République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par :

AMMARI Assia

Titre :

Espace de Sobolev en dimension $N > 1$

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**REZKI Ibrahim**	UMKB	Président
Dr.	**HASSOUNA Houda**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LAADJAL Baya**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère.

À mon cher père qui m'ont toujours soutenu.

À mes chères sœurs.

À tous mes distingués professeurs, sans exception pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

À mon meilleur ami.

À tous ce qui mon amie et à tous ce qui ma donne l'aide et l'encouragement de prés ou de loin.

REMERCIEMENTS

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,*

j'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à ma superviseure

Dr. HASSOUNA Houda, *pour ces conseils, et son encouragement*

durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques.

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Dr.REZKI Ibrahim *d'avoir accepté la présidence du jury.*

Dr. LAADJAL Baya *d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.*

Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail.

*Mes remerciements vont aussi le Professeur **SOUKEUR Abdesselam**.*

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques

qui ont contribué à ma formation.

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail

Assia

Table des matières

Introduction

Les espaces de Sobolev portent le nom du savant Sergueï Lvovitch Sobolev qui est un mathématicien et un physicien atomique russe de l'époque Soviétique (né le 06 octobre 1908 et décédé le 03 janvier 1989).

Au cours des années 30, Sobolev a introduit des notions qui sont fondamentales dans le développement de plusieurs domaines des mathématiques. Tout en travaillant à Moscou, Sobolev a construit la méthode standard pour résoudre les problèmes elliptiques avec conditions aux limites en introduisant ses espaces fonctionnels. Il a donné les inégalités sur les normes relatives à ces espaces qui étaient importants dans la théorie de l'intégration des espaces fonctionnels, il a de plus appliqué ses méthodes pour résoudre les problèmes difficiles de la physique mathématique.

En 1939, Sobolev a été élu membre à part entière de l'académie des sciences d'URSS.

Il n'avait que 31 ans au moment de son élection qui a été une réalisation remarquable et a fait de lui le plus jeune membre.

Sobolev a reçu de nombreux honneurs pour ses contributions fondamentales aux mathématiques. Il a été élu à de nombreuses sociétés scientifiques, y compris l'académie des sciences d'URSS, l'académie des Sciences de France et l'académie nationale dei Lincei.

Il a reçu de nombreux prix, dont trois prix d'état et la médaille d'or 1988 Lomonosov de l'académie des sciences d'URSS. Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels modelés pour la plupart à partir des espaces de Lebesgue et munis des normes combinant celle de la fonction en question et de celles des dérivées faibles jusqu'à un certain ordre. Les espaces de Sobolev sont les espaces les plus importants utilisés pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Cela la caractérise par de meilleures propriétés pour exprimer la solution et ses avantages.

Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées su¢ samment de fois (pour donner un sens par exemple à une équation aux dérivées partielles) et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction, ce qui fait d'eux des outils très importants et très adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles.

En effet, les solutions d'équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions dérivables dont les dérivées sont comprises dans un sens classique.

L'objectif de cette recherche est de donner un aperçu de l'espace Sobolev. Dans notre modeste travail, nous donnons dans le premier chapitre contient des définitions et des concepts élémentaires tels que (les espaces L^p ; les espaces réflexifs,les espaces séparables et.......). Le deuxième chapitre est le principal dans ce travail qui est espace de Sobolev en dimension $N > 1$; on présente les principaux résultats concernant les espaces de Sobolev, on commence par définir formellement les espaces de Sobolev, on définit les espaces $W^{1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$, et on donne les proprietiés de chaque espace avec bien sûr des théorèmes ,propositions et résultats liés à chacun.

Chapitre 1

Rappels et préliminaire

Pour bien comprendre ce que sont les espaces de Sobolev, il est important d'être familié avec la théorie des distributions et rappels sur les espaces L^p ; les espaces réflexifs, les espaces séparables et les espaces de Hilbert.

Notons Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1 Définitions généralités

1.1.1 Fonction mesurable

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha = \{x \in \Omega \ \ / f(x) \geqslant \alpha\}$ est mesurable au sens de Lebesgue.

1.1.2 Fonction intégrable

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si

$$\int_\Omega |f| < \infty$$

1.1.3 Espace de Lebesgue

Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$.On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \ - \ \text{mesurable et } \ |f|^p \ \text{ intégrable.} \left(|f|^p \in L^1(\Omega) \right) \right\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

Proposition 1.1.1 *(Exposant conjugué)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

p, q des exposants conjugués $p, q > 1$

$$p + q = pq \ \text{ et } \frac{p}{q} = p - 1$$

Proposition 1.1.2 *(Inégalité de Young)*

Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué. Alors pour tout $a, b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Proposition 1.1.3 *(Inégalité de Hölder)*

soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonction mesurable et $p, q > 1$ deux nombres réels tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors on a :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{1.2}$$

Théorème 1.1.1 *(Convergence Dominée)*

Soit $(f_v)_{v\geq 1}$une suite de fonctions mesurables telles que $|f_v| \leq g$ p.p, où g est une fonction intégrable. Supposons de plus que $\lim\limits_{v\to\infty} f_v(x) = f(x)$ p.p.

