République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Masmoudi khedidja

Titre :

Variété abstraite

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Houes Amrane	UMKB	Président
Dr.	Bellagoune Abdelghani	UMKB	Encadreur
Dr.	Hamdi Soumia	UMKB	Examinateur

Septembre2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux être qui me sont les plus chers je cite :

Les parents les plus chers au monde , Papa et Maman , que dieu les garde et les protège .

Mes frères Ali et Adil , mes seur Hana et Nour et Mon oncle Aza

Mon encadreur Abdelgani bellagoun

Toutes mes enseignents qui m'a étudié dans les années précedente .

Toutes mes amies , particulièrement : Linda et Chafia .

Tout promotion 2020 de master de l'université Mohmed Kheider .

À mes familles Masmoudi .

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord " Allah " de m'avoir donné le courage d'entamer et finir ce mémoire dans de bonnes conditions .

Je remercie vivement mon encadreur Abdelgani bellagoun .

Mes remerciements aux honorables de jury pour avoir accepter l'evaluation de ce travail .

Je remercie le chef de département Hafayed Mokhtari .

Table des matières

Table des figures

Introduction

La géométrie différentielle est une continuité du calcul infinitésimal , elle permet d'étudier grâce aux techniques du calcul différentiel une nouvelle famille d'espaces topologiques appllées " variété differentiables " , permettant la rénovation de la vieille géométrie des courbes et des surfaces de R^3 à la Gauss-Darboux , et en la plaçant selon un esprit actuel dans un cadre contemporain ·

Le calcul differentiel permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au voisinage d'un instant donné (sa vitesse , son accélération) lorsque celui-ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé ·

Notre but est de montrer qu'on peut faire de l'analyse mathématique en dehors des espaces qui n'admettent pas de structure d'espace vectoriel normé ·

Empriquement , nous pouvons mesurer des portions de la terre , nous nous déplaçons entre les villes , les pays , on peut décrire presque toutes les régions du globe terrestre d'une manière adéquate , en utilisant un petit livre , applé atlas , formé d'un ensemble de cartes , qui sont des ouverts du plan R^2 · Ici chaque point du globe peut être représenté dans une carte · En s'inspirant de la catographie , on définit une variété différentiable de dimension n $(n \in N)$ par un atlas qui un ensemble d'ouverts de R^n applés cartes . H . Poincaré a saisi l'importance du concept d'une variété différentiable , il s'est arrêté sur les changements de cartes d'un atlas · C'est Whitney (en 1944) qui a réglé définitivement ce problème , c'est dans les changement de cartes où réside la notion de variété différentiable ·

Pour se déplacer entre divers villes de notre planète terre , on choisit assez souvent les chemins les plus courts (géodésiques) , ces trajectoires ne sont pas des droites · La formulation géométrique de ces notions a conduit à introduire des métriques sur des variétés différentiables (variété riemanniennes) , et par la suite , à des modèles non euclidiens :

* **Modèle de Reimann :** La sphère S^2 (munie de la métrique induite par le produit scalaire habituel de l'espace R^3) admet pour géodésiques les grandes cercles , et il est clair que tous les grands cercles se coupent · si nous appelons droites parallèles , des géodésique qui ne se rencontrent pas , on voit que le cinquième postulat d'Euclide tombe en défaut : ici,par un point extérieur à une droite , il ne passe aucune parallèle à cette droite ·

* **Modèle de lobatchevski :** le demi - plan de poincaré est défini par :

$$P = \{(x, y) \mid y \succ 0\}$$

muni de la métrique $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Ici , les géodésique sont :

a. Les demi droites d'équation $x = Cte$ ·

b. Les demi-cercles centrés sur l'axe ox ·

Ainsi, par deux points distintcts du demi-plan de Poincaré , passe une géodésique et une sule , à savoir :

a. la parallèle à l'axe oy si ces deux points ont même abscisse ·

b. le demi cercle passant par ces deux points et centré à l'intersection de l'axe ox et la médiatrice du segement joignant les deux points ·

On déduit donc le resultat suivant :

Par un point extèrieur à une géodésique γ passe une infinité de géodésique ne rencontrant pas γ ·

Ici aussi ,le cinquième postulat tombe en défaut , et on aboutit à un modèle de géométrie non eculidienne ·

Nous constatons ici la cohabitation entre géométries euclidienne et non euclidienne ; en effet , la géométrie euclidienne coexiste avec divers édifices géométrique : géométrie différentielle , géométrie algèbrique , géométrie projective ,ect....

La géométrie différentielle utilise un arsenal trés riche et varié et méthodes mathématiques faisant de cette branche des mathématiques , un carrefour des mathématiques , nécessitant l'utilisation de nombreuses théories structurées (calcul différentiel , intégration , algèbre linéaire , topologie générale et algèbrique ,etc ....) comme elle conduit à des directions importantes en mathématique et aussi à des applications en physiques :

1. Les groupes et algèbres de lie sont trés importants en mathématiques en raison de leurs applications fondamentales à la géométrie , à la mécanique , l'analyse ,etc...

2. La géométrie symplectique traite des objets qui issus de la mécanique ·

   a. La géométrie symplectique donne le formalisme géométrique de la mécanique hamiltonienne classique , ils'agit en fait d'une géométrie de l'espace de phase (fibre tangent TM ,d'une variété différentiable M ,muni de la forme de Liouville) ; les équations Hamilton proviennent de dualité entre les fibres des repères et des corepères .elle permet de calculer aussi précisement que possible les trajectoires de planètes ·

   b. La géométrie symplectique est utilisée en optique géométrique en mécanique quantique etc...

3. Le problème cosmologique :L'univers (espace-temps) est une variété différentiable de deminsion 4 . Le problème cosmologique consiste à déterminer la forme globale de cette variété, ainsi que les structures diverses exprimant la distribution et l'évolution de l'energie . Dans sa théorie de la relativité générale , A.Einstein représente le potentiel gravitationnel ,donc les distributions des masses , par une métrique locale d'espace temps · la géométrie locale de l'espace-temps (en particulier les géodésiques donc les rayons lumineux qui sont des géodésiques particulières) est ainsi déterminé par la distribution de masses , les Γ_{ij}^{k} de la connexion associée représentant la magnitude de la force gravitationnelle ·

4. La covariance des lois de la physique : Les lois et grandeurs physiques sont covariantes par le groupe de relativité . Plus le groupe est gros , plus les conditions de covariance sont restrictives , plus les lois et grandeurs physiques sont déterminées par la géométrie de l'espace ·

En mécanique quantique , les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs d'un espace vectoriel et les grandeurs physiques par des opérateurs linéaires sur cet espace où opère naturellement le groupe de relativité (éventuellement grossi de toutes les symétries du systèmes).Une particule élementaire est un système physique irréductible , donc est associé à une représentation irréductible du groupe de relativité · Les paramètres servant à classer ces représentations irréductible doivent donc classer les particules qui apparaissent ainsi comme des propriétés géométriques de l'Univers ·

