République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Par

ALLOUCHE

KHALED

Titre :

Intégration complexe théorie et application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Bouziane Nadjette	UMKB	Président
Dr.	**Dakhia Hassiba**	UMKB	Encadreur
Dr.	Snouci Assia	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail ‡ :

Mes trés chers parents

Mes trés chers fréres et soeurs

Mes chéres amis

Mes collégues de la promotion sans exception

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et la patience d'arrivé a la . . . n des études supérieurs.

Je tiens tout particuliérement ‡ remercier le docteur Dakhia Hassiba qui a encadré

mon travail, qu'il toujours montré ‡ l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury

Dr.Snouci Assia et Dr.Bouziane Nadjette

qui miont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué ‡ ma formation,

aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement ‡ ce travail et ‡ tous ceux qui ont montré et disposé ‡ mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

Table des matières

Introduction

L'analyse complexe est l'une des branches les plus intéressantes des mathématiques. Elle ouvre des horizons à plusieurs concepts dans d'autres domaines des mathématiques.L'analyse complexe donne une excellente introduction aux mathématiques contemporaines en raison de sa polyvalence, de sa combinaison de concepts d'ingénierie et d'analyse et de la facilité de ses résultats.L'un des principaux objectifs de cet article est de prouver une théorie similaire à l'intégration linéaire des fonctions analytiques dans le plan complexe, elle apparaît à première vue, C'est un travail difficile, car il existe un nombre illimité de courbes reliant deux points, mais la preuve est facile et les applications sont très utiles.Ce sujet est étudié dans le cadre de la variable réelle, mais il prend des dimensions importantes lorsqu'il est étudié dans le cadre de la variable complexe

Le premier chapitre contient des définitions et des concepts élémentaires en nombres et fonctions complexes telles que les opérations algébriques, la continuité et la différenciabilités.

Le deuxième chapitre contient une intégration complexe et des théories importantes dans le calcul de l'intégration

Le troisième chapitre contient les séries(taylor et laurent), les points singuliers et la théorie des résidus

À la fin de ce chapitre, nous avons discuté de certaines applications de l'intégration complexe dans le domaine des mathématiques

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Le premier à introduire des nombres complexes est "Gerolamo" dans un article important pour résoudre les équations du troisième et quatrième degré en 1545 avec le titre "ans megna" .Les quantités artificielles de Cardano ont été négligées par la plupart des mathématiciens jusqu'à ce que le mathématicien "carl fridrich" vienne Donner le nom actuel des nombres complexes et utilisez-les pour prouver la théorie de base de l'algèbre qui stipule que tout polynôme qui n'est pas constant a au moins une solution.

1.1 Rappels sur les nombres complexes

1.1.1 L'ensemble des nombres complexes :

Définition 1.1.1 *Un nombre complexe est un couple* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *que l'on notera* $a + ib$ *.Il n'existe pas de nombre réel* x *qui soit solution de l'équation algébrique* $x^2 + 1 = 0$*. On a introduit l'ensemble des nombres complexes pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables.*

Nous pouvons considérer un nombre complexe comme étant de la forme

$a + ib$, où a et b sont réels et i, appelé l'unité imaginaire, a la propriété

$i^2 = -1$. Si $z = a + ib$, alors a est appelée la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z , ces parties réelle et imaginaire sont respectivement notées $Re\{z)$ et $Im\{z)$. Le symbole z qui représente n'importe quel élément de l'ensemble des nombres complexes est appelé une variable complexe . Le nombre complexe conjugué,d'un nombre complexe $a+ib$,est $a-ib$. Le nombre complexe conjugué de z est souvent noté $\overline{z}$ où z^*.

Opérations fondamentales sur les nombres complexes : En effectuant des opérations avec des nombres complexes nous pouvons procéder de même que dans l'algèbre des nombres réels en remplaçant i^2 par -1

1. Addition

$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$

2. Soustraction

$$(a+ib)-(c+id)=a+ib-c-id=(a-c)+i(b-d)$$

3. Multiplication

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc-bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

4. Division

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c-id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

pour tout $z\in\mathbb{C}$ déffirent de 1

$$1+z+z^2+z^3+...+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

La preuve est simple : notons $S=1+z+z^2+...z^n$, alors en développant $S\cdot(1-z)$ presque tous les termes se télescopent et l'on trouve

$$S\cdot(1-z)=1-z^{n+1}$$

Il n'y pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$, il ne faut donc jamais écrire $z \geq 0$ ou $z \leq z\prime$

Valeur absolue La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $a + ib$ est définie par $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

representation graphique des nombres complexes Un nombre complexe $x+iy$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé plan complexe.regardez la figure 1-1

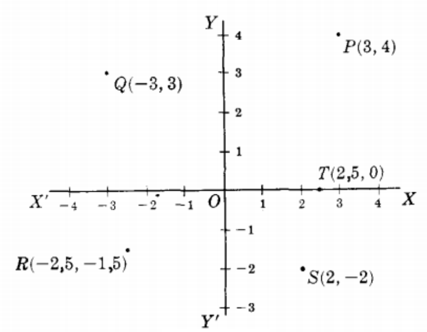


fig.1-1

1.2 Argument et trigonométrie

1.2.1 Argument :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$,un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est argument de z et noté $\theta = \arg(z)$ .Voir la figure (fig.1-2)

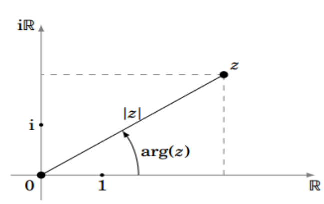


fig 1-2

Cet argument est défini module 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1.3 representation polaire

Définition 1.3.1 *Si P désigne un point du plan complexe correspondant*

au nombre complexe (x, y) ou $x + iy$, nous voyons d'après

la Fig. 1.3 que

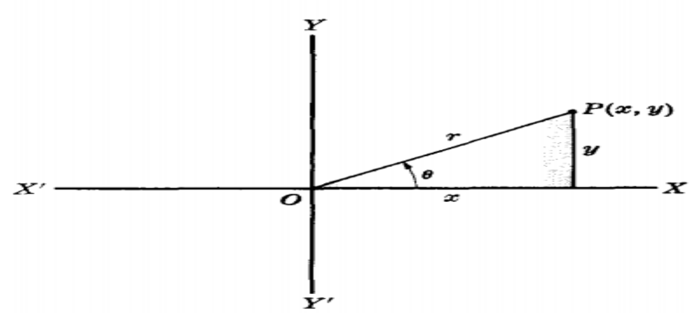


Fig. 1-3

$x = rcos\theta \quad y = rsin\theta$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy\ |$ est appelé le module ou la valeur absolue de$z = x + iy$ [noté mod z ou $|z|$] , et θ appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$ [noté $argz$] $X'OX$

est l'angle que fait le vecteur OP avec le demi-axe positif OX.

