] \times \Omega)$. *Alors* $u = M$ *sur* $([t_0, 0] \times \bar{\Omega})$.

Proposition 1.6.1 *Nous faisons l'hypothèse que* Ω *est de classe* C^2. *Soit* $u \in C^1([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^2([0,T] \times \Omega)$ *satisfaisant* $Pu \geq 0$ *dans* $([0,T] \times \Omega)$ *et nous notons* $M = \max u$. *En outre,nous supposons qu'il existe* $(t_0, x_0) \in ((0,T] \times \Gamma)$ *tel que* $u\,(t_0, x_0) = M$ *et* $u < M$ *sur* $(0,T) \times \Omega$, *et que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $c = 0$,

(ii) $c \leq 0$ *et* $M \geq 0$,

(iii) $M = 0$. *Alors* $\partial_v u(t_0, x_0) > 0$

1.6.2 Sous-solutions et sur-solutions

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Au + f(x,t) - u_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0;T[\\ Bu = g(x,t) \qquad \text{sur } \partial\Omega \times]0;T[\\ u(x,0) = g(x) \qquad \text{sur } (\Omega \times]0;T[) \cap \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.6.1 *Une fonction* $\bar{u}$ *est dite une sur-solution du problème (1.4) si*

(i) $A\bar{u} + f(x, \bar{u}) - \bar{u}_t \leq 0$

(ii) $B\bar{u} \geq g$

(iii) $\bar{u}(x,0) \geq g(x)$

Définition 1.6.2 *Une fonction $\underline{u}$ est dite une sous-solution du problème (1.4) si*

(i) $A\underline{u} + f(x, \underline{u}) - \underline{u}_t \geq 0$

(ii) $B\underline{u} \leq g$

(iii) $\underline{u}(x, 0) \leq g(x)$

Théorème 1.6.3 *Si pour le problème (1.4), il existe une sur-solution $\bar{u}$ et une sous-solution $\underline{u}$, $\bar{u} \geq \underline{u}$, alors il existe une solution classique du problème (1.4).*

Preuve. voir [13] ■

Chapitre 2

Existence locale et globale

2.1 Solvabilité locale

Dans cette section, nous construisons la solvabilité locale pour une grande classe d'équations paraboliques semi-linéaires avec divers termes de réaction non locaux, qui incluent l'équation (1). De plus, on donne le théorème d'existence locale de (1), [5] où la non-linéarité est simplement localement continue de Hölder i.e $p, q > 0$. Une telle théorie locale est établie en appliquant le principe des contractions de Banach.

Théorème 2.1.1 *Supposons que G et f sont des fonctions localement lipschitzienne. Considérez le problème suivant :*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= G\left(u, \int_0^t f(u(s))ds\right) && in(0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 && on(0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) && in\ \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour chaque donnée initiale $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0 \mid_{\partial\Omega}= 0$, alors il existe un $T > 0$ suffisamment petit et une solution classique unique u de (2.1) dans $C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}((0, T) \times \bar{\Omega})$ avec $u_0 \mid_{\partial\Omega}= 0$.

Preuve : On suppose que pour tout $M > 0$, il existe $L = L(M)$ et $K = K(M)$ tels que pour tout $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ avec $|p_1|, |p_2|, |q_1|, |q_2| \leq M + 1$,

G satisfait

$$|G(p_1, q_1) - G(p_2, q_2)| \leqslant L(|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|) \tag{2.2}$$

et f satisfait

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leqslant K |p_1 - p_2| . \tag{2.3}$$

Ici, nous définissons $A = |G(0, 0)|$ et $B = |f(0)|$ pour plus de commodité, et donc pour tout $p, q \in \mathbb{R}$ avec $|p|, |q| \leqslant M + 1$,

$$|G(p, q)| \leqslant A + L(|p| + |q|) \text{ et } |f(p)| \leq B + K |p| . \tag{2.4}$$

Nous prouvons d'abord qu'il existe une solution unique $u \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ de (2.1) pour chaque $u_0 \in C(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe de chaleur linéaire sous condition aux limites de Dirichlet homogène sur $L^\infty(\Omega)$.Il est alors bien connu que $T(t)$ est une contraction sur $L^\infty(\Omega)$ pour chaque $t \geqslant 0$. Nous considérerons l'équation intégrale correspondante de (2.1) :

$$u = T(t)u_0 + \int_0^t T(t - s)G\left(u(s), \int_0^s f(u(\sigma))d\sigma\right) ds. \tag{2.5}$$

Pour toute $M \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$,définir un sous-ensemble dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ par

$$\pounds_T = \left\{u \in L^\infty((0, T) \times \Omega); \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M + 1 \text{ pour } t \in (0, T)\right\} \tag{2.6}$$

tel que $\pounds_T$ est un espace métrique complet avec la métrique $d(u, v) = \|u - v\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}$.