Alors f est intégrable et

$$\lim_{v\to\infty} \int f_v(x) = \int f(x)$$

Théorème 1.1.2 *L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Définition 1.1.1 *(Espace de Banach)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|.\|$. On dit que E est un espace de Banach si E est complet.

Définition 1.1.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$*

On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si :

$$f 1_K \in L^p(\Omega) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega$$

Définition 1.1.3 *(Support d'une fonction continue)*

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, le support de f ; et on note $supp(f)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N})$ définie par :

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Remarque 1.1.1 *Il est important de mettre en évidence l'existence de fonctions numériques, non identiquement nulles, indéfiniment dérivables, de support compact. (c'est-à-dire : $\exists$ un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$ sur Ω/K).*

Proposition 1.1.4 *on a les propriétés du support*

Soit f et $g \in C(\Omega)$

1) $f = 0 \iff \text{supp} f = \varnothing$

2) $\text{supp}(f.g) \subset \text{supp} f \cap \text{supp} g$

3) $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp} f \cup \text{supp} g$

4) $\text{supp} \frac{\partial f}{\partial x_i} \subset \text{supp} f, \quad i = 1, ..., n,$ si $f \in C^1(\Omega)$

Définition 1.1.4 *(L'espace $C_c(\Omega)$)*

On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire

$$C_c(\Omega) = \{f : supp(f) \subset \Omega\}$$

Théorème 1.1.3 *(Théorème de densité)*

Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$; c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon$.

Remarque 1.1.2 *Le théorème ci-dessus n'est pas vrai si $p = \infty$.*

En effet, si $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ converge vers une fonction f dans $L^\infty(\Omega)$, alors f est continue. En effet,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

et donc f_ε converge uniformément vers f, ce qui nous assure la continuité de f. Ainsi une fonction dans L^∞ discontinue sur un ensemble de mesure non nul ne possède aucune suite $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ convergente vers f dans L^∞.

Définition 1.1.5 *(Forme linéaire)*

Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$.

Définition 1.1.6 *(Continuité d'une forme linéaire)*

Une forme linéaire f dans E est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ une constante telle que$\|f\|_E \leq C$.

1.2 Espaces réflexifs- espaces séparables

1.2.1 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'', où E'' est le dual du dual de E . On dit que E est reflexif si J est surjective, c'est-à-dir

$$J(E) = E''$$

- Si E est un espace réflexif $\Longrightarrow$ E est un espace de Banach.
- Si E est un espace de Banach $\Longrightarrow$ [E réflexif $\Longleftrightarrow$ E''est réflexif .]. preuve [2]
- L'espace L^1 n'est pas réflexif.
- L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.2.2 Espaces séparables

Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble $D \subset E$ dense et dénombrable.

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace de Banach séparable $\Rightarrow$toute suite bornée $(fn)_{n\geq 1}$ dans $E\prime$admet au moins une sous-suite faiblement convergente*

Théorème 1.2.2 *On a les propriétés suivantes :*

1. Soit E un espace de Banach, si $E\prime$ est séparable $\implies$ E est séparable. La réciproque est en général fausse.
2. Soit E un espace de Banach $\implies$ $[E$ est réflexif et séparable $\iff$ E''est réflexif et séparable$]$.
3. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$
4. L'espace L^∞ n'est pas séparable.

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3.1 *Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé espace de Hilbert.*

Proposition 1.3.1 *Soit H un espace vectoriel réel. Un produit scalaire noté $\langle , \rangle$ où $(x;y)$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.*

symétrique [c'est-à-dire : $\forall (x;y) \in H \times H,\ \ (x,y) = (y,x)$],

définie positive [c'est-à-dire : $(x;y) \geq 0\ \forall x \in H$ et $(x;x) > 0$ si $x \neq 0$]

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \qquad \forall (x,y) \in H \times H \tag{1.3}$$

Remarque 1.3.1 *En considérant que l'"établissement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on n'utilise pas l'hypothèse* $(x;x) > 0$ *si* $x \neq 0$.

