Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons présenté des notions sur les équations différentielles ordinaires et les systèmes différentiels. Ensuite, nous avons appliqué la méthode de calcul des valeurs propres pour la résolution des systèmes différentiels linéaires.

Mots – clés :

Méthode de calcul des valeurs propres, le système différentiel linéaire, EDO.

Abstract:

In this memory, we have presented notions about ordinary differential equations and differential systems. Then, we applied the calcul of eigenvalues method for the resolution of linear differential systems.

Key words:

Calcul of eigenvalues method, the linear differential systems, EDO.

الملخص :

في هذه المذكرة، قدمنا مفاهيم حول المعادلات التفاضلية العادية والجمل التفاضلية. ثم طبقنا طريقة حساب القيم الذاتية لحل الجمل التفاضلية الخطية.

الكلمات المفتاحية :

طريقة حساب القيم الذاتية، الجمل التفاضلية الخطية، المعادلات التفاضلية العادية.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Boutaleb faiza

Titre :

Sur la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Chemchame Madani	UMKB	Président
Dr.	Laiadi Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr.	Kaboul Hanane	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

♡

♡Je dédie ce modeste travail A ma trés chére Mére bien-aimée♡

♡Et je prie Allah pour conférer sur l'âme de mon père♡ .

♡je prie Dieu de te guérir. A mes chéres soeurs et fréres♡

♡A toute la famile Boutaleb Sans oublier de dédier♡

♡ce mémoire à mes chéres amies intimes♡

♡Finalement à tous ceux♡

♡qui m'ont aidé de proche♡

♡ou de loin♡

♡

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient à exprimer et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Docteur : **LAIADI Abdelkader**

, pour ces conseils, et son encouragement

durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury :

Docteur : **CHEMCHAME Madani**, d'avoir accepté la présidence du jury .

Aussi

Docteur : **KABOUL Hanane** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

Je les remercier énormément pour l' attention qu'ils ont accordé à ce travail .

Il est important de remercier ma famille

Table des matières

Abréviations et Notations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels non nuls
$I \subset \mathbb{R}$	un intervalle dans R
$y' = \frac{dy}{dx}$	la dérivée première de la fonction y
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
y''	la dérivée seconde de la fonction y
$\mathbb{k}$	ensemble des fonctions continues
$\mathbb{k}^*$	ensemble des fonctions continues non nuls
A^{-1}	l'inverse de la matrice A
A^t	matrice transposée de A
$A \in M_n(\mathbb{R})$	l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients réels
$\Vert . \Vert$	la norme
$\mathbb{R}^n$	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
$\mathrm{Re}(v)$	partie réel de vecteur v
$\mathrm{Im}(v)$	partie imaginaire de vecteur v
EDO	des équations différentielles ordinaires.

Introduction

Les équations différentielles ordinaires apparaissent dans un nombre important d'applications liées de discipline variées de la physique ou de la chimie (par exemple). Elles représentent un objet d'étude de toute premiére importance aussi bien en mathématique appliques. Elles sont utilisées pour construire des modéles mathématique de processus d'évolution physique et biologiques ,par exemple pour l'étude de la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations. Les objectifs principaux de la théorie des équations ordinaires sont la résolution explicite compléte quand elle est possible.

Les équations et systèmes différentiels les plus variés apparaissent dans quasiment tous les domaines scientifiques où l'analyse est utilisée pour modéliser les phénomènes :mécanique (phénomènes oscillatoires, cinématique, . . .), thermodynamique, chimie (cinétique chimique, équilibres. . .), électricité et électronique, économie. . . Certaines équations peuvent être résolues explicitement, d'autres non. Certaines solutions de ces équations peuvent être exprimées à l'aide de fonctions usuelles. Cependant, ans de nombreuses applications physique, comme dans un circuit électrique, on peut rencontrer des systèmes d'équations différentielles à plusieurs inconnues. Pour Cela, dans ce mémoire, on passe à l'étude des systèmes différentiels ayant plus d'une inconnue.

Les systèmes différentiels linéaires ont une grande importance pratique, car de nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser par des systèmes, au moins en premiéres approximation. On sait d'autre résoudre complétements les systèmes à ceofficients constants, le calcul des solutions se ramenant à des calculs d'algèbres.

Notre mémoire est consacré sur la méthode de calcul des valeurs propres pour la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Dans le premier chapitre, on présente des notions préliminaires sur les équations différentielles ordinaires du premier et second ordre.

Dans le seconde chapitre, nous présentons des définitions sur les matrices et aussi les valeurs propres. De plus, on consacre des notions sur les systèmes différentiels linéaires de premier ordre homogène et non homogène avec quelques exemples.

Dans le troisième chapitre, nous appliquons la méthode de calcul des valeurs propres pour résolution le système différentiel, nous illustrons ceci à travers des exemples.

Chapitre 1

Équations différentielles

Définition 1.0.1 *On appelle équation différentielle d'ordre n (de $\mathbb{N}^*$) toute équation de la forme :*

$$F(x, y, \acute{y}, \acute{y}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

oú F est une relation entre une variable réelle libre x et une fonction réelle inconnue y ainsi que ses dérivées d'ordres inférieurs ou égaux à n.

Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

1.1 Équation du premier ordre :

On appelle équation différentielle du premier d'ordre toute équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1.2}$$

Où f est une fonction réelle donnée.

Une équation différentielle d'ordre 1 a généralement une infinité des solutions.

