République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Laiadi Somia

Titre

Résolution numérique de quelques équations intégro-differentielles de Fredholm

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Birbeche Mohamed**	UMKB	Président
Dr.	**Laiadi Abdelkader**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Adouane Saida**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

DÈDICACE

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Al hamdo li ALLAH "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, à ma mère.

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études.

A mes adorables Soeurs

A mes frères

A toute la grande famille **" LAIADI "**

A toute mes amies

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant toute considération, je remercie le GRAND DIEU

le tout puissant qui m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche

monsieur **Laiadi Abdelkader** pour son soutien scientifique,

ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations,

ses précieux conseils mais aussi ses encouragements.

Je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie messieurs les membres de jury

Dr. Birbeche Mohamed et **Dr. Adouane Saida**

qui ont accepté de participer au jury de soutenance.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé à réaliser ce travail.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les équations intégro-différentielles s'inscrit comme un des problèmes les plus appliqués où les opérateurs différentiels et intégrals apparaîtrons dans la même équation, ce type d'équations a été introduit par Volterra pour la première fois dans le début des années 1900, Volterra a examiné l'augmentation de la population. On consiste son étude sur les influences héréditaires où à travers sa recherche le sujet de (É.I-D) a été établie, la deuxième borne de l'intégration est variable.

Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique, le but est de trouver résolution numérique des (É.I-D) de Fredholm où les deux bornes de l'intérgation sont fixés, pour cela on divise ce mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notions préliminaires sur quelques définitions et rappel sur les équations intégrales. Et aussi, nous présentons des définitions sur des équations intégro-différentielles.

Le deuxième chapitre consacre sur les méthodes analytiques pour résolution exacte de l'équation integro-différentielle de Fredholm linéaire, nous intéressons sur la méthode de calcul direct et la méthode de décomposition Adomian.

Dans le troisième chapitre, quand on ne peut pas résoudre tous les types de l'(É.I-D) de Fredholm avec les méthodes analytiques, alors on a besoins de chercher d'autre méthodes de résolution dite numériques, en se basant sur la méthode de collocation telle que les solutions approchées sont données sous forme de séries de polynômes de Taylor à la fois et sous la forme de séries de Legendre d'autre fois.

La méthode de collocation seraient conjuguées avec des exemples, en estimant les erreurs pour les deux méthodes de comparer les solutions approchées avec la solution exacte par programmation en MATLAB.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégro-différentielles

1.1 Équations intégrales linéaires

1.1.1 Opérateur intégral linéaire

Définition 1.1.1 *Soit* $K : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

l'opérateur intégral linéaire ou opérateur à noyau linéaire sur $C[a,b]$ définit par la formule suivante :

$$A : u \in C[a,b] \longrightarrow Au \in C[a,b]$$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

où la fonction $K(x,t)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A.

Remarque

- Si le noyau $K(x,t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme :

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

où les fonctions $\alpha_i(x)$ pour $i = 1, ..., n$, sont linéairement indépendantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré. Par exemple, les noyaux : $x - t$, xt, $x^2 - t^2$, $xt^2 + tx^2$...

1.1.2 Les équations intégrales (É.I)

Définition 1.1.2 *Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration* $\int$ *. La forme générale d'une équation intégrale est*

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

où $\alpha(x), f(x), K(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro et Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie. La fonction $K(x,t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

1.1.3 Classification des équations intégrales

Équation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

i) Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

et elle est dite de seconde espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

et elle est dite de premiére espèce.

iii) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

et elle est dite homogène.

Équation intégrale de Volterra

La forme la plus classique de Volterra est de la forme

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{1.3}$$

où les bornes de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît linéairement sous le signe intégral.

i) Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

Cet équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

iii) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

et elle est dite homogène.

1.2 Équation intégro-différentielles (É.I-D)

Une équation intégro-différentielle (É.I-D) est une équation composée de deux opérations intégrale et différentiel qui impliquent la fonction inconnue u. La forme générale d'une équation intégro-differentielle linéaire d'ordre n est

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x,t)u(t)dt \tag{1.4}$$

où Ω un ensemble fermé et borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie, λ est un paramètre numérique, $K(x,t)$ le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est la fonction donnée, $u(t)$ est la fonction inconnue, $u^{((n)}$ est la dérivée *nième* de $u(x)$.

1.2.1 Classification des équations intégro-différentielles

1- Équation intégro-différentielle de Fredholm

L'équation de la forme (1.4) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm.

L'(É.I-D) de Fredholm s'écrit sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{1.5}$$

où $u^{(n)}(x)$ indique la dérivée *nième* de $u(x)$. Autre dérivés de l'ordre moins peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche. Des exemples de Fredholm intégro-différentielles

$$u\prime(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, u(0) = 0$$

et

$$u''(x) + u\prime(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, u(0) = 0, u\prime(0) = 1$$

2- Équation intégro-différentielle de Volterra

Les équations intégro-différentielle de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que le borne d'intégration supérieure est variable, c-'a-d, $b = x$.

L'équation intégro-différentielle de Volterra s'écrit sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{1.6}$$

Exemples d'équations l'integro-différentielles de Volterra sont

$$u\prime(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, u(0) = 0$$

et

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, u(0) = -1, u'(0) = 1$$

3- Équation intégro-différentielle de Volterra- Fredholm

Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l'(É.I-D) est dite de Fredholm-Volterra ou Volterra-Fredholm.

L'équation intégro-différentielle de Volterra- Fredholm s'écrit sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \tag{1.7}$$

où λ_1 et λ_2 sont des paramètres numériques, $K_1(x,t)$ et $K_2(x,t)$ les noyaux de l'équation intégrale (1.1), $f(x)$ est la fonction donnée et $u(t)$ est la fonction inconnue.

Et la forme mixte

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b K(r,t)u(t)dt$$

Un exemple de Volterra- Fredholm intégro-différentielles

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, u(0) = 0$$

Linéarité et Homogénéité de l'(É.I-D)

Définition 1.2.1 *L'équation intégro-différentielle*

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

est dite linéaire si l'éxposant de la fonction inconnue $u(x)$ sous le signe intégral est un et que l'équation ne contient pas de fonctions non linéaires de $u(x)$, sinon l'équation est dite non linéaire.

Définition 1.2.2 *L'équation intégro-différentielle*

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

est dit homogène si $f(x)$ est identiquement nul, sinon on dit non homogène.

Singularité de l'(É.I-D)

Définition 1.2.3 *Une équation intégro-différentielle est dite singulière si l'un ou les deux hypothèses suivantes consistent dans (É.I-D)*

1. L'un ou les deux limites de l'intégration sont infinies.

2. Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

Remarque

1- L'ordre d'une (É.I-D) est l'ordre de plus haute dérivée qui apparaît dans l'opérateur différentiel.

2- Le (É.I-D) est dite première espèce si la partie différentiel est nul, sinon est dite de deuxième espèce

3- Une (É.I-D) est dite ordinaire si la fonction inconnue dépende d'une seule variable indépendante, alors si dépende de deux ou plusieurs variables indépendantes l'(É.I-D) est dite partielle.

Chapitre 2

Résolution analytique des équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm

Nous intéressons dans ce chapitre aux types les plus simples qui concernent les (É.I-D) unidimensionnelle (la fonction inconnue u dépend d'un variable).

Les équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm de deuxième type s'écrit sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \text{ où } u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n} \tag{2.1}$$

Parce que l'équation a entrainé dans (2.1) combine les opérateurs différentiels et l'opérateur intégral, alors il est nécessaire de définir les conditions initiales $u(0), u'(0), ..., u^{(n-1)}(0)$ pour la détermination de la $u(x)$ solution particulière de l'équation intégro-différentielle de Fredholm (2.1). Toute équation intégro-différentielle de Fredholm se caractérise par l'existence de une ou plusieurs des dérivés $u'(x), u''(x), ...$ dehors le signe intégral.

