République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Analyse

Par

Khaldi Manal

Titre :

La stabilité exponentielle par la méthode de Lyapunov

Membres du jurés :

Radjeh Fouzia	M.C.B	**Président**	U. Biskra
Hamdi Soumia	M.A.A	**Encadreur**	U. Biskra
Ghodjmis Fatiha	M.A.A	**Examinateur**	U. Biskra

Septembre 2020

Didicace

À ma chère mère,

À mon chèr père,

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

À mon chèr mari A. Ben Necib,

Pour ses soutients moral et leurs conseils précieux tout le temps.

À mes frères surtout Seyfeddine,

À mes sœurs,

À ma belle cousine D. Yousra,

Pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

À tout ma famille.

À tout mes amis.

Remerciements

- Mes remerciements vont premièrement << **DIEU**>> tout puissant pour la volonté,

la santé et la patience qu'il m'a données durant toutes ces années d'études.

- Nous voudrions présenter nos sincères remerciements et notre gratitude à notre

encadreur

<< **HAMDI. S** >> d'avoir accepté de nous encadrer et nous

guider et pour sa patience.

- Mes remerciement s'adressent aussi au Pr <<**Gidad.D**>> qui est toujours là à

répondre

à mes questions,et pour ses précieux conseils

-Nous remercions aussi notre Président et examinateur << **Radjeh. F**>>

et << **Ghodjmis. F**>> pour nous

donner une partie de son temps.

- Nous remercions également notre Chef de Département de Mathématiques

<<**Hefayed. M**>>,

- Et tous les enseignants qui nous avons apporté leur aide au bon

acheminement de parcours éducatif

et qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

- je n'oublie pas non plus mes très chers parents et mon cher mari qui a toujours

été mon soutien dans tous les domaines tout au

long de ma carrière universitaire.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui remonte aux travaux de **H. Poincaré** $(1854 - 1912)$ et au mémoire qu'il présenta en 1881 intitulé : " **Sur les courbes définies par une équation différentielle**".

Influencé par les travaux de **H. Poincaré**, **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** $(1857 - 1918)$ a étudié dans son mémoire "**Problème général de la stabilité du mouvement**", la notion de la stabilité. Nous entendons par la stabilité des points d'équilibre. Ses méthodes, sophistiquées pour l'époque, sont encore utilisées aujourd'hui. Rappelons qu'il a donné des définitions analytiques de la notion de stabilité et de stabilité asymptotique. Et de stabilité exponentielle.

La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la solution peut être gardée arbitrairement près de l'équilibre. Partant de ces définitions, **A. M. Lyapunov** a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires. La première méthode consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité. La dernière étape de cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne ainsi obtenue à partir la linéarisation.

Nous distinguerons trois cas. Si toutes les valeurs propres admettent une partie réelle strictement négative, nous déduisons la stabilité asymptotique. S'il existe une valeur propre telle que sa partie réelle est strictement positive, nous aurons l'instabilité. Enfin, si toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives ou nulles et s'il en existe une qui admette une partie réelle nulle, nous ne pouvons pas conclure. Cette méthode est connue aujourd'hui sous le nom de "**Première méthode de Lyapunov**" ou bien "**Méthode indirecte de Lyapunov.** Cette méthode, malgré sa simplicité ne semble pas très efficace. En d'autres termes, la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que localement autour du point d'équilibre concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement global. De plus, les dynamiques d'un système non linéaire sont beaucoup plus riches que celles d'un système linéaire dans le sens où elles reflètent des comportements et des phénomènes purement linéaires. Pour cela, **A. M. Lyapunov** a proposé une deuxième méthode pour l'étude de la stabilité. Aujourd'hui, cette méthode est connue sous le nom de "**Méthode directe de Lyapunov**" ou par "**Seconde méthode de Lyapunov**". Cette méthode est une généralisation de l'idée de l'énergie du système. Le but est de trouver une fonction qui décroît le long des trajectoires du système. Aujourd'hui, ces fonctions sont appelées "**Fonctions de Lyapunov**". Le principal inconvénient de la méthode directe est de ne pas disposer de guide pour le choix de la fonction de Lyapunov, dans la plupart des applications, les fonctions considérées sont l'énergie totale du système.

Dans ce travail, nous adapterons cette méthode pour l'étude de la stabilité exponentielle d'un système linéaire d'équation de type **Timochenko**.

Le mémoire que nous présentons est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base sur les **EDO** et **EDP** et de la théorie d'existence, d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires et on rappelle aussi quelques inégalités et outils mathématiques qui utiliser au long de ce mémoire. Cette partie est largement inspirée du Livre de *Jordan, C* [4], et de cours donné par *Pujo-Menjout, L* [9].

En deuxième chapitre, nous avons introduire quelques résultats théoriques de stabilité associés aux systèmes différentiel en utilisant les méthodes de Lyapunov. Nous introduisons aussi quelques exemples simples pour clarifier quelques résultats. Cette partie est largement inspirée des livres : *[5], [6], [7], [8].*

Le troisième chapitre contient un exemple d'application de la méthode de Lyapunov pour démontrer la stabilité exponentielle d'un système linéaire d'équation de type Timoshenko. Cette partie est inspirée d'un article de *Ammar-khodja* [2].

Alexander Mikhailovich Liapounov, mathématicien et physicien russe. Après des études à l'université de Saint-Pétersbourg (où il est élève de P. L. Tchebychev), il est assistant puis professeur à l'université de Kharkov. En 1902, il est nommé professeur à l'université de Saint-Pétersbourg.

Chapitre §.1
Préliminaires

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base sur les **EDO** et **EDP** et de la théorie d'existence, d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires et on rappelle quelques inégalités et outils mathématiques qui utilisér au long de ce mémoire. Cette partie est largement inspirée du Livre de *Jordan, C* [4], et de cours donné par *Pujo-Menjout, L* [9].