Exemple 1.1.1 *Soit l'équation différentielle du premier ordre*

$$y' = 3x^2 + 3 = f(x) \tag{1.3}$$

Il est clair que les solutions de cet équation sont les primitives de f. Autrement dit, ses solutions sont de forme générale :

$$y = \int f(x)dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} y &= \int (3x+3)dx \\ &= x^3 + 3x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

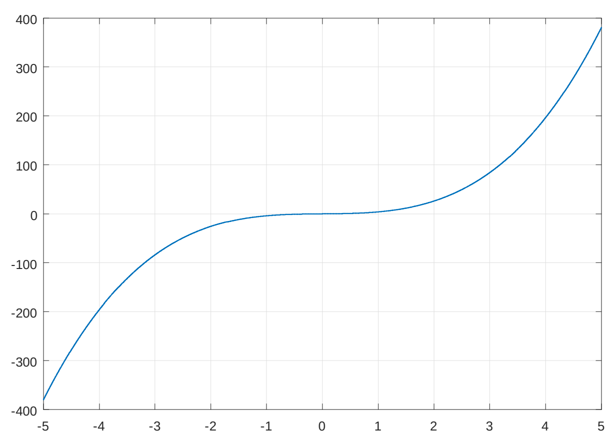

FIG. 1.1 – La courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = 3x^2$ +3 pour $C = 0$

Définition 1.1.1 ***(Equation linéaire)***

On dit que une équation diffèrentielle du premier ordre est linéaire si elle écrit sous la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x) \tag{1.4}$$

où a, b et g sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour la résolution, on choisit un intervalle $J \subset I$ telle que toute fonction ne s'annule pas sur J. Toute solution y de cette EDO est de la forme

$$y\,(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

où

$\cdot y_h$ est la solution générale de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = 0$$

$\cdot y_p$ est une solution particulière de l'EDO (1.4).

On est donc conduit à deux problèmes : rechercher d'abord la solution générale de l'équation homogène et ensuite une solution particulière de l'équation complète.

Ainsi, toute solution non nulle de l'équation homogène associée est de la forme

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)} \qquad \text{et } A(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)}dx$$

Avec C constante arbitraire.

et la solution particulière de l'EDO:

$$y_p(x) = K(x)e^{-A(x)} \qquad avec \qquad K(x) = \int \frac{g(x)}{a(x)}e^{-A(x)}$$

Donc, on obtient la solution

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + k(x)e^{-A(x)}$$

Exemple 1.1.2 *Soit l'équation différentielle :*

$$y'(x) - y(x) = x$$

On a $a(x) = 1$,$b(x) = -1$,$g(x) = x$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

– $A(x) = \int -1dx = -x$

– $K(x) = \int xe^{-x}\ dx = -(1+x)e^{-x}$

Donc

$$y(x) = (C - (1+x)e^{-x})e^{x} = Ce^{x} - (1+x).$$

Définition 1.1.2 ***(Equation à variables séparables)***

On rappelle qu'une équation différentielle du premier ordre peut s'écrire sous la forme

$$g(y)y' = f(x) \tag{1.5}$$

où g et f sont deux fonctions réelles continues sur des intervalles I et J respectivement, de dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$. Pour résoudre (1.5), on la s'écrit sous la forme :

$$g(y)dy = f(x)d(x)$$

Puis par intégration de chaque membre on s'écrit :

$$\int g(y)d(y) = \int f(x)d(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.3 *Soit l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{x^3}{y^2}$$

On s'écrit cet équation sous la forme :

$$y^2 y' = x^3$$

On déduit qu'elle est à variables séparables. On a :

$$y^2 dy = x^3 dx$$

L'intégration de chaque membre donne :

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C \ \ ;C \in \mathbb{R}.$$

D'ou :

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x^4 + C}$$

1.2 Équations différentielle du second ordre :

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x) \tag{1.6}$$

Où a et b, c sont des constantes données($a \neq 0$) et g est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Toute solution y d'un EDO linéaire du second ordre à coefficients constants dépend de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 est de la forme

$$y\,(x) = y_h(x) + y_P(x)$$

où y_p est une solution particulière de l'EDO et y_h est la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$).

· **Résolution de l'équation homogène associée**

On introduit le polynôme caractéristique $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors

– si $\Delta > 0$ on a

$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

– si $\Delta = 0$ on a

$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{b}{2a};$

– si $\Delta < 0$ on a

$y_h(x) = e^{\sigma x}(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \sigma = -\frac{b}{2a}$

· **Recherche d'une solution particulière**.

Si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors

– si $\Delta > 0$ on a

$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

– si $\Delta = 0$ on a

$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{b}{2a};$

– si $\Delta < 0$ on a

$y_h(x) = e^{\sigma x}(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \sigma = -\frac{b}{2a}$

Si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos(\theta x) + q_{2,n}(x)sin(\theta x))$$

Où p_n, $q_{1,n}$et $q_{2,n}$ sont des polynômes de degré n et on a

·si $\Delta > 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$ alors $m = 1$;

·si $\Delta = 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda_1$ alors $m = 2$;

·si $\Delta < 0$ et $\theta = \omega$ et $\mu = \sigma$ alors $m = 1$;

· sinon $m = 0$.

Donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Exemple 1.2.1 *Soit l'équation différentielle du second ordre*

$$y''(x) + y'(x) = 3cos(x). \tag{1.7}$$

On cherche la solution générale de l'équation (1.7) sans second membre

$$y'' + y' = 0$$

Celle-ci est d'équation caractéristique :

$r^2 + r = 0$,$\Delta = -4$. on a $\sigma = 0$ et $\omega = 1$.Donc $y_h(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Recherche de la solution particulière de l'équation complète.