2.1 Méthode de calcul direct

Cette méthode peut être utilisée pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm de deuxième espèce directement au lieu d'une forme série.

Pour l'application de cette méthode, nous considérons le noyau séparable de la forme

$$K(x,t) = g(x)h(t) \tag{2.2}$$

Nous considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm de la forme générale

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.3}$$

aux conditions initiales

$$u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

En substituant (2.2) dans (2.3), on trouve

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)u(t)dt \tag{2.4}$$

Puisque l'intégrale dans l'équation (2.4) est une intégrale bornée et ne dépend que d'une seule variable t, alors nous pouvons assigner cet intégrale par une constante β c'est-à-dire

$$\int_a^b h(t)u(t)dt = \beta \tag{2.5}$$

L'équation (2.4) devient

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \beta g(x) \tag{2.6}$$

En intégrant les deux côtés de (2.6) n fois de 0 à x, en utilisant également les conditions initiales, nous pouvons trouver une formule pour $u(x)$ qui dépend de β et x. Cela signifie que nous pouvons écrire

$$u(x) = u(x; \beta) \tag{2.7}$$

En substituant (2.7) dans le côté droit de (2.5), en calculant l'intégrale, en résolvant également l'équation résultante. Quand on a déterminé β, nous obtenons la solution exacte $u(x)$ après avoir substitué β dans (2.7).

Exemple 2.1

Considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$u'(x) = 12x + \int_0^1 u(t)dt \quad \text{avec } u(0) = 0 \tag{2.8}$$

Cet équation peut s'écrire

$$u'(x) = 12x + \beta, \quad u(0) = 0. \tag{2.9}$$

On pose

$$\int_0^1 u(t)dt \ = \beta. \tag{2.10}$$

En intégrant les deux côtés de (2.9) de 0 à x, et en utilisant la condition initiale, nous obtenons

$$u(x) = 6x^2 + \beta x \tag{2.11}$$

En remplaçant (2.11) dans (2.10) et évaluer le rendement intégral

$$\beta = \int_0^1 u(t)dt \ = 2 + \frac{1}{2}\beta$$

Donc, on trouve

$$\beta = 4$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x) = 6x^2 + 4x$$

2.2 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition Adomian (MDA) a été introduite et développée par George Adomain. (MDA) donne la solution dans un infini série de composants. L'idée de la méthode de décomposition Adomian transforme l'équation intégro-différentielle de Fredholm en une équation intégrale.

Nous considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm du second ordre et du second type

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.11}$$

avec les conditions initiales $u(0) = b_0, u'(0) = b_1$.

Intégrant les deux côtés de (2.11) de 0 à x deux fois, nous obtenons

$$u(x) = b_0 + b_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_a^b K(x,t)u(t)dt) \tag{2.12}$$

où les conditions initiales sont utilisées et L^{-1} est un opérateur intégral double

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.13}$$

Nous utilisons la série de décomposition (2.13) dans les deux côtés de (2.12), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b_0 + b_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_a^b K(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x))dt)$$

ou de façon équivalent

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... = {} & b_0 + b_1(x) + L^{-1}(f(x)) \\ & + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt) + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_1(x)dt) \\ & + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_2(x)dt) + ... \end{aligned}$$

Par conséquent, pour déterminer les composants $u_0(x)$, $u_1(x), u_2(x)$, $u_3(x), ...$de la solution $u(x)$, nous définissons la relation de récurrence

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b_0 + b_1 x + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}(\int_a^b K(x,t)u_k(t)dt), \quad k \geqslant 0 \end{aligned}$$

Notons que $u_0(x)$ est défini par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b_0 + b_1(x) + L^{-1}(f(x)) \\ u_{n+1}(x) &= L^{-1}(\int_a^b K(x,t)u_k(t)dt)..k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

En utilisant (2.14), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Exemple 2.2

Utilisez la méthode de décomposition d'Adomain pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$u'''(x) = e^x - x + \int_0^1 x\ t\ u(t)dt \quad \text{avec } u(0) = u'(0) = u''(0) = 1. \tag{2.15}$$

Intégrant les deux côtés de l'équation (2.15) trois fois de 0 à x, nous obtenons

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}x^3\left(\int_0^1 t\ u(t)dt\right)$$

D'après la procédure précédente, nous définissons les relations de récurrence

$$u_0(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3, \quad u_{k+1}(x) = \frac{1}{3!}x^3\int_0^1 t\ u_k(t)dt, \quad k \geqslant 0$$

Cela on donne

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= e^x - \frac{1}{3!}x^3 \\
u_1(x) &= \frac{1}{3!}x^3\int_0^1 t\ u_0(t)dt = \frac{29}{180}x^3 \\
u_2(x) &= \frac{1}{3!}x^3\int_0^1 t\ u_1(t)dt = \frac{29}{5400}x^3 \\
u_3(x) &= \frac{1}{3!}x^3\int_0^1 t\ u_2(t)dt = \frac{29}{162000}x^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{29}{180}x^3(1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + ...)$$

La somme de la série géométrique infinie entre paranthèse est

$$S = 1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + ... = \frac{30}{29}$$

L'utilisation de ce résultat donne la solution exacte $u(x) = e^x$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Fredholm

Dans ce chapitre, on essaye de trouver la solution numérique de certaines classes d'équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm, en basant sur la méthode de collocation. En utilisant les séries de Taylor et les polynômes de Legendre, les solutions approximatives sont donnée sous forme des polynômes. En estimant les erreurs pour ces méthodes avec comparaison des solutions approchées avec les solutions exactes.

3.1 Méthode de collocation de Taylor

3.1.1 Série de Taylor

Soit f une fonction avec des dérivés de tous des ordres dans un intervalle $[x_0, x_1]$ qui contient un point intérieur a. La série de Taylor de $f(x)$ générée à $x = a$ est :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou équivalent

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$

La série de Taylor générée par $f(x)$ à $a = 0$ est appelée la série Maclaurin et donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Cela équivaut à

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$

3.1.2 Principe de la méthode

Soit l'(É.I-D) de Fredholm d'ordre m

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x)u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad a \leqslant x, t \leqslant b. \tag{3.1}$$

où les fonctions inconnues $p_k(x), f(x)$ et $K(x,t)$ sont définis sur l'intervalle $[a,b]$, λ est un paramètre numérique et $u(x)$ est la fonction inconnue.

avec les conditions (en général)

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[a_{ij}\ u^{(j)}(a) + b_{ij}\ u^{(j)}(b) + c_{ij}\ u^{(j)}(c)\right] = \lambda_i\ ; \quad i = 0, 1, ..., m-1 \tag{3.2}$$

où $a \leqslant c \leqslant b$, les coefficients réels a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et λ_i sont des constantes.

Nous supposons que la solution de (3.1) s'écrit sous la forme de la série Taylor tronquée

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{u^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \; n = 0, 1, ..., N. \tag{3.3}$$

où $u^{(n)}(c)$ sont les coefficients de Taylor à déterminer et N est un entier positif tel que $N \geqslant m$.

Alors la solution (3.3) de l'équation (3.1) peut être écrire sous la forme matricielle :

$$[u(x)] = X\ M_0\ A$$

où

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x-c & (x-c)^2 & ... & (x-c)^N \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} u^{(0)}(c) & u^{(1)}(c) & u^{(2)}(c) & ...u^{(N)}(c) \end{bmatrix}^t$$

et

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la solution (3.3), nous pouvons utiliser la méthode de collocation de Taylor. Nous adaptons cette méthode pour calcul des coefficients de Taylor en utilisant les points de collocation de Taylor.