1.1 Différents types d'équations

Définition 1.1.1 ***(Équation differentielle ordinaire EDO)*** *Une équation différentielle ordinaire, également notée* ***EDO****, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \to x(t)$ et ses dérivées $x', x'', ..., x^{(n)}$ au point t définie par :*

$$F(t, x, x'', ..., x^{(n)}) = 0.$$

Où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de R (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in N^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 ***(Équation differentielle normale)*** *On appelle équation différentielle* *normale d'ordre n toute équation de la forme :*

$$x^{(n)} = f(t, x, x'', ..., x^{(n-1)}).$$

Définition 1.1.3 ***(Équation differentielle autonome)*** *On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme :*

$$x^{(n)} = f(x, x'', ..., x^{(n-1)}).$$

Autrement dit, f ne dépend pas éxplicitement de t.

Remarque 1.1.1 *Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.*

Exemple 1.1.1 *Equation du premier ordre sous la forme normale :*

$$x' = f(t, x).$$

Equation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x).$$

1.2 Solutions

Définition 1.2.1 *On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On notera en général cette solution (x, I).*

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Remarque 1.2.1 *Mais nous n'aurons pas besoin de traiter les équations différentielles d'ordre n étant donné que l'on est capable de se ramener à l'ordre 1. Par conséquent, nous* *ne donnerons les résultats que pour les* ***EDO*** *d'ordre* 1 *ici, sous forme normale,autrement dit, du type :*

$$x' = f(t, x).$$

Où x *est la fonction inconnue de la variable réelle* t *à valeurs dans un espace* $\mathbb{R}^n$*, et* f *sera une fonction donnée sur* $I \times J$*, ouvert, non vide de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*.*

1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On note $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (on a vu en analyse que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$).

Définition 1.3.1 ***(probleme de de Cauchy)*** *Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous forme normale*

$$x' = f(t, x).$$

Pour $(t, x(t)) \in U$*, et un point* $(t_0, x_0) \in U$*, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions* x *telles que*

$$x(t_0) = x_0.$$

Notation 1.3.1 *On note le problème de Cauchy de la façon suivant :*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *Pour tout* $(t_0, x_0) \in U$*, le problème* (1.2) *est équivalent à :*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Théorème 1.3.1 ***(solution du problème de Cauchy)*** *Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *avec la condition initiale* $(t_0, x_0) \in U$ *et* $t_0 \in I$ *est* *une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$ telle que :*

i. pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,

ii. pour tout $t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$,

iii. $x(t_0) = x_0$.

Théorème 1.3.2 ***(Cauchy-Lipschitz)*** *Soient $f \in C(U, \mathbb{R}^N)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0, x_0) \in U$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0), c'est à dire qu'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans U et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\| .$$

Alors on a les propriétés suivantes.

Existence :Il existe $T > 0$ et $x \in C^1([t_0 - T, t_0 + T], J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Unicité :Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Régularité Si de plus f est de classe C^r, $r \geq 1$, alors x est de classe C^{r+1}.

1.4 Équation aux dérivées partielle

Définition 1.4.1 *Une équation aux dérivées partielle(**EDP**) est une équation contenant une fonction x de plusieure de variable et de dérivées de x $(x = x(t_1, t_2, ..., t_n)$.*

Exemple 1.4.1

1. $u_t + u_x = 0$ (équation de transport).
2. $u_t = k u_{xx}$ $k \in \mathbb{R}$ (équation de la chaleur).

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad c \in \mathbb{R}$ (équation des ondes).

4. $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ (équation de poisson).

1.5 Quelques inégalités outiles :

1.5.1 Inégalités de Hölder et de Minkowski :

L'inégalité de Hölder est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors que l'inégalité de Minkowski est une généralisation de l'inégalité triangulaire. Ces inégalités ne sont pas fréquemment utilisées mais il ne faut pas pour autant les négliger. En effet, lorsqu'elles sont utiles dans un problème, il est très difficile de s'en passer. C'est d'ailleurs pour cette raison que leur preuve n'est pas évidente.

Inégalité de Hölder :

Théorème 1.5.1 *Soient $p, q > 1$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}},$$

Ce qui s'écrit, à l'aide des signes somme,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b_i^q = \lambda a_i^p$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 1.5.1 *Pour $p = q = 2$ (qui conviennent puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$), on retrouve exactement l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec des variables positives).*

Inégalité de Minkowski :

Théorème 1.5.2 *Soit $p \in \mathbb{R}_*^+$ et soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ et $b1, \ldots, bn \in \mathbb{R}^+$.*

– Si $p > 1$, on a

$$((a_1 + b_1)^p + ... + (a_n + b_n)^p))^{\frac{1}{p}} \leq ((a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui s'écrit aussi, à l'aide des signes somme,

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

– Si $0 < p < 1$, on a au contraire

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b_i = \lambda a_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.5.2 Inégalité de Poincarée :

Théorème 1.5.3 *On suppose que Ω est un domaine ouvert et borné dans $\mathbb{R}^d$ alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2,$$

C'est à dire :

$$\|u\|_{0.\Omega}^2 \leq C_\Omega \left\|\nabla u(x)^2\right\|_{0.\Omega}^2.$$

Dans le cas où Ω est un ouvert et borné dans $\mathbb{R}$, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\|u\|_{0.\Omega}^2 \leq C_\Omega \|u'\|_{0.\Omega}^2.$$

Corollaire 1.5.1 *Si Ω est un ouvert et borné alors la semi-norme*

$$|u|_{1.\Omega} = \|\nabla u\|_{0.\Omega},$$

devient une norme équivalente à la norme de$\|u\|_{1.\Omega}$ dans l'espace H_0^1.