On en tire

$z = x + iy = r(cos\theta + isin\theta)$

qui est appelée la forme polaire du nombre complexe,r et

θ étant les coordonnées polaires

1.3.1 Formule de moivre

si z_1=$x_1 + iy_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$ et $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\{cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$z^n = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$

1.4 Ensembles dans le plan complexe

Avec l'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, le module d'un nombre complexe $z = x + iy$,$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$,Elle fait de $\mathbb{C}$ un espace normé, la distance entre deux nombres complexes est ainsi $d(z_{1,} z_2) = |z_2 - z_1|$

Les concepts de convergence, limites, convergence uniforme, ensembles ouverts et fermés, compacité, ..., sont les mêmes qu'en topologie

Soit $r > 0$,$z_0 \in \mathbb{C}$

1- On appelle disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| < r\}$$

2- On appelle disque fermé de centre z_0,et de rayon r, l'ensemble

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| \leq r\}$$

2- On appelle cercle de centre z_0,et de rayon r, l'ensemble

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| = r\}$$

Définition 1.4.1 *Une partie $\omega \in \mathbb{C}$ est dite ouverte si et seulement si pour tout point z, il existe un disque ouvert centré en z et tout entier inclus dans ω*

- On dit que z_0 appartient à l'interieur de la partie $D \subset \mathbb{C}$, si et seulement si, il existe un ouvert ω tel que $z_0 \in \omega \subset D$, Et on note $z_0 \in \text{Int }(D)$

- Soit $a \in \mathbb{C}$, une partie v de $\mathbb{C}$ est un voisinage de a si et seulement si v contient un ouvert contenant a ,L'ensemble des voisinages de a est noté $V(a)$:

- Une partie A de $\mathbb{C}$ est un voisinage de ∞ si et seulement son complémentaire est borné.

- Une partie est dite fermée si son complémentaire est un ouvert.

Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

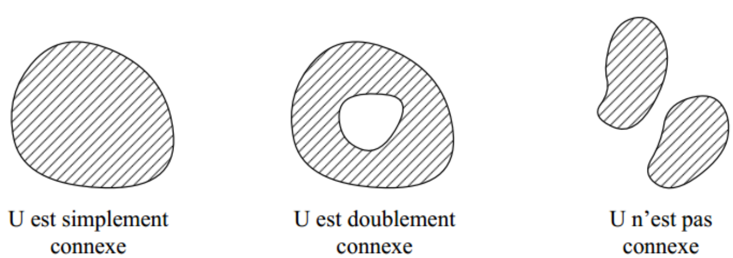
Remarque 1.4.1 *Notion de connexité*

La notion de connexité est une notion trés importante,intuitivement un ensemble connexe est un ensemble " d'un seul tenant"

Définition 1.4.2 *(connexe)*

-Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans U.

Si de plus U est ouvert alors il est appelé domaine.Voir la figure ci-dessous



- Soit (Ω, d) un espace métrique, on dit que Ω est connexe si et seulement si les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de (Ω, d) sont Ω et ϕ

Définition 1.4.3 *(Connexité par arcs) Soit (Ω, d) un espace métrique, on dit que Ω est connexe par arc si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega^2$,il existe $\gamma \in C^0([0,1], \Omega)$ tel que*

$\gamma(0) = x_1 et\ \gamma(1) = x_2$

Tout espace métrique connexe par arc est connexe.

Définition 1.4.4 *(Domaine)*

On appelle domaine de $\mathbb{C}$ toute partie D non vide, ouverte et connexe du plan complexe.

1.5 Fonction d'une variable complexe

Définition 1.5.1

On dit q'une fonction $w = f\ (z\ )$ est définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$, si à chaque point $z \in \mathbb{C}$, on associe une (la fonction est alors uniforme) ou plusieurs (la fonction est dite multiforme) valeurs de w

Soient Ω et $\Omega\prime$ deux ensembles de $\mathbb{C}$, soit $f\ :\Omega \to \Omega'$ une fonction complexe. nous pouvons ainsi identifier $z = x + iy \in \Omega$ avec $(x;\ y)\in \mathbb{R}^2$ et $f\ (z\ ) \in \Omega\prime$, avec $(u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ et arriver à deux fonctions réelles $u\ (x,\ y)$, $v\ (x,\ y)$ de deux variables réelles x et y telles que

$f\ (z) = f(x + iy) = u\ (x, y) + i\ v(x, y)$

Exemple 1.5.1 $w = z^2$

on pose $z = x + iy$ et l'on obtient

$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

donc $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$

1.5.1 Limite et continuité des fonctions complexes

1.5.2 Limite

Soit $f\ :\ \Omega \to \mathbb{C}$, telle que f est définie au voisinage de z_0 sauf, peut être en z_0. On définit la limite de f quand z tend vers z_0, et on écrit :$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, si et seulement si

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z \in \Omega : [0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| \leq \varepsilon]$

Montrer que : $\lim\limits_{z\to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

on a $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z) - w_0| = |\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}| = |\frac{i}{2}(z-1)| = \frac{1}{2}|z-1| < \varepsilon \implies |z-1| < 2\varepsilon$

Donc, il suffit prendre $\delta = 2\varepsilon$

1.5.3 Continuitée

-La fonction $f(z)$ est dite continue au point z_0 ssi :

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = f(z_0)$

Pour que $f(z)$ soit continue au point z_0, il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)$

et $v(x, y)$ soient continues au point (x_0, y_0).

La fonction $f(z)$ est dite continue dans un domaine D si elle est continue en

chaque point de ce domaine.

-Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $z_0 \in \Omega$ un de ses points et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. Les énonces suivants sont alors équivalents :

1)- Pour toute suite $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω

$[\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = z_0] \implies [\lim\limits_{n \to +\infty} f(z_n) = f(z_0)]$

2)- A chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\delta > 0$, tels que

$[z \in \Omega \text{ et } |z - z_0| < \delta] \implies [|f(z) - z_0| < \varepsilon]$

Lorsqu'ils sont satisfaits, la fonctions f est dite continue en z_0 Si elle est continue en chaque points $z_0 \in \Omega$; on dit que f est continue sur Ω

- Une fonction complexe est continue si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

- Ainsi sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions continues (lorsqu'elles sont définies) sont des fonctions continues.

- Toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue

Le nombre δ dans la définition précédente dépend à la fois de z_0 et de ε, S'il peut être choisi indépendamment de $z_0 \in \Omega$, on dit que f est uniformément continue sur Ω

1.5.4 Fonction holomorphe

En analyse complexe, une fonction holomorphe est une fonction à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.Cette condition est beaucoup plus forte que la dérivabilité réelle. Elle entraîne (via la théorie de Cauchy) que la fonction est analytique : elle est indéfiniment dérivable et est égale au voisinage de tout point de l'ouvert à la somme de sa série de Taylor. Un fait remarquable en découle : les notions de fonction analytique complexe et de fonction holomorphe coïncident. Pour cette raison, les fonctions holomorphes constituent le pilier central de l'analyse complexe.

-Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur Ω; si elle est $\mathbb{C}$ dérivable sur Ω en tout point de Ω. On note par $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω

-Soit A une partie de $\mathbb{C}$.Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur A s'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant A, sur le quel la fonction f est définie et elle est holomorphe.

1.5.5 Dérivabilité au sens complexe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un voisinage de z_0 et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que f est dérivable (au sens complexe) ou holomorphe en z_0 si la limite existe dans $\mathbb{C}$ et elle est unique.

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$,

De même $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

et dans ce cas on l'appelle dérivée de f en z_0 et l'on note $f\prime(z_0)$ où $\frac{df}{dz}(z_0)$

Si f est $\mathbb{C}$ dérivable en un point $z_0 = (x_0 + iy_0)$, alors f considérée comme fonction de deux variables est différentiable

en (x_0, y_0)

1.6 Equations de Cauchy-Riemann

Une fonction complexe, peut être vue comme une fonction de deux variables réelles.Le problème de la dérivation peut être abordé de différentes manières : via la fonction d'accroissement,la différentielle et les dérivées partielles.La question qui se pose est la suivante :

Quels sont les liens entre ces différents éléments ?, peut-on exprimer des conditions simples permettant d'assurer la $\mathbb{C}-$ dérivabilité en un point z_0

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et $(x_0,\, y_0)\in \Omega$

On dit que f admet en $(x_{0,}y_0)$ une dérivée partielle suivant la variable x (resp. suivant la variable y),si l'application : $x \rightarrow f\ (x,\, y_0)($ resp. $y \rightarrow f(x_0,\, y\ )$ est dérivable au point x_0(resp. au point y_0)

Et on écrit :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

1.6.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Conditions nécessaires de dérivabilitée

La définition de la dérivée au point z peut se réecrire sous la forme

$\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f\prime(z_0)$

La limite de ce rapport doit être indépendante de la façon dont la quantité complexe $h = s + it$ tend vers zéro. Si on prend $h = s$ réel, alors la partie imaginaire t de h reste nulle, et la dérivée devient une dérivée partielle par rapport à x. Donc,

on a :

$f'(z) = \lim\limits_{s\to 0}\frac{U(x+s,y)+iV(x+s,y)-U(x,y)-iV(x,y)}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{U(x+s,y)-U(x,y)+iV(x+s,y)-iV(x,y)}{s}$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

De même, si $h = it$ est imaginaire pur, on a :

$f\prime(z) = \lim\limits_{it\to 0}\frac{f(z+it)-f(z)}{it} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{U(x,y+t)+iV(x,y+t)-U(x,y)-iV(x,y)}{it}$

on multiplier et divisée sur $(-i)$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{-iU(x,y+t)+V(x+,y+t)+iU(x,y)-V(x,y)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{V(x+,y+t)-V(x,y)-iU(x,y+t)+iU(x,y)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{V(x+,y+t)-V(x,y)}{t} - i\frac{U(x,y+t)-U(x,y)}{t} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} = -i(\frac{\partial f}{\partial y})$

Si $f'(z)$ existe,$f(z)$ doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

qui équivaut aux deux équations aux dérivées partielles réelles :

$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}$elles sont les équations aux dérivées partielles de Cauchy-Riemann,qui doivent être satisfaites par les parties réelle et imaginaire de toute fonction holomorphe. Ce sont des conditions nécessaires pour l'éxistence de la dérivée d'une fonction f en un point. Elles peuvent donc être utilisées pour localiser les points ou f ne posséde pas de dérivée.

Conditions suffisantes de dérivabilitée

Inversement, si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont différentiables, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x+s,y+t) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + \alpha|h| \\ v(x+s,y+t) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + \beta|h| \end{array} \right\}$$

où α et β tendent vers zéro avec $h = s + it$. Alors on a

$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + i(\frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t) + \eta|h|$

où $\eta = \alpha + i\beta$. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann on obtient

$f(z+h) - f(z) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(s+it) + \eta|h|$

où $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

est un nombre bien défini, indépendant de h, et où η tend vers zéro avec h. Ona donc :

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

Cette limite est bien définie. La dérivée $f(z_0)$ existe.

Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont que des conditions nécessaires pour la dérivabilité des fonctions, c-à-d : il existe des fonctions qui admettent des dérivées partielles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann sans être $\mathbb{C}$ dérivables.

1.7 Fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction de dans $\mathbb{C}$,On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$, si elle est développable en série entière au voisinage de z_0, c-à-d il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ tels que $D\ (z_0, r)$ et

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\ ,\forall z \in D(z_0, r)$

- Et on dit que f est analytique sur Ω si elle est analytique en tout poit de Ω

-Le terme analytique (plus employée par les physiciens que le terme holomorphe) est un synonyme du terme holomorphe.

Il découle de ce nous avons vu précédement que :

- Une fonction analytique est indéfiniment dérivable.

- Le developpement en série entière de f en z_0 coincide avec son développement de Taylor.

- Les dérivées successives d'une fonction analytique sont aussi analytiques.

1.8 Fonctions harmoniques

Définition 1.8.1 *Une fonction $f(x, y)$ est appelée harmonique dans un domaine , si elle possède,dans ce domaine, des dérivées partielles continues d'ordre deux et s'elle satisfait à l'équation de Laplace*

$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Proposition 1.8.1 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert , telle que $f = u+iv$: Si u et v sont de classe C^2, alors pour tout $(x, y) \in \Omega$,on a*

$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

Exemple 1.8.1 *Montrer que U est harmonique* tel que $U(x,y) = x^2 + 2x - y^2$

$U(x,y) = x^2 + 2x - y^2 \implies \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \end{array} \right\}$

$\Delta U(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

donc U est harmonique

1.9 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie par la relation :

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

Pour $z = x$ réel, cette définition coincide avec la définition ordinaire. De plus, la

fonction ainsi définie est partout analytique, puisqu'en chaque point du plan les

conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, et que les parties réelle et imaginaire de e^z sont différentiables.