pour $u \in \pounds_T$, nous définissons une cartographie Φ par

$$\Phi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)G\left(u(s), \int_0^s f\left(u(\sigma)\right)d\sigma\right)ds. \tag{2.7}$$

Etablissons que Φ est une cartographie de contraction stricte sur $\pounds_T$ pour suffisamment petit $T > 0$. Pour tous les $u \in \pounds_T$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \|u_0\| + \int_0^t \left[A + L\left(\|u(s)\| + \int_0^s \left(B + K\left\|(u(\sigma)\|\right)d\sigma\right)\right]ds \\
&\leqslant M + \int_0^t \left[A + L((M+1) + s(B + K(M+1)))\right]ds \\
&\leqslant M + T\left[A + L((M+1)(TK+1) + TB)\right].
\end{aligned}$$

Si nous prenons $T > 0$ assez petit, alors Φ est une cartographie de $\pounds_T$ en lui-même.

Ensuite, nous montrons que Φ est une contraction stricte pour les deux éléments $u, v \in \pounds_T$. Ainsi, nous calculons pour tout $u, v \in \pounds_T$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\|\int_0^t T(t-s)\left[G\left(u(s), \int_0^s f\left(u(\sigma)\right)d\sigma\right) - G\left(v(s), \int_0^s f\left(v(\sigma)\right)d\sigma\right)\right]ds\right\| \\
&\leqslant L\int_0^t \left[\|u(s) - v(s)\| + \int_0^s \|f\left(u(\sigma)\right) - f\left(v(\sigma)\right)\|\, d\sigma\right]ds \\
&\leqslant TL(1 + TK)d(u, v).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $T > 0$ est suffisamment petit, alors nous voyons que $\Phi : \pounds_T \longrightarrow \pounds_T$ est une contraction stricte. Ainsi, Φ a un point fixe unique dans $\pounds_T$ par le théorème de point fixe de Banach. Cela implique que pour tout $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ il existe une solution locale unique $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ au sens intégral pour $T > 0$ suffisamment petit.

Concernant la régularité, nous pouvons voir que la solution correspondante u est automatiquement en $C^{1,2}((0,T) \times \bar{\Omega})$ à partir de l'argument bootstrap standard. D'autre part, la continuité de la solution $u \in C([0,T] \times \bar{\Omega})$ découle de l'équation (1) elle-même (voir [11] en détail).

Bien sûr, lorsque $\min\{p,q\}<1$ dans le problème (1), la bonne pose locale ci-dessus ne s'applique pas (1). Cependant, si u_0 est non négatif, alors on peux obtenir le théorème d'existence locale pour (1), [5].

Théorème 2.1.2 *On considére (1) avec $p,q>0$. Pour chaque donnée initiale non négative $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0\mid_{\partial\Omega}=0$, alors il existe un petit $T>0$ et un (non nécessairement unique) solution non négative u de (1) dans $C([0,T]\times\bar{\Omega})\cap C^{1,2}((0,T)\times\bar{\Omega})$ avec $u_0\mid_{\partial\Omega}=0$. De plus, si u_0 n'est pas trivial, alors l'unicité d'une solution tient.*

Preuve. On peut seulement donner la preuve du cas quand $p,q<1$. Soit

$$f_n(z)=\begin{cases} z^p & \text{si } z>1/n \\ [pn^{1-p}z+(1-p)/n^p]_+ & \text{sinon}\end{cases}$$

et de même

$$g_n(z)=\left\{\begin{matrix} z^q & \text{si } z>1/n \\ [qn^{1-q}z+(1-q)/n^q]_+ & \text{sinon}\end{matrix}\right\}$$

Notons ici que pour tout n, (f_n) et (g_n) sont non décroissantes,fonctions localement lipschitzienne et monotones décroissantes par rapport à n, c'est-à-dire,

$$f_n(z)\downarrow\left[|z|^{p-1}z\right]_+ \text{ et } g_n(z)\downarrow\left[|z|^{q-1}z\right]_+.$$

Soit (u_n) une séquence de la solution telle que

$$\begin{aligned} (u_n)_t-\Delta u_n &= \left(\int_0^t f_n(u_n)(s)\,ds\right)g_n(u_n) && \text{in}(0,T)\times\Omega, \\ u_n &= 0 && \text{on}(0,T)\times\partial\Omega, \\ u_n(0,x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ensuite, nous avons une unique solution approchée classique u_n par le théorème 2.1.1. Puisque $f_n(0)$, $g_n(0)\geqslant 0$, par le principe maximum (voir le lemme 2.2.1), nous savons que $u_n\geqslant 0$, et par le théorème de comparaison (voir le théorème 2.2.1), nous voyons que (u_n) est monotone décroissant. Il existe donc une fonction bornée non négative $u = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n$, qui correspond à la solution continue de (1). En revanche, nous obtenons la régularité supplémentaire de u à partir de l'argument standard. Lorsque $u_0 \neq 0$, l'unicité découle du principe du fort maximum. ■

De la même manière que dans la démonstration du théorème 2.1.1, on obtient la bien-position locale suivante pour une large classe d'équations paraboliques semi-linéaires ayant divers termes de réaction non locaux.