Puisque $\mu = \sigma = 0$, on cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)).$$

On a alors

$$y'_p(x) = (\alpha + \beta x)cos(x) + (\beta - \alpha x)sin(x)$$
$$y''_p(x) = (2\beta - \alpha x)cos(x) - (2\alpha + \beta x)sin(x)$$

En substituant ces équations dans (1.7), donc

$$y''_p(x)+y'_p(x) = 3\cos(x) \Longrightarrow (2\beta-\alpha x)\cos(x)-(2\alpha+\beta x)\sin(x)+x(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)) = 3\cos(x)$$

.

D'où $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \frac{3}{2}x\cos(x),\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 2

Systèmes différentiels

2.1 Les matrices

2.1.1 Définitions

Une matrice (m, n) est un tableau à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

C'est aussi la matrice d'une application linéaire A de $\mathbb{k}^n$ dans $\mathbb{k}^m$ où $\mathbb{k}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: une base $e_1, ..., e_n$ étant choisie dans $\mathbb{k}^n$, et une base $f_1, ..., f_n$ dans $\mathbb{k}^m$, a est défini par

$$1 \leq j \leq n, a(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Le $j-ème$ vecteur colonne de A représente donc la décomposition de $a(e_j)$ dans la base $f_1, ..., f_m$.

– L'application linéaire A est injective si

$$A(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

– L'application linéaire A est surjective si pour tout b dans $\Bbbk^m$, on peut trouver x dans $\Bbbk^n$ tel que $A(x) = b$

– L'application linéaire A est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

– Si A est bijective, on a $m = n$, la matrice A est carrée.

2.1.2 Matrices carrées

Définitions

1) Lorsque $m = n$ la matrice (2.1) est dite"**carrée**" ou "**matrice carrée**" d'ordre n ou encore une " n -matrice carrée".

2) Dans une matrice carrée, les éléments $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sont appelés éléments diagonaux.

3) La somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée A est appelée la " **trace de** A ".

2.1.3 Martices égales

Deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont dites "égales" $(A = B)$ si et seulement si elles sont de même ordre et si chaque élément de l'une est égal à l'élément répondant de l'autre, c'est-à-dire, si et seulement si :

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad (i = 1, 2, ..., m \; ; j = 1, 2, ..., n)$$

2.1.4 Matrice nulle

La matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée la matrice nulle. Quand A est la matrice nulle et lorsqu'il n'ya pas de confusion possible sur son ordre, nous écrirons $A = 0$ au lieu de reproduire le tableau $(m \times n)$ où tous les éléments sont nuls.

2.2 Les opérations des matrices :

○**La *Somme***

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ de même dimension.}$$

○***Multplication par un scalaire***

$$kA = (ka_{ij})$$

○***Multiplications***

$$A(m \times p) = (a_{ik}) \qquad B(p \times n) = (b_{kj})$$

$$A.B(m \times n) = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

○***Dérivation***

$A_{(m \times n)} = (a_{ij})$ avec a_{ij} dépendant de α.

$$A(\alpha) = (a_{ij}(\alpha)) \qquad \tfrac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \left(\tfrac{da_{ij}(\alpha)}{d\alpha}\right)$$

○***Intégration***

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} A(\alpha) d\alpha = \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a_{ij}(\alpha) d\alpha\right)$$

∘ ***Trace d'une matrice*** $A_{(m\times n)} = (a_{ij})$

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_{ii}$$

2.3 Quelques types de Matrices :

2.3.1 La matrice identité (unité) :

Une matrice carrée A dont les éléments $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ est appelée triangulaire supérieure, une matrice carrée A dont les éléments $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ est appelée triangulaire inférieure.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{est triangulaire supérieure}$$

$$\text{et} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{est triangulaire inférieure.}$$

la matrice $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est dite"**matrice diagonale** ". On l'écrira souvent $D = diag\ (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Si dans une matrice diagonale D on a $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$ on dira que D est une matrice scalaire. Si de plus $k = 1$, la matrice est appelée "**matrice identité**" ou "**matrice unité**"et est notée I_n. Par exemple :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matrices inverses :

Si A et B sont des matrices carrées telles que $AB = BA = I$ alors B est dite inverse de A et nous écrirons $B = A^{-1}$(B égal à l'inverse de A). La matrice B aura pour inverse la matrice A et nous écrirons $A = B^{-1}$.

Par exemple :

Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, chaque matrice du produit est la matrice inverse de l'autre.

2.3.3 Transposée d'une matrice :

La matrice d'ordre $(m \times n)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes d'une matrice $(m \times n)$ A est appelée la transposée de A et notée A^t(A *transposée*).

Par exemple la transposée de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ est $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. On peut remarquer que l'élément a_{ij} des $i^{éme}$ ligne et $j^{éme}$ colonne de A se trouve aux $j^{éme}$ ligne et $i^{éme}$ colonne de A^t.

Théorème 2.3.1 *Si A^t et B^t sont les transposées de A et B respectivement et si k est un* *scalaire, nous avons immédiatement :* $(A^t)^t = A$ *et* $(kA)^t = kA^t$.

La transposée d'une somme de deux matrices est la somme de leurs transposées, c'est-à-dire :

$$(A+B)^t = A^t + B^t.$$

Théorème 2.3.2

La transposée d'un produit de deux matrices est le produit, dans l'ordre inversé, de leurs transposées, c'est-à-dire :

$$(AB)^t = B^t.A^t$$

2.3.4 Matrices symétriques :

Une matrice carrée A telle que $A^t = A$ est dite "**symétrique**". Ainsi une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est symétrique si $(a_{ij} = a_{ji})$ pour toutes les valeurs de i et j. Par exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ est symétrique .