Les particules élementaires sont classées par divers nombres quantiques · On ingore naturellement si les catalogues actuels de particules et de nombres quantiques sont complets · On n'a pas encore trouvé plus un groupe de lie tel que les paramètres classant ses réprésentation irréductible correspondent exactement aux nombres quantiques connus ·

Chapitre 1

Rappel sur Calcul différentiel

Dans ce premier chapitre , on rapelle rapidement les outils de calcul différentiel des fonctions sur R^n qui seront utilisé dans la suite ·

Comme il s'agit essentiellement de rappels les théorèmes d'inversion local , des fonctions implicites , du rang constant ·

1.1 Application différentiable :

Définition 1.1.1 *On dit que une fonction de plusieur variable toute fonction s'écrit sous sous forme suivant :*

$$\begin{array}{rcl} f: \; D_f \subset R^n & \to & R^p \\ (x_1, .., x_n) & \to & (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n)) \end{array}$$

avec $n \in N^*, p \in N^*$ et D_f est le domaine de définition de f ·

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction de U à valeurs dans R^p est dite différentiable*

au point a de U , s'il existe une application linéaire continue df_a de R^n dans R^p telle que :

$$\forall h \in R^n : \; f(x+h) = f(x) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h) \; \text{ et } \; \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Cette application linéaire est alors unique , et on l'appelle la différentielle de f en a et on la note df_a ·

Remarque 1.1.1 *Toutes fonctions élémentaires telles que polynômes , exponentielle , logarithmiques et trigonométriques sont différentiables dans leur domaine de définition ·*

Théorème 1.1.1 *Soient D_f un ouvert de R^n , $f : D_f \longrightarrow R$ et $x_0 \in D_f$ .si f est différentiable en x_0 alors :*

- f est continue en x_0 ·
- f admet toute dérivée directionnelle en x_0 et sa différentielle est donné par :

$$\begin{array}{llll} Df(x_0): & R^n & \longmapsto & R \\ & (h_1, ..., h_n) & \longmapsto & \partial_{x_1} f(x_0)h_1 + ... + \partial_{x_n} f(x_0)h_n = \nabla f(x_0)h \end{array}$$

Mais la réciproque est fausse ·

1.2 Martice de jacobienne :

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction de plusieur variable de U à valeurs dans R^p et aussi elles est différentiable en point a donc la matrice jacobienne de f en a est la matrice de p ligne et n colonnes donnée par :*

$$J_f(a) = \quad (d_j f_i(a))_{\substack{i=1,...,p. \\ j=1,....,n.}} \begin{pmatrix} d_1 f_1(a) & \dots & \dots & d_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_1 f_p & \dots & \dots & d_n f_p \end{pmatrix}$$

Ou bien la notation :

$$J_f(a) = \quad (\partial_j f_i(a)) = \quad (\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{\substack{i=1,...,p. \\ j=1,...,n.}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_{p,n}(R)$$

• Le rang d'une application linéaire différentielle en un point est le rang de la matrice jacobienne en ce point qui définit l'application ·

• df_a est injctive si et seulement si le rang de sa jacobienne en a égale à p (ie la dimension de l'ensemble de départ) ·

• df_a est surjective si et seulement si le rang de sa jacobienne en a égale à n (ie la dimesion de l'ensemble de l'arrivée) ·

Exemple 1.2.1 *Soit la fonction*

$$\begin{array}{llll} f: & R^3 & \rightarrow & R^4 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & f(x,y,z) = (2x+y^2+\frac{1}{2}z, y+z, \cos y, 1+z) \end{array}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2y & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sin y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rang(df(x,y,z)) = 3 = \dim(R^3)$ ceci implique que df est injective .

1.3 Fonction de classe C^k :

Définition 1.3.1 *On dit que f est de classe C^1(continument dérivable)si toutes ses dérivées partielles ($\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$)(x) sont définies et continues sur U ·*

Théorème 1.3.1 *Si f a des composantes de classe C^1 alors elles sont différentiable et f est également différentiable .*

Définition 1.3.2 *Soit f de n variable · On dit que f est de classe C^k sur un sous ensemble S de D_f lorsqu' on peut calculer en tout $a \in S$ touts les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à k et que toutes ces fonctions sont continues ainsi que f ·*

Théorème 1.3.2 *Si $f : U \rightarrow V$ différentiable en a , et $g : V \rightarrow R^m$ différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a :*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

De plus , si f est de classe C^k dans U , et g de classe C^k dans V ,avec $f(U) \subset V$ l'application composé $g \circ f$ est de classe C^k dans U ·

1.4 Inversion local et fonctions implicites Théorème du rang constant

On se donne $n, p \in N^*$,et $k \in N^* \cup \{\infty, w\}$; pour unifier les énoncés , on parlera de fonctions de regularité , ou de classe C^w , pour les fonctions analytique réelles , c'est à dire développable en série entière autour de chaque point ·

Définition 1.4.1 *Soient U , V des ouverts de R^n · On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un C^k-déffēomorphisme si f est une bijection , et si f et sa réciproque sont de classe C^k · On dit que f est un C^k difféomorphisme local en $x \in U$,s'il existe U_x et $V_{f(x)}$ voisinage respectifs de x dans U et de $f(x)$ dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ et l'application induite $f : U \longrightarrow V_{f(x)}$ est un C^k difféomorphisme ·*

Si $k = 0$ l'application f est applée homéomorphisme :

1. f est bijection ·
2. f est continue ·
3. f^{-1} est continue ·

• Tout application difféomorphisme est homéomorphisme mais la réciproque est fausse ·

• Un homéomorphisme conserve les propriétés topologiques (ouvert,fermé,compact ,convexe...) ·

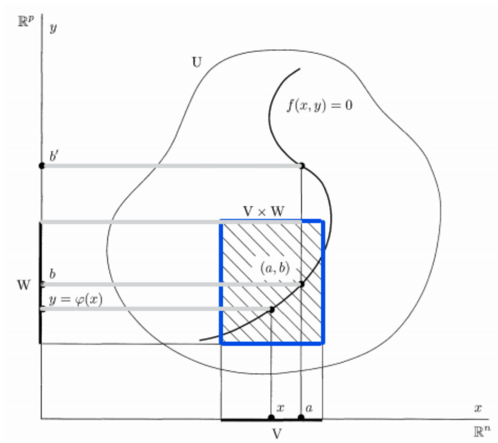
• Un difféomorphisme conserve les propriétés topologiques et géométriques ·

Théorème 1.4.1 *soit Ω un ouverts de $R^n \times R^p$ et $f : \Omega \to R^p \in C^1$*