Revenant sur le point que $|x| = \sqrt{(x,x)}$ est une norme sur H

$\left[\text{En effet } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x;y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|\right]$

Remarque 1.3.2 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime la continuité du produit scalaire.*

1.3.1 Identité du parallélogramme

Proposition 1.3.2 *Soit* H *un espace préhilbertien réel.*

Alors on a

– L'identité du parallélogramme

$$\forall (x;y) \in H \times H, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

– L'identité de la médiane

$$\forall (x;y,z) \in H \times H \times H, \qquad \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\left\|x - \frac{1}{2}(y+z)\right\|^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|$$

Les deux identités sont équivalentes.

1.3.2 Identité de polarisation

Proposition 1.3.3 *Soit* H *un espace préhilbertien*

si H est réel, alors on a

L'identité de polarisation

$$\forall(x;y) \in H \times H, (x \ / \ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] \tag{1.4}$$

Proposition 1.3.4 *Les espaces de Hilbert sont des espace de Banach dont la norme dérive d'un produit scalaire.*

1.4 Les fonctions convexes

Définition 1.4.1 *(Ensemble convexe)*

Un ensemble $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est dit convexe si

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \forall\lambda \in [0,1] : [\lambda x + (1-\lambda)y] \in \Omega$$

Définition 1.4.2 *(Fonction convexe)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$un ouvert convexe. Une Fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout x, y dans Ω avec $f(x) < +\infty, f(y) < +\infty$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f\,[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f\,(x) + (1-\lambda)f\,(y)$$

Définition 1.4.3 *(Fonction strictement convexe)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$un ouvert convexe. Une Fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ strictement convexe si pour tout $x, y \in \Omega, x \neq y$ et tout $\lambda \in [0,1]$, elle vérifie

$$f\,[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda f\,(x) + (1-\lambda)f\,(y)$$

Définition 1.4.4 *(Caractérisation des fonctions convexes)*

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, f \in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $\langle .;. \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1) La fonction f est convexe.

2) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y); x - y \rangle .$$

3) Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^N$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0$$

Si $f \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors on a de plus

4) Pour tout $x, v \in \mathbb{R}^N$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left\langle \nabla^2 f(x) v; v \right\rangle \geq 0$$

1.5 Définitions et dérivées au sens des distributions

1.5.1 Espace des fonctions test D

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$; on appelle espace des fonctions test et on note $D(\Omega)$ l'ensemble :

$$D(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \mid \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

Exemple 1.5.1 *La fonction* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{x^2} \text{ si } x > 1 \\ 0 \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$

est de classe C^∞ ? ? ? ?

Exemple 1.5.2 *La fonction* $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{1-x^2} \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$\varphi \in D(\mathbb{R})$.

1.5.2 Espace des distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $D(\Omega)$.

L'espace de toutes les distributions définies sur Ω est noté $D'(\Omega)$ ou simplement D'.

$$T : D \rightarrow \Omega$$

$$\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$$

– Linéarité :

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

$$\langle T, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

– continuité :

$$\text{si } \varphi_n \to \varphi, n \to \infty \qquad (\text{dans } D)$$
$$\text{La suit } \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \,, \, n \to \infty$$

1.5.3 Distribution régulière

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, f un élément de $L^1_{loc}(\Omega)$. La distribution :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

est appelée distribution régulière associée à la fonction f.

(Les distributions qui sont définie par des fonctions localement intégrables sont appelées distributions régulières).

Exemple 1.5.3 $f(x) = \cos x \in L_{loc}(\mathbb{R})$

donc elle définit une distribution : $\langle \cos x, \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cos x \ \varphi(x)dx \qquad \forall (x, \varphi) \in D$

Proposition 1.5.1 *Les distribution forment une espace vectoriel que l'on note D*$\prime$ *(espace dual de D) .*

1.5.4 Dérivation des distributions

Définition de la dérivation

On va définir une dérivation qui rendra toute distribution indéfiniment dérivable ; qui coïncidera de plus, par isomorphisme, à la dérivée des fonctions de classe C^1 et C^∞. Ceci permettra, entre-autres, de dériver les éléments de $L^1_{loc}(\Omega)$. Comme on cherche à étendre la dérivée des éléments de $C^1(\Omega)$, on considère un exemple en dimension un.

Soit :

$$\Omega =]a,b[\,, f \in C^1(\Omega), \forall \varphi \in D(\Omega) : \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$\Longrightarrow \left\langle f', \varphi \right\rangle = \left\langle -f, \varphi' \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \left\langle f', \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \varphi' \right\rangle \text{ quelque soit } \varphi \in D(\Omega) \qquad (*)$$

On s'inspire de l'égalité $(*)$ pour définir la dérivée d'une distribution : [3] .