Premièrement, nous substituons les points de collocation de Taylor définis par

$$x_i = a + i\frac{b-a}{N}; \quad i = 0, 1, .., N; \; x_0 = a, x_N = b. \tag{3.4}$$

dans Eq (3.1) on obtient

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x_i)u^{(k)}(x_i) = f(x_i) + \lambda I(x_i) \tag{3.5}$$

où

$$I(x_i) = \int_a^b K(x_i, t)u(t)dt$$

Alors nous pouvons écrire le système (3.5) sous la forme d'une matrice

$$p_0 U^{(0)} + p_1 U^{(1)} + ... + p_m U^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} p_k U^{(k)} = F + \lambda I \tag{3.6}$$

où

$$P_k = \begin{bmatrix} p_k(x_0) & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & p_k(x_N) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}, U^{(k)} = \begin{bmatrix} u^{(k)}(x_0) \\ u^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ u^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I(x_0) \\ I(x_1) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{bmatrix}$$

On supposons que la *kième* dérivée de la fonction (3.3) par rapport à x ait à l'expansion tronquée de la série de Taylor définie par Eq (3.3)

$$u^{(k)}(x_i) = \sum_{n=k}^{N} \frac{u^{(n)}(c)}{(n-k)!}(x_i - c)^{n-k}; \quad a \leqslant x \leqslant b$$

où $u^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, ..., N)$ sont des coefficients de Taylor.

On a $u^{(0)}(x) = u(x)$. Puis en substituant les points de collocation de Taylor dans cette expression, nous obtenons les formes matricielles

$$\left[u^{(k)}(x_i)\right] = X_{x_i}\ M_k\ A, \quad k = 0, 1, ...N \tag{3.7}$$

ou l'équation matricielle

$$u^{(k)} = C\ M_k\ A \tag{3.8}$$

Où

$$C = \begin{bmatrix} X_{x_0} \\ X_{x_1} \\ \vdots \\ X_{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0-c)^0 & (x_0-c)^1 & \cdots & (x_0-c)^N \\ (x_1-c)^0 & (x_1-c)^1 & \cdots & (x_1-c)^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_N-c)^0 & (x_N-c)^1 & \cdots & (x_N-c)^N \end{bmatrix}$$

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-k)!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Alors nous pouvons écrire la matrice Eq (3.4) comme

$$(\sum_{k=0}^{m} p_k \ C \ M_k)A = F + \lambda I \tag{3.9}$$

Le noyau $K(x,t)$ est étendu pour construire la série Taylor

$$K(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} k_{nm}(x-c)^n(t-c)^m$$

$$k_{nm} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} k(0,0)}{\partial x^n \partial t^m}\bigg|_{(x=c,t=c)}$$

La forme matricielle de $K(x,t)$ définie par

$$[K(x,t)] = X \ K \ T^t \tag{3.10}$$

où

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x-c & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t-c & (t-c)^2 & \cdots & (t-c)^N \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & \cdots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N0} & k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

De plus, la forme matricielle de $u(x)$ et $u(t)$ sont

$$[u(x)] = X\ M_0\ A, \quad [u(t)] = T\ M_0\ A \tag{3.11}$$

En substituant l'expression (3.10) et (3.11) dans l'intégrale $I(x_i)$ définie dans (3.5), nous avons

$$[I(x)] = \int_a^b \left\{X\ K\ T^tT\ M_0\ A\right\} dt = X\ K\ H\ M_0\ A \tag{3.12}$$

$$H = [h_{nm}] = \int_a^b T^tTdt,\ h_{nm} = \left.\frac{(b-c)^{n+m+1} - (a-c)^{n+m+1}}{n+m+1}\right|_{n,m=0,1,..,N}$$

de (3.12) nous obtenons la matrice I sous la forme

$$I = C\ K\ H\ M_0 A \tag{3.13}$$

Enfin, en substituant (3.13) dans (3.9), nous obtenons l'équation de la matrice

$$\left(\sum_{k=0}^{m} P_k C\ M_k - \lambda C\ K\ H\ M_0\right) A = F \tag{3.14}$$

Cet équation est la relation fondamentale pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm défini dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$.

L'équation (3.14) peut s'écrire

$$W\ A = F \tag{3.15}$$

ce qui correspond à un système de $(N+1)$ équations algébriques avec les coefficients de Taylor inconnus

$$W = [w_{ij}] = \sum_{k=0}^{m} p_k C\ M_k - \lambda C\ K\ H\ M_0, \quad i, j = 0, 1, ..., N.$$

Ainsi que pour les conditions (3.2). Nous supposons

$$\begin{aligned} \left[u^{(i)}(a)\right] &= P\ M_j\ A \\ \left[u^{(i)}(b)\right] &= Q\ M_j\ A \\ \left[u^{(i)}(c)\right] &= R\ M_j\ A \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned} p &= \left[1 \quad (a-c) \quad (a-c)^2 \quad \cdots (a-c)^N\right] \\ Q &= \left[1 \quad (b-c) \quad (b-c)^2 \quad \cdots (b-c)^N\right] \\ R &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots 0]\,. \end{aligned}$$

En remplaçant les formes matricielles (3.16) dans (3.2), on obtient

$$\sum_{j=0}^{m-1} \{a_{ij}\ P + b_{ij}\ Q + c_{ij}\ R\}\, M_j\ A = [\lambda_i]$$

Nous définissons Y_i comme

$$Y_i = \sum_{j=0}^{m-1} \{a_{ij}\ P + b_{ij}\ Q + c_{ij}\ R\}\, M_j = [y_{i0}\ y_{i1}\ ...\ y_{iN}]\,, \tag{3.17}$$
$$i = 0, 1, ..., m-1$$

les conditions de forme matricielle deviennent

$$Y_i\ A = [\lambda_i] \tag{3.18}$$

et leurs matrices sont

$$[Y_i\ ; \lambda_i] = [y_{i0}\ \ y_{i1}\ ...\ y_{iN}\ ; \lambda\ _i] \tag{3.19}$$

Enfin, la matrice $[W; F]$ est définie par les matrices

$$W = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} \\ y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m-1,0} & y_{m-1,1} & \cdots & y_{m-1,N} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-m}) \\ \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Si $|W| \neq 0$, nous pouvons écrire

$$A = W^{-1}F$$

Alors on peut dire que l'équation intégro-différentielle (3.1) avec des conditions (3.2) a une solution unique sous la forme (3.3).

3.2 Méthode polynomiale de Legendre

3.2.1 Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les polynômes définis par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \quad .n = 0, 1, ... \tag{3.20.a}$$

P_n est en particulier de degré n. Les premiers termes sont :

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
$$

Comme tout famille de polynômes orthogonaux, les polynômes de Legendre vérifient certaines propriétés :

i) Ils vérifient une relation de récurrence d'ordre 2

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad n \geqslant 1 \tag{3.20.b}$$

ii) P_n est solution de l'équation différentielle de Legendre

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$$

3.2.2 Principe de la méthode

Soit l'(É.I-D) de Fredholm d'ordre m à coefficient variable

$$\sum_{k=0}^{m} G_k(x)u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{1} K(x,t)u(t)dt \ , \quad -1 \leqslant x,t \leqslant 1 \tag{3.21}$$

avec les conditions

$$\sum_{k=0}^{m} a_{jk}u^{(k)}(-1) + b_{jk}u^{(k)}(1) + c_{jk}u^{(k)}(0) = \mu_j, \ \ j = 0,1,...,m-1 \tag{3..22}$$

où les constantes a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} et μ_j sont des constantes stables.