On suppose qu'en $(a, b) \in \Omega$ et $f(a, b) = 0$ $Jf_{i \leq p}(a, b) \neq 0$ alors il existe deux ouverts U de R^n conte-nenant a et V de R^p contenant b et unique solution $g : U \to V$ C^1 ·

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

$$J_g(x) = \quad -(Jf(x, g(x))^{-1}(J_x f(x, g(x))$$



Théorème des fonctions implicites

Définition 1.4.2 *Soit a un point d'un ouvert U de R^p · on dit que $f : U \longrightarrow R^n$ est une immersion C^k en a · Si f est de classe C^k, et df_a est injective , si ceci est vérifié en tout $a \in U$, on dit que f est une* ***immersion*** ·

• Si $n \prec p$ on dit que f est immersion si et seulement si le rang de df_a égale à la dimension de l'ensemble de départ ·

Exemple 1.4.1 *Si $n \leq p$ on a :*

$$\begin{aligned} f: \quad & R^n && \rightarrow \quad R^p \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) && \rightarrow \quad f(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \quad (\frac{\partial f_i}{\partial xj})_{\substack{i=1..n \\ j=1..p}} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$rang(df(x)) = n = \dim(R^n)$ par suit la df est injective . Alors l'application f est immersion ·

Définition 1.4.3 *Soit a un point d'un ouvert U de R^n . On dit que $f : U \longrightarrow R^{n-p}$ est une submersion C^k en a si f est de classe C^k,et df_a est surjective ; ceci est vérifié en tout a si f est de classe C^k, et df_a est surjective ; si ceci est vérifié en tout $a \in U$, on dit que f est une* ***subermesion*** ·

• Si $n \succ p$ on dit que f est submersion si et seulement si le rang de df_a égale à la dimension de l'ensemble de l'arrivée ·

Exemple 1.4.2 *On a l'application f définit par suit :*

$$\begin{array}{rlcl} f: & R^n & \rightarrow & R^p \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_p, .., x_n) & \rightarrow & f(x) = (x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

Si $n \geq p$ alors

$$J_f = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$rang(df(x)) = p = \dim(R^p)$.Comme df est surjective alors f est submersion ·

Toute submersion est localement surjective ·

Tout imersion est localement injective ·

Théorème 1.4.2 *(Théorème d'inversion locale).*

Soit $f : U \subset R^n \rightarrow R^p$ de classe $C^k(k \geq 1)$ $a \in U$.

On suppose que df_a est inversible .Alors il existe :

- Un ouvert V contenant a ·
- Un ouvert W contenant $f(a)$ ·

Telque $f : V \rightarrow W$ soit C^k difféomorphisme ·

En outre pour tout $x \in V$ on a $d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$ ·

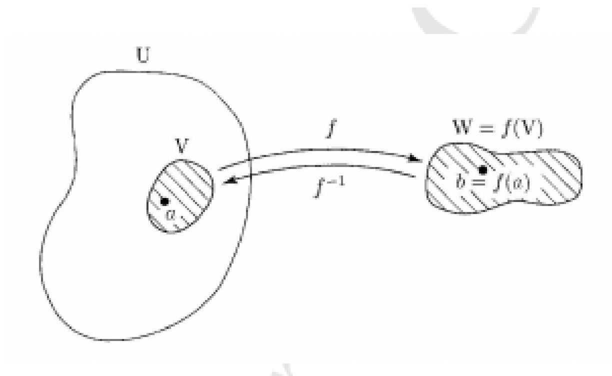


FIG. 1.1 – Définition d'inversion locale

Théorème 1.4.3 *(Théorème du rang constant).Soient U , V de R^n et R^p et $f : U \longrightarrow V$ de classe C^k ,$k \geq 1$, et $d\varphi(x)$ est de rang constant r dans U · Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = f(x_0)$ des difféomorphisme locaux ρ défini sur U' et σ défini sur V' tels que :*

$$\sigma \circ f \circ \rho(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_r, 0, ...0) \quad \cdot$$

Chapitre 2

Variété abstraite

Dans ce chapitre on va parler sur des ouvert qui généralise la notion d'espace vectoriel ceux-ci est le sous variété de dimension p sur lequels s'etendent naturallement les notions du calcul différentiel ·

On a si :

- $p = 0$ ce sont des points isolés ·
- $p = 1$ la sous variété est un courbe ·
- $p = 2$ la sous variété est un surface ·
- $p \geq 3$ la sous variété est un hypersurface ·

2.1 Plongement :

Définition 2.1.1 *Soient $U \subset R^n$ un ouvert et $f : U \to R^p$ une application de classe C^1. f est dite plongement si :*

1. f est une immersion sur U ·
2. f est injective ·

et si $f : U \to f(U)$ homéomorphisme alors f est un plongement regulier ·

où $f(U)$ est muni de la topologie $\Gamma(f(U))$ induite par celle de R^m :

$$\Gamma(f(U)) = \left\{ \ \theta \cap f(U); \ \ \theta \text{ ouvert de } R^p \ \right\}$$

Exemple 2.1.1 *Soit* $D = \ \{(x,y), x^2 + y^2 \prec 1\}$

$$\begin{array}{llll} f: & D & \to & R^2 \\ & (x,y) & \to & \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \end{array}$$

f est un plongement régulier sur

$$S_+^2 = \ \{(x,y,z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \succ 0\}$$