Définition 1.5.1 *Soient* $f; g \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et pour tout* $\alpha = (\alpha_{1,\ldots\ldots,}\alpha_N)$ $\left[\textit{c'est-à-dire : } \forall\alpha \in \mathbb{N}^N\right]$ *avec* $\alpha_i \geq 0$ *entier ; on pose* $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i = \alpha_{1+\ldots\ldots+}\alpha_N$

On appelle dérivée d'ordre α de f et on note $\partial^\alpha f$ l'application :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$$

1.6 L'espace de Sobolev en dimension 1

1.6.1 Définitions et propriétés élémentaires et exemple

Soit $a < b$ et $I =]a,b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ (pas forcément borné) et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.6.1 *(Espaces de Sobolev* $(W^{1,p}(I))$*)*

On dit que$W^{1,p}(I)$ est un espace de Sobolev si :

$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I) \right\}$

posons $H^1(I) = W^{1,2}(I)$

pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$.

Exemple 1.6.1 *Soit* $I =]-1, +1[$. *Vérifier à titre d'exercice que :*

La fonction $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que $u' = H$ où

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.6.1 *On a les trois propositions suivantes :*

Pour tout $p \in [1, \infty]$, L'espace$W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach.

Pour tout $p \in]1, \infty[$, L'espace$W^{1,p}(I)$ est réflexif.

Pour tout $p \in [1, \infty[$, L'espace$W^{1,p}(I)$ est séparable.

Théorème 1.6.1 *(Théorème opérateur de prolongement et de densité)*

Définition 1.6.2 *(Théorème opérateur de prolongement)*

Soit $p \in [1, \infty]$. Il existe un opérateur de prolongement, $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ linéaire et continue tel que :

i) $Pu_{\setminus I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$

ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

(Où C dépend seulement de $|I| \leq \infty$).

Définition 1.6.3 *(Théorème de densité)*

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $p \in [1, \infty[$

Alors il existe une suite (U_n) dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_{n_{\backslash I}} \to u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Remarque 1.6.1 *C_c^∞ n'est pas dense dans $W^{1,p}(I)$ sauf si $I = \mathbb{R}$*

Définition 1.6.4 *(Espaces de Sobolev $(W^{m,p}(I))$).*

Soient $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$ et $p \in [1, \infty]$

On définit par récurrence l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}$$

on pose :

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

On vérifie facilement que $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'il existe m fonctions $g_1, ..., g_m \in L^p(I)$, telles que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, ..., m.$$

où $D^j \varphi$ désigne la $j^{éme}$ dérivée de φ.

Lorsque $u \in W^{m,p}(I)$ on peut donc considérer les dérivées successives : $u' = g_1$, $(u')' = g_2$, ...jusqu'à l'order m.

On les note $Du, D^2u, ..., D^m u$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|$$

Et l'espace H^m est muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m}(D^\alpha u, D^\alpha v)$$

Remarque 1.6.2 *La norme* $\|.\|_{W^{m,p}}$ *est équivalente à la norme* $\|u\| = \|u\|_{L^p} + \|D^\alpha u\|_{L^p}$.

1.6.2 Espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.6.5 *Soit* p *un réel,*$p \in [1,\infty[$.

On désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_0^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$.

On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$.

L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est aussi réflexif pour $p \in]1,\infty[$.

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 1.6.3 *Si* $I = \mathbb{R}^N$

On sait que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$; (D'après théorème de la densité) et par conséquent :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$$

Remarque 1.6.4 *En utilisant une suite régularisante* (ρ_n) *on vérifie facilement que :*

i) $C_c^\infty(I)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) Si $u \in W_0^{1,p}(I) \cap C_c(I)$ alors $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Proposition 1.6.2 *(Inégalité de Poincaré)*

Si I est borné alors il existe une constante C (dépendant de $|I|$) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

Autrement dit :

Sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}$

Chapitre 2

Espace de Sobolev en dimension $N > 1$

Après avoir rappelé quelques notions et concepts fondamentales de certains définitons et propriétés de l'espace L^p et distribution, aussi sur l'espace de Sobolev en dimension 1, On va aborder dans ce chapitre au l'espace de Sobolev en dimension $N > 1$.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1 *(Espaces de Sobolev d'ordre 1 ($W^{1,p}(\Omega)$))*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Sobolev et on note espace de Sobolev d'ordre 1 si :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, g_3, \ldots.., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \qquad \forall i,\ 1 \leq i \leq N \end{array} \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

Ou parfois de la norme équivalente $\left[\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{p}}$ si $1 \leq p < \infty$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, On note $\nabla u = g_i$ et $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ =gradient de u

si $p = 2$; alors on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Remarque 2.1.1 *Comme d'habitude, dans le cas où* $p = 2$ *on utilise la notation* $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ *et on définit sur l'espace* $H^1(\Omega)$ *le produit scalaire :*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left[\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Remarque 2.1.2 *En d'autre terme* $W^{1,p}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ *dont les dérivées partielles* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *prises au sens faible, sont dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $i = 1, ..., n$.