Théorème 2.1.3 *On suppose que G et $f_i(i = 1, 2, 3)$ sont des fonctions localement lipschitzienne. On considére le problème*

$$u_t - \Delta u = G\left(u, \int_\Omega f_1(u)dx, \int_0^t f_2(u\,(s))ds, \int_0^t \int_\Omega f_3(u\,(s))dxds\right), \tag{2.9}$$

avec $u(0, x) = u_0(x)$ dans Ω dans une condition aux limites de Dirichlet homogène. Pour chaque donnée initiale $u_0 \in C(\bar{\Omega}), u_0 \mid_{\partial\Omega}= 0$, alors il existe un petit $T > 0$ et une solution classique unique u de (2.9) dans $C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}((0, T) \times \bar{\Omega})$, avec $u_0 \mid_{\partial\Omega}= 0$.

2.2 Principe de comparaison

Dans cette section, notre objectif est de montrer que (1) remplit la propriété de comparaison dans la classe des solutions classiques non négatives. La restriction de la non-négativité entraînera une division inhabituelle en deux versions du principe de comparaison (voir les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 ci-dessous).

Lemme 2.2.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et soit g une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $g(0) \geqslant 0$. Supposons que $u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}((0, T) \times \Omega)$ tel que*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - \left(\int_0^t f(u\,(s))ds\right) g(u) &\geqslant 0 && \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u &\geqslant 0 && \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) &\geqslant 0 && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.10}$$

alors $u(t,x) \geqslant 0$ *pour* $(t,x) \in (0,T] \times \bar{\Omega}$.

Preuve : Elle découle directement du principe maximum standard.

Le lemme suivant qui correspond au principe maximum pour le problème linéarisé de (1) joue un rôle essentiel dans l'obtention des principes de comparaison.

Lemme 2.2.2 *Supposons que* a, b *et* c *satisfont*

$$a, b, c \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \quad et \quad b, c \geqslant 0 \tag{2.11}$$

Supposons que $u \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}((0,T) \times \bar{\Omega})$ *tel que*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - au - b \int_0^t c(s) u\,(s)\, ds \geqslant 0 & \qquad dans\ (0,T) \times \Omega, \\ u \geqslant 0 & \qquad sur\ (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0 & \qquad dans\ \Omega, \end{aligned} \tag{2.12}$$

alors $u(t,x) \geqslant 0$ *pour* $(t,x) \in (0,T] \times \bar{\Omega}$.

Remarque 2.2.1 *Les hypothèses non négatives de* b *et* c *sont essentielles pour le principe maximum. Sinon, nous pouvons facilement construire des données initiales* u *telles que la conclusion* (*2.12*) *ne soit pas remplie.*

Preuve. Définissons M_1, M_2 et M_3 par

$$M_1 = \max_{[0,T] \times \bar{\Omega}.} |a(t,x)|\,, M_2 = \max_{[0,T] \times \bar{\Omega}.} b(t,x),\ M_3 = \max_{[0,T] \times \bar{\Omega}.} c(t,x).$$

On fixe $u(t,x) = e^{\lambda t} w(t,x)$, où λ est une constante arbitrairement positive à choisir plus tard. Alors w satisfait à ce qui suit :

$$w_t - \Delta w + (\lambda - a)w - be^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} c(s) w(s) ds \geqslant 0 \ \text{ dans } (0,T) \times \Omega,$$

$$w \geqslant 0 \ \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega \ \text{ et } w(0,x) = u_0(x) \geqslant 0 \ \text{ in } \Omega,$$

Supposons qu'il y ait un point (τ, ξ) dans $(0, T] \times \bar{\Omega}$ tel que $w(\tau, \xi) < 0$. Alors depuis $w \geqslant 0$ sur la frontière parabolique $\Gamma = \big(\{t = 0\} \times \bar{\Omega}\big) \cup ([0, T] \times \partial\Omega)$, il existe $(t_0, x_0) \in (0, T] \times \Omega$ tel que

$$w(t_0, x_0) = \min_{(0,T]\times\Omega} w(t, x) < 0. \tag{2.13}$$

Ici, mettons $\delta = -w(t_0, x_0) > 0$. Ensuite on a ∎

$$w_t(t_0, x_0) \leqslant 0 \text{ et } \Delta w(t_0, x_0) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