2.4 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Définition 2.4.1 λ *est une valeur propre de* A_{nn} *si et seulement si il existe un vecteur* x *non nul tel que :*

$$Ax = \lambda x$$

On dit alors que x est le vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Exemple 2.4.1 $A \in M_n(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda = 2$

2.4.1 Propriétés des valeurs propres

On sait que les valeurs propres de la matrice A de format $k \times k$ sont les valeurs qui annulent le polynôme caractéristique de A soit

$$\rho(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Il existe donc trois possibilités pour les racines de $\rho(\lambda)$

— $\rho(\lambda)$ a k racines réelles distinctes.

—$\rho(\lambda)$ a quelques racines multiples.

— $\rho(\lambda)$ a quelques racines complexes.

Exemple 2.4.2 $A,B,C,D \in M_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) = \lambda_2 + 5\lambda + 6 \Longrightarrow S_P(A) = \{-3, -2\}$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p_B(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \Longrightarrow S_P(B) = \{1, 2, 3\}$.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_C(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \Rightarrow S_p(C) = \{3\}, 3$ étant de multiplicité 2.

4. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_D(\blacksquare) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow S_p(D) = \{1 + i, 1 - i\}$.

Théorème 2.4.1

Soit A une matrice carrée d'ordre k avec les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Alors

1.$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = tr(A)$

2.$\lambda_1 \times \lambda_2 \times .... \times \lambda_k = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$

Si λ_1 est une valeur propre complexe d'une matrice réelle A avec v comme vecteur propre correspondant alors le conjugué $\overline{v}$ de v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Exponentielle d'une matrice

Si $A \in M(k)$, on pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Munissons $M_n(k)$ de la norme $\|\|$ des opérateurs linéaires sur $\mathbb{k}^m$ associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$. On a alors

$$\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$$

de sorte que la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente. On voit de plus que

$$\left\| e^A \right\| \leq e^{\|A\|}$$

2.5 Systèmes différentiels

2.5.1 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

On appelle système d'équations différentielles du premier ordre, un ensemble d'équations de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

C'est un système du premier ordre de n équations à n fonctions inconnues $y_1, y_2, ..., y_n$ de la variable indépendante x.

Exemple 2.5.1 *Le système suivant est un système de deux équations à deux fonctions inconnues*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = xy_1 + 2y_2 - 3x \\ \frac{dy_2}{dx} = \sin y_1 - y_2 + 5 \end{cases}$$

Ce système est non linéaire à coefficients variables.

Exemple 2.5.2 *Voici un système de* 2 *équations inconnues à* 3 *coefficients dans* $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

On aurait l'écrire tout aussi bien

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 8 \\ x_1 + 0 \times x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Définition 2.5.1 *On appelle forme normale d'un système d'équations différentielles linéaire du première ordre, tout système de la forme*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots\dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases}$$

Où a_{ij} $(i, j = 1.2, ..., n)$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ sont des fonctions données en x.

Nous supposons que a_{ij} et b_i sont des fonctions continues en x , pour tout

$i, j = 1, 2, ..., n$. Quand $b_i = 0$, pour $i = 1, 2, ..., n$, le système linéaire est dit homogène. Dans le cas contraire, le système est dit non homogène.

Forme matricielle d'un système d'équations différentielles du premier ordre

Pour résoudre un système d'équations différentielles du première ordre, on a besoin de réécrire ce système sous forme matricielle. En d'autre terme, le système est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots\dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

On peut le se réécrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ . \\ . \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire

$$Y' = AY + B$$

Où la matrice de colonne B s'appelle le second membre du système. Dans le cas $B \neq 0$, Le système est dit non homogène. Si $B = 0$, on dit que le système est un système d'équations différentielles linéaires homogène.

Exemple 2.5.3 *Réécrire le système suivant sous forme matricielle*

$$\begin{cases} x' = x + y - 3z + t \\ y' = -2x + 4y - 3 \\ z' = x - 5z + \sin t. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -3 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Alors la forme matricielle est

$$Y' = AY + B$$

Telles que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} t \\ -3 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Exemple 2.5.4 *Réécrire le système matricielle suivant sous forme d'un système d'équations différentielles linéaires*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t \\ -e^t \end{bmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 3t \\ y' = 2x + y - e^t. \end{cases}$$

Systèmes linéaires homogènes du premier ordre

Maintenant, on présentera quelques théorèmes et définitions qui s'appliquent aux systèmes linéaires homogènes du premier ordre ayant la forme :

$$Y' = AY$$

Où A est une matrice carrée $n \times n$.

Définition 2.5.2

Les n fonctions vectorielles $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ sont linéairement indépendantes sur un intervalle I si et seulement si l'identité vectorielle

$$c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + ... + c_nY_n(x) = 0$$

Ce qui implique que

$$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0.$$

Sinon, ces fonctions vectorielles sont dites linéairement dépendantes.

Définition 2.5.3 *Le déterminant d'une matrice formée par les vecteurs à n lignes*

$(Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x))$ est appelé **Wronskien** du systéme de vecteurs $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ défini par

$$W(Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)) = |Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)|$$

Soient $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$, n solutions du système homogène $Y' = AY$ sur un intervalle I où A est une matrice carrée d'ordre n.

Alors, le système$(Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x))$ est libre si et seulement si le Wronskien

$$W(Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)) \neq 0$$

pour tout $x \in I$.