Remarque 2.1.3 *On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque.*

Si $k > 0$ est un entier, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dont les dérivées partielles prises au sens faible $D^{\alpha}u$ sont dans $L^{p}(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{n}$ vérifiant $|\alpha| \leq k$

Propriété 2.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{N}$ un ouvert, $p \in [1, \infty[$ et $k \geq 1$.*

1) $W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{k,p}}$ est un espace de Banach, séparable si $p \in [1, \infty[$ et réflexif si $p \in]1, \infty[$.

2) $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle u; v\rangle_{W^{1,2}} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x); \nabla v(x)\rangle \, dx.$$

Théorème 2.1.1 *Pour tout $p \in [1, \infty]$, pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^{N}$ on a les propriétés suivantes :*

1. L 'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$u \to \|u\| = \begin{cases} \left[\|u\|_{L^p}^{p} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \max\left[\|u\|_{L^\infty}, \ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty} \ 1 \leq i \leq N\right] \text{ si } p = \infty \end{cases}$$

2. Pour $p = 2$, $H^{1}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v) = (u \ /v) = \int_{\Omega} u\overline{v}dx + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}dx$$

3. Pour tout $p \in]1, \infty[$, L'espace$W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.

4. Pour tout $p \in [1, \infty[$, L'espace$W^{1,p}(\Omega)$ est séparable.

Preuve. La démonstration de la proposition 1

On montre facilement que l'application $\|.\|$ est une norme. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est complet pour cette norme. En effet :

soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de $W^{1,p}(\Omega)$ .Alors les suit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour tout entier i, $1\leq i\leq n$, $\left(\frac{\partial u_k}{\partial u_i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^p(\Omega)$.

Par suite, il existe $(u, v_1, ..., v_n)$ dans $L^p(\Omega)^{n+1}$, vérifiant :

$u = L^p(\Omega) - \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ et $v_i = L^p(\Omega) - \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $1\leq i\leq n$,

ce qui entraîne :$u = D'(\Omega) - \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ et $v_i = D'(\Omega) - \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $1\leq i\leq n$

Comme dans $D'(\Omega)$ la dérivée de la limite d'une suite qui converge est la limite de la suite des dérivées, on en déduit pour tout i, $1\leq i\leq n$, $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. D'où u appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, de plus $u = W^{1,p}(\Omega) - \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. ■

Notation 2.1.1 *$w \subset\subset \Omega$ signifie que w est un ouvert tel que $\overline{w} \subset \Omega$ et $\overline{w}$ est compact.*

Théorème 2.1.2 *(Friedrichs)*

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty[$. Alors il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

1) $u_{n/\Omega} \to u$ dans $L^p(\Omega)$

2) $\nabla u_{n/w} \to \nabla u_{/w}$ dans $L^p(w)^N$ pour tout $w \subset\subset \Omega$

Proposition 2.1.1 *On a les trois propositions suivantes :*

Dérivation d'un produit

Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty]$. Alors

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i},\ 1\leq i\leq N$$

Dérivation d'un produit de composition

Soit G un élément de $C^1(\mathbb{R})$; $(G \in C^1(\mathbb{R}))$ vérifiant $G(0) = 0$, de dérivée bornée $\left[\forall s \in \mathbb{R} \left|G'(s)\right| \leq M\right]$, p un réel, $p \in [1, \infty]$, alors on a :

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega),\ G \circ u \in W^{1,p}(\Omega),\ \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G^{'} \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Formule de changement de variables

Soient Ω et $\Omega^{'}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $H : \Omega^{'} \to \Omega$ une application bijective, $x = H(y)$, telle que

$$H \in C^1(\Omega^{'}), H^{-1} \in C^1(\Omega),\ jacH \in (L^\infty(\Omega^{'}))^{N\times N},\ jacH^{-1} \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$$

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$u \circ H \in W^{1,p}(\Omega^{'}) et \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \forall j,\ 1 \leq j \leq N$$

Définition 2.1.2 *(Espaces de Sobolev d'ordre m ($W^{m,p}(\Omega)$)).*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $m \geq 2$ un entier, p un réel avec $p \in [1, \infty]$; on appelle espace de Sobolev d'ordre m, et on note $W^{m,p}(\Omega)$ (resp $H^m(\Omega)$ si $p = 2$) l 'ensemble :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i, 1 \leq i \leq N \right\}$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

on note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Remarque 2.1.4 *On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

Remarque 2.1.5 *$H^m = W^{m,2}$ et les normes sur $W^{m,2}$ et sur H^m sont équivalentes .*

Proposition 2.1.2 *On a deux propositions*

1. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{m,p}} = (\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|Du\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1,\infty[\\ \|u\|_{W^{m,p}} = \max_{0\leq|\alpha|\leq\infty} \|Du\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

2. Muni de la norme précédente :

– Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'espace $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach.