Ainsi, comme $w(t, x) \geqslant -\delta$ pour $t \in (0, T]$ nous obtenons pour tout $\lambda > M_1$

$$\begin{aligned}
&\left(w_t - \Delta w + (\lambda - a)w - be^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} c(s) w(s) ds\right)(t_0, x_0) \\
&\leqslant -(\lambda - M_1)\delta + \frac{1}{\lambda} M_2 M_3 e^{-\lambda t_0}(e^{\lambda t_0} - 1)\delta \\
&\leqslant -(\lambda - M_1)\delta + \frac{1}{\lambda} M_2 M_3 \delta.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Par conséquent, si nous choisissons λ assez grand pour que

$$\lambda > \frac{M_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_1^2}{4} + M_2 M_3\right)}.$$

Il s'ensuit alors que le côté gauche de (2.15) est strictement négatif, ce qui contredit l'hypothèse.

La version suivante du théorème de comparaison est utilisée pour montrer l'existence de solutions globales.

Théorème 2.2.1 *Soit $f, g \in [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ des fonctions localement lipschitzienne non décroissantes. On suppose que $u, v \in C([0, T] \times \bar{\Omega})1) \cap C^{1,2}(0, T) \times \Omega)$ tel que :*

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u - \left(\int_0^t f(u(s))ds\right) g(u) \geqslant v_t - \Delta v - \left(\int_0^t f(v(s))ds\right) g(v) \quad & in (0, T) \times \Omega \\
u \geqslant v \geqslant 0 \quad & on (0, T) \times \partial\Omega, \\
u(0, x) = u_0(x) \geqslant v(0, x) = v_0(x) \geqslant 0 \quad & in\ \Omega,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ensuite $u(t,x) \geqslant v(t,x) \geqslant 0$ *pour* $(t,x) \in (0,T] \times \bar{\Omega}$

Preuve. On a obtenu d'abord que $u, v \geqslant 0$ à partir du lemme 2.2.1. Soit a, b et c des fonctions définies par ce qui suit :

$$a(t,x) = \int_0^t f(u(s))ds \times \begin{Bmatrix} \frac{f(u)-f(v)}{u-v} & \text{si } u \neq v \\ f'(u) & \text{si } \ u = v \end{Bmatrix}$$

$$b(t,x) = g(u) \text{ et } c(t,x) = \begin{Bmatrix} \frac{f(u)-f(v)}{u-v} & \text{si } u \neq v \\ f'(u) & \text{si } \ u = v \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

On voit alors facilement que $a, b, c \in C([0,T] \times \bar{\Omega})$ et $b, c \geqslant 0$. Par conséquent, il sort du lemme 2.2.2 que $u \geqslant v$. ■

L'autre version du théorème de comparaison est la suivante.

Théorème 2.2.2 *Soit* f, g *vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.1. Supposons que* $u, v \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C^{1,2}((0,T) \times \bar{\Omega}))$ *et* $v \geqslant 0$ *tels que*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - \left(\int_0^t f(u(s))ds \right) g(u) &\geqslant 0 && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ v_t - \Delta v - \left(\int_0^t f(v(s))ds \right) g(v) &\leqslant 0 && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u \geqslant v &\geqslant 0 && \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0 \geqslant v(0,x) &= v_0 \geqslant 0 && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{2.18}$$

ensuite $u(t,x) \geqslant v(t,x) \geqslant 0$ *pour* $(t,x) \in (0,T] \times \bar{\Omega}$

Preuve. La preuve est presque la même que dans la preuve du théorème 2.2.1. ■

2.3 Existence de solutions globales

Dans cette section, nous prouverons qu'il existe petites solutions globales pour des données initiales suffisamment petites. En particulier, on recherche une sur solution globale de la forme suivante :

$$\bar{u}(t,x) = \frac{1}{(T+t)^{2\delta}} \varphi_1(t), \tag{2.19}$$

où $\delta = 1/(p+q-1) > 0$ et $T > 1$ est une constante suffisamment grande pour être choisie ultérieurement. On obtient.

$$\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} = (T+t)^{-2\delta-1} \left(-2\delta + \lambda_1 (T+t)\right) \varphi_1(t) \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \bar{u}^p(t) dx \right) \bar{u}^q &= (T+t)^{-2\delta q} \varphi_1^{p+q}(t) \\ &\times \begin{cases} \frac{1}{1-2p\delta} \Big((T+t)^{1-2p\delta} - T^{1-2p\delta} & \text{si } 2p\delta \neq 1 \Big) \\ \log(T+t) - \log(T) & \text{si } 2p\delta = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Par conséquent, si $2p\delta > 1$ alors

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - \left(\int_0^t \bar{u}^p(t) dx \right) \bar{u}^q \\ &\geqslant (T+t)^{-2\delta-1} \left[-2\delta + \lambda_1 (T+t) - \frac{1}{1-2p\delta} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2\delta-1} - 1 \right) \right] \varphi_1(t) \end{aligned}$$