Systèmes linéaires non homogène du premier ordre

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans $\mathbb{k}^n$ est une équation

$$Y'(x) = \ AY + B$$

Où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^m$ est la fonction inconnue et

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in M_m(\mathbb{k}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^m.$$

sont des fonctions continues données

$A : I \to M_m(\mathbb{k}) = \{matrices\ carrées\ m \times m\ sur\ \mathbb{k}\}$,

$B : I \to \mathbb{k}^m$, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exemple 2.5.5 *Le système linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants est :*

$$Y'(x) = AY(x) + B$$

Où

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + 2y + z + 1 \\ z' = x + z + 4 \end{cases}$$

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre tel que la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Système autonome de deux équations différentielles

Soit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Phi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \Psi(x, y) \end{cases}$$

Avec Φ et Ψ deux fonctions continues sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$, est un système autonome de deux équations différentielles.

On l'appelle système autonome parce que la variable t n'intervient pas en dehors des dérivées, bien sûr une solution est appelée trajectoire du système autonome.

• On peut transformer un système autonome en équation différentielle classique $\frac{dy}{dx} = \frac{\Psi(x,y)}{\phi(x,y)}$

Cela revient à faire disparaitre «t »

• Réciproquement, une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{\Psi(x,y)}{\phi(x,y)}$ peut se transformer en système autonome en ajoutant du temps t . Le tout est de bien choisir les deux fonctions Φ et Ψ de façon à savoir intégrer le système autonome.

On aura ainsi les trajectoires du système qui sont les courbes intégrales de l'équation différentielle en paramétriques.

Exemple 2.5.6 *Soit l'équation différentielle* $y' = \frac{1+y}{2x+y'}$, *on pose*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y \end{cases}$$

Il est facile d'intégrer cette dernière équation, qui est dans notre cas particulier linéaire à coefficients constants.

Cela donne : $y = \lambda e^t - 1$, valeur que l'on reporte dans la première :$\frac{dx}{dt} = 2x + \lambda e^t - 1$.

Il est encore facile d'intégrer cet équation, qui est encore, dans notre cas particulier, linéaire à coefficients constants.

Cela donne cette fois : $x = \mu e^{2t} - \lambda e^t + \frac{1}{2}$.

Finalement, on a les courbes intégrales en paramétriques :$\begin{cases} x = \eta e^{2t} - \lambda e^t + \frac{1}{2} \\ y = \lambda e^t - 1 \end{cases}$

Chapitre 3

Résolution des systèmes différentiels par la méthode de calcul des valeurs propres

3.1 Résolution des systèmes différentiels linéaires

3.1.1 Résolution d'un système $X' = AX$: cas où la matrice A est diagonale

Soit A une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ...0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si on pose $X = (x_1, ..., x_n)^t$, le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1' & = & \lambda_1 & x_1 \\ x_2' & = & \lambda_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & = & \lambda_n & x_n \end{array}\right.$$

Il s'agit de n équations indépendantes, chacune étant linéaire homogènes à coefficient constant.

Nous savons résoudre ces équations :

La solution générale de $x_i' = \lambda_i x_i$ est $x_i(t) = \alpha_i \exp(\lambda_i t)$, où α_i est un constant arbitraire.

La solution générale du système $X' = AX$ est donc

$$X(t) = (\alpha_1 \exp(\lambda_1 t), ..., \alpha_n \exp(\lambda_n t))$$

Si $(e_1,\ .....,e_n)$ est la base canonique de R^n, cette solution générale s'écrit encore

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)e_1 + \ldots .... + \alpha_n \exp(\lambda_n t)e_n$$

Une base de l'espace des solutions est donc

$$\{\exp(\lambda_1 t)e_1, ..., \exp(\lambda_n t)e_n\}$$

Cet espace est bien de dimension n.

Exemple 3.1.1 *Soit le système*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 4x \\ y' = -2y \end{array}\right.$$

Son écriture vectorielle est $X' = AX$, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

En fait, il s'agit de deux équations différentielles indépendantes, l'une en x, l'autre en y.

La solution générale est

$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^{4t} \\ y = \alpha_2 e^{-2t} \end{cases}$$

où $\alpha_1$et α_2 sont des constantes arbitraires.

Une base de l'espace des solutions est donc

$$\begin{cases} U_1(t) = \exp(4t)e_1 = \begin{pmatrix} \exp(4t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_2(t) = \exp(-2t)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-2t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.1.2 Résolution d'un système $X' = AX$: Cas où la matrice A est diagonalisable, à valeurs propres toutes réelles

Cas 1 : n valeurs propres réelles distinctes

Définition 3.1.1 *on dit que A est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que l'on ait $A = PDP^{-1}$.*

Rappelons que les colonnes sont formées des composantes d'une base de vecteurs propres, les éléments diagonaux correspondants de étant les valeurs propres associées. L'idée est de ramener la résolution du système à celle d'un système $U' = DU$, où est diagonale.

Posons $U(t) = P^{-1}X(t)$.

Puisque est une matrice constante, on a $U'(t) = P^{-1}X'(t)$.

On trouve

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) = DP^{-1}X(t) = DU(t)$$

Or, puisque la matrice D est diagonale, on sait résoudre le système $U'(t) = DU(t)$.

On revient aux solutions du système initial en utilisant la relation

Si $U(t)$ est la solution générale de $U'(t) = DU(t)$, la solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = PU(t)$

Pour trouver la solution générale de $X' = AX$, il faut trouver les matrices D et P, mais il n'est pas nécessaire de calculer la matrice P^{-1}.