– Pour tout $p \in [1,\infty[$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

– Pour tout $p \in]1,\infty[$, L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable.

Preuve. L'espace $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach, Pour tout $p \in [1,\infty]$

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace fonctionnel $W^{m,p}(\Omega)$ c'est-à-dire :$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ telle que $l,q \geq N \implies \|u_l - u_q\|_{m,p} < \varepsilon$.

Comme $\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_q\|_p \leq \|u_l - u_q\|_{m,p} \; \forall\,|\alpha| \leq m$

Alors pour tout multi-indice d'ordre inférieur où égal à m, $(D^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega).(D^\alpha u \in L^p(\Omega))$

Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet $\forall\,|\alpha| \leq m$ et de ce fait, il existe des fonctions u et u_α pour tout multi-indice α, $0 < |\alpha| \leq m$, telles que (u_k) et $(D^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers u et u_α respectivement vers dans $L^p(\Omega)$ et ceci pour tout multi-indice. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ chacune des fonctions u_k détermine une distribution $T_{u_k} \in D'(\Omega)$ ainsi, pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$

On a :

$$
\begin{aligned}
|T_{u_k}(\varphi) - T_u(\varphi)| &\leq \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\
&\leq \|\varphi(x)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_k - u\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Grâce à l'inégalité de Hölder où p' est l'exposant conjugué à p ainsi, $T_{u_k}(\varphi) \to T_u(\varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$ lorsque $k \to +\infty$.

Par un même raisonnement, $T_{D^\alpha u_k}(\varphi) \to T_{D^\alpha u}(\varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice d'ordre compris entre 0 et m. Il en découle :

$$
\begin{aligned}
T_{u_\alpha}(\varphi) &= \lim_{k\to+\infty} T_{D^\alpha u_k}(\varphi) \\
&= \lim_{k\to+\infty} (-1)^\alpha T_{u_k}(D^\alpha \varphi) \\
&= (-1)^\alpha T_u(D^\alpha \varphi) \\
&= D^\alpha(T_u)(\varphi), \text{pour toute fonction } \varphi \in D(\Omega) \text{ ainsi,}
\end{aligned}
$$

$u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice vérifiant $0 < |\alpha| \leq m$. Finalement, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est donc complet. ■

Théorème 2.1.3 *(Théorème de prolongement et de densité)*

On veut établir un théorème de densité qui nécessite d'imposer des hypothèses de "régularité" sur Ω et son bord.

Définition 2.1.3 *(Théorème de prolongement)*

On suppose que Ω est de classe C^1 avec Γ borné (ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Alors il existe un opérateur de prolongement borné

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

P linéaire et continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$), vérifiant :

(i) Si : 1_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u)1_\Omega = u$.

(ii) $\exists C > 0$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|Pu\|_{L^p_{\mathbb{R}^N}} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$

(iii) $\exists C > 0$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

L'exemple suivant montre que si l'ouvert Ω n'est pas assez régulier il est alors impossible de prolonger de façon régulière des fonctions qui sont pourtant très régulières sur Ω.

Exemple 2.1.1 *Soit Ω le rectangle $]-1,2[\times]-1,1[$ privé du segment $]0,2[\times\{0\}$. On définit la fonction u sur Ω par*

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x_1^2}) & \text{si } x_1 > 0 \text{ ,} x_2 > 0 \\ -\exp(\frac{-1}{x_1^2}) & \text{si } x_1 > 0 \text{ ,} x_2 < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $u \in C^\infty$ et que $D^\alpha u$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$.

Ceci entraîne par conséquent que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cependant, il est impossible de prolonger u en une fonction régulière sur tout $\mathbb{R}^2$.

Lorsque $\Omega = I$ est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, on a vu que

$$C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I}),\ p \in [1,\infty]$$

Définition 2.1.4 *(Théorèmes de densité)*

Soient un réel p, $p \in [1,\infty[$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

On suppose Ω de classe C^1.Alors il existe une suit (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_{n/\Omega} \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

Autrement dit les restriction à Ω des fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ forment un sous-espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.1.4 *(Théorème d'inclusion de Sobolev)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert lipschitzien.

1) Si $p \in [1, N[$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [1, p^*]$ où $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Plus précisément, pour tout $q \in [1, p^*]$ il existe $\gamma = \gamma\left(\Omega, p, q\right)$ tel que

$$\left\|u\right\|_{L^q} \leq \gamma \left\|u\right\|_{W^{1,p}} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

2) Si $p = N$ alors

$$W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \text{pour tout } q \in [1, \infty]$$

3) Si $p > N$ alors

$$W^{1,N}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})),\ \text{pour tout } \alpha \in \left[0, \frac{1-N}{p}\right]$$

Voici une généralisation du théorème de compacité dans la dimension N.