La formule connue de dérivation $(e^z)\prime = e^z$ est conservée. La propriété fondamentale d'addition de la fonction exponentielle $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

est également conservée.

• La fonction exponentielle ne s'annule pour aucune valeur complexe $z = x + iy$. En effet, $|e^z| = e^x > 0$

La fonction exponentielle d'une variable complexe posséde aussi une propriété spécifique : elle est périodique de période fondamentale purement imaginaire $2\pi i$. En effet, pour tout nombre entier k, on a $exp\ (z + 2\pi ki) = expz$

1.10 Fonctions trigonométriques

On définit les fonctions sinus et cosinus d'une variable complexe z par les

formules :

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions entiéres, puisqu'elles sont des

combinaisons linéeaires des fonctions entiéres e^{iz} et e^{-iz}. On a :

$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$,$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$

Les fonctions $sinz$ et $cosz$ ne sont pas bornées en valeur absolue (au contraire de $sinx$ et $cosx$ pour x réel)

Les zéros des fonctions sinus et cosinus sont tous réels. Les zéros de $sinz$

sont les nombres $z = n\pi$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Les zéros de $cosz$ sont les nombres

$z = (n + \frac{1}{2})\pi$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Les autres fonctions trigonométriques sont définies à l'aide des fonctions

sinus et cosinus par les relations usuelles :

$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot gz = \frac{\cos z}{\sin z}$

1.10.1 Fonctions hyperboliques

Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies par :

$shz = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$,$chz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

Fonctions élémentaires

Ce sont des fonctions entiéres.

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont étroitement reliées aux

fonctions trigonométriques :

$-ish(iz) = sinz$, $-isin(iz) = shz$

$ch(iz) = cosz$, $cos(iz) = chz.$

1.11 La fonction logarithme et ses branches

-Soit $logr$ le logarithme naturel d'un nombre réel positif r. On définit le logarithme d'une variable complexe non nulle $z = re^{i\theta}$

par l'équation :

$$\log z = \ln r + i\theta$$

Autrement dit, on a :

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \ , \ z \neq 0$$

le symbole $argz$ désigne une détermination arbitraire de l'argument de z. Ainsi, chaque nombre complexe $z \neq 0$ posséde un ensemble infini de logarithmes. Le logarithme est donc une fonction à une infinité de déterminations. Sa partie réelle est définie de maniére unique, sa partie imaginaire à un terme additif multiple de 2π prés.

-La détermination principale de $logz$ est donnée par

$$\log z = \ln r + i\theta$$

soit

$$\log z = \log |z| + iArgz \ ,z \neq 0, -\pi < Argz \leq \pi,$$

où $Argz$ est la détermination principale de $argz$. La fonction $Logz$ est univaluée.

On peut montrer, en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, que la fonction $Logz$ est analytique dans le domaine $r > 0, -\pi < \theta < \pi$,constitué de tous les points du plan sauf $z = 0$ et le demi-axe réel négatif. La fonction $Logz$ n'est pas

continue,et donc pas analytique dans tout son domaine de définition

$r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$,mais seulement dans le domaine $r > 0, -\pi < \theta < \pi$.Dans le domaine d'analyticité,on a :

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \ ,|z| > 0 \ , -\pi < Argz < \pi.$$

-On aurait pu tout autant définir une fonction :

$$logz = logr + i\theta, r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

Une branche d'une fonction multivaluée f est une fonction univaluée F qui est analytique dans un domaine dans lequel la valeur $F(z)$ est l'une des valeurs $f(z)$. La fonction $Logz$, restreinte au domaine $r > 0, -\pi < \theta < \pi$, est une branche de la fonction logarithme . Cette branche est appelée la branche principale. Chaque point du demi-axe réel négatif, aussi bien que l'origine, est un point singulier de la branche principale de la fonction logarithme. Le demi-axe réel négatif est la coupure de la branche principale, une coupure étant par définition une ligne, constituée de points singuliers, introduite de maniére à définir une branche d'une fonction multivaluée. La demi-droite $\theta = \alpha$ est la coupure pour la branche de la fonction logarithme. Un point singulier commun à toutes les coupures pour une fonction multivaluee est appelée un point de branchement.L'origine est un point de branchement pour la fonction logarithme.

Chapitre 2

Intégration complexe

2.1 Introduction

L'intégration est un sujet important et utile dans les principes de calculs (différentiels et intégraux).La nature de dimension complexe des deux dimensions suppose que l'intégration est considérée comme des courbes facultatives dans $\mathbb{C}$ Au lieu de couper simplement à partir de l'axe réel, ces intégrations linéaires ont des propriétés intéressantes et inhabituelles lorsqu'elles la fonction doit être une intégrale analytique, l'intégration complexe est l'une des plus belles théories en mathématiques

2.2 théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

si la fonction $f(x)$ reélle continue sur l'intervalle [a,b], tel que $a \leqslant x \leqslant b$ alors la fonction $f(x)$ admet une fonction primitive $F(x)$ sur cet intervalle ,tel que $F^{'}(x) = f(x)$ sur $[a, b]$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2.2.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et D une partie de $\mathbb{C}$

Définition 2.2.1 $'$

Un chemin est une application de classe C^1 par morceaux γ :$[a,b] \to C$, c'est-à-dire continue et telle qu'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 <\cdots< t_n = b$ pour laquelle $f|[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1. En particulier, f est de classe C^1 en-dehors des t_i, et admet une dérivée à droite en $t_i, i < n$ et à gauche en $t_i, i > 0$.

Si $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$ c'est un chemin de z_0 à z_1.Si $z_0 = z_1$,c'est un lacet. Un reparamétrage de γ est un chemin $\gamma^\circ\varphi$:$[c,d] \to U$ où φ est un difféomorphisme de classe C^1par morceaux de$[c,d]$ sur $[a,b]$. Il est direct (resp.indirect) si $\varphi' > 0$ (resp $\varphi' < 0$) là où il est défini. Une courbe fermée est l'image d'un lacet φ :$[a,b] \to \mathbb{C}$ injectif sur $[a,b]$ et dont les dérivées à droite et à gauche ne s'annulent jamais.