Proposition 3.1.1 *Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, λ est une valeur propre de A et V est un vecteur propre associé. Alors la fonction*

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow e^{\lambda t}V$$

est la solution du système différentiel $X' = AX$.

preuve : Soit $X(t) = e^{\lambda t}V$. On a alors

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}(\lambda V) = e^{\lambda t}AV = AX(t).$$

Cela prouve que $X(t)$ est bien la solution du système homogène $X' = AX$.

Théorème 3.1.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons que $(V_1, ..., V_n)$ est une base de vecteur propre et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i (1 \leq i \leq n)$ forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.*

preuve

- Tout d'abord, par la proposition précédente, les $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ sont bien des solutions du système différentiel.
- Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soient $c_1, ..., c_n$ des réels tels que

$$c_1 X_1(t) + ... + c_n X_n(t) = 0.$$

Cet égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $t = 0$ où elle devient

$$c_1 V_1 + ... + c_n V_n = 0.$$

Cela implique $c_1 = ... = c_n = 0$ car les V_i forment une base de $\mathbb{R}^n$.

- Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, ..., V_n$. Alors la matrice $P^{-1}AP$ $= A$ est diagonale.
- Soit $X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. La matrice de passage P étant inversible, notons $Y = P^{-1}X$

(donc $X = PY$). Alors $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$. Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases} \qquad \text{d'où } Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, ..., V_n$ alors

$$X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + ... + k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t).$$

On vient de prouver que n'importe quelle solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$.

Ainsi la famille $(X_{1,}..., X_n)$ est génératrice de l'espace des solutions.

• **Conclusion** : $(X_1, ..., X_n)$ est une base de solutions.

Une base de l'espace des solutions est donc

$$\begin{cases} U_1(t) = \exp(4t)e_1 = \begin{pmatrix} \exp(4t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_2(t) = \exp(-2t)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-2t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Autre présentation de la solution générale Il résulte facilement de ce qui précéde que, si $(V_1, ..., V_n)$ est une base de vecteurs propres de A, le vecteur V_i étant associé à les valeurs propres λ_i, les fonctions $\exp(\lambda_i t)V_i(i = 1, ..., n)$ forment une base de l'espace des solutions.

La solution générale de $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + ... + \alpha_n \exp(\lambda_n t)V_n$$

où les $\alpha_i(i = 1...n)$ sont des constantes réelles.

Conditions initiales :

La solution prend la valeur initiale $X_0 = \alpha_1 V_1 + ... + \alpha_n V_n$.

Autrement dit les constantes $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sont les composantes de la valeur initiale X_0 dans la base de vecteurs propres $(V_1, ..., V_n)$.

En fait, la condition initiale X_0 est en général donnée dans la base canonique sous la forme

$$\begin{cases} x_1(0) = c_1 \\ \quad\vdots \\ x_n(0) = c_n \end{cases} \tag{a}$$

Les constantes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ peuvent se calculer par la formule de changement de base

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Le calcul de P^{-1} peut donc être utile quand on veut imposer à la solution des conditions initiales données.

Dans la pratique, si on doit trouver une seule solution avec les conditions initiales (a) imposées, chercher les constantes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ telles que

$$\alpha_1 V_1 + ... + \alpha_n V_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Exemple 3.1.2 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x' = 5x - y + 9z \\ y' = 3x + 4y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour les valeures propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 7$.

Des vecteurs propres correspondants s'écrit

$$V_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution générale du système s'écrit donc

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \alpha e^t V_1 + be^{2t} V_2 + ce^{7t} V_3 = \alpha e^t \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} + be^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + ce^{7t} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On l'écrit sous la forme :

$x(t) = 9\alpha e^t - 2be^{2t} + 3ce^{7t}$

$y(t) = -9\alpha e^t + 3be^{2t} + 3ce^{7t}$

$z(t) = 5\alpha e^t + be^{2t} + ce^{7t}$

Nous cherchons la solution vérifiant $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

En faisant $t = 0$ dans le système ci-dessus, on obtient le système (non différentiel)

$$\begin{cases} 9\alpha - 2b + 3c = 1 \\ -9\alpha + 3b + 3c = 2 \\ 5\alpha + b + c = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système linéaire, on trouve $\alpha = -1/12, b = -1/10, c = 31/60$.

La solution cherchée est donc

$x(t) = -3/4e^t + 1/5e^{2t} + 31/20e^{7t}$

$y(t) = 3/4e^t - 3/10e^{2t} + 31/20e^{7t}$

$z(t) = -5/12e^t - 1/10e^{2t} + 31/60e^{7t}$

3.1.3 Cas2 : valeurs propres complexes simples

On a vu que si A admet une valeur propre simple λ_1 complexe non réelle et si v_1 est un vecteur propre associé, alors

$\overline{v_1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre simple $\overline{\lambda_1}$. Ainsi

$$X(t) = \alpha_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \overline{v_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$$

pour tous scalaires $\alpha_1$et α_2.

Nous allons utiliser la formule d'Euler afin de n'obtenir que des solutions réelles.