1.5.3 Formule de Green :

La formule de Green est une généralisation de l'intégration par partie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5.4 *Soit Ω un ouvert borné régulier. Si $u.v$ sont des fonction de C^1 de Ω, elles vérifients*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i ds,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq N}$ est la normale unité extiérieure à $\partial\Omega$.

1.5.4 Inégalité de Young :

Théorème 1.5.5 *pour $a, b > 0$ et $p, q > 1$ telque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Chapitre §.2
Stabilité et théorie de Lyapunov

Chapitre 2

Stabilité et théorie de Lyapunov

On présente dans cette partie les notions de la stabilité.

Considérons le système (H) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{H}$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

On suppose que les conditions d'existence et d'unicité des solutions de (H) sont vérifiées de sorte que le système (H) admette une unique solution $x(t, x_0)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Notions de stabilité

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problémes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Définition 2.1.1 *Le point x_e est dit point d'équilibre du système (H) si $f(x_e) = 0$ autrement dit x_e est une solution constante du systéme $\dfrac{dx}{dt} = f(x(t))$.*

Remarque 2.1.1 *[6] On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine 0 puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées*

$z = x - x_e$ la dérivée de z est donnée par :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x) = f(z + x_e) = g(z), \ \ et \ g(z) = 0,$$

l'origine est bien un point d'équilibre du système $\dfrac{dz}{dt} = g(z)$.

Définition 2.1.2 *[6]Le point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que*

$$si \ \ \|x_0 - x_e\| \leq r \ \ alors \ \ \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \forall t \geq 0.$$

Sinon le point d'équilibre est dit instable.

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de rayon ρ, il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon ρ. Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initiale n'entraine qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent.

Il existe plusieurs types de stabilité :

– Stabilité asymptotique.

– Stabilité exponentielle.

– Stabilité uniforme.

2.1.1 Types de stabilité

Stabilité asymtotique globale

Définition 2.1.3 *Un point d'équilibre x_e est globallement asymptotiquement stable si :*

a) Il est stable.

b) Toute solution $x(.)$ converge vers x_e :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e.$$

Stabilité asymptotique locale

Définition 2.1.4 *L'équilibre x_e est locallement asymptotiquement stable si :*

a) Il est stable.

b) Il existe $r > 0$ tel que : Si $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$

Stabilité exponentielle globale

Définition 2.1.5 *L'équilire x_e est globallement exponentiellement stable avec taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $\beta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ vérifie :*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Stabilité exponentielle locale

Définition 2.1.6 *L'équilibre x_e est locallement exponentiellement stable de taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $r > 0$ et $\beta > 0$ telle que $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons :*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Stabilité uniforme locale

Définition 2.1.7 *L'équilibre x_e est locallement uniformément stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Stabilité uniforme globale

Définition 2.1.8 *L'équilibre x_e est globallement uniformément stable s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globallement uniformément bornées.*

Remarque 2.1.2 *Si x_e est* exponentiellement *implique que x_e est* asymptotiquement stable *et ça implique que* x_e *est* stable.

Remarque 2.1.3 *Pour un système linéaire* $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$, *où* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.*

Théorème 2.1.1 *[6] S'il existe une valeur propre* λ *de* A *telle que* $Re(\lambda) > 0$, *alors le point d'équilibre* 0 *est instable.*

- Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
- Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

2.2 Les méthodes de Lyapunov

2.2.1 Méthode indirecte de Lyapunov

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile, en effet en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. De ce fait, La méthode indirecte de Lyapunov consiste à étudier la stabilité du système non linéaire en utilisant son linéarité, ce système linéarisé transforme le problème de stabilité global à un problème de stabilité local au voisinage du point d'équilibre.

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x + O(|x|^2)$$

Puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire associé à (H) :

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x.$$

Notons que $Df(x_e)$ est la matrice Jacobienne de f au point x_e,

$$A = Df(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e}$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre s'effectue donc en deux étapes :

- La première consiste à déterminer de la stabilité de $x = 0$, équilibre de $\dfrac{dx}{dt} = Df(x_e)x$, partant du fait que l'on sait d'éja déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de $Df(x_e)$.
- La deuxième étape, réside dans la manière de déterminer la stabilité de x_e à partir de celle de $y = 0$. Autrement dit, sous quelles conditions les systèmes (H) et $\dfrac{dx}{dt} = Df(x_e)x$ sont-ils équivalents ?

Théorème 2.2.1 *[1] Pour $\dfrac{dx}{dt} = Ax(t)$ avec r valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et $x_e = 0$ point d'équilibre.*

1. *Si $Re(\lambda_j) > 0$, pour $j \in \{1, ..., r\}$, alors 0 est* ***instable.***
2. *Si $Re(\lambda_j) \leq 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, alors :*
   - *si $Re(\lambda_j) < 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, alors 0 est* ***asymptotiquement stable.***
   - *si un pôle est tel que $Re(\lambda_j) = 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, et la multiplicité est 1 alors 0 est* ***stable.***
   - *si un pôle est tel que $Re(\lambda_j) = 0$, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, et la multiplicité est > 1 alors :*

     a) si j_i^j associés à λ_j sont scalaires alors 0 est ***stable.***

     b) $\exists\ J_i^j$ associé à λ_j non scalaire alors 0 est ***instable.***

Équivalence locale de flots

Définition 2.2.1 *Soient deux systèmes d'équations différentielles :*

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{M}$$

et

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \tag{A}$$

Soit $\varphi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le flot de (M) et $\psi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le flot de (A), ces flots sont dit topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui transforme le flot $\varphi(t, x_0)$ en le flot $\psi(t, x_0)$ de telle sorte que $h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Le théorème suivant va nous permettre de lier le système non linéaire (H) au système linéairisé $\frac{dx}{dt} = Ax$ pour juger la stabilité du (H).