Théorème 2.1.5 *(Théorèmes de Rellich-Kondrachov.)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert lipschitzien.

1) Si $p \in [1, N[$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ est compacte, pour tout $q \in [1, p^*[$

2) Si $p = N$ alors l'inclusion de $W^{1,N}$ dans L^q est compacte, pour chaque nombre $q \in [1, \infty]$

3) Si $p > N$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}))$ est compacte, pour tout $\alpha \in \left[0, \frac{1-N}{p}\right[$

Corollaire 2.1.1 *Si Ω est lipschitzien alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

2.2 Espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.2.1 *Soient p un réel, $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$.

L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est aussi réflexif pour $p \in]1, \infty[$.

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 2.2.1 *Si $\Omega = \mathbb{R}^N$*

On sait que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; (D'après théorème de la densité) et par conséquent :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Remarque 2.2.2 *En utilisant une suite régularisante (ρ_n) on vérifie facilement que :*

i) $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) Dans la définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$ on peut utilise $C_c^\infty(\Omega)$ où $C_c^1(\Omega)$.

Lemme 2.2.1 $\left.\begin{cases} \textit{Soit } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ p \in [1,\infty[\\ \textit{avec } supp(u) \textit{ compact inclus dans } \Omega \end{cases}\right\} \Longrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Théorème 2.2.1 *Soient* $\Omega \in C^1$ *et* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *avec* $p \in [1,\infty[$

Alors :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \Longleftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Proposition 2.2.1 *Soient* $\Omega \in C^1$ *et* $u \in L^p(\Omega)$ $p \in]1,\infty[$

Les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) $\exists C$ telle que $\left|\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C \left\|\varphi\right\|_{L^{p'}}$ $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $\quad \forall i = 1, ..., N$.

iii) La fonction $\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$

appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et dans ce cas $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Corollaire 2.2.1 *(Inégalité de Poincaré)*

On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\left\|u\right\|_{L^p} \leq C(p,N) \left\|\nabla u\right\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (\ p \in [1,\infty[\ )$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla u$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^p}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$

Preuve. Pour tout v de $D(\Omega)$,

$$v(x+th) = \int\limits_a^t \langle \nabla v(x+\tau h), h \rangle \, d\tau$$

De l'inégalité de Schwarz on déduit pour $p \in \,]1, \infty[, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $|v(x+th)|^p \leq (t-a)^{\frac{p}{q}} \int\limits_a^b |\nabla u(x+\tau h)|^p \, d\tau$

$$|v(x+th)|^p \leq (t-a)^{\frac{p}{q}} \int\limits_a^b |\nabla u(x+\tau h)|^p \, d\tau$$

Soit P l'hyperplan orthogonal à h ; alors pour toute fonction f de support dans Ω, prolongée

par 0 hors de Ω, on a :

$$\int_\Omega |f(y)|^p \, dy = \int\limits_a^b \int\limits_P |f(x+\tau h)|^p \, dx d\tau$$

On en déduit :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{(b-a)^{\frac{p}{q}+1}}{1+\frac{p}{q}} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}, \quad p \in \,]1, \infty[$$

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq (b-a) \|\nabla u\|_{(L^1(\Omega))^n}, \qquad p = 1$$

■

Notation 2.2.1 *Soit h de $\mathbb{R}^N$ vérifiant $|h| = 1$, a et b réels vérifiant $-\infty < a < b < +\infty$.*

On appelle bande de $\mathbb{R}^N$ d'épaisseur $b - a$, dans la direction h, et on note :

$$Bd(h) = \{x \in \mathbb{R}^N | \qquad a < \langle x, h \rangle < b\}.$$

Corollaire 2.2.2 *Soit p un réel, $1 \leq p < \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ inclus dans une bande $Bd(h)$; alors l 'application de :*

$$W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^+, u \to \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

définit sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ une norme équivalente à celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Exemple 2.2.1 *(Problème de Dirichlet homogène)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$un ouvert borné ; on cherche une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \qquad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u,$$

et f est une fonction donnée sur Ω La condition aux limites $u = 0$ sur Γ s'appelle la condition Dirichlet (homogène) .[2]

Conclusion

En analyse mathématique, il existe de nombreux problèmes dans lesquels nous avons besoin de fonctions lisses, c'est-à-dire simultanément dérivable et intégrable, et cela est étudié dans les espaces de Sobolev, qui sont considérés comme l'un des espaces les plus importants utilisés pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Bibliographie

[1] BREZIS, Haim. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science & Business Media, 2010.