Exemple 3.1.3 *Trouver la solution générale du système $X' = AX$ tel que*

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} X.$$

Nous déterminons d'abord les valeurs propres de A. En effet, l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Qui s'écrit aussi

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Admet comme racines

$$\lambda_1 = -2+i, \lambda_2 = -2-i$$

Un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -2+i$ est solution du système

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On peut prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

La solution générale est

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{(-2+i)t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(-2-i)t}$$

En employant la formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On trouve que toute solution réelle de ce système est de la forme

$$X = \alpha_1 \left\{ e^{-2t}\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - e^{-2t}\sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \alpha_2 \left\{ e^{-2t}\sin t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t}\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Théorème 3.1.2 *Soit $\lambda_1 = a + ib,\ \ b > 0$ une valeur propre complexe de la matrice A à ceofficients réels et soit v un vecteur propre correspondant. Alors le système linéaire $X' = AX$ possède deux solutions linéairement indépendantes*

$$X_1 = [\mathrm{Re}(v)\cos bt - \mathrm{Im}(v)\sin bt]\, e^{at}$$

$$X_2 = [\mathrm{Re}(v)\cos bt + \mathrm{Im}(v)\sin bt]\, e^{at}$$

sur $\mathbb{R}$, où $\mathrm{Re}(v)$, $\mathrm{Im}(v)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de vecteur propre v.

3.1.4 Cas 3 : valeurs propres multiples

On considère toujours le système linéaire homogène du premier ordre

$$X' = AX$$

Où A est une matrice réelle $n \times n$.

1- Premiére situation

On peut trouver deux vecteurs propres non colinéaires v et w associés à cette valeur propre λ. On a donc deux solutions linéarement indépendantes associées à cette valeur propre :$ve^{\lambda x}$ et $we^{\lambda x}$ et la méthode général s'applique. Voici un exemple concrétisant ce cas.

Exemple 3.1.4 *Trouver la solution générale du système $X' = AX$ où*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

D'abord, on cherche les valeurs propres de A dont le polynôme caractéristique est défini par

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (3-\lambda)\left[(9-\lambda)(-1-\lambda)+24\right] \\ &= (3-\lambda)\left[\lambda^2-8\lambda+15\right] \\ &= P(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-5) \end{aligned}$$

Le polynôme admet comme racines

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$$

Un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 5$ est solution du système

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les deux premiéres équations conduisent à $v_{11} = -v_{12}$. La troisiéme équation devient alors $v_{13} = v_{11}$. Un vecteur propre possible est donc

$$v_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$ est solution du système

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que les trois équations sont les mêmes : $6v_{21} + 4v_{22} = 0$. Cela conduit à $6v_{21} = -4v_{22} \Longrightarrow v_{22} = -\frac{3}{2}v_{21}$ et v_{23} est une constante arbitraire. Si l'on prend $v_{23} = 1$, on peut choisir $v_{21} = v_{22} = 0$ et le vecteur propre est alors

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Maintenant, si l'on prend $v_{23} = 0$, on doit choisit $v_{21} \neq 0$,soit $v_{21} = 2$ conduisant à $v_{22} = -3$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre indépendant de v_2 :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Donc la solution générale est

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

2- Deuxiéme situation

On ne peut pas trouver deux vecteurs propres non colinéaires associés à cette valeur propre λ. Par définition, on peut tout de même trouver un vecteur propre v associé à λ et $X_1 = ve^{\lambda t}$ est une solution. Il reste à trouver une autre solution non proportionnelle à X_1. On démontre que dans cette situation on peut trouver un vecteur w telle que

$$(A - \lambda I)w = v.$$

Alors

$$X_2 = vte^{\lambda t} + we^{\lambda t}$$

On a :

$$AX_2 = te^{\lambda t}Av + e^{\lambda t}Aw = t\lambda e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}(v + \lambda w)$$

Tandis que

$$X_2' = ve^{\lambda t} + vt\lambda e^{\lambda t} + w\lambda e^{\lambda t}$$

et comme la position des scalaires est importance, on constante que l'on a

$$X_2' = AX_2.$$

D'autre part, $(A - \lambda I)w \neq 0$, donc w n'est pas proportionnel à v, et X_1, X_2 sont deux solutions indépendantes.

Théorème 3.1.3 *Si la matrice A du système $X' = AX$ possède une valeur propre double λ telle que le sous-espace propre associé soit une droite alors*

$$X_1 = ve^{\lambda t} \quad \text{et} \quad X_2 = vte^{\lambda t} + we^{\lambda t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes du système, où v est un vecteur propre associé à λ et w est un vecteur propre telle que $(A - \lambda I)w = v$.

Exemple 3.1.5 *Trouver la solution générale du système $X' = AX$ avec $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire*

$$\begin{cases} X_1' = 6X_1 - X_2 \\ X_2' = 4X_1 + 2X_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

D'abord, on détermine les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)(2-\lambda)+4=0$$

donc

$$(\lambda-4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

Un vecteur propre v associé à $\lambda = 4$ est solution du système

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les deux équations sont les mêmes et conduisent à $v_2 = 2v_1$. Si l'on prend $v_1 = 1$, le vecteur propre est donc

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} \quad \text{est une solution de (3.1)}$$

Maintenant, on résout$(A-4I)w = v$. Soit

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Soit aussi

$$\begin{cases} 2w_1 - w_2 = 1 \\ 4w_1 - w_2 = 2, \end{cases}$$

Et on peut prendre

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} e^{4t}$$

En vertu du théorème précédent, la solution générale est donc

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} e^{4t}$$

3.2 Résolution d'un système $X' = AX$ quand A admet des valeurs propres toutes réelles et A n'est pas diagonalisable

Si la matrice A à toutes ses valeurs propres réelles, mais que certaines sont multiples, elle n'est peut-être pas diagonalisable, mais elle est toujours trigonalisable : on peut trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

Posons, comme dans le cas diagonalisable, $X(t) = PU(t)$, soit $U(t) = P^{-1}X(t)$.