De $2p\delta - 1 \leqslant 1$, il s'ensuit que pour tout $t > 0$ il existe une solution globale $\bar{u}$. Si $2p\delta = 1$, alors on obtient pour les grands $T > 1$,

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - \left(\int_0^t \bar{u}^p(t) dx \right) \bar{u}^q \\ &\geqslant (T+t)^{-2\delta-1} \left[-2\delta + \lambda_1 (T+t) - \log\left(1 - \frac{t}{T}\right) \right] \varphi_1(t) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Si $2p\delta < 1$, alors on obtient pour les grands $T > 1$,

$$\begin{aligned}
&\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - \left(\int_0^t \bar{u}^p(t) dx \right) \bar{u}^q \\
&\geqslant (T+t)^{-2\delta-1} \left[-2\delta + \lambda_1 (T+t) - \frac{1}{1-2p\delta} \right] \varphi_1(t) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Explosion de la solution en temps fini

3.1 Existence de solutions de explosion

Dans ce chapitre, on va établir que la solution de (1) explose en temps fini pour des données initiales suffisamment grandes. Afin d'obtenir ce résultat d'explosion, on utilise une variante de la méthode de Kaplan (la méthode de la fonction propre). Soit $\varphi_1(x)$ la première fonction propre du problème de valeur propre suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega \\ \varphi_1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où λ_1 est la première valeur propre.

On sait alors que $\varphi_1(x)$ est une fonction lisse non négative sur $\bar{\Omega}$ et $\varphi_1(x)$ est positif en Ω.

En particulier, nous normaliserons $\varphi_1(x)$ en sup-norme, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}}\varphi_1(x) = 1 \tag{3.1}$$

3.1.1 Exlposion lorsque $p = q$

On va montrer le résultat d'explosion pour $p = q \geqslant 1$ dans cette sous-section. En multipliant l'équation (1) par $\varphi_1(x)$, et en utilisant l'inégalité de **H**ölder, nous avons

$$\begin{aligned} u_t\varphi_1 - \Delta u\varphi_1 &= \left(\int_0^t u^p(s)\,ds\right)u^p\varphi_1 \\ &\geqslant \left(\int_0^t (u(s)\,\varphi_1)^p\,ds\right)(u\varphi_1)^p = \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^t (u(s)\,\varphi_1)^p\,ds\right)^2. \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $\varphi \geqslant (\varphi_1)^p$ on Ω. En intégrant cela par parties sur $(0,t)\times\Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(s)\,\varphi_1 dx - \int_\Omega u_0\varphi_1 dx + \lambda_1\int_0^t\int_\Omega u(s)\,\varphi_1 dxds &\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t (u(s)\,\varphi_1)^p\,ds\right)^2 ds \\ &\geqslant \frac{1}{2}t^{-2(p-1)}\int_\Omega\left(\int_0^t u(s)\,\varphi_1 ds\right)^{2p} dx \\ &\geqslant \frac{1}{2\,|\Omega|^{2p-1}}t^{-2(p-1)}\left(\int_0^t\int_\Omega u(s)\,\varphi_1 dxds\right)^{2p}. \end{aligned}$$

On pose

$$F(t) = \int_0^t\int_\Omega u(s)\,\varphi_1 dxds. \tag{3.2}$$

On a $F(t) \in C^1([0,T))$ avec $F(0) = 0$. On obtient donc l'inégalité différentielle suivante :

$$F'(t) \geqslant \int_\Omega u_0\varphi_1 dx - \lambda_1 F(t) + \frac{1}{2\,|\Omega|^{2p-1}}t^{-2(p-1)}F^{2p}(t) \tag{3.3}$$

où désigne une fois la différenciation par rapport au temps t. Ainsi, nous devons montrer que si $u_0 \geqslant 0$ est suffisamment grand, alors $F(t)$ explose en temps fini.

Pour $p = 1$, on voit facilement que si l'on prend une donnée initiale arbitraire $u_0 \geqslant 0$ telle que

$$\int_\Omega u_0\varphi_1 > \frac{\lambda_1^2\,|\Omega|}{2}, \tag{3.4}$$

alors $F(t)$ explose en temps fini. Si $p > 1$, nous construirons une sous-solution non globale 'inhabituelle'. Ici, introduisons $[t]_1$ par

$$[t]_1 = \begin{cases} t-1 & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.5}$$

Ensuite, nous prenons une sous-solution non globale sous la forme suivante :

$$G(t) = \frac{\mu t}{(1-[t]_1)^{1(2p-1)}} \quad \text{pour } 0 \leqslant t < 2 \tag{3.6}$$

où $\mu > 0$ est un grand nombre fini à choisir ultérieurement. Il est clair que $G \in C([0,2))$ et $G'(t)$ ont un point discontinu à $t = 1$, c'est-à-dire $G \in C1([0,1) \cap (1,2))$. Ainsi, nous devons faire une légère généralisation du théorème de comparaison d'EDO :