Notre objectif est d'obtenir une solution exprimée sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{3.23}$$

Les coefficients de Legendre à déterminer sont les a_n où $n = 0, 1, 2, ...N$ et les fonctions $P_n(x); (n = 0, 1, 2, ..., N)$ sont les polynômes de Legendre .

Relations matricielles fondamentales

On pose Eq (3.21) sous forme

$$D(x) = f(x) + \lambda I_g(x) \tag{3.24}$$

où

$$D(x) = \sum_{k=0}^{m} G_k(x) u^{(k)}(x) \ , \ I_g(x) = \int_{-1}^{1} K(x,t) u(t) dt$$

Maintenant, on va convertir la solution $u(x)$ et ses dérivées $u^{(k)}(x)$, la partie différentielle $D(x)$ et la partie intégrale $I(x)$ et les conditions mixtes aux formes matricielles.

Relations matricielles pour $u(x)$ et $u^{(k)}(x)$

La fonction $u(x)$ définie par (3.23) ne peut être étendue à la série de Legendre tronquée sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.25}$$

La formule (3.25) et son dérivé peut être écrite sous la forme matricielle

$$[u(x)] = P(x) A \quad \text{et} \quad \left[u^{(k)}(x)\right] = P^{(k)}(x) A \tag{3.26}$$

où

$$P(x) = [P_0(x) \;\; P_1(x) \; ...P_N(x)]$$
$$P^{(k)}(x) = \left[P_0^{(k)}(x) \;\; P_1^{(k)}(x)...P_N^{(k)}(x)\right]$$

et

$$A = [a_0 \; a_1...a_N]\,,$$

dont A est la matrice des coefficients.

D'autre part, en utilisant la formule récursive de Legendre $(3.20.a)$ et $(3.20.b)$ et en prenant $n = 0, 1, ..., N$, on peut obtenir l'équation matricielle

$$P^{(1)}(x) = P(x)\Pi^t \tag{3.27}$$

oú, pour les valeurs impaires de N

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour les valeurs paires de N

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a aussi la relation entre $P(x)$ et ses dérivées est

$$\begin{aligned} P^{(1)}(x) &= P(x)\Pi^t \\ P^{(2)}(x) &= P(x)\Pi^t = P(x)(\Pi^t)^2 \\ &\vdots \\ P^{(k)}(x) &= P^{(k-1)}(x)(\Pi^t)^{k-1} = P(x)(\Pi^t)^k, k = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3.28}$$

Par conséquent, en substituant les relations matricielles (3.28) dans l'équation (3.26), on obtient les relations matricielles pour $u(x)$, $u^{(k)}(x)$ et $P^{(k)}(x)$ comme

$$\left[u^{(k)}(x)\right] = P(x)(\Pi^t)^k A. \tag{3.29}$$

Représentations matricielles basées sur des points de collocation

Les points de collocation de Legendre définis par

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i, \quad i = 0, 1, ..., N \tag{3.30}$$

Nous substituons les points de collocation (3.30) dans l'équation (3.24) pour obtenir le système

$$D(x_i) = f(x_i) + \lambda I_g(x_i)$$

repésenté dans l'équation matricielle comme

$$D = F + \lambda I_g \tag{3.31}$$

où

$$D = \begin{bmatrix} D(x_0) \\ D(x_1) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f'(x_N) \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_g(x_0) \\ I_g(x_1) \\ \vdots \\ I_g(x_N) \end{bmatrix}$$

Relation matricielle pour la partie différentielle $D(x)$

Réduire la partie $D(x)$ à la forme matricielle en utilisant des points de collocation, nous écrivons d'abord la matrice D définie dans (3.31) comme

$$D = \sum_{k=0}^{m} G_k U^{(k)} \tag{3.32}$$

où

$$G_k = \begin{bmatrix} G_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_k(x_N) \end{bmatrix}; U^{(k)} = \begin{bmatrix} u^{(k)}(x_0) \\ u^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ u^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}$$

En utilisant les points de collocation $x_i; (i = 0, 1, .., N)$ (3.23), nous avons le système d'équations matricielles

$$\left[u^{(k)}(x_i) = P(x_i)(\Pi^t)^k A, \quad k = 0, 1, ..., m\right]$$

ou

$$U^{(k)} = \begin{bmatrix} u^{(k)}(x_0) \\ u^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ u^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_N) \end{bmatrix} \left[(\Pi^t)^k A\right] = P(\Pi^t)^k A, \tag{3.33}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \cdots & P_N(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(x_N) & P_1(x_N) & \cdots & P_N(x_N) \end{bmatrix}$$

Donc, à partir des formes matricielles (3.32) et (3.33), on obtient la relation matricielle fondamentale pour la partie différentielle $D(x)$

$$D = \sum_{k=0}^{m} G_k \ P \ (\Pi^t)^k \ A. \tag{3.34}$$

Relation matricielle pour la partie intégrante de Fredholm $I_g(x)$

La fonction $K(x,t)$ du noyau peut être approximée par la série de Legendre tronquée

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} k_{mn}^t P_m(x) P_n(t) \text{ ou } K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} k_{mn}^t x^m t^n \tag{3.35}$$

où

$$k_{mn}^t = \frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}; m,n = 0,1,...,N.$$

Nous convertissons (3.35) en formes matricielles puis égalisons

$$[K(x,t)] = P(x) K_l P^t(t) = X(x) K_t X^t(t) \tag{3.36}$$

où

$$P(x) = [P_0(x) \;\; P_1(x) \;...P_N(x)] \;\; , X(x) = \left[1 \;\; x \;...x^N\right]$$

$$K_l = \left[k_{mn}^t\right] \;\; , \;\; K_t = \left[k_{mn}^t\right] ; \quad m, n = 0, 1, ..., N.$$

D'autre part, en utilisant la formule récursive de Legendre $(3.20.b)$ pour $n = 0, 1, ..., N$, on trouve l'équation matricielle

$$P^t(x) = D \; X^t(x) \;\; \text{ou} \;\; P(x) = X(x) \; D^t \tag{3.37}$$

où pour les valeurs impaires de N et pour des valeurs paires de N. Par conséquent, en remplaçant la matrice $P(x)$ (3.37) dans la relation (3.36) et simplifier l'équation de résultat, on trouve la relation matricielle

$$K_l = (D^{-1})^t K_t D^{-1} \tag{3.38}$$

qui est la relation entre les coefficients de Legendre et Taylor de $K(x, t)$. En remplaçant les formes matricielles (3.36) et (3.26) correspondant aux fonctions $K(x, t)$ et $u(t)$ dans la partie intégrante de Fredholm $I_g(x)$, on obtient

$$[I_g(x)] = \int_{-1}^{1} P(x) K_l \; P^t(t) P(t) \; A dt = P(x) K_l \; Q \; A \tag{3.39}$$

où

$$Q = \int_{-1}^{1} P^t(t) P(t) dt = [q_{mn}]$$

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{2N}{2m+1}; & m = n \\ 0 & ; m \neq n \end{cases} ; m, n = 0, 1, ..., N$$

et la matrice K_l est définie dans (3.38).

En remplaçant les points de collocation x_i ,$(i = 0, 1, ..., N)$ (3.30) dans la relation (3.39), on obtient le système des équations matricielles

$$I_g(x_i) = P(x_i)K_lQA; i = 0, 1, ..., N$$

ou

$$I_g = P\ K_l\ Q\ A \tag{3.40}$$

qui est la relation matricielle fondamentale pour $I_g(x)$.