Définition 2.2.2 *Un chemin dans D est une fonction continue γ :$[a,b] \to D$*

*Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés origine et extrimité du chemin γ

*Un chemin γ est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (lacet)

*Un chemin γ est différentiable si γ est dérivable dans $[a,b]$ et admet une dérivée à gauche au point b et une dérivée à droite au point a

*Un chemin γ est continument différentiable (de classe C^1),s'il est différentiable et sa fonction dérivée est continue

*Un chemin γ est différentiable par morceaux ,s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$

de $[a,b]$ telle que la restriction de γ à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$,soit de classe C^1

1-La fonction $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$

$t \to \gamma(t) = e^{2\pi it}$ est continue ,c'est un chemin d'origine $\gamma(0) = 1$ et d'extrémité $\gamma(\frac{1}{2}) = -1$

(γ est le demi -cercle $D(0,1)$ d'origine 1 et d'extrémité -1)

2-La fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $t \to \gamma(t) = e^{2\pi it}$

est continue ,c'est un chemin fermé (lacet) (le cercle $D(0,1)$)

$\gamma(0) = \gamma(1) = 1$

3-La fonction $\gamma : [a,b] \to D$ et $t \to \lambda(t) = \gamma(a+b-t)$

où γ est un chemin dans D ,appelé l'oposé de γ et noté (-γ),on a :$\lambda(a) = \gamma(b)$ *et* $\lambda(b) = \gamma(a)$

2.2.2 Chemins équivalents

soient $\gamma_1 : [a,b] \to D$,$\gamma_2 : [c,d] \to D$ deux chemins

on dit que γ_1 et γ_2 sont équivalents s'il existe une bijection strictement croissante $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ continue et continument dérivable parmorceaux ainsi que sa réciproque φ^{-1} telle que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$

Exemple 2.2.1 *Le chemin* $\lambda : t \to \lambda(t) = \gamma(\alpha t + \beta)$ *où* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$

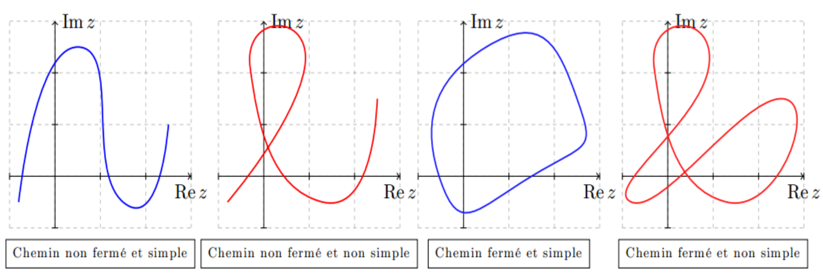
est équivalent au chemin γ

-La relation γ_1 équivalent à $\gamma_2 \equiv \gamma_1 \Re \gamma_2$ est une relation d'équivalence sur la famille des chemins dans D

- Si les points initial et final d'un chemin coincident, il est appelé chemin fermé ou lacet.

- On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même i.e. il n'a pas de points doubles.

- Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.Voir la figure ci-dessous



2.2.3 Homotopie

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 deux chemins dans D définis sur le même intervalle $I = [a, b]$: On dit que γ_1 est homotope à γ_2 dans D,s'il existe une fonction continue

$\varphi : I \times J \to D \qquad (J = [c, d] \subset \mathbb{R})$

telle que :$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \quad , \quad \varphi(t, d) = \gamma_2(t) \quad ,\forall t \in [a, b]$

$\varphi(a, t) = \varphi(b, t) \ \ ,\forall t \in [c, d]$

On dit qu'un lacet γ_1 dans D est homotope à un point $e \in D$, s'il est homotope dans D à un lacet constant γ

$(\gamma : [a, b] \to D, t \to \gamma(t) = e)$

-L'homotopie des chemins dans D est une relation déquivalence.

-Un ouvert connexe D (domaine) est dit simplement connexe si tout

lacet dans D est homotope à un point dans D.

2.3 Intégration le long d'une courbe

Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit C une courbe paramétrée par un chemin

$z : [a, b] \to D$

$t \to z(t)$; tel que $z'(t)$ existe et continue . Soit f une fonction complexe continue définie sur D.

$f : D \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$

On définit l'intégrale de f le long de la courbe C par $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z\prime(t)\ dt$

Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.voir la figure (fig.1-4)

chemin

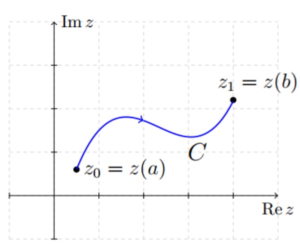


fig.1-4

7.pdf

1. L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un chemin, où intégrale curviligne complexe.

2. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct

Exemple 2.3.1 *(voir la figure (fig.1-5))*

Soit C l'arc $\{z(t) \in \mathbb{C}$ tel que $z(t) = 2e^{it}$,$0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\}$

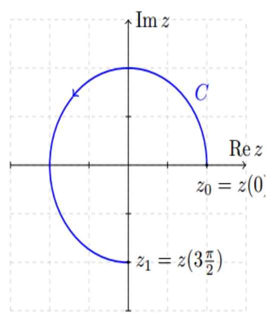
évaluons l'intégrale $\oint\limits_C z^2 dz$

on a $dz = z'(t)dt = 2ie^{it}dt$ .alors

$\oint\limits_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (2e^{it})^2 (2ie^{it}) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it} dt$

$= \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{6i\pi} - \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3}i$

example



8.pdf fig.1-5

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par C ,

la courbe C orientie dans son sens inverse. On suppose que

$C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coincide avec le point initial de la courbe C_2 Si f et g sont intégrables le long de C , alors

1.$\oint\limits_C (f(z) + g(z))dz = \oint\limits_C f(z)dz + \oint\limits_C g(z)dz$

2.$\oint\limits_C \alpha f(z)dz = \alpha \oint\limits_C f(z)dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$

3. $\oint\limits_{-C} f(z)dz = -\oint\limits_C f(z)dz$

4.$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$

Longueur d'une courbe Soit C une courbe paramétrée par un chemin $z : [a, b] \to \mathbb{C}$

$t \to z(t)$; tel que $z\prime(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe et continue.

La longueur L_C de la courbe C est définie comme étant :$L_C = \int_a^b |z'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

Théorème 2.3.1 *(Théorème d'estimation)*

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$

$f : D \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$:

Soit C une courbe paramétrée par un chemin $z : [a; b] \to D$

$t \to z(t)$,

tel que $|f(z(t))| \leq M$, $\forall t \in [a, b]$, i.e. $|f(z)|$ est bornée sur$C$ par une constante réelle M .

Alors

$$| \oint_C f(z)dz | \leq \oint_C |f(z)||dz| \leq ML_C$$

où, par définition

$\oint_C |f(z)||dz| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$

est L_C la longueur de la courbe C .