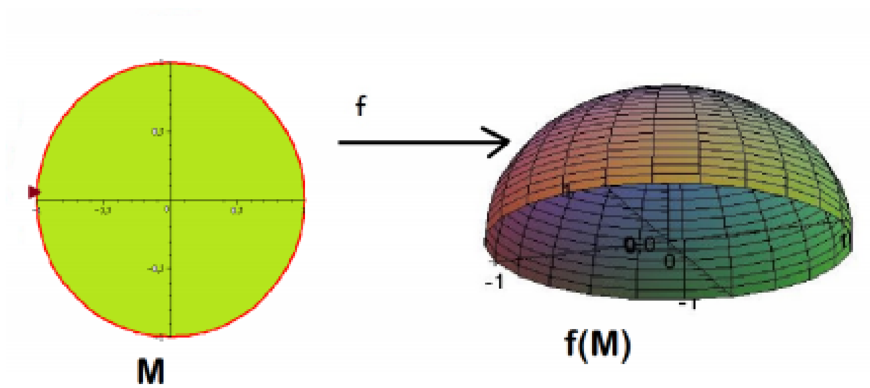


FIG. 2.1 – Exemple sur un plongement régulier

2.2 Sous variété :

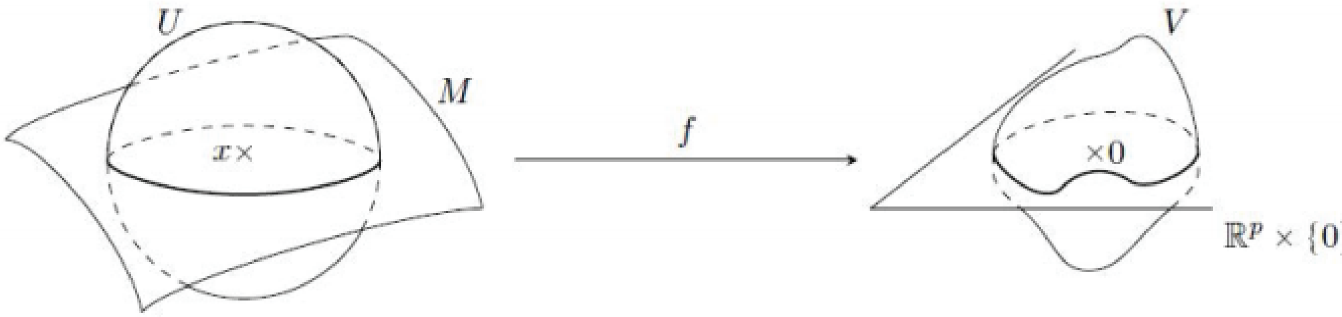
Définition 2.2.1 *Soit* p *un entier tel que* $1 \preceq p \preceq n-1$ *et* $M \subset R^n$ $\cdot$ *On dit que* M *est une sous variété de* R^n *de dimension* p *et de codemonsion* $n-p$ *, si pour tout* $x \in M$ *, il existe un voisinage ouvert* U *de* x *, un voisinage ouvert* V *de* $0 \in R^n$ *et un* C^1*-difféomorphisme :*

$$\begin{array}{llll} \varphi: & U & \to & V \\ & x & \to & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que :

$$\varphi(M \cap U) = V \cap (R^p \times \{0\}) \ \ \diagup \varphi(x_0) = 0$$

Dans cette définition U , V et φ dépendent (en générale) de x $\cdot$



Définition d'une sous variété

Exemple 2.2.1 *Soit* $M = S^1 = \left\{ x^2 + y^2 = 1 \quad \backslash (x,y) \in R^2 \right\}$

$$\varphi(U \cap M) = V \cap R^2$$

et un difféomorphisme

$$\varphi(x,y) = \left(arctg(\frac{y}{x}), \sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)$$

Alors M est une sous variété de dimension 1 et de classe C^∞ $\cdot$

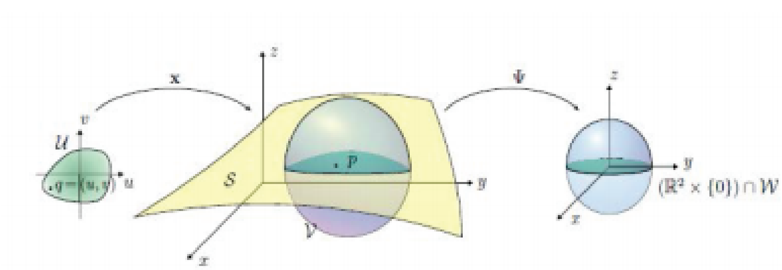


FIG. 2.2 – Exemple sur une sous variété

Proposition 2.2.1 *(Graphe) Soit* Ω *un ouvert de* R^p *et* $g : \Omega \to R^{n-p} (1 \leq p \leq n-1)$ *une application de classe* C^1 $\cdot$ *Le graphe d'une* g , $\Gamma_g = \{(u, g(u)) \mid u \in \Omega\}$ *est une sous variété de dimension* p *de* R^n $\cdot$

Remarque 2.2.1 *La dimension d'une sous variété est la différence entre l'ensemble de départ et le rang de sa jacobienne en point* a $\cdot$

2.3 Espace tangent :

On se donne M une sous variété C^1 de R^n de dimension p , et un point $x \in M$ $\cdot$

Définition 2.3.1 *Un vecteur $v \in R^n$ est tangent à M en x , s'il existe $\delta \succ 0$ et $c :]-\delta, \delta[\to R^n$ une courbe C^1 à image dans M telle que : $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ $\cdot$*

On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x , que l'on appelle **sous-espace** (vectoriel) **tangent** à M en x ($x + T_xM$ étant le sous -espace **affine** tangent à M en x) $\cdot$

1. Si U est un voisinage ouvert de x dans R^n , V un voisinage ouvert de 0 dans R^n ,et $f : U \to V$ un C^1 difféomorphisme tel que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = (R^p \times \{0\} \cap V)$, alors : $T_xM = (df_x)^{-1}(R^p \times \{0\})$ $\cdot$
2. Si U est un voisinage de x dans R^n, et $f : U \to R^{n-p}$ une submerion C^1 en x telle que $U \cap M = f^{-1}(f(x))$, alors :$T_xM = \ker(df_x)$ $\cdot$
3. Si U esr un voisinage de 0 dans R^p ,U un voisinage de x dans R^n , et $f : V \to U$ un paramétrage local de M en x avec $f(0) = x$, alors :$T_xM = \mathrm{Im}(df_0)$ $\cdot$

   Exemple 2.3.1 *Soit $S^n = f^{-1}(1)$, où :*

$$\begin{array}{llll} f : & R^{n+1} \setminus \{0\} & \to & R \\ & x & \to & \|x\|^2 \end{array} \cdot$$

Ainsi $T_xS^n = \ker(v \to 2\langle x, v\rangle) = x^{\perp}$ $\cdot$

- $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1 \setminus (x, y, z) \in R^3\}$

$$\begin{array}{llll} c : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & R^3 \\ & t & \to & (\cos(t), \sin(t), 0) \end{array}$$

$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad c(t) \in S^2 = M$

$$c(0) = (1, 0, 0) = m \in M$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

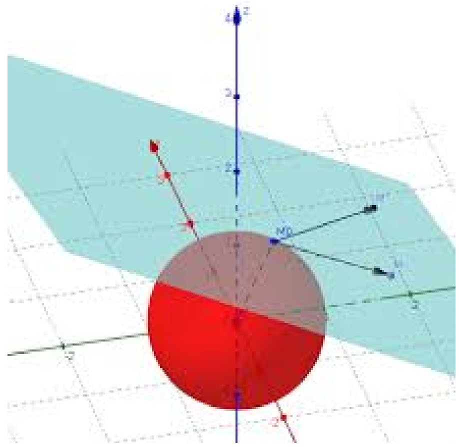


FIG. 2.3 – Espace tangent d'une sphère

2.3.1 Espace tangent à une sous variété définie par une immersion :

Proposition 2.3.1 *Soient U un ouvert de R^p et $f : U \rightarrow R^p$ est une immersion de classe C^1 ·*

Si $M = f(U)$ est une sous variété de dimension p , alors :

$$\begin{aligned} T_{f(x)}M &= D_x f(R^p) \\ TM &= Df(R^p) = \bigcup_{x \in U} D_x f(R^p) \end{aligned}$$