Relation matricielle pour les conditions mixtes

On peut obtenir la forme matricielle correspondante pour les conditions (3.22), en utilisant la relation (3.28), comme :

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(1) + c_{jk}P(0)] (\Pi^t)^k A = \mu_j, j = 0, 1, ..., m-1 \tag{3.41}$$

Méthode de solution

Maintenant, nous sommes prêts à construire l'équation de matrice fondamentale correspondant à (3.21). Dans ce cas, en remplaçant les relations matricielles (3.34) et (3.40) dans Eq (3.31), puis en le simplifiant, on obtient l'équation matricielle

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{G_kP\ (\Pi^t)^k - \lambda P\ K_lQ\right\} A = F \tag{3.42}$$

qui correspond au système de $(N+1)$ équations algébriques pour les $(N+1)$ coefficients de Legendre inconnus $a_0, a_1, ..., a_N$. On peut écrire (3.42) sous la forme

$$W\ A = F \quad \text{ou} \quad [W; F] \tag{3.43}$$

où

$$W = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^{m} G_k P \ (\Pi^t)^k - \lambda P \ K_l Q, \quad p, q = 0, 1, ..., N$$
$$F = [f(x_0) \quad f(x_1) \ ... \quad f(x_N)]^t$$

D'autre part, la forme matricielle (3.42) des conditions (3.22) peut s'écrire

$$Y_j \ A = [\mu_j] \quad ou \quad [Y_j; \mu_j], \quad j = 0, 1, ..., m-1 \tag{3.44}$$

où

$$Y_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} P(-1) + b_{ik} P(1) + c_{ik} P(0)] \, (\Pi^t)^k$$
$$\equiv [y_{j0} \quad y_{j1} \ ... \quad y_{jN}]$$

Pour obtenir la solution de Eq (3.43) avec les conditions (3.44), en remplaçant les matrices de lignes (3.44) par les m dernièrres lignes de la matrice (3.42) nous avons la nouvelle matrice

$$\left[\widetilde{W}; \widetilde{F}\right] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & f(x_{N-m}) \\ y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0N} & ; & \mu_0 \\ y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ y_{m-1,0} & y_{m-1,1} & \cdots & y_{m-1,N} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Si $rang\widetilde{W} = rang\left[\widetilde{W};\widetilde{F}\right] = N+1$, alors on peut écrire

$$A = (\widetilde{W})^{-1}\widetilde{F}$$

Ainsi les coefficients $a_n; (n = 0, 1, ..., N)$ sont uniquement déterminés par Eq. (3.45) .

3.2.3 Estimation d'erreurs

Soit $E_N(x)$ est la fonction d'erreur qui provient la solution de la série de Taylor ou polynôme de Legendre dans (3.3) et (3.23) respectivement.

$$\begin{aligned} E_N : \quad & [a,b] \to \mathbb{R} \\ E_N(x) = & \sum_{k=0}^{m} P_k(x)u_N^{(k)}(x) - f(x) - \lambda I(x), \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

Les erreurs de calcul sont minimales, si $E_N(x)$ est équivalente à la fonction nulle sur les noeuds x_0, x_1, ..., x_N.

$$E(x_i) = |D(x_i) - f(x_i) - \lambda I(x_i)| \approx 0$$

Pour trouver les erreurs sur les noeuds de l'intervalle donnée, on écrit :

$$E_N(x) = |u(x) - u_N(x)|$$

Avec $u(x)$ est la solution exacte et $u_N(x)$: est le polynôme de la solution approchée ; polynôme de (Taylor ou Legendre).

3.3 Exemples numériques

1- La méthode de collocation de Taylor

Exemple 3.1

Considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} u'' + xu' - xu = e^x - 2\sin x + \int_{-1}^{1} \sin x \; e^{-t} \; u(t)dt \\ u(0) = 1 \quad , \quad u'(0) = 1 \end{cases}, -1 \leqslant x, t \leqslant 1$$

où $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $\lambda = 1$, $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = -x$, $f(x) = \exp(x-2)\sin x$, $K(x,t) = \sin x \; \exp(-t)$.

Pour $N = 5$, la solution approchée par le polynôme de Taylor s'écrit

$$u(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ensuite, la matrice Eq (3.14) écrit sous forme

$$\left(P_2 C \; M_2 + P_1 C \; M_1 + P_0 C \; M_0 - C \; K \; H \; M_0\right) A = F$$

où $P_0, P_1, P_2, H, C, K, M_0, M_1, M_2$ sont des matrices d'ordre (6×6) définies par

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{5} & (-\frac{3}{5})^2 & (-\frac{3}{5})^3 & (-\frac{3}{5})^4 & (-\frac{3}{5})^5 \\ 1 & -\frac{1}{5} & (-\frac{1}{5})^2 & (-\frac{1}{5})^3 & (-\frac{1}{5})^4 & (-\frac{1}{5})^5 \\ 1 & \frac{1}{5} & (\frac{1}{5})^2 & (\frac{1}{5})^3 & (\frac{1}{5})^4 & (\frac{1}{5})^5 \\ 1 & \frac{3}{5} & (\frac{3}{5})^2 & (\frac{3}{5})^3 & (\frac{3}{5})^4 & (\frac{3}{5})^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2!} & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & -\frac{1}{5!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3!} & \frac{1}{3!} & -\frac{1}{3!2!} & \frac{1}{3!3!} & -\frac{1}{3!4!} & \frac{1}{3!5!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5!} & -\frac{1}{5!} & \frac{1}{5!2!} & -\frac{1}{5!3!} & \frac{1}{5!4!} & -\frac{1}{5!5!} \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!} \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les formes matricielles pour $N = 5$ sont

$$[1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0; \;\; 1]$$
$$[0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0; \;\; 1]$$

Pour $N = 5$, on obtient la solution approchée donnée par

$$u(x) = 1 + x + 0.500343x^2 + 0.166886x^3 + 0.0403378x^4 + 0.005577493x^5$$

x_i	solution exacte $u(x)$	solution approchée $u_N(x)$	erreur=$\|u - u_N\|$
-1	0.3678	0.3680	1.4×10^{-4}
-0.8	0.4493	0.4494	7.5×10^{-5}
-0.6	0.5488	0.5488	4.3×10^{-5}
-0.4	0.6703	0.6703	2.7×10^{-5}
-0.2	0.8187	0.8187	1.1×10^{-5}
0	1.0000	1.0000	0.0×10^{-5}
0.2	1.2214	1.2214	1.3×10^{-5}
0.4	1.4918	1.4918	3.0×10^{-6}
0.6	1.8221	1.8218	2.7×10^{-4}
0.8	2.2255	2.2240	1.5×10^{-3}
1	2.7182	2.7133	4.9×10^{-3}