Théorème 2.2.2 *[1] (**Hartman-Grobman**) Considérons le système (H) de flot t. Si x_e est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage v de x_e sur lequel le flot t est topologiquement équivalent au flot du linéairisé du système en x_e. Par conséquence, on a le théorème suivant :*

Théorème 2.2.3 *[6] Soit x_e un point d'équilibre de (H).*

- Si $Re(\lambda_j) < 0, \forall j \in \{1, ..., r\}$, alors x_e est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov
- Si $\exists\ j \in \{1, ..., r\}$ telle que $Re(\lambda_j) > 0$, alors x_e n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapunov.

Exemple 2.2.1 *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2; \\ x_2 = -a \sin x_1 - b \sin x_2. \end{cases}$$

Nous sommes en présence de deux points d'équilibres $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ et $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, la matrice jacobienne est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Pour étudier la stabilité de l'origine, on calcule la jacobienne au point $x = 0$,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\ |_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Pour tout $a, b > 0$, les valeurs propres de A sont purement réelles et sont strictement négatives. On conclut donc que le système est asymptotiquement stable à l'origine.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, on calcule la jacobienne en ce point :

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\ |_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $\tilde{A}$ sont :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$$

Pour tout $a > 0$ et $b \geq 0$, nous avons $\lambda_1 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} > 0$, en vertu du théorème précident, le point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ est **instable.**

2.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov, dite aussi 2^{ieme} méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non linéaires. En effet, le procédure de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner la dérivée temporelle le long d'une trajectoire.

Physiquement, cela revient à dire que si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système, (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre. En d'autre termes, le système est stable si son énergie diminue et elle est minimum à l'équilibre. Donnons d'abord la définition suivante :

Définition 2.2.2

1. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $V(0) = 0$.

a) On dit que la fonction$V$ définie positive si $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

b) On dit que la fonction V est semi-définie positive si $V(x) \geq 0$ pour tout $x \in B_\rho$ pour un $\rho > 0$.

c) La fonction V est dite définie négative (resp. semi-définie négative) si $-V$ est une fonction définie positive (resp. semi-définie positive).

d) V est non définie si : $V(0) = 0$ et $V(x)$ change de signe dans tout voisinage de 0.

2- Soit $g : [0, a] \to [0, +\infty[$ une fonction continue.

i) La fonction g est dite $K - fonction$ (ou bien de classe K) si elle est strictement croissante et $g(0) = 0$.

ii) Si de plus $a = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors g est dite $K_\infty - fonction$ (ou bien de classe K_∞).

On appelle dérivée temporelle le long de la trajectoire, la fonction $\dot{V}$ définie par :

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \left\langle \nabla V(x), \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle .$$

D'où les théorèmes de stabilité de Lyapunov suivants :

Fonction de lyapunov

Théorème 2.2.4 *L'origine du système (H) est stable s'il existe une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :*

1. V est définie positive.

2. $\dot{V}(t) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ est semi-définie négative.

Exemple 2.2.2 *(Exemple de pendule) L'équation du mouvement du pendule simple est donnée par :*

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

Où m, l, θ, k et g désignent respectivement la masse du corps, la longueur du fil, l'angle a un instant t (avec $\theta(0) = 0$), le coefficient de frottement et la gravité. En posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, nous réduisons l'équation de seconde ordre en un système de premier ordre, donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 \end{cases}$$

Et telle que le point d'équilibre $(0,0)$ est stable, pour cela, nous considérons la fonction suivante :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + ml(1 - \cos(x_1))$$

La dérivée temporelle de V est donné par :

$$\dot{V} = -kl^2x_2^2.$$

Il est claire que la fonction $V(x_1, x_2)$ est définie positive, et $V(0,0) = 0$. D'autre part, nous avons

$$\dot{V} \leq 0$$

Par suite, d'après Théorème présidant, l'équilibre $(0,0)$ est stable.

Stabilité asymptotique

Théorème 2.2.5 *L'origine du système (H) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :*

1. V est définie positive.
2. $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ est définie négative.

Théorème 2.2.6 *S'il existe une fonction V définie positive de $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que, pour $k \geq 0$*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle + kV(x) \leq 0.$$

Alors, l'équilibre $x = 0$ est stable et si $k > 0$ il est asymptotiquement stable.

Remarque 2.2.1 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.*

2.2.3 Stabilité exponentielle

Maintenant, nous tournons notre attention vers la décroissance exponentielle des solutions du système (H) :

Théorème 2.2.7 *Soit $V(x)$ une fonction définie positive de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ si :*

1) $\dot{V}$ est définies négative.

2) $\exists k_1, k_2, k_3, p$ telle que

$$k_1 \|x(t)\|^p \leq V(x) \leq k_2 \|x(t)\|^p \text{ et } \dot{V}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p .$$

Alors, $x_e = 0$ est **exponentiellement stable**.

Si la condition est verifié globalement, alors $x_e = 0$ est **globalement exponentiellement stable.**

Preuve. D'aprés le théorème nous avons :

$$k_1 \|x(t)\|^p \leq V(x) \leq k_2 \|x(t)\|^p$$

Donc

$$-V(x) \geq -k_2 \|x(t)\|^p \Longrightarrow -\|x(t)\|^p \leq -\frac{1}{k_2} V(x) \tag{k}$$

Nous avons aussi que

$$\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p$$

C'est-à-dire

$$\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p$$

De (k)

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{k_3}{k_2} V(x)$$

Par intégration on obtien

$$V(x) \leq V(x_0) \exp(-\frac{k_3}{k_2})t$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} k_1 \|x(t)\|^p &\leq V(x_0) \exp(-\frac{k_3}{k_2})t \\ &\leq k_2 \|x(0)\|^p \exp(-\frac{k_3}{k_2})t \end{aligned}$$

Alors

$$\|x(t)\| \leq (\frac{k_2}{k_1})^{\frac{1}{p}} \|x(0)\| \exp(-\frac{k_3}{pk_2})t$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.2.3 *Soit le système*

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

Ce système est globalement **exponentiellement stable**.