Lemme 3.1.1 *On suppose que $f(t,z)$ soit continue dans $t \in (0,T)$ et localement lipschitzienne de $z \in \mathbb{R}$. Soit $F \in C\ ([0,T)) \cap C^1(0,T)$. On suppose que $G \in C([0,T))$ et $G'(t)$ soient continues par morceaux dans $(0,T)$, où on désigne $I_n = \cup_{i=1}^{n} \{t_i\}$ par leurs points de discontinuités de $G'(t)$ dans $(0,T)$. Si F et G satisfont*

$$\begin{aligned} F'(t) + f(t,F(t)) &\geqslant G'(t) + f(t,G(t)) \quad \textit{dans } (0,T) \backslash I_n \\ F(0) &\geqslant G(0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Alors $F(t) \geqslant G(t)$ pour $t \in (0,T)$.

Preuve. On note l'ensemble des points discontinus par $I_n = \cup_{i=1}^{n} \{t_i\}$ MtiN avec $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < T$. Si on applique la comparaison sur EDO habituelle à (3.7) dans $(0,t_1]$, puis $F \geqslant G \geqslant 0$ pour $(t,x) \in (0,t_1] \times \Omega$. Encore une fois, la même procédure se fait en (t_1,t_2) par la relation des données initiales $F(t_1) \geqslant G(t_1) \geqslant 0$, à partir de laquelle $F \geqslant G \geqslant 0$ pour $(t,x) \in (t_1,t_2]$. En poursuivant cette procédure étape par étape, on obtient que $F(t) \geqslant G(t)$ pour $t \in (0,T)$. ■

Vérifions que $G(t)$ est une sous-résolution de (3.3) pour suffisamment grand $\int_\Omega u_0 \varphi_1$. Pour $0 < t \leqslant$

1,

$$
\begin{aligned}
&G'(t) + \lambda_1 G(t) - \frac{1}{2\left|\Omega\right|^{2p-1}} t^{-2(p-1)} G^{2p}(t) - \int_\Omega u_0\varphi_1 \\
&= \mu + \lambda_1 \mu t - \frac{\mu^{2p}}{2\left|\Omega\right|^{2p-1}} t^2 - \int_\Omega u_0\varphi_1 \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Cette inégalité tient, si u_0 satisfait

$$
\int_\Omega u_0\varphi_1 \geqslant \mu + \frac{\lambda_1^2 \left|\Omega\right|^{2p-1}}{2\mu^{2(p-1)}} t^2 \tag{3.9}
$$

où $\mu \geqslant \lambda^{1/(2p-1)} \left|\Omega\right|$. Pour $1 < t < 2$,

$$
\begin{aligned}
&G'(t) + \lambda_1 G(t) - \frac{1}{2\left|\Omega\right|^{2p-1}} t^{-2(p-1)} G^{2p}(t) - \int_\Omega u_0\varphi_1 \\
&\leqslant \mu(2 - t^{-2p/(2p-1)} \left\{ 2 + \left(\frac{1}{2p-1} + 2\lambda_1 \right) t - \left(\lambda_1 + \frac{\mu^{2p-1}}{2\left|\Omega\right|^{2p-1}} \right) t^2 \right\} \leqslant 0
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Cette dernière inégalité vaut pour les grands $\mu > 0$ tels que

$$
\mu \geqslant \left(2\lambda_1 \frac{2(4p-1)}{2p-1} \right)^{1/(2p-1)} \left|\Omega\right| \tag{3.11}
$$

Ainsi, si nous reprenons u_0 tel que (3.9) pour un grand $\mu > 0$ satisfaisant (3.11), alors $F(t)$ explose en temps fini. Cela implique également que $u(t)$ explose en temps fini.

3.1.2 Explosion quand $p > q$

En multipliant l'équation (1) par $\varphi_1(x)$, et en utilisant l'inégalité de **H**ölder

$$
\begin{aligned}
u_t\varphi_1 - \Delta u\varphi_1 &= \left(\int_0^t u^p(s)\, ds \right) u^p\varphi_1 \geqslant \left(\int_0^t \left(u(s)\varphi_1\right)^p ds \right) (u\varphi_1)^q \\
&\geqslant t^{-(p-q)/q} \left(\int_0^t \left(u(s)\varphi_1\right)^q ds \right)^{p/q} (u\varphi_1)^q \\
&= \frac{q}{p+q} t^{-(p-q)/q} \partial_t \left(\int_0^t \left(u(s)\varphi_1\right)^q ds \right)^{(p+q)/q}
\end{aligned}
$$