Table 3.1 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3.1 pour $N = 5$

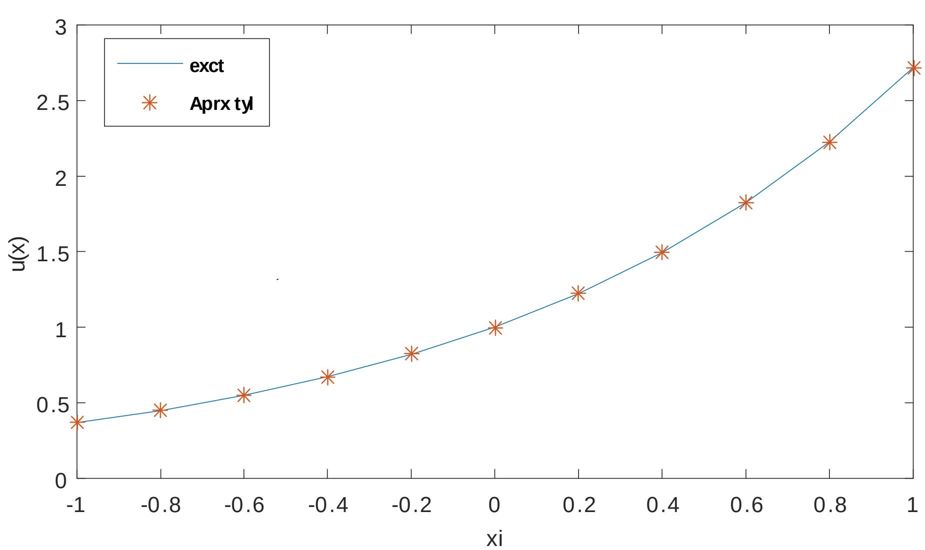

FIG. 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 3.1 pour $N = 5$

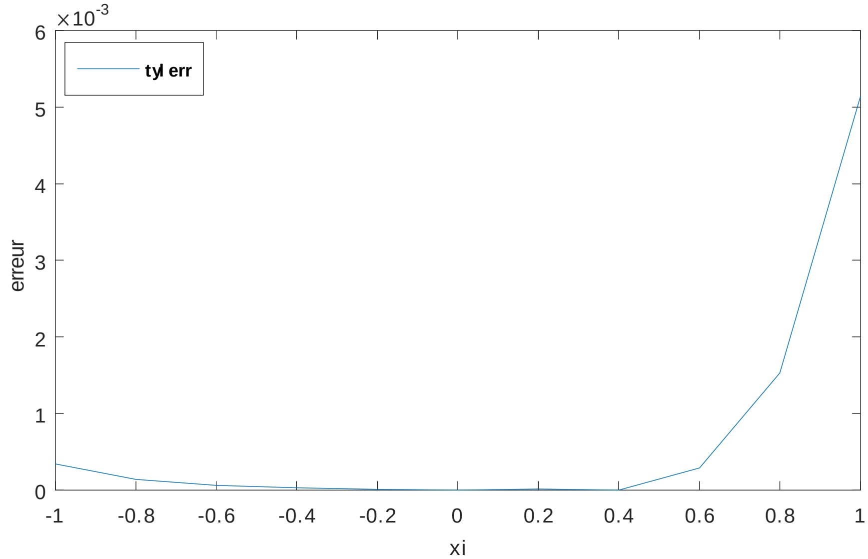

FIG. 3.2 – L'erreur absolu de la méthode de polynôme de Taylor pour l'exemple 3.1

Exemple 3.2

Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = \int_0^1 e^{tx} u(t)dt + u(x) + u(x) + \frac{1-e^{x+1}}{x+1} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte de cet équation est $u(x) = e^x$.

Nous trouvons la solution de notre problème pour $N = 4$ en utilisant la même méthode, comme suit :

$$u(x) = 1 + 0.98x + 0.485x^2 + 0.16x^3 + 0.04x^4$$

x_i	solution exacte $u(x)$	solution approchée $u_N(x)$	erreur $=\|u - u_N\|$
0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	1.2214	1.2167	0.0047
0.4	1.4918	1.4809	0.0110
0.6	1.8221	1.8023	0.0198
0.8	2.2255	2.1927	0.0328
1	2.7183	2.6650	0.0533

Table 3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3.2 pour $N = 4$

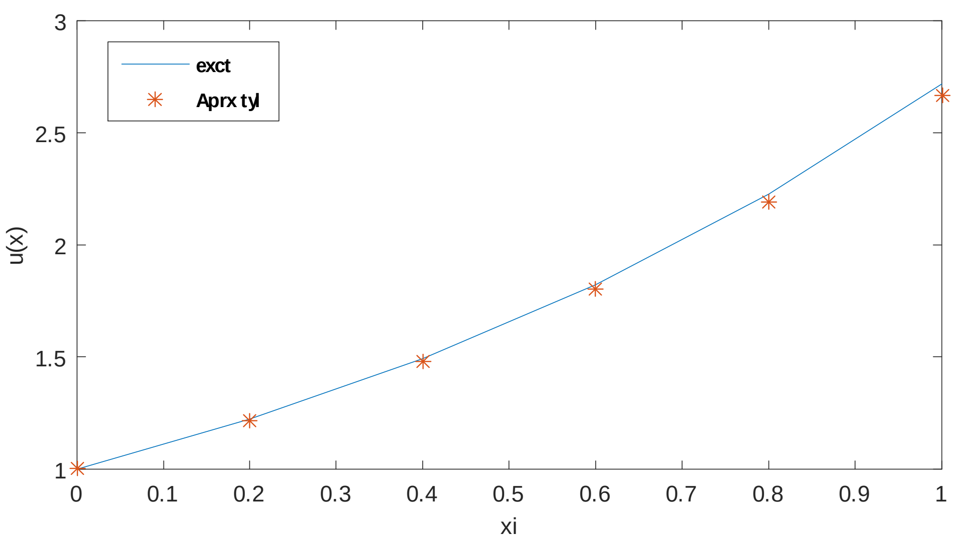

FIG. 3.3 – Comparison entre la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 3.2 pour $N = 4$.

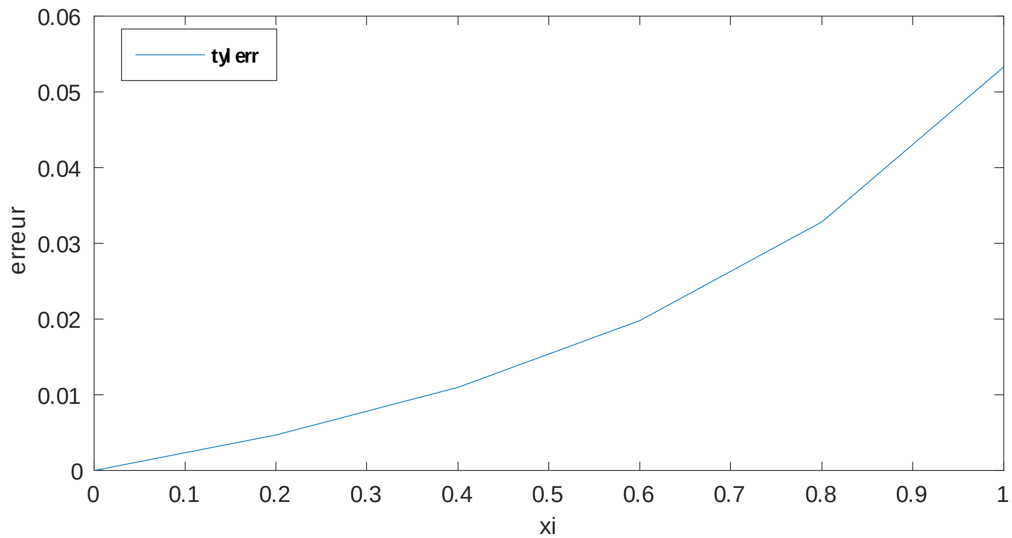

FIG. 3.4 – L'erreur absolu de la méthode de polynôme de Taylor pour l'exemple 3.

2- La méthode de polynôme de Legendre

Exemple 3.3

Soit l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} u'' + xu' - xu = -3x^2 + 6x + \int_{-1}^{1} xu(t)dt \\ u(0) = 7, u'(0) = -4 \end{cases}$$

telles que

$G_0(x) = -x$, $G_1(x) = x$, $G_2(x) = 1$, $f(x) = -3x^2 + 6x$, $\lambda = 1$ et $K(x,t) = x$.