On effet. Soit la fonctions de Lyapunov

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Pour $p = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, on a

$$-\frac{x^2}{2} \leq V(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

Comme

$$\dot{V}(x) = -x^2 = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) < 0,\ \forall x \neq 0$$

Pour $k_3 = 2$, alors

$$\|V(x)\| \leq \|V(0)\| \exp(-t) \Longrightarrow \|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp(-t).$$

Chapitre §.3
Application en système de Timoshenko

Chapitre 3

Application en système de Timoshenko

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étude le système linéaire d'équation de type Timoshenko pour les poutres incluant un terme de mémoire, ce système est écrit comme :

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \ \text{ en } (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + g * \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \ \text{ en } (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.2}$$

où ρ_1, k, ρ_2, b et L sont des constantes positives. Les fonctions φ et ψ sont le déplacement transversal du vaisceau et l'angle de rotation d'un filament, respectivement, les conditions aux limites que nous considérons ici sont données par :

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Les conditions initiales sont :

$$\varphi(., 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(., 0) = \varphi_1, \quad \psi(., 0) = \psi_0, \quad \psi_t(., 0) = \varphi_1 \quad \text{en } (0, L). \tag{1.4}$$

Le terme de convolution habituel

$$g * \psi_{xx}(x,t) = \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds.$$

Représente le mémoire qui apparait par une fonction de classe C^2 à valeur réelle.

Le but principal de ce chapitre est démontré que le système (1.1)-(1.2) est stable exponentiellement si et seulement si les coefficients satisfont

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}. \tag{1.5}$$

Maintenant, nous montrons que la solution est exponentiellement stable c'est à dire tende vers à zéro à condition que le noyau g est tende vers à zéro. Plus précisément : si g est de type exponentiel, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{c} g > 0, \exists\ k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g \leq g' \leq -k_1 g,\ \ |g''| \leq k_2 g, \\ \lambda = b - \int_0^\infty g(s)ds > 0 \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

est satisfaite, la décroissance exponentielle de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + (b - \int_0^t g d\tau) |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + g \square \psi_x dx.$$

d'une solution $(\varphi.\psi)$ quand le temps tend vers l'infini sera prouvé si et seulement si les coefficients satisfit (1.5). Le symbole $\square$ indique la convolution suivante :

$$(g \square f)(t) = \int_0^t g(t-s) |f(s) - f(t)|^2 ds.$$

Dans la suite, nous supposerons toujours l'existence unique de solutions fortes pour le problème de la valeur limite initiale considéré.

3.2 la décroissance exponentielle

Nous considérons les noyaux exponentiels de type (1.6) et nous recherchons la décroissance exponentielle de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + (b - \int_0^t g d\tau) |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + g\square\psi_x dx. \tag{2.1}$$

En utilisant le lemme simple suivant :

Lemme 3.2.1 *Pour $f, h \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ nous avons*

$$2(f * h)(t)h_t(t) = (f'\square h)(t) + \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(s)ds\, |h(t)|^2 - (f\square h)(t)\right\} - f(t)\, |h(t)|^2.$$

Nous concluons facilement que l'énergie se désintègre :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}g(t)\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L g'\square\psi_x dx \leq 0. \tag{2.2}$$

Le point principal pour montrer la décroissance exponentielle est de construire un Lyapunov fonctionnel V satisfaisant

$$\beta_1 E(t) \leq V(t) \leq \beta_2 E(t). \quad \frac{d}{dt}V(t) \leq -\alpha V(t)$$

Pour tout $t \geq 0$ et certaines constantes β_1, β_2, α. Pour ce faire, nous utiliserons le technique multiplicative, et notre point de départ sera le multiplicateur $(g * \psi)_t$ pour traiter avec la fonctionnelle que j'ai donnée par

$$\begin{aligned} I(t) = {} & \int_0^L \rho_2 \psi_t (g * \psi)_t dx + b\int_0^L \psi_x (g * \psi_x) dx + k\int_0^L \psi (g * \psi) dx \\ & - \frac{1}{2}\int_0^L |g * \psi_x|^2 dx - \frac{b}{2}\left(\int_0^t g d\tau\right)\int_0^L |\psi_x|^2 dx \\ & + \frac{b}{2}\int_0^L g\square\psi_x dx + \frac{k}{2}\int_0^L g\square\psi dx - \frac{k}{2}(\int_0^t g d\tau)\int_0^L |\psi|^2 dx \end{aligned}$$

qui donnera un terme négatif $-\int_0^L |\psi_t|^2 dx$. Pour simplifier les notations, introduisons le symbole $\Diamond$ par

$$(g\Diamond h)(t) = \int_0^t g(t-s)\left\{h(t)-h(s)\right\}ds.$$

Ensuite nous avons :

Lemme 3.2.2 *Il y a* $c>0$ *et pour tout* $\varepsilon>0$ *une constante positive* C_ε *telle que pour* $t\geq 0$