[2] FONCTIONNELLE, H. Brezis Analyse. Théorie et applications. 1983.

[3] THÉRESE, Marie et SONRIER, Lacroix. Distributions Espaces de Sobolev Applications. Ellipses, Paris, 1998.

[4] WILLEM, Michel. Principles d'analyse fonctionnelle [Principles of functional analysis]. 2007.

[5] MUNNIER, A. Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy, 2007, vol. 1, p. 2007 – 2008.

[6] DACOROGNA, Bernard. Introduction to the Calculus of Variations. World Scientific Publishing Company, 2014.

[7] DACOROGNA, Bernard. Direct methods in the calculus of variations. Springer Science & Business Media, 2007.

[8] LANDRY, Laurent et TROYANOV, Marc. Les espaces de Sobolev. 2005.

[9] Édition-cépaduès. Cour Analyse fonctionnelle et complexe 2^e édition.

[10] CHOULLI, Mourad. Analyse fonctionnelle : équations aux dérivées partielles, cours et exercices corrigés. 2013.

[11] Stanislaw Szarek. (2017/2018). Analyse convexe (cours M1) Sorbonne Université

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	:	Espace euclidien de dimension N.
Ω	:	Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.
$\Vert . \Vert$	:	La norme associée aux produits scalaires.
$p.p.$	:	Presque partout.c'est-à-dire par tout sauf éventuellement sur un ensemble de mesure
$\vert x \vert$	:	La norme associée aux produits scalaires.
$\Vert x \Vert$	:	La norme de x.
L^p	:	L'espace des fonctions de puissance p-ème intégrable pour la mesure de Lebesgue dx
$L^2(\Omega)$	:	L'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesguedx.
$L^\infty(\Omega)$	:	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}\, ; \sup \vert u(t) \vert \prec +\infty\}$.
$\longrightarrow$	:	Convergence .
E'	:	Le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaire et continue sur E .

E''	:	Bidual de E $\left(\text{Le dual topologique de } E'\right)$.
C^∞	:	Espace des fonctions infiniment dérivables.
$C_0^\infty(\Omega)$	:	L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclue dans Ω .
$D^\alpha\varphi$	:	Dérivée de φ d'ordre α.
$W^{1,p}(\Omega)$	:	espace de Sobolev des fonctions de L^p dont les dérivées partielles au sens faible
$jac\ H$	:	désigne la matrice jacobienne $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}$; il s'agit donc d'une fonction de $L^\infty(\Omega')^{N\times N}$
C_c^m	:	espace des fonctions m fois continûment dérivable à support compact
T	:	opérateur de $W^{1,p}$ dans E.
L_{loc}^1	:	espace des fonctions localement intégrable.
$W^{1,p}, W_0^{1,p}$, $W^{m,p}, H^1$, H^m, H_0^1	:	espaces de Sobolev.

الملخص

يتضمن هذا العمل صنفا هاما من الفضاءات وتأتي هذه الأهمية من كون انتماء تابع u للفضاء L^p (حيث I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و Ω مفتوح من $\mathbb{R}^N$)، لا يعني انتماء مشتقه بالمفهوم التّوزيعي لهذا الفضاء. لذلك كان من الضروري البحث عن صنف من الفضاءات يسمح بتمديد انتماء مشتق التابع برتبة معينة للفضاء $L^p(I)$ أو $L^p(\Omega)$ في حالة انتماء u للفضاء نفسه. يسمى هذا النّوع من الفضاءات فضاء سوبولاف.

الكلمات المفتاحية:فضاء سوبولاف،فضاء باناخ، مساحة قابلة للفصل، مساحة عاكسة، ....

Résumé

Ce travail comprend une classe d'espace importante, et cette importance vient du fait que l'affiliation de u à l'espace (ou I un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$), ne signifie pas une affiliation dérivée du concept distributionnel de cet espace. La dérivée de la fonction d'un ordre spécifique de l'espace $L^p(I)$ ou $L^p(\Omega)$, s'il appartient au même espace, ce type d'espace est appelé espace de Sobolev.

Mots clés : espace de Sobolev, espace de Lebesgue, espace de Banach, espace séparable, espace réflexif,........

Abstract

This work includes an important class of space, and this importance comes from the fact that the affiliation of the u subordinate to the space (where I an open domain of $\mathbb{R}$ and Ω an open domain of $\mathbb{R}^N$) does not meanan affiliation derived from the distributional concept of this space. Therefore, it was necessary to search for a class of space the allows the extension of belonging to the derivative of the function with a specific order of space $L^p(I)$ or $L^p(\Omega)$ if it belongs to the same space, this type of space is called sobolev space.

Key words : Sobolev spaces, Lebesgue space, Banach space, reflective space, separable space, ...