L'approximation de la solution $u(x)$ par le polynôme de Legendre écrit sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x) \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

pour $(N = 3)$ les points de collocation sont

$$x_i = -1 + i\frac{2}{N} = -1 + i\frac{2}{3}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

on obtient

$$\left\{\sum_{k=0}^{2} G_k P\ (\Pi^t)^k - \lambda K_l\ Q\right\} A = F$$

telle que

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ \frac{199}{27} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{23}{3} \end{bmatrix}$$

la matrice obtenue est

$$G_0 P(\Pi^t)^0 + G_1 P(\Pi^t)^1 + G_2 P(\Pi^t)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

les matrices K_t et Q sont

$$K_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

K_l est définie par

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \lambda P \ K_l \ Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la formule

$$G_0 P(\Pi^t)^0 + G_1 P(\Pi^t)^1 + G_2 P(\Pi^t)^2 - \lambda P \ K_l \ Q = W$$

La matrice W est

$$W = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -1 & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -3 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

Pour les conditions $u(0) = -1, u'(0) = 3$ on obtient les matrices

$$Y_0 = [1\ 0\ 0\ 0\ ; -1] \text{ et } Y_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ ; 3]$$

$$F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\widetilde{W}$ et $\widetilde{G}$ peuvent s'écrire

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{G} = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice A est

$$A = \left[\widetilde{W}\right]^{-1} G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{188}{1555} & \frac{891}{1555} & -\frac{327}{1555} & \frac{4}{311} \\ -\frac{261}{3110} & \frac{567}{3110} & \frac{108}{1555} & -\frac{27}{311} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour $(N = 3)$, la solution approchée est :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) \\ &= (-1).1 + 3.x + 0 + 0 = -1 + 3x. \end{aligned}$$

x_i	solution exacte	solution approchée
-1	-4.0000	-4.000
-0.8	-3.4000	-3.4000
-0.6	-2.8000	-2.8000
-0.4	-2.8000	-2.8000
-0.2	-1.6000	-1.6000
0	-1.0000	-1.0000
0.2	-0.4000	-0.4000
0.4	0.2000	0.2000
0.6	0.8000	0.8000
0.8	1.4000	1.4000
1	2.0000	2.0000

Table3.3 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3.3 pour $N = 3$

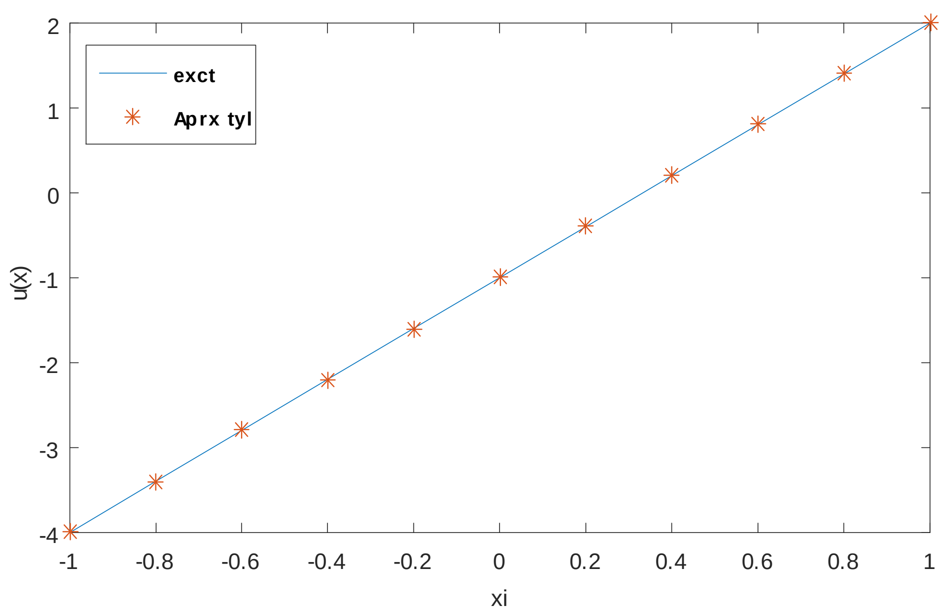

FIG. 3.5 – Comparison entre la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 3.3 pour $N = 3$.

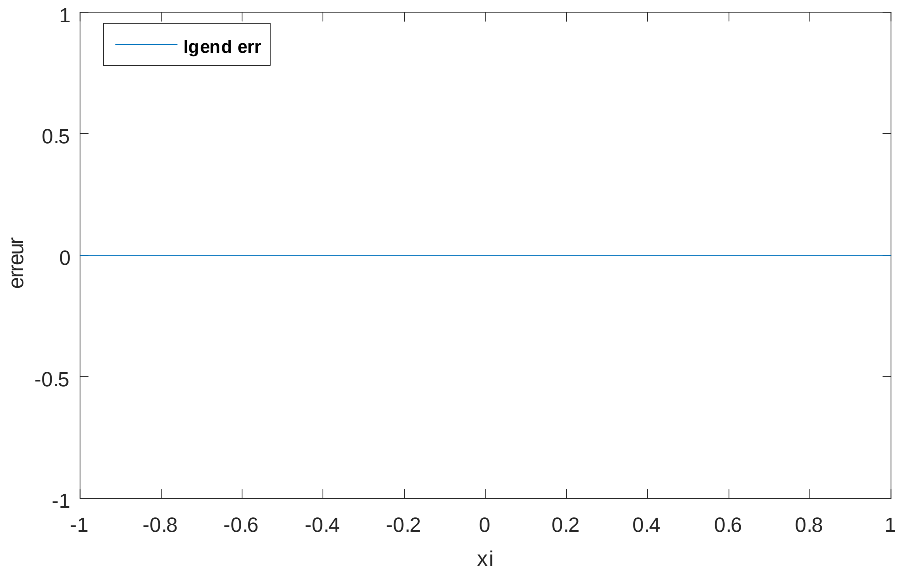

FIG. 3.6 – L'erreur absolu de la méthode de polynôme de Legendre pour l'exemple 3.3

Exemple 3.4

Considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} u'' + xu' - xu = e^x - 2\sin(x) + \int_{-1}^{1} \sin(x)e^{-t}u(t)dt \\ u(0) = 1, u'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte de cet équation est : $u(x) = e^x$.

Telles que

$G_0(x) = -x,\ G_1(x) = x, G_2(x) = 1,\ f(x) = e^x - 2\sin(x),\ \lambda = 1$ et $K(x,t) = \sin(x)e^{-t}$.

L'approximation de la solution $u(x)$ par le polynôme de Legendre est sous la forme

$$u(x) = 1 + x + 0.500343x^2 + 0.166886x^3 + 0.0403378x^4 + 0.005577493x^5$$

x_i	solution exacte	solution approchée	erreur=$\lvert u - u_N \rvert$
-1	0.3679	0.3678	0.7944×10^{-4}
-0.8	0.4493	0.4493	0.2896×10^{-4}
-0.6	0.5488	0.5488	0.1164×10^{-4}
-0.4	0.6703	0.6703	0.2005×10^{-4}
-0.2	0.8187	0.8187	0.3075×10^{-4}
0	1.0000	1.0000	0×10^{-4}
0.2	1.2214	1.2214	0.0276×10^{-4}
0.4	1.4918	1.4918	0.2470×10^{-4}
0.6	1.8221	1.8221	0.1880×10^{-4}
0.8	2.2255	2.2255	0.4093×10^{-4}
1	2.7183	2.7182	0.8183×10^{-4}