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}I(t) \leq & -\frac{\rho_2}{2}g(0)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + C_\varepsilon(|g'|+g)\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \\ & + c\int_0^L |g'|\,\Box\psi_x dx + c\int_0^L g''\Box\psi dx + \varepsilon\int_0^L |\varphi_x|^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Preuve. En multipliant l'équation (1.2) par$(g*\psi)_t$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t(g*\psi)_t dx \\ &= \frac{d}{dt}\left\{-b\int_0^L \psi_x(g*\psi_x)dx + \frac{1}{2}\int_0^L |g*\psi_x|^2\,dx - k\int_0^L \psi(g*\psi)dx\right\} \\ &+ b\int_0^L \psi_{xt}(g*\psi_x)dx + k\int_0^L \psi_t(g*\psi)dx \\ &+ \rho_2 g(0)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \rho_2\int_0^L g'\psi_t\psi dx - \rho_2\int_0^L \psi_t(g''\Diamond\psi)dx \\ &- k\int_0^L \varphi_x\left\{g(0)\psi + g'*\psi\right\}dx.\end{aligned}$$

Observer

$$\begin{aligned}b\int_0^L \psi_{xt}(g*\psi_x)dx = & \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\int_0^t g ds\right)|\psi_x|^2\,dx - \frac{b}{2}\int_0^L g\,|\psi_x|^2\,dx \\ & -\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L g\Box\psi_x dx + \frac{b}{2}\int_0^L g'\Box\psi_x dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}k\int_0^L \psi_t(g*\psi)dx = & \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\int_0^t g ds\right)|\psi|^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^L g\,|\psi|^2\,dx \\ & -\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L g\Box\psi dx + \frac{k}{2}\int_0^L g'\Box\psi dx.\end{aligned}$$

nous concluons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(t) &= \rho_2 g(0)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \rho_2\int_0^L g'\psi_t\psi dx \\ &- \rho_2\int_0^L \psi_t(g''\Diamond\psi)dx + k\int_0^L \varphi_x(g\psi - g'\Diamond\psi)dx \\ &- \frac{b}{2}\int_0^L g\,|\psi_x|^2\,dx + \frac{b}{2}\int_0^L g'\Box\psi_x dx - \frac{k}{2}\int_0^L g\,|\psi|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L g'\Box\psi dx\end{aligned}$$

Ce qui implique l'affirmation du lemme. ∎

Maintenant, nous introduisons le multiplicateur w donné par la solution du problème de **Dirichlet**

$$-w_{xx} = \psi_x. \quad w(0) = w(L) = 0$$

et nous introduisons le fonctionnel

$$J_1(t) = \rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t w dx$$

afin d'obtenir un terme négatif $-\int_0^L |\psi_t|^2\,dx$.

Lemme 3.2.3 *Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe une constante positive $C_{\varepsilon_1} > 0$ telle que pour $t \geq 0$:*

$$\frac{d}{dt}J_1(t) \leq C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L g\Box\psi_x dx + \varepsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx. \tag{2.4}$$

Preuve. On multiplie (1.2) par ψ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx &= \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx - (b - \int_0^t g d\tau)\int_0^L |\psi_x|^2\,dx - k\int_0^L |\psi|^2\,dx \\ &- k\int_0^L \varphi_x\psi dx - \int_0^L (g\Diamond\psi_x)\psi_x dx.\end{aligned} \tag{2.5}$$

On multiplie (1.1) par w on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t w dx = -k\int_0^L \varphi\psi_x dx + k\int_0^L |w_x|^2\,dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t dx. \tag{2.6}$$

Les équations (2.5) et (2.6) conduisent à

$$\frac{d}{dt}J_1(t) = \rho_2 \textstyle\int_0^L |\psi_t|^2\, dx - (b - \int_0^t g d\tau)\int_0^L |\psi_x|^2\, dx - k\int_0^L |\psi|^2\, dx$$
$$+ k\textstyle\int_0^L |w_x|^2\, dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t dx - \int_0^L (g\Diamond\psi_x)\psi_x dx.$$

En observant que, pour $\delta > 0$

$$\left|\int_0^L (g\Diamond\psi_x)\psi_x dx\right| \leq C_\delta \int_0^L g\Box\psi_x dx + \delta\int_0^L |\psi_x|^2\, dx.$$

notre conclusion suit. ■

Soit $\zeta_1(t)$ et $N(t)$, désignent respectivement les fonctionnelles :

$$\zeta_1(t) = N_1 E(t) - N_2 I(t) + N_3 J_1(t),$$

$$\mathcal{N}(t) = \int_0^L |\psi_t|^2 + \lambda\, |\psi_x|^2 + g\Box\psi_x dx. \tag{2.7}$$

On Utilisant les lemmes 3.2.2, 3.2.3 et l'hypothèse (1.6) sur g. Il s'ensuit pour tout $\varepsilon_2 > 0$ et pour $N_1^{\varepsilon_2} > N_1^{\varepsilon_2}, N_3^{\varepsilon_2}$ suffisamment grand que $\zeta_1(t)$ satisfait

$$\frac{d}{dt}\zeta_1(t) \leq -\frac{N_2^{\varepsilon_2}}{2}\mathcal{N}(t) - \frac{N_1^{\varepsilon_2}}{2}\int_0^L g\,|\psi_x|^2\, dx + \varepsilon_2\int_0^L (|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2)dx. \tag{2.8}$$

Laissez-nous vous présenter le fonctionnel

$$K(t) = \int_0^L \rho_2\psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \rho_2\int_0^L \psi_x\varphi_t dx - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L (g * \psi_x)\varphi_t dx \tag{2.9}$$

Ce qui nous donnera un terme négatif $-\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx$, et c'est le prochain lemme, où nous utiliserons la condition essentielle (1.5) sur les coefficients.