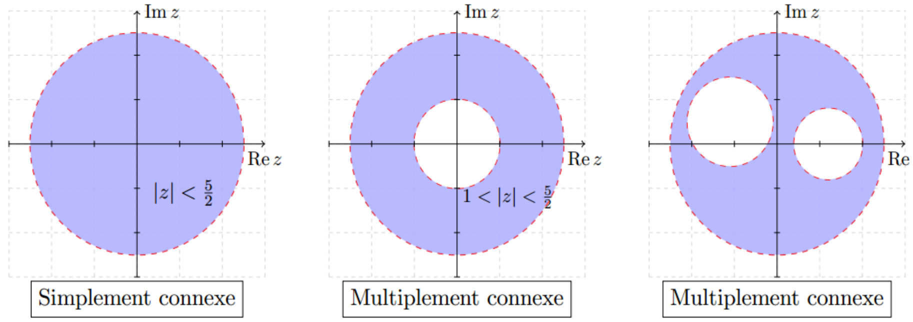
2.4 Théoreme de Cauchy-goursat

2.4.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.Voir la figure ci-dessous

Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

cauchy



$_9$.*pdf*

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe D

et sur sa frontiére C . Alors

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Ce théoreme fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy-goursat, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes où multiplement connexes.

Exemple 2.4.1 *Soit le cercle de centre* 0 *et de rayon* 2*,*

$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi]$ où $z(t) = 2e^{it}\}$

Calculer $\oint_C z\ dz$

premiere méthode :

la fonction $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le chemin C simple connexe(lacet) alors on pêut appliquée le théoreme de cauchy-goursat donc

$$\oint_C zdz = 0$$

deuxième méthode :

on a $dz = z'(t)dt = 2ie^{it}dt$ alors

$\oint_C z\ dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}(2ie^{it})dt = 4i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = [2e^{2it}]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0$

Définition 2.4.1 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe* limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$\oint_C f(z)\ dz = \oint_{C_1} f(z)\ dz$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.

Théorème fondamental de l'intégration

Soient f et F deux fonctions holomorphes dans un domaine connexe D telles que $F'(z) = f(z)$. Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D ; alors pour toute courbe C de point initial z_1 et de point final z_2 , on a

$$\oint_C f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0)$$

Cela signifie que si f est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1

évaluer $\oint_C 2z\ dz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 3 + 3i$,le long de la parabole

$C_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 3]$ où $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it\}$

et le long du segment de droite

$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 1]$ où $z(t) = 3t + 3it\}$

Sur la parabole C_1, on a $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it$,$dz = z'(t) = (\frac{2}{3}t + i)dt$

$\oint_{C_1} 2z\ dz = \int_0^3 2(\frac{1}{3}t^2 + it)(\frac{2}{3}t + i)dt = \left[(\frac{1}{3}t^2 + it)^2\right]_0^3 = 18i$

Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t + 3it; dz = z'(t)dt = (3 + 3i)dt$ et

$\int_{C_2} 2z\ dz = \int_0^{11} 2(3t + 3it)(3 + 3i)dt = [(3t + 3it)^2]_0^1 = 18i$

Par le théorème fondamental de l'intégration

$\oint_C 2z\ dz = \int_0^{3+3i} 2z\ dz = [z^2]_0^{3+3i} = 18i$

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration.

Formule intégrale de Cauchy Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur $\mathbb{C}$, soit w un point intérieur à C , alors

$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\ dz$

où la courbe C est décrit dans le sens direct.

De même la n-iéme dérivée de f en w est donnée par

$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\ dz$,$n = 1, 2, 3, ...$

1.Les deux formules précédentes sont appelées formules intégrales de Cauchy et sont trés remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .

2. Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée premiére dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D.Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 2.4.2

Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer

$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$,le long du cercle

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2 + e^{it}\}$$

La fonction $z \to f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur $\mathbb{C}$, alors d'aprés la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-2)}dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i\ \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\pi i$

Dans ce qui suit on énonce quelques théoremes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

Théorème 2.4.1 *(de Liouville)*

Toute fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier est constante

Preuve. On pose $M = sup_{\mathbb{C}}|f|$, il résulte des inégalités de Cauchy et du fait que f est entière que pour tout $z \in \mathbb{C}$; et tout $r > 0$,on a ■

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

En faisant tendre r vers $(+\infty)$; on en déduit que $f\prime = 0$ sur $\mathbb{C}$

En déduit du théorème de Liouville que, si P était un polynôme non constant ne s'annulant pas, alors $\frac{1}{P}$ serait une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, et donc devrait être constante.

Théorème 2.4.2 *(de Morera)*

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors si f admet localement une primitive

dans U, f est holomorphe sur U.

Preuve.

■

-Si f admet une primitive localement sur U, pour chaque $z \in U$, il existe $r > 0$ et g holomorphe sur $D(z_0, r)$, telle que $g' = f$ sur $D(z_0, r)$:

Il résulte du théorème de Cauchy que g est analytique, donc $g' = f$ est aussi analytique, en particulier f est holomorphe.

Chapitre 3

Singularité, théorème des résidus et ses applications

3.1 Séries de Taylor et séries de Laurent

Les fonctions analytiques peuvent être représentées par des séries entiéres, et par leur généralisation, par des séries de puissances positives et négatives.

3.1.1 Séries de Taylor

La formule de Taylor connue dans l'analyse réelle peut être étendue aux fonctions complexes.D'après le théorème de Taylor , si f est une fonction analytique à l'interieur d'un cercle $C(a, R)$, on a, pour chaque point à l'interieur de $C(a, R)$

$f(z) = f(a) + f'(a)(z - z_0) + \frac{f''(a)}{2!}(z - z_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - z_0)^n + ...$

Cette série est convergente vers la fonction $f(z)$ lorsque $|z - a| < R$

Autrement dit, chaque fonction analytique dans le disque ouvert $D(a, R)$, peut être représentée, dans ce disque, par sa série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z - a)$$

où les coefficients C_n sont donnés par la formule

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, n = 0, 1, 2, ...$$

avec C est un chemin fermé simple contenant le point a, et il est à l'interieur au cercle $|z-a| = R$:

1) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \quad ,|z-z_0| < +\infty$

2)$\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n \quad ,|z-z_0| < 1$

3)$sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(z-z_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ,|z-z_0| < +\infty$

3.1.2 Séries de Laurent

Si une fonction f n'est pas analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$, on ne peut pas appliquer le théorème de Taylor en ce point. Cependant, il est souvent possible de trouver pour $f(z)$ une représentation en série faisant intervenir à la fois des puissances positives et négatives de

$(z-z_0)$ De telle séries sont appelées séries de Laurent.