Table3.4 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3.4 pour $N = 8$

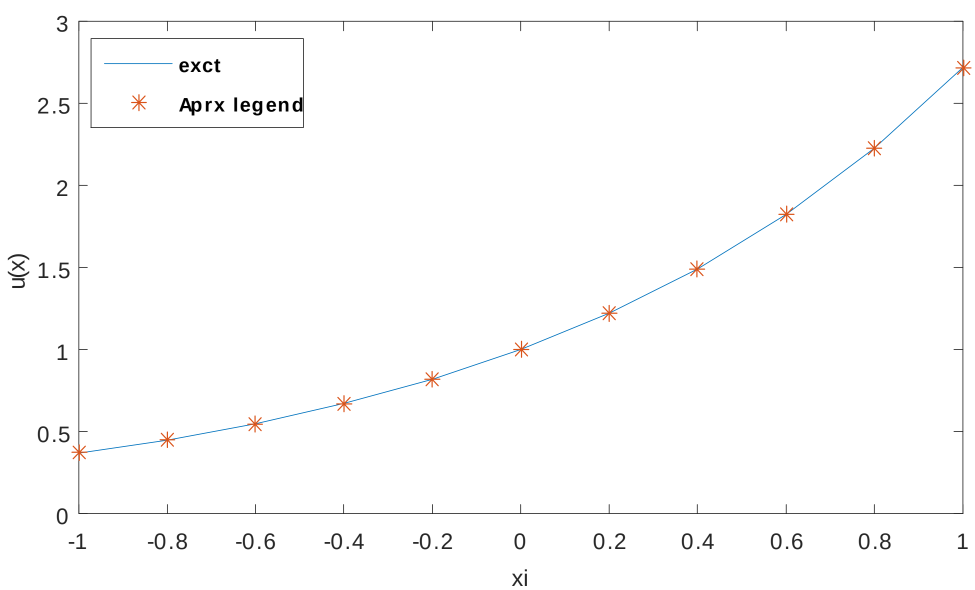

FIG. 3.7 – Comparison entre la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 3.4 pour $N = 8$.

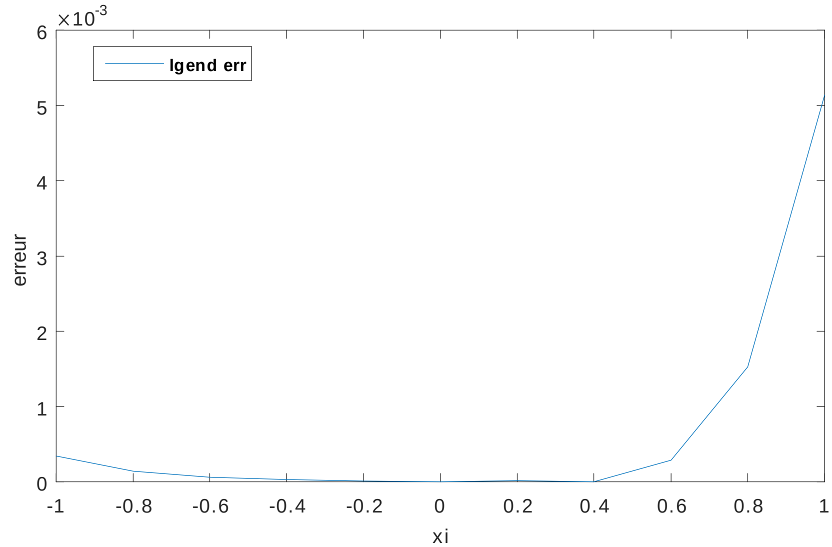

FIG. 3.8 – L'erreur absolu de la méthode de polynôme de Legendre pour l'exemple 3.4

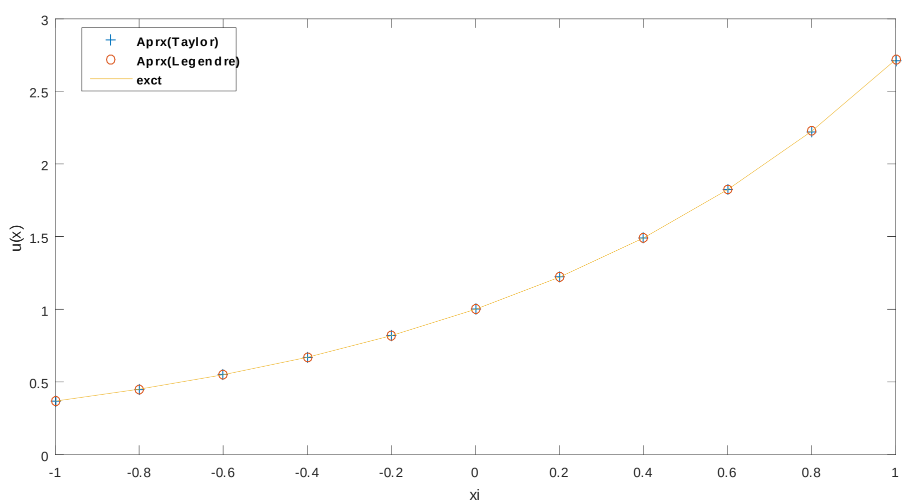

FIG. 3.9 – Comparaison entre les solutions approchées par les deux méthodes (polynôme Taylor et polynôme Legendre) de l'exemple 1.1.

Conclusion

Notre but est de faire une résolution numérique des équations intégro-différentielle de type de Fredholm. En particulier, on a étudé les équations intégro-différentielles (E.I-D) de Fredholm linéaire. De plus, on a consacré aux méthodes exactes de résolutions des (E.I-D) de Fredholm dont les équations qui impliquent des noyaux séparables (la méthode de calcul directe et la méthode de décomposition Adomian).

On a appliqué la méthode de collocation où on a trouvé la solution sous forme de polynôme de Taylor, ainsi que polynôme de Legendre. On peut appliquer cette dernière pour les équations différentielles et aussi pour les équations intégrales si la partie différentielle est nulle.

On a illustré à la fin de notre mémoire des exemples en utilisant la programmation par logiciel de calcul numérique (MATLAB) où on a estimé les erreurs pour les deux méthodes de comparer les solutions approchées avec les solutions exactes.

Bibliographie

[1] A. R. Vahidi, E. Babolian, Gh. Asadi Cordshooli et Z. Azimzadeh, Numerical Solution of Fredholm Integro-Differential Equation by Adomian's Decomposition, Int. Journal of Math. Analysis, vol. 3, no. 36, pp $1769 - 1773$, 2009.

[2] Abdul-Majid Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications, Saint Xavier University Chicago, 2011

[3] A. Karamete et M. Sezer, A Taylor Collocation Method for the solution of Linear Integro-Differential Equation, International Journal of Computer Mathmatics, vol. 79(9), pp $987 - 1000$, 2002.

[4] Nurcan Kurt et Mehmet Sezer, Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, Journal of the Franklin Institute, vol. 345, pp $839 - 850$, 2008.

[5] Khulood Nedal Iseed Thaher, Linear Fredholm Integro-Differential Equation of the second kind, An-Najah National University, Nabuls, Palestine, (Thèse de Doctorat), 2016.

[6] Miloud Moussai, Résolution des équations intégro-défférentielles (Thèse de Doctorat), 2018.

[7] S.M. Hosseini et S. Shahmorad, Numerical solution of a class of Integro-Differential equations by the Tau Method with an error estimation, Applied Mathematics and Computation 136 pp $559 - 570$, 2003.

[8] Tadeusz Dłotko, Sur certaines équations integro-differentielles du n-ieme ordre, Prace Naukowe Uniwersytetu SlAskiego w Katowicach. Prace Matematyczne, No 1, pp 103–107, 1969.

[9] M. Amirfakhriana et K. Shakibia, Solving Integro-Differential Equation by Using B-Spline Interpolation, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, Vol. 03, No. 03, pp 237 – 244, 2013.

[10] Ekaterina Voltchkova, Equations intégro-différentielles d'évolution :méthodes numériques et applications en finance, (Thèse de Doctorat), 2005.