Lemme 3.2.4 *Supposons (1.5), c'est-à-dire.*

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}\cdot$$

Il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour $t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt}k(t) \leq [(b\psi_x - g * \psi_x)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx$$
$$+ \varepsilon \int_0^L |\varphi_t|^2\, dx + C_\varepsilon \int_0^L |g'| \,\square\psi_x + g\, |\psi_x|^2\, dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2\, dx.$$

Preuve. En multipliant l'équation (1.2) par $\psi + \varphi_x$ et en utilisant l'équation (1.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t(\varphi_x+\psi)dx &= [(b\psi_x - g*\psi_x)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - b\frac{\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx \\ &- k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx + \frac{d}{dt}\{\frac{\rho_1}{k}\int_0^L (g*\psi_x)\varphi_t dx\} \\ &- \frac{\rho_1}{k}\int_0^L (g(0)\psi_x + g'*\psi_x)\varphi_t dx \\ &+ \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx.\end{aligned}$$

En notant que

$$\begin{aligned}\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx &= \frac{d}{dt}\int_0^L \psi\varphi_{xt}dx - \int_0^L \psi\varphi_{xtt}dx \\ &= -\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x\varphi_t dx + \int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx.\end{aligned}$$

Nous sommes au point clé de l'utilisation de l'hypothèse de base (1.5), car maintenant

$$-b\frac{\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx = \rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x\varphi_t dx$$

et donc les termes de l'ordre supérieur annulent, et nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}k(t) &= [(b\psi_x - g*\psi_x)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx \\ &- \frac{\rho_1}{k}\int_0^L (g\psi_x + g'\Diamond\psi_x)\varphi_t dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx\end{aligned}$$

d'où découle notre conclusion. ∎

Le dernier lemme implique l'estimation

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}k(t) &\leq C_\varepsilon \left\{ |b\psi_x(L,t) - (g*\psi_x)(L,t)|^2 + |b\psi_x(0,t) - (g*\psi_x)(0,t)|^2 \right\} \\
&+ \varepsilon\{|\varphi_x(L,t)|^2 + |\varphi_x(0,t)|\} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx \\
&+ \varepsilon \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_\varepsilon \int_0^L |g'| \Box\psi_x + g\,|\psi_x|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Afin de traiter les conditions limites apparaissant, nous prouverons ce qui suit lemme utilisant une extension q de la normale extérieure dans le domaine, ceci étant une approche connue pour traiter ce type de termes limites.

Lemme 3.2.5 *Soit $q \in C^1([0,L])$ satisfait $q(0) = -q(L) = 2\gamma > 0$. Il existe alors $C_1 > 0$, et pour tout $\tilde{\varepsilon} > 0$ une constante positive $C_{\tilde{\varepsilon}}$ telle que pour $t \geq 0$ nous avons*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q(b\psi_x - g*\psi_x)dx \leq -\gamma\{&|b\psi_x(L,t) - (g*\psi_x)(L,t)|^2 \\
&+ |b\psi_x(0,t) - (g*\psi_x)(0,t)|^2\} \\
&+ \tilde{\varepsilon}\int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + C_{\tilde{\varepsilon}}\mathcal{N}(t).
\end{aligned}
\tag{i}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx \leq &-k\gamma\{|\varphi_x(L,t)|^2 + |\varphi_x(0,t)|^2\} \\
&+ C_1\int_0^L |\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 \, dx.
\end{aligned}
\tag{ii}
$$

Preuve. Avec Eq (1.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q(b\psi_x - g*\psi_x)dx &= \frac{1}{2}[q(b\psi_x - g*\psi_x)^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2}\int_0^L q_x(b\psi_x - g*\psi_x)^2dx \\
&- k\int_0^L (\varphi_x+\psi)q(b\psi_x - g*\psi_x)^2dx \\
&+ \frac{1}{2}b\rho_2\int_0^L q\frac{d}{dx}\left|\psi_t\right|^2dx \\
&- \rho_2\int_0^L \psi_t q(g(0)\psi_x + g'*\psi_x)dx \\
&\leq -\gamma\{|b\psi_x(L,t) - (g*\psi_x)(L,t)|^2 \\
&+ |b\psi_x(0,t) - (g*\psi_x)(0,t)|^2\} \\
&+ \tilde{\varepsilon}\int_0^L \left|\varphi_x\right|^2dx + C_{\tilde{\varepsilon}}\mathcal{N}(t).
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé l'hypothèse (1.6) sur g. Cela prouve (i). L'estimation (ii) est prouvée, en utilisant Eq (1.1), comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx &= k\int_0^L q\varphi_{xx}\varphi_x dx + k\int_0^L q\psi_x\varphi_x dx \\
&+ \frac{1}{2}\rho_1[q\left|\varphi_t\right|^2]_{x=0}^{x=L} - \rho_1\int_0^L q_x\left|\varphi_t\right|^2dx \\
&\leq -k\gamma\{|\varphi_x(L,t)|^2 + |\varphi_x(0,t)|^2\} \\
&+ C_1\int_0^L \left|\varphi_t\right|^2 + \left|\varphi_x\right|^2 + \left|\psi_x\right|^2dx.
\end{aligned}$$

Pour$\delta > 0$ et $N_4 > 1$ let

$$L(t) = K(t) + N_4\int_0^L \rho_2\psi_t q(b\psi_x - g*\psi_x)dx + \delta\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx. \tag{2.11}$$

Observer

$$-\frac{k}{2}\int_0^L \left|\varphi_x+\psi\right|^2dx \leq -\frac{k}{4}\int_0^L \left|\varphi_x\right|^2dx + C\int_0^L \left|\psi_x\right|^2dx,$$

Pour une constante positive C, nous concluons du lemme 3.2.5 et (2.10) que pour suffisamment grand N_4 et suffisamment petit δ nous avons pour $0 < \tau < 1$et certains C_τ et

$C_2 > 0$ on a

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx + C_2\tau \int_0^L |\varphi_t|^2\, dx + C_\tau \mathcal{N}(t), \tag{2.12}$$

où nous avons utilisé (1.6) à nouveau. Ici, on peut choisir le premier δ d'ordre τ, puis ε assez petit, puis N_4 assez grand, puis $\tilde{\varepsilon}$ assez petit. ■

Enfin, introduisons le fonctionnel

$$J_2(t) = \int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi dx \tag{2.13}$$

Pour obtenir comme d'habitude des termes négatifs $-\int_0^L |\varphi_t|^2\, dx$. Et $-\int_0^L |\psi_t|^2\, dx$. Nous obtenons facilement.