Preuve. Soient $x \in U$,$u \in R^p$ et $\varepsilon \succ 0$ tels que pour tout $|t| \prec \varepsilon$ on a $tu + x \in U$ · ■

Si on note par $\gamma : t \in R \rightarrow \gamma(t) = f(tu + x)$ alors γ est une courbe dans $M = f(U)$ et on a

$$\gamma'(0) = D_x f(u) \in T_{f(x)}M$$

Comme $D_x f$ une application linéaire injective et $\dim(T_{f(x)}M) = \dim M = p$ · on déduit que $T_{f(x)}M = D_x f(R^p)$ ·

Exemple 2.3.2 *Soit le cerle définie par l'immersion suivante*

$$\begin{aligned} f : \ R &\rightarrow R^2 \\ t &\rightarrow (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

On a $M = f(R) = S^1$ et

$$\begin{aligned} T_{f(t)}M &= D_t f(R) \\ &= \{\lambda(-\sin(t), \cos(t); \lambda \in R\} \\ &\equiv \{(-\sin(t), \cos(t)\} \times R \\ TM &\equiv S^1 \times R \end{aligned}$$

2.3.2 Espace tangent à une soue variété définie par une submersion :

Proposition 2.3.2 *Soient U un ouvert de R^n et $f : U \to R^m$ une submersion de classe C^1 ·*

Si $z \in f(U)$ alors l'espace tangent à la sous variété $M = f^{-1}(\{z\})$ est donné par :

$$\begin{aligned} T_xM &= \ker(D_x f) \\ TM &= \ker(Df) = \bigcup_{x\in M} D_x f \end{aligned}$$

Preuve. Si $u \in T_xM$,alors il existe une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset R^n$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$ · ■

On a :

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) &= z \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\\ (f \circ \gamma)'(t) &= 0 \\ D_x f(\gamma'(0)) &= 0 \\ D_x f(u) &= 0 \end{aligned}$$

D'où $T_xM \subset \ker D_x f$.comme $D_x f$ est une application surjective , alors $\dim(\ker D_x f) = n - m = \dim(T_xM)$ et par suite : $\ker D_x f = T_xM$ ·

Exemple 2.3.3 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \ R^{n+1} &\to R \\ x = (x_0, x_1, .., x_n) &\to 1 - \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

f est une submersion sur R_*^{n+1},donc le sphère $S^n = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de dimension n telle que

$$\begin{aligned} T_xS^n &= \ker D_xf \\ &= \left\{ h = (h_0, h_1, ..., h_n) \in R^{n+1}; \langle x, h \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i h_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

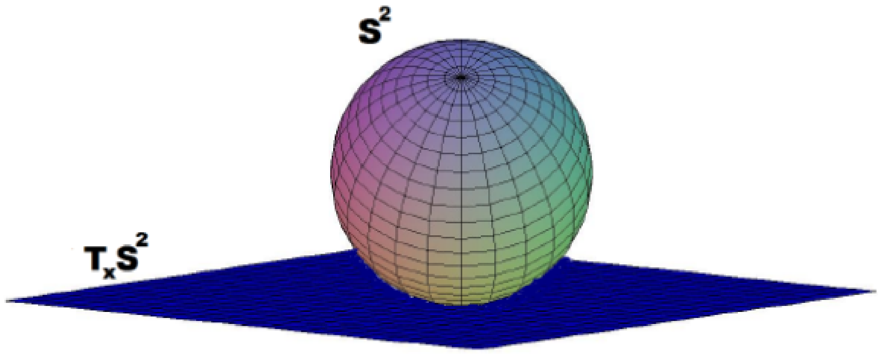


FIG. 2.4 – Espace tangent à une sous variété S^2

2.4 Fibre tangent à une sous variété :

Définition 2.4.1 *Soit M une sous variété de dimension p et de classe C^k .*

On appelle l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tout point de M par le fibre tangent à le sous variété M et on note par TM qui donné par :

$$TM = \cup_{x \in M} T_x M$$

Remarque 2.4.1

- $T^*M = \cup_{x \in M} T_x^* M$ s'appelle le fibre cotangent ·
- T_x^*M est le duale algèbrique de T_xM ·

2.5 champs de vecteurs :

Soit M est une sous variété et TM est le fibre tangent on a :

$$TM = \ \cup_{x \in M} T_x M$$

et soit l'application π telle que :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \rightarrow & M \\ & z \in T_x M & \rightarrow & \pi(z) = x \end{array}$$

$\pi^{-1}(x) = T_x M$, donc π est surjective $\cdot$

Définition 2.5.1 *Soit M une sous variété de dimension p et de classe C^k.On appelle un champ de vecteur sur l'application :*

$$X : \ M \ \rightarrow \ TM$$

de classe C^{k-1} telle que $\pi \circ X = Id_M$(i.e $X(x) \in T_x M$) $\cdot$

Remarque 2.5.1

L'ensemble de de champs de vecteurs de classe C^k sera noté par $\chi_k(M)$.et notera simplement $\chi(M)$ si $k = +\infty$ $\cdot$

Exemple 2.5.1 *Le champs de vecteur sur sous variété S^2 est dans la figure suivante :*

2.6 Equations paramétrique d'une sous variété :

Théorème 2.6.1 *Soit M une sous variété de R^n de dimension p $(p \leq n)$ Alors localement M est définie par un plongment régulier , ie pour tout $x_0 \in M$ il existe un ouvert $\tilde{U} \subset R^p$ voisinage de 0 , $U \subset R^n$ voisinage de x_0 et un plongement régulier $\psi : \tilde{U} \rightarrow R^n$ tel que $\psi(\tilde{U}) = M \cap U$ $\cdot$*

Théorème 2.6.2 *Soient U un ouvert de R^n et $f : U \rightarrow R^m$ une application de classe C^1 $\cdot$ si f est une plongement régulier alors $M = f(U)$ est une sous variété de R^m de dimension n ($n \preceq m$) $\cdot$*

$M = f(U)$ est dite sous variété définie par le paramétrage f $\cdot$

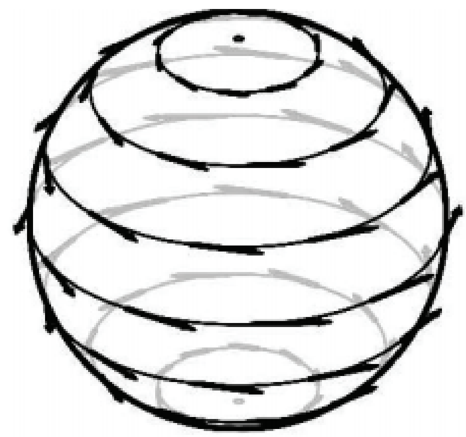


FIG. 2.5 – le champ de vecteurs sur S^2

Théorème 2.6.3 *$M \subset R^n$ une sous variété de R^n de dimension $p(p \leq n)$, si et seulement si M est localement définie par un plongemebt régulier ouvert sur M muni de la topologie induite par celle de R^n ·*

ie pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $\tilde{U} \subset R^p$ voisinage de 0 et un plongement régulier $\psi : U \to M$ est une application ouverte pour la topologie induite sur M par celle de R^n ·