Théorème 3.1.1 *(de Laurent)*

Si C_{R_1} et C_{R_2} sont deux cercles orientés positivement centrés au point z_0,tels que C_{R_1}soit à l'interieur de C_{R_2}, et si f est une fonction analytique sur C_{R_1} et sur C_{R_2} ainsi que dans la couronne $C(z_0, R_1, R_2)$, alors, en chaque point z de cette couronne, $f(z)$ est représentée par le développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad ,n \geq 0$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \quad ,n > 0$$

avec C est un chemin fermé entourant z_0, et situé dans la couronne.Une telle série est appelée série de Laurent.

- La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans le développement de Laurent est appelée la partie reguliere et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est appelée la partie prncipale de ce developpement.

Exemple 3.1.1

soit la foncion $f(z) = z^2 \cos(\frac{1}{z})$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$,donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$,ona $cos(\frac{1}{z}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z)^{2n}}$

On obtient, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$

$z^2 \cos(\frac{1}{z}) = z^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z)^{2n}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z)^{2n-2}}$

$= -\frac{1}{2} + z^2 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z)^{2n}}$

Remarque 3.1.1

1-La série de Laurent converge dans le domaine dans le quel les séries :$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ sont convergentes.

2-Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ est déterminé par la limite $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}})}$ où par R=$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

et le domaine de convergence pour cette série est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < R\}$

3-Tandis que, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$,est déterminé par la limite $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}$,et le domaine de convergence est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > r\}$

4- Le domaine de convergence de la série de Laurent est donné par $D.C = \{z \in \mathbb{C}; r < |z-z_0| < R\}$,où $r < R$

Exemple 3.1.2

Soit la série de Laurent $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}$

- Pour la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$,on a $a_{-n} = (3+4i)^n$,et donc $a_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$

on a

$r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = 5$

- Et pour la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}$,on a $a_n = \frac{1}{6^n}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{6^{n+1}}$ et par suite

$R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 6$

Le domaine de convergence de cette série de Laurent est $D.C = \{z \in \mathbb{C}; 5 < |z+2i| < 6\}$

3.2 Points singuliers isolés

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que z_0 est une singularité isolée de $f(z)$, s'il existe $r > 0$, tel que $f(z)$ est holomorphe sur $D^*(z_0; r)$: (où $D^*(z_0, r) = D(z_0, r) - \{z_0\}$)

3.2.1 Classification des points singuliers

Soit z_0 une singularité isolée de $f(z)$, par définition, il existe $r > 0$, tel que $f(z)$ est holomorphe sur $D^*(z_0, r)$, et grace au théorème de Laurent, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad ,z \in D^*(z_0, r)$$

Il y a, alors trois cas à distinguer

1)- Point singulier artificiel

Si pour tout $n < 0$; $a_n = 0$; $f(z)$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$:

2)- Pôle

- S'il existe un nombre fini de $n < 0$, tels que $a_n \neq 0$, ainsi il existe $n_0 \geq 1$ tel que $a_{-n} \neq 0$, on dit que z_0 est un pôle d'ordre n_0 de $f(z)$:

3)- Singularitée essentielle

- Il existe une infinité de$n < 0$, tels que $a_n \neq 0$, on dit alors que z_0 est une singularitée essentielle de $f(z)$.

1-La fonction $f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}$,a une singularitée isolée en 0, c'est un pôle d'ordre 2.

2-La fonction $f(z)=\frac{\sin z}{z}$,a une singularitée isolée artificielle en 0 ; puisque

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...\right) \\ &= 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+...\end{aligned}$$

3- La fonction $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$, a une singularitée essentielle en $z_0=1$; puisque

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}$$

Fonctions méromorphes Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que la fonction $f(z)$ est méromorphe sur Ω , si f est holomorphe sur Ω sauf (éventuellement) en des points singuliers isolés qui sont des pôles de $f(z)$.

3.3 Résidus des fonctions

Définition 3.3.1 *Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction $f(z)$, on appelle résidu de la fonction $f(z)$ au point z_0, le nombre désigné par le symbole $Resf(z_0)$ qui est vérifie*

$$Res\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$$

- On utilise également la nototion $Res[f(z), z_0]$, et on prend comme chemin fermé le cercle de centre z_0 et de rayon assez petit pour que ce cercle soit dans le domaine d'analycité de f et ne contient aucun point singulier autre que z_0

-Le résidu de la fonction est donné par le coefficient de la première puissance négative dans le développeent en série de laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = z_0$ c-à-d :

$$Resf(z_0) = a_{-1}$$

- Le résidu en un point singulier éliminable (artificiel) est nul.

- Le résidu en un point pôle d'ordre n est donné par la formule

$$Resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z-z_0)^n\}$$

- Si la fonction $f(z)$ peut être présentée dans le voisinage du point z_0 comme quotient de deux fonctions analytiques $\frac{\Phi(z)}{\Psi(z)}$ et de plus $\Phi(z_0) \neq 0$,$\Psi(z_0) = 0$,alors que $\Psi'(z_0) \neq 0$,c-à-d z_0 est un pôle simple de $f(z)$; alors

$$Resf(z_0) = \frac{\Phi(z_0)}{\Psi'(z_0)}$$

- Si le point z_0 est un point singulier essentiel de $f(z)$, pour obtenir $Resf(z_0)$, il faut trouver le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point z_0.

Exemple 3.3.1

Soit la fonction $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$,les points singuliers de $f(z)$ sont $z_0 = -1$, $z_1 = 2$

- Le point $z_0 = -1$ est un pôle d'ordre 3 pour $f(z)$, donc

$$Resf(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -1} \frac{d^2 f}{dz^2} \left(\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}(z+1)^3\right) = -\frac{17}{54e}$$

- Le point $z_1 = 2$ est un pôle simple, donc

$$Resf(2) = \lim_{z \to 2} \left(\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}(z-2)\right) = \frac{e^2}{27}$$

3.4 Théorème des résidus

Définition 3.4.1 *Soit $f(z)$ une fonction analytique (holomorphe) sur la frontière F d'un domaine D et partout à l'interieur de ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers a_1, $a_2, ..., a_n$, alors*

on a :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Resf(a_k)$$

soit $I = \oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$,dans le domaine D : $|z-i| < \frac{2}{3}$ la fonction $\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ possède trois points singuliers , $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ qui est un pôle simple, et $z_3 = 0$ qui est un point essentiel.On a

$Resf(i) = \lim\limits_{z\to i} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^2+1)'} = \frac{e^{-1}}{2i}$

$Resf(-i) = \lim\limits_{z\to -i} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^2+1)'} = -\frac{e^{-1}}{2i}$

Le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$; ne contient que des puissances paires, car $f(z)$ est une fonction paire, et par suite $Resf(0) = 0$

D'après le théorème des résidus, on obtient

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} Resf(k) = 2\pi i(\frac{e^{-1}}{2i} - \frac{e^{-1}}{2i} + 0)$$

$$= 0$$

3.5 Résidu d'une fonction par rapport au point à l'infini

On dit qu'une fonction $f(z)$ est analytique (holomorphe) au point à l'infini

$z = \infty$, si la fonction $\varphi(\ \zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ est analytique (holomorphe) au point 0.