Lemme 3.2.6 *Il existe une constante positive c satisfaisante*

$$-\frac{d}{dt}J_2(t) \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2\, dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2\, dx + k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + c\mathcal{N}(t).$$

*lemme **3.2.6** et (2.12) rendement, en choisissant τ assez petit.*

$$\frac{d}{dt}\{L(t) - \frac{2C_2\tau}{\rho_1}J_2(t)\} \leq -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx - C_2\tau \int_0^L |\varphi_t|^2\, dx + C_\tau \mathcal{N}(t). \tag{2.14}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'afficher le résultat principal de cette section.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les données initiales satisfassent*

$$\varphi_0, \psi_0 \in H_0^1((0.L)), \qquad \varphi_1, \psi_1 \in L^2((0,L)),$$

et que les coefficients du système (1.1), (1.2) satisfont (1.5), c'est-à-dire

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}.$$

De plus, supposons que le noyau g soit de type exponentiel satisfaisant (1.6). Alors l'énergie $E(t)$ décroît de façon exponentielle à mesure que le temps tend vers l'infini, c'est-à-dire *qu'il y a existent des constantes positives C et α, étant indépendant des données initiales, tel que pour $t \geq 0$:*

$$E(t) \leq CE(0) \exp^{-\alpha t}$$

Preuve. Our utiliser les techniques multiplicatives, nous avons besoin que les données initiales satisfassent $\varphi_0, \psi_0 \in H_0^1((0.L)) \cap H^2((0.L))$, $\varphi_1, \psi_1 \in H_0^1((0.L))$, mais la conclusion de la théorème sera ensuite suivi d'arguments de densité. Soit la fonction finale de Lyapunov définie par :

$$V(t) = \zeta_1(t) + L(t) - \frac{2C_2\tau}{\rho_1} J_2(t),$$

où $\zeta_1(t)$, $L(t)$ et $J_2(t)$ ont été définis respectivement en (2.7), (2.11) et (2.13). Avec (2.8) et (2.14) nous concluons pour ε_2 suffisamment petit et certains $\beta_0 > 0$ que

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\beta_0 E(t)$$

De plus, il existe des constantes positives β_1, β_2 tel que pour

$$\beta_1 E(t) \leq V(t) \leq \beta_2 E(t)$$

D'où

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\alpha V(t).$$

pour $\alpha = \beta_0/\beta_2$, et donc notre conclusion suit. ■

Conclusion

D'après les définitions de la stabilité, nous constatons que pour étudier la stabilité nous aurons besoin de calculer les solutions, ce qui n'est pas facile dans la plupart des cas. D'où l'objet de la théorie de Lyapunov, qui permet de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses solutions. La philosophie de la seconde méthode de Lyapunov réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique :

" Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système devra atteindre finalement un point d'équilibre ".

Bibliographie

[1] Abdelouahab, M. S. (2009). Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires.

[2] Ammar-Khodja, F. Benabdallah, A. Rivera, J. M. & Racke, R. (2003). Energy decay for Timoshenko systems of memory type. Journal of Differential Equations, 194(1), 82-115.

[3] Bennani, C. (2011). Stabilisation et Estimation de l'état des systèmes Dynamiques non linéaires et Applications (Doctoral dissertation, UMMTO).

[4] Jordan, C. (1887). Cours d'analyse de l'École polytechnique : t. Équations différentielles ordinaires. Équations linéaires. Équations aux dérivées partielles. Calcul des variations (Vol. 3). Gauthier-Villars et fils.

[5] Hafstein, S. F. (2004). A constructive converse Lyapunov theorem on exponential stability. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 10(3), 657-678.

[6] Khalil, H. K. & Grizzle, J. W. (2002). Nonlinear systems (Vol. 3). Upper Saddle River, NJ : Prentice hall.

[7] Liapounoff, A. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. In Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques (Vol. 9, pp. 203-474).

[8] Mawhin, J. (2015). Alexandr Mikhailovich Liapunov, The general problem of the stability of motion (1892). ResearchGate.[cit. 28.2. 2015]. Dostupné z : http ://www. researchgate. net.

[9] Pujo-Menjouet, L. Equations Différentielles Ordinaires et Partielles http ://math.univ-lyon1.fr/~pujo/

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réelles positifs.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$C^n([a,b])$	Espace des fonctions continument dérivables d'ordre n sur $[a,b]$.
$C^1([0,\infty),H)$	Les fonction continument dérivable de $[0,\infty[$ à H.
$\dot{x}$	La dérivée par rapport à t
exp	Exponentiel.
H_0^1, H^2	espace de Sbolev.
x_e	Le point d'équilibre.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\lvert.\rvert$	La valeur absolue ou module.
$\lVert.\rVert$	la norme.
B_r	$\{x \in \mathbb{R}^n, \lVert x\rVert \leq r\}$ la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.
$V(x)$	La fonction de Lyapunov
$\int_a^b$	L'intégration de a à b.
$\mathrm{Re}(x)$	La partie reéle de x.
Det	déterminant.
$\langle.\rangle$	Le produit scalaire.