Dans ce cas il existe $U \subset R^n$ voisinage de x tel que $\psi(\tilde{U}) = U \cap M$ · On dit alors que la sous variété M est définie localement au voisinage de x par le paramétrage ψ ·

Exemple 2.6.1 *(Equation paramétrique d'un plan dans l'espace)*

Soient a , b , $c \in R^n$ tel que le système $\{a, b\}$ est linéairement indépendant . Alors $M = \{sa + tb + d \in R^n; s, t \in R\}$ est une sous variété de R^n de dimension 2 · En effet , il suffit considérer le plongement régulier

$$\begin{array}{cccc} g: & R^2 & \to & R^n \\ & (s,t) & \to & as + bt + d \end{array}$$

2.7 Sous variété à bord :

Définition 2.7.1 *Soient $M \subseteq R^n$,$p \in N(p \leq n)$ et soit* $H_+^p = \{(x_1, x_2, ..., x_p) \in R^p, x_p \geq 0\}$ · *On dit que M est une sous variété à bord de dimension p si pour tout $x_0 \in M$, il existe $U \subset R^n$ ouvert de R^n voisinage de x_0 , V un ouvert voisinage de 0 dans R^n et un difféomorphisme :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U & \rightarrow & V \\ & x & \rightarrow & (\varphi_1(x), .., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tel que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U \cap M) = \ V \cap (H_+^p \times \{0\})$$

ie

$$(x \in U \cap M) \iff (\varphi_p(x) \geq 0, \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0)$$

Le bord de la sous variété M est le sous ensemble ∂M tel que

$$\varphi(U \cap \partial M) = \ V \cap (R^{p-1} \times \{0\})$$

ie

$$(x \in U \cap \partial M) \iff (\varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0)$$

L'intérieure de la sous variété M est l'ensemble $Int(M) = M - \partial M$

Remarque 2.7.1

1. $M = \ \cup_\varphi(\varphi^{-1}(H_+^p \times \{0\}))$ ·
2. $\partial M = \ \cup_\varphi(\varphi^{-1}(V \cap (R^{p-1} \times \{0\})))$ ·
3. ∂M est une sous variété de dimension $p - 1$ ·
4. L'intérieure $Int(M)$ ne signifie pas l'intérieure topologique (si $p \prec n$,alors $M^0 = \phi$) ·

5. Si $p = n$ alors $Int(M)$ est un ouvert topologique et ∂M est un fermé topologique $\cdot$

Exemple 2.7.1 *La boule fermé* $B = \left\{ (x_0, ...x_p) \in R^{p+1}, \sum_{i=0}^{p} x_i^2 \leq 1 \right\}$ *est une sous variété de dimension* $p+1$ *et de bord* $\partial B = S^p = \left\{ (x_0, ..., x_p) \in R^{p+1}, \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1 \right\}$ $\cdot$

Si $x_p \geq 0$, on prend

$$\begin{array}{llll} \varphi_+ : & R^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ & (x_0, .., x_p) & \to & (x_0, ..., -x_p + \sqrt{1 - \sum_{i=0}^{p-1} x_i^2}) \end{array}$$

Si $x_p \leq 0$, on prend

$$\begin{array}{llll} \varphi_- : & R^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ & (x_0, ..., x_p) & \to & (x_0, ..., x_p - \sqrt{1 - \sum_{i=0}^{p+1} x_i^2}) \end{array}$$

On a :

$$B = \varphi_+^{-1}(H_+^{p+1}) \cup \varphi_-^{-1}(H_+^{P+1})$$

$$\partial B = \varphi_+^{-1}(R^p \times \{0\}) \cup \varphi_-^{-1}(R^p \times \{0\})$$

2.8 Equation cartésienne d'une sous variété :

Théorème 2.8.1 *Soit $M \subset R^n$ une sous variété de R^n de dimension p $(p \leq n)$, alors pour tout $x_0 \in M$, il existent un ouvert $U \subset R^n$ un voisinage de x_0 et une submersion* $f : U \quad \rightarrow \quad R^{n-p}$ *tel que* $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$.

On dit que M est une sous variété définie localement par l'équation $f = 0$ ·

Théorème 2.8.2 *Soient $U \subset R^n$ un ouvert et* $f : U \quad \rightarrow \quad R^m$ *une submersion $(m \leq n)$ tel que $0 \in f(U)$.Alors $M = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de R^n de dimension $p = n - m$.*

Exemple 2.8.1 *Une droite dans le plan est une sous variété de dimension 1 définie par une submersion · Soient $(a, b) \in R^2_*$ et f est une application définie par :*

$$\begin{array}{cccc} f : & R^2 & \rightarrow & R \\ & (x, y) & \rightarrow & ax + by + c \end{array}$$

On a $D_{(x,y)}f = (a, b) \neq (0, 0)$ donc f est une submersion et

$$M = \quad f^{-1}(\{0\} = \left\{ \ (x, y) \in R^2 \quad ; ax + by + c = 0 \ \right\}$$

est une sous variété de dimension 1 ·

Exemple 2.8.2 *La sphère est une sous variété de dimension 2 définie par la submersion*

$$\begin{array}{cccc} f : & R^3_* & \rightarrow & R \\ & (x, y, z) & \rightarrow & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array}$$

On a $D_{(x,y)}f = \quad (2x, 2y, 2z) \neq \quad (0, 0, 0)$ donc f est une submersion et

$$S^2 = \quad f^{-1}(\{0\}) = \left\{ \ (x, y, z) \in R^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \right\}$$

est une sous variété de dimension 2 ·

2.9 Orientation d'une sous variété :

Soit $e = \ (e_1, e_2, .., e_n)$ est la base canonique de l'espace vectoriel R^n $\cdot$

Une base ζ est dite orienté dans le sens directe (resp inverse) de e si

$$\det(P(e,\zeta)) \succ 0 \quad resp \det(P(e,\zeta)) \prec 0$$

où $P(e,\zeta)$ désigne la matrice de passsage de e à ζ $\cdot$

1) La base $\bar{e} = (e_2, e_1, ..., e_n)$ est orienté dans le sens inverse de e .