Exemple 3.5.1

Soit la fonction $f(z) = sin\frac{1}{z}$,$f(z)$ est analytique au point $z = \infty$, puisque

$\varphi(\ \zeta) = f(\frac{1}{\zeta})= sin(\ \zeta)$ est analytique au point $z = 0$:

Définition 3.5.1 *(Point singulier isolé à l'infini)*

Soit $f(z)$ une fonction est analytique (holomorphe) dans un voisinage du point à l'infini (à l'exception à $z = \infty$ lui même).

- Le point $z = \infty$ est appelé point singulier isolé de la fonction $f\ (z)$, si cette fonction ne possède pas d'autre points singuliers dans un certain voisinage de ce point.

Exemple 3.5.2

A l'infinité, la fonction $f(z) = sin\frac{1}{z}$ possède une singularité non isolée, puisque les pôles $z_k = k\pi$ de cette fonction s'accumulent à l'infini, quand k tend vers (∞)

Définition 3.5.2 *On dit que $z = \infty$ est un point singulier éliminable (artificiel), un pôle ou un point essentiel de la fonction $f(z)$, si la limite est respectivement finie, infinie ou si elle n'existe pas.*

Théorème 3.5.1

- Si $z = \infty$ est un point singulier éliminable d'une fonction $f(z)$, le développement

en série de Laurent au voisinage de ce point ne contient pas de puissances positives de z

- Si $z = \infty$ est un pôle, le développement en série de Laurent au voisinage de ce point contient un nombre fini de puissaces positives de z.

- Si $z = \infty$ est un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$, le développement en série de Laurent au voisinage de ce point contient un nombre infini de puissances positives de z

- En plus, on appelle développement en série de Laurent d'une fonction $f(z)$ au voisinage de $z = \infty$,un développement de ce type qui converge partout en dehors d'un disque de centre $z = 0$ et d'un rayon R assez grand (sauf peut être au point $z = \infty$).

Définition 3.5.3 *Soit $f(z)$ une fonction est analytique (holomorphe) dans un voisinage du point à l'infini (à l'exception à $z = \infty$ lui même).On appelle résidu de la fonction $f(z)$ au point à l'infini, la grandeur*

$$Resf(\infty) = 2\pi i \oint_{\gamma^-} f(z)dz$$

où γ^- est un cercle suffisamment grand, $|z| = \rho$ parcouru dans le sens horaire, et on a

$$Resf(\infty) = -a_{-1}$$

Pour la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$,

Cette expression peut être considérée en tant que developpement en série de Laurent au voisinage de $z = \infty$ .On a évidement $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$, donc $z = \infty$ est un point singulier éliminable, et on $a_{-1} = -1$,donc $Resf(\infty) = a_{-1} = -1$.

Remarque 3.5.1

L'exemple précédent, montre que le résidu d'une fonction par rapport à un point singulier éliminable à l'infini, peut être différent de zéro.

Définition 3.5.4 *Soit $f(z)$ une fonction possédant un nombre fini de points singuliers dans $\bar{\mathbb{C}}$, alors la somme de tous ses résidus, y compris le résidu à l'infini est nulle.C-à-d : Si $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$*

sont des points singuliers de la fonction $f(z)$, alors

$$Resf(\infty) + \sum_{k=1}^{n} Resf(a_k) = 0$$

où

$$Resf(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} Resf(a_k)$$

Exemple 3.5.3

soit la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ et $\gamma : |z| = 2$

La fonction $f(z)$ possède quatre pôles , z_1, z_2, z_3et z_4 qui sont les racines de l'équation $1+z^4 = 0$, et elles sont tous dans l'interieur de $|z| = 2$,Au voisinage du point à l'infini, $f(z)$ a le développement

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}.\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} + ...$$

donc

$$Resf(\infty) = a_{-1} = 0$$

Il résulte

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} Resf(z_k) = 2\pi i.Resf(\infty) = 0$$

3.6 Applications du théorème des résidus au calculs des intégrales

Théorème 3.6.1 *Soient θ_1, θ_2 deux réels tels que $\theta_1 < \theta_2$. Posons $S = \{z = re^{i\theta}/r > 0, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$:Soit f une fonction définie sur S . Pour chaque $R > 0$, notons Γ_R*

la portion du cercle de centre 0, de rayon R contenue dans S . Alors

1-s'il existe $a > 0$ tel que f soit continue pour $|z| > a$ et si $\lim_{|z| \to +\infty} zf(z) = 0$

on a

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

2-s'il existe $a > 0$ tel que f soit continue pour $|z| < a$ et si $\lim_{z \to 0} zf(z) = 0$

on a

$$\lim_{R \to 0} \oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

Preuve.

■

Si on pose $M(R) = \sup_{z\in\Gamma_R} |f(z)|$, pour chaque R il existe $z_R \in \Gamma_R$ tel que $M(R) = |f(z_R)|$ (car f est continue et R compacte), on a :

$$\left|\oint_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} iRf(Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \leq M(R)R(\theta_2 - \theta_1)$$

Dans le cas (1), on a $\lim_{R\to+\infty} M(R)R = \lim_{R\to+\infty} |z_R f(z_R)| = 0$,et dans le cas (2),on a $\lim_{R\to 0} M(R)R = \lim_{R\to 0} |z_R f(z_R)| = 0$

3.6.1 Intégrales impropres de fonctions rationnelles

On se propose de calculer les intégrales de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{Q(x)}dx$$

où P et Q sont deux polynômes coeficients réels de degrés respectifs p

et q. On suppose, pour assurer la convergence d'une telle intégrale,

que Q n'a pas de zéro réel et que $q - p \geq 2$.

Pour calculer cette intégrale, nous allons appliquer le théorème des résidus à la fonction $f : z \to \frac{P(z)}{Q(z)}$,qui est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et au compact K

défini par :

$$K = \{z = x + iy \in \mathbb{C}/