Intégration de ceci par parties sur $(0,t)\times\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(s)\varphi_1 dx-\int_\Omega u_0\varphi_1 dx+\lambda_1\int_0^t\int_\Omega u(s)\varphi_1 dxds\\
&\geqslant \frac{q}{p+q}t^{-(p-q)/q}\int_\Omega\left(\int_0^t (u(s)\varphi_1)^q ds\right)^{(p+q)/q}dx+\frac{p-q}{p+q}\int_\Omega\int_0^t s^{-p/q}\left(\int_0^s (u(\sigma)\varphi_1)^q d\sigma\right)^{(p+q)/q}dx\\
&\geqslant |\Omega|^{-p/q}\,\frac{q}{p+q}t^{-(p-q)/q}\left(\int_0^t\int_\Omega (u(s)\varphi_1)^q dxds\right)^{(p+q)/q}\\
&\geqslant |\Omega|^{-p/q-(p+q)(q-1)/q}\,\frac{q}{p+q}t^{-(p-q)/q-(p+q)(q-1)/q}\left(\int_0^t\int_\Omega u(s)\varphi_1 dxds\right)^{p+q}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$F'(t)\geqslant\int_\Omega u_0\varphi_1 dx-\lambda_1 F(t)+C_1 t^{-(p+q-2)}F^{p+q}(t), \tag{3.12}$$

où

$$C_1=C_1(p,q,|\Omega|)=\frac{q}{p+q}\frac{1}{|\Omega|^{p+q-1}}, \tag{3.13}$$

Nous construisons le type suivant de sous-résolution non globale de (3.12) :

$$G(t)=\frac{\mu t}{(1-[t]_1)^{1/(p+q-1)}}\quad\text{pour } 0<t<2. \tag{3.14}$$

Si nous choisissons u_0 assez grand pour grand $\mu>0$, alors $G(t)$ est une sous-solution non globale de (3.12) de la même manière que dans le cas où $p=q\geqslant 1$. Ainsi, nous omettons le détail.

3.1.3 Exploser quand $p<q$

En multipliant l'équation (1) par $\varphi_1(x)$,on a

$$u_t\varphi_1-\Delta u\varphi_1=\left(\int_0^t u^p(s)\,ds\right)u^p\varphi_1\geqslant\left(\int_0^t (u(s)\varphi_1)^p ds\right)(u\varphi_1)^q$$

En intégrant sur Ω et en utilisant l'inégalité de Hölder,on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi_1 dx + \lambda_1 \int_\Omega u(t)\varphi_1 dx \\
&= \int_\Omega \left[\left(\int_0^t (u(s)\varphi_1)^p ds \right)^{p/q} (u\varphi_1)^p \right]^{q/p} dx \\
&\geqslant |\Omega|^{-(q-p)/p} \left(\int_\Omega \left(\int_0^t (u(s)\varphi_1)^p ds \right)^{p/q} (u\varphi_1)^p dx \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

En intégrant à nouveau sur $(0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(t)\varphi_1 dx - \int_\Omega u_0\varphi_1 dx + \lambda_1 \int_\Omega u(t)\varphi_1 dx \\
&\geqslant |\Omega|^{-(q-p)/p} \int_0^t \left[\int_\Omega \left(\int_0^s (u(\sigma)\varphi_1)^p d\sigma \right)^{p/q} (u(s)\varphi_1)^p dx \right]^{q/p} ds \\
&\geqslant |\Omega|^{-(q-p)/p} t^{-(q-p)/p} \left[\int_0^t \int_\Omega \left(\int_0^s (u(\sigma)\varphi_1)^p d\sigma \right)^{p/q} (u(s)\varphi_1)^p dxds \right]^{q/p} \\
&= |\Omega|^{-(q-p)/p} t^{-(q-p)/p} \left[\frac{q}{p+q} \int_\Omega \left(\int_0^t (u(s)\varphi_1)^p ds \right)^{(p+q)/q} dx \right]^{q/p} \\
&\geqslant |\Omega|^{-(q-p)/p} t^{-(q-p)/p} \left[\frac{q}{p+q} |\Omega|^{-p/q} \left(\int_0^t \int_\Omega (u(s)\varphi_1)^p dxds \right)^{(p+q)/q} \right]^{q/p} \\
&\geqslant |\Omega|^{-q/p} \left(\frac{q}{p+q} \right)^{q/p} t^{-(q-p)/p} \left(\int_0^t \int_\Omega (u(s)\varphi_1)^p dxds \right)^{(p+q)/p}. \\
&\geqslant |\Omega|^{-q/p-(p+q)(p-1)/p} \left(\frac{q}{p+q} \right)^{q/p} t^{-(q-p)/p-(p+q)(p-1)/p} \left(\int_0^t \int_\Omega u(s)\varphi_1 dxds \right)^{p+q}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'inégalité différentielle suivante :

$$F'(t) \geqslant \int_\Omega u_0\varphi_1 dx - \lambda_1 F(t) + C_2 t^{-(p+q-2)} F^{p+q}(t) \tag{3.15}$$

où

$$C_2 = C_2(p,q,|\Omega|) = \frac{q}{p+q}\frac{1}{|\Omega|^{p+q-1}}. \tag{3.16}$$

Si on prend le même $G(t)$ dans (3.14) comme une sous-résolution non globale, alors nous pouvons voir que $G(t)$ est une sous-résolution de l'inégalité (3.15) de la même manière.