2) $\det(P(e,\zeta)) \prec 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(P(\bar{e},\zeta)) \succ 0$ $\cdot$

Définition 2.9.1 *Soient ζ_1, ζ_2 deux bases d'un espace vectoriel E de dimension fini* $\cdot$

On dit que ζ_1, ζ_2 ont la orientation même ou

$$\zeta_1 \sim \zeta_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(P(\det(\zeta_1,\zeta_2))) \succ 0$$

Où $P(\zeta_1,\zeta_2)$ désigne la matrice de passage $\cdot$

Lemme 2.9.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension fini* $\cdot$

Si $\varphi : E \to E$ est ismorphisme linéaire , alors $\zeta_1 \sim \zeta_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\zeta_1) \sim \varphi(\zeta_2)$

Définition 2.9.2 *L'orientation d'un espace de dimension finie n est le choix d'une base ordonnée $\zeta = (v_1, ..., v_n)$* $\cdot$

Une base ζ' est une orientation directe (resp indirecte) si $\det(P(\zeta,\zeta')) \succ 0$ (resp $\det(P(\zeta,\zeta')) \prec 0$) $\cdot$

Définition 2.9.3 *Une sous variété $M \subset R^n$ de dimension p est dite orienté si pour tout $x \in M$, l'espace tangent $T_x M$ est orienté* $\cdot$

Si on désigne par $\zeta_x = (v_1(x), v_2(x), ..., v_p(x))$ l'orientation de T_x pour tout $x \in M$, alors les applications :

$$\begin{array}{cccc} v_i : & M & \rightarrow & TM \\ & x & \rightarrow & v_i(x) \end{array}$$

définissent une famille de champs de vecteurs $\zeta = (v_1, ..., v_p)$ ·

L'orientation ζ est dite de classe C^k si et seulement si les champs de vecteurs v_1 ,...., v_p sont de classe C^k ·

Exemple 2.9.1

1) R^n est une sous variété par $\zeta = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ ·

2) Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in R^n, x^2 + y^2 = 1\}$ est orienté par le champs de vecteurs de classe C^∞ :

$$X_{(x,y)} = \quad (-y, x) = \quad -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Chapitre 3

Forme différentielle

Dans ce dernier chapitre , on y'introduit les formes différentielle : des objets qui vivent dans les variété peuvent être intégrés sur sous variété ·

3.1 Forme p-linéaire :

Soit E un espace vectoriel de dimention n sur le corps $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ·

Définition 3.1.1 *Soit l'application f telle que :*

$$\begin{array}{rccc} f: & E \times E \times .... \times E & \rightarrow & \Bbbk \\ & (x_1, x_2, .., x_p) & \rightarrow & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

f est dite p-linéaire si f est linéaire par rapport chaque variable x_i ·

Remarque 3.1.1

- $p = 1$, f est dite linéaire ·
- $p = 2$, f est dite bilinéaire ·
- L'ensemble de p forme linéaires noté par $L_p(E, \Bbbk)$ ·

Exemple 3.1.1

$$\begin{array}{llll} f: & R^2 \times R^2 & \to & R \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f: & R^2 \times R^2 & \to & R \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 \end{array}$$

f_1 et f_2 sont des forme bilinéaire sur $R^2 \times R^2$ ·

3.2 Forme p-linéaire alternées :

Définition 3.2.1 *Soit l'application f :*

$$\begin{array}{llll} f: & E \times E \times ... \times E = E^p & \to & \mathbb{k} \\ & (x_1, x_2, ..., x_p) & \to & f(x_1, x_2, .., x_p) \end{array}$$

est dite forme linéaire alternée si :

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, x_j, ..., x_p) = -f(x_1, x_2, ..., x_j, x_i, ..., x_p) \quad \forall i, j = 1..p \text{ et } \; i \neq j \quad \cdot$$

Exemple 3.2.1 *Soit l'application f définit par :*

$$\begin{array}{llll} f: & R^2 \times R^2 & \to & R \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$

est un forme alternée ·

Remarque 3.2.1

- L'ensemble de p- forme linéaire alternée est noté par $A^p(E, \mathbb{k})$ ·
- $A^p(E, \mathbb{k})$ est un sous espace de $L_p(E, \mathbb{k})$ ·

Proposition 3.2.1 *Soit f donnée par :*

$$\begin{array}{llll} f: & E \times E \times ... \times E = E^p & \to & \mathbb{k} \\ & (x_1, x_2, ..., x_p) & \to & f(x_1, x_2, .., x_p) \end{array}$$

f est alternée si :

1. $f(x_1, x_2, .., x_p) = 0$ chaque fois qu'il existe un couple $(i, j), x_j = x_i$ et $i \neq j$ ·
2. Un uplets vecteurs liées $x_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_i x_j$ · (uplets i.e composantes)

3.3 Forme différentielle :

Définition 3.3.1 *On appelle une forme différentielle de degré p sur l'ouvert $U \subset E$ toute application ω de la forme*

$$\begin{array}{rccl} \omega : & U \subset E & \to & A^p(U, \Bbbk) \\ & x & \to & \sum_{0 \leq i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_p \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots . a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge .. \wedge dx_{i_p} \end{array}$$

oú $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}$ sont des fonctions continues ·

L'ensemble des formes différentielles de degré p sur l'ouvert $U \subset E$ et de classe C^kest noté par : $\Omega^p_{C^k}(U, \Bbbk)$ ·

- $f : \ U \subset E \ \to \ \Bbbk$ de classe C^k alors $f \in \Omega^0_{c^k}(U, \Bbbk)$ ·
- $\omega = \cos(x)dx + \sin(y)dy$ est une 1-forme différentielle sur R^2 ·

Exemple 3.3.1 *Si U est un ouvert de R^2 alors :*

1. $\Omega^k_0(U) = C^k(U)$ ·
2. $\Omega^k_1(U) = \left\{ f dx + g dy \mid f, g \in C^k(U) \right\}$ ·
3. $\Omega^k_2(U) = \left\{ f dx dy \mid f \in C^k(U) \right\}$ ·
4. $\Omega^k_p(U) = \{0\}$ si $p \geq 3$ ·

Exemple 3.3.2 *Si U est un ouvert de R^n alors :*

1. $\Omega^k_0(U) = C^k(U)$ ·
2. $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \Omega^k_1(U)$, où $f \in C^k(U)$ ·
3. $(\sum_i f_i dx^i)(\sum_j g_j dx^j) = \sum_{i \leq j} (f_i g_j - g_i f_j) dx^i dx^j \in \Omega^k_2(U)$ ·

3.3.1 Produit extrieur de deux formes différentielles :

Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degré p et q (respectivement) , on définit le produit extérieur $\omega_1 \Lambda \omega_2$ par :

$$\begin{array}{rccl} \omega_1 \Lambda \omega_2 : & \Omega^p \times \Omega^q & \to & \Omega^{p+q}(U, \Bbbk) \\ & (\omega_1, \omega_2) & \to & (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \end{array} \cdot$$