On a

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PTP^{-1}X(t) = TU(t)$$

Voyons comment résoudre le système $U' = TU(t)$, où T est triangulaire supérieure.

Si la matrice T s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} u_1' = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + ... + \alpha_{1n}u_n \\ u_2' = \alpha_{22}u_2 + ... + \alpha_{2n}u_n \\ \vdots \\ u_n' = \alpha_{nn}u_{nn} \end{cases}$$

La solution générale de la derniére équation est

$$x_n = c_n \exp(\alpha_{n,n}t)$$

En reportant dans l'avant dernière, on trouve

$$u_{n-1}' = \alpha_{n-1,n-1}u_{n-1} - \alpha_{n-1,n}c_n \exp(\alpha_{n,n}t)$$

C'est une équation linéaire du premier ordre avec second membre.

On sait la résoudre :

La solution générale de l'équation homogène associée est

$$c_{n-1} \exp(\alpha_{n-1,n-1}t)$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$\alpha \exp(\alpha_{n,n} t) si \ \alpha_{n,n} \neq \alpha_n - 1, n-1$$

$$\alpha t(\exp)(\alpha_{n,n} t) si \ \alpha_{n,n} = \alpha_n - 1, n-1$$

(Remarquons que le coefficient α dépend de c_n).

En reportant ainsi chaque fois les solutions trouvées dans l'équation précédente, on obtient la solution générale $U(t)$ du système $U' = TU$. Cette solution dépend de n constantes arbitraires $c_1, ..., c_n$.

Pour trouver la solution générale du système $X' = AX$, il suffit de faire $X(t) = PU(t)$.

Exemple 3.2.1 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$

Il s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre pour 1 est

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre pour 2 est de dimension 1, un vecteur propre est

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice n'est donc pas diagonlisable. Nous complétons la base avec le vecteur, on a

$$AV_3 = -2v_1 + v_2 + 2v_3$$

3.2.1 Résolution d'un système linéaire non homogéne

La solution générale du système non homogène

$$X' = AX + G(x).$$

est donnée par

$$X = X_c + X_P \tag{3.1}$$

où X_c est la solution du système homogène

$$X' = AX$$

et X_p est une solution particuliére du système non homogène obtenue, soit par la méthode à coefficients indéterminés, soit par la méthode de la variation des paramètres.

Exemple 3.2.2 *Trouver la solution générale du système linéaire non homogène par la méthode de variation des paramétres.*

$$X' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = AX + G(t).$$

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ sont : $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1$

Ainsi que la solution complémentaire

$$X_c = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

On cherche une solution particulière du système non homogène de la forme

$$X_c = u_1(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

On obtient

$$5u_1(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + u_1'(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} - u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + u_2'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left\{ u_1(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right\} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les termes contenant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont éliminés des deux côtés de l'équation précédente.

$$u_1'(t)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + u_2'(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t)e^{5t} \\ u_2'(t)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode de Cramer, on résout le système pour avoir

$$u_1'(t)e^{5t} = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{t}{3}$$

$$u_2'(t)e^{-t} = \frac{\begin{matrix} 3 & t \\ 2 & 1 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-2t}{3}$$

D'ou

$$u_1'(t) = \frac{t}{3}e^{-5t}$$

et

$$u_2'(t)e^{-t} = \frac{3-2t}{3}e^{t}.$$

Par intégration, il vient

$$u_1(t) = \frac{-1}{3} e^{-5t} \left(\frac{t}{5} + \frac{1}{25} \right)$$
$$u_2(t) = \frac{1}{3} e^{t} (5 - 2t).$$

La solution particulière s'écrit enfin

$X_P = \frac{-1}{3} e^{-5t} \left(\frac{t}{5} + \frac{1}{25} \right) \binom{3}{2} e^{5t} + \frac{1}{3} e^{t} \left(5 - 2t\right) \binom{0}{1} e^{-t}$

$X_P = \frac{-1}{3} \left(\frac{t}{5} + \frac{1}{25} \right) \binom{3}{2} + \frac{1}{3} \left(5 - 2t\right) \binom{0}{1}$

$X_P = \begin{pmatrix} -\frac{t}{5} - \frac{1}{25} \\ \frac{123}{75} - \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$

La solution générale est ainsi donnée par

$$X = X_c + X_p$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié des systèmes d'équations différentielles. Nous avons utilisé la méthode de calcul des valeurs propres pour la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires dont des solutions de ces systèmes sont possible. Dans cette méthode, la nature des valeurs propres est celle qui contrôle la solution d'un système d'équations différentielles, en plus de prendre en compte une matrice pour chaque système différentiel.

Bibliographie

[1] Basem Attili et Rima Cheaytou, Equations différentielles ordinaires avec applications, ellipses, 2016.

[2] De Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed. EDP sciences, 1993.

[3] Mc Graw-Hill Fr, Matrices :cours et Problemes, Serie Schaum, 1984.

[4] Gloria Faccanoni, Equations différentielles ordinaires, http ://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html, 2016

[5] Mohammed Hazi, Equations différentielles ordinaires du premier et second ordre :assise théorique et applications, 2018.

[6] Vincent Nozick, Vecteurs propres et valeurs propres : Université Paris-est-Marne-la-vallée.

[7] Yann Morére, Cours de calcul Matriciel, https ://docplayer.fr/31526196-Cours-de-calcul-matriciel-yann-morere.html, 2001.

[8] Ji-Huan He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Applied Mathematics and Computation, 114 pp. 115–123, 2000.

[9] Uri M Ascher et Linda R Petzold, Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations, amazon, 1997.