Bibliographie

[1] Bebernes, J., & Eberly, D. (1989). The Rigid Ignition Model. In Mathematical Problems from Combustion Theory (pp. 47-86). Springer, New York, NY.

[2] Bebernes, J. W., & Lacey, A. A. (1997). Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems. Advances in Differential Equations, 2(6), 927-953.

[3] Cazenave, T., & Haraux, A. (1990). Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires (Vol. 1). Ellipses.

[4] Choulli, M. (2009). Problèmes inverses elliptiques. In Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques (pp. 35-157). Springer, Berlin, Heidelberg.

[5] D. Hirata, Blow-up for a class of semilinear integro-differential equations of parabolic type, Math. Methods Appl. Sci. 22 (1999), 1087-1100.

[6] Fila, M. (1997). Boundedness of global solutions of nonlocal parabolic equations. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 30(2), 877-885.

[7] Kaplan, S. (1963). On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 16(3), 305-330.

[8] Kastenberg, W. E. (1968). SPACE DEPENDENT REACTOR KINETICS WITH POSITIVE FEEDBACK. Univ. of California, Los Angeles.

[9] Kastenberg, W. E., & Chambré, P. L. (1968). On the stability of nonlinear space-dependent reactor kinetics. Nuclear Science and Engineering, 31(1), 67-79.

[10] Levin, J. J., & Nohel, J. A. (1966). A system of nonlinear integrodifferential equations. The Michigan Mathematical Journal, 13(3), 257-270.

[11] Ladyzhenskaia, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'tseva, N. N. (1968). Linear and quasi-linear equations of parabolic type (Vol. 23). American Mathematical Soc.

[12] Martin, R. H. (1985). A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 12(2), 302-305.

[13] Sattinger, D. H. (1972). Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. Indiana University Mathematics Journal, 21(11), 979-1000.

[14] Smart, D. R. (1974). fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge.

[15] Tsutsumi, M. (1972). Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 8(2), 211-229.

[16] Tsutsumi, M., Stability instability and blowing up of solutions of nonlinear-distributed parameter system arised in the theory of nuclear reactor kinetics, unpublished paper.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliqées ci-dessous.

Ω	:	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	:	Laplacien de u.
u_t	:	la dérivée partielle de u par rappot à t.
$\pounds(X)$	:	Ensemble des opérateurs linéaires bornées définie de X dans X.
$D(A)$	:	Domaine de l'opérateur A.
$G(A)$	:	le graphe de l'opérateur A.
$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$	:	résolvant de l'opérateur A.
$A_\lambda = AJ_\lambda$	:	régulariséé Yosida de l'opérateur A.
$p.p$	:	partout sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

Résumé :

Dans ce travail on a considéré un problème aux limites de type parabolique semi-linéaire intégro-différentielle qui concerne à la théorie de la cinétique des réacteurs nucléaires. Sous certaines conditions sur les données initiales on a basé sur des techniques récentes d'analyse mathématique, on a obtenu des résultats importants sur l'existence et l'unicité de solution locale, globale et explosion en temps fini de la solution.

Les mots-clés : Système Réaction-Diffusion, Explosion en temps fini, Existence globale, Semi groupes.

التلخيص:

درسنا في هذا العمل مسالة حدية تكاملية تفاضلية نصف خطية من نوع مكافئ تتعلق بنظرية حركية المفاعلات النووية. في ظل ظروف معينة على الشروط الابتدائية التي لدينا واستنادًا إلى التقنيات الحديثة للتحليل الرياضي، تحصلنا على نتائج مهمة حول وجود ووحدانية الحل المحلي و الشامل والانفجار في زمن منته للحل.

الكلمات المفتاحية: جمل تفاعلات الانتشار ، الانفجار في زمن منته ، وجود شامل ، أنصاف الزمر.

Abstract :

In this work we considered boundary value problem of a semi-linear integro-differential equation of parabolic type which arises in the theory of the nuclear reactors kinetics. Under certain conditions on the initial data, we have based on recent techniques of mathematical analysis; we have obtained important results on the existence and the uniqueness of local solution, global and blow-up in finite-time of the solution.

The keywords: Reaction-Diffusion System, Blow-up in finite-time, Global existence, Semi-groups.