- Soit ω_1 est un 1 forme sur R^3 définie $\omega_1 = \quad xdy - ydy + dz \quad \cdot$
- Soit ω_2 est un 2 forme sur R^3 définie $\omega_2 = \quad (x+y)(dx \wedge dy) - z(dz \wedge dx) \quad \cdot$

alors :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^3(U \subset R^3, \Bbbk) \quad \cdot$$

3.4 Forme différentielle sur une sous variété :

Soit S un ensmble et n un entier positif $\cdot$

Définition 3.4.1 *Une carte sur S est une bijection $\varphi : U \to \quad V$ d'une partie de U de S sur l'ouvert V de R^n , on note la carte par (U, φ, V) et parfois par (U, φ) $\cdot$*

Un C^k Atlas sur S est une famille de carte (U_i, φ_i, V_i) avec $\varphi_i : \quad U_i \quad \to \quad V_i$ un homéomorphisme , $i \in I$ telle que :

- $S = \cup_{i \in I} U_i$ (recouvrement) $\cdot$
- Un compatibilité :soient deux carte (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) telles que $U_i \cap U_j \neq \phi$ où

$$\varphi_{ij} : \quad (U_i \cap U_j) \quad \to \quad \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est C^k un difféomorphisme $\cdot$

Exemple 3.4.1 *Soit l'ensemle S qui définit par $S = \quad \left\{(x_1, x_2, .., x_{n+1}) \in R^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right\}$ un Atlas sur S^n formé par deux cartes (U_N, φ_N) (U_s, φ_s) $\cdot$*

Définition 3.4.2 *Soit M une sous variété de dimension p dans R^n et $\alpha \in \Omega^k(M)$(l'ensembles de k forme différentielle sur M et de classe C^∞) telque :* $\alpha : \quad x \in M \quad \rightarrow \quad \alpha(x) = \alpha_x \in \Lambda^k T_x M^* = (\Lambda^k T_x M)^*$

Soit $X_1, X_2, ..., X_k \in T_x S$ est les champs de vecteurs tangents . On peut définir la fonction par :

$$x \quad \rightarrow \quad \alpha_x(X_1(x), X_2(x), .., X_k(x)) \quad \cdot$$

En fait , au moyen de cartes , on se remène à des formes différentielles sur des ouverts de R^p si $\varphi : U \rightarrow M$ est une carte de M et si $\alpha \in \Omega^k(M)$, on définit $\varphi^*\alpha \in \Omega^k(U)$ par :

$$\varphi^*\alpha(u)(X_1, X_2, ..., X_k) = \alpha(\varphi(u))(\varphi'(u)X_1, .., \varphi'(u)X_k) \quad \cdot$$

Pour $u \in U$ et $X_1, X_2, ..., X_k \in R^P$ $\cdot$ Soit (U_i, φ_i) un Atlas de M .On obtient une famille de k forme différentielle $\varphi_i^*\alpha \in \Omega^k(U_i)$ qui sont compatibles dans le sens que $\varphi_i^*\alpha = h_{ji}^*\varphi_j^*\alpha$ pour le changement de carte $h_{ji} : U_i \rightarrow U_j$ $\cdot$

Réciproquement , étant donnée une famille de k forme différentielle $\alpha_i \in \Omega^k(U_i)$ qui sont compatibles , il existe une seule k forme $\alpha \in \Omega^k(M)$ telle que $\alpha_i = \varphi^*\alpha$ $\cdot$

Conclusion

En conclusion , Pour accéder à notre but celui-ci est de comprendre Ce thème qui s'intitule sous titre " variété abstraite " on a choisi un objet qui s'appelle les sous variétés de R^n · celles-ci sont variété différentielles qui sont partie de R^n sur lesquelles nous pouvons appliquer les méthodes de calcul différentiel ·

Pour cela on a divisé ce travail en trois chapitre :

Dans le premier chapitre nous avons rapplé les préliminaires fondamentaux de calcul différentiel des fonctions sur R^n ,comme les applications différentiables , les notions d'immersion , submersion , ainsi le théorème d'inversion local , les fonctions implicites et du rang constant ·

Au dieuxième chapitre nous avons introduit la notion d'une sous de dimension p de R^n , commençant par sa difénition et quelque théorèmes et des exemples ·

En fin , on a donné une nouvelle notion que l'on applique sur sous variété qui's'apelle la forme différentielle ·

Bibliographie

[1] Azzouz Awane.cours de géométrie DEA.2001.à la faculté des sciences Ben-MSIK Casblanca MAROC , 2005 pp214 ·

[2] Préparation à l'agrégation ENS de cachan Hugues Awaray Janvier 2014 ·

[3] Notes de cours de Géométrie différentielle par Claude Viterbo 19 Mars 2012 ·

[4] A . Teleman , Géométrie différentielle , cours L3 MG , Université de Aix-Marseille , Paris,1972 ·

[5] M . A. Bahayou , Introduction la géométrie différentielle , Université de Ouargla , 2004 ·

ملخص

في هذا العمل المتواضع ، نحن مهتمون بالمشعبات التفاضلية أو المشعبات القابلة للتفاضل وهي كائنات أساسية وطوبولوجيا تفاضلية وهندسة قابلة للتفاضل . يتعلق الأمر بالمشعب الذي يمكن من خلاله إجراء عمليات حساب التفاضل والتكامل التفاضلي.

هدفنا هو دراسة المشعبات التفاضلية وباعتبار متعدد الشعب من R^n من المشعبات التفاضلية ارتأينا الى دراستها .

للوصول الى هدفنا قدمنا فكرة متعدد الشعب من R^n والاوصاف المطابقة لها ، وعممنا النتائج المتعلقة بحساب التفاضل على متعدد الشعب من R^n .

أخيرا ننهي هذه المذكرة بالتطرق الأشكال التفاضلية على متعدد الشعب من R^n .

Résumé

Dans ce modeste travail nous intéressons aux variétés différentielle ou bien variétés différentiables qui sont des objets de base la topologie différentielle et la géométrie différentiable · il s'agit de variété sur lesquelles il est possible d'éffectuer les opérations du calcul différentiel et intégrale ·

Notre but c'est l'étude les variétés différentielles et Comme les sous variétés parmi les · On a le pris comme un exemple ·

Pour aboutir à notre but nous avons donner la notion d'une sous variété de R^n et ses caractérisations correspondantes , et généraliser les resulats concernant le calcul différentiel sur les sous variétés ·

Enfin Nous terminons ce mémoire par un appplication telle que le forme différentielle

Abstract

In this modest work we are interested in differential or differentiable varieties which are basic objects of differential topology and differentiable geometry · These are varieties on which it is possible to carry out the operations of differential and integral calculation ·

Our goal is the study of the differential varieties and as sub-varieties among the · We have taken it as an example .

To reach our goal we have given the notion of a under-variety of R^n and its corresponding characterizations , and to generalize the results concerning the differential calculation on the under-variety ·

Finally , we end this paper by an application such as the differential form on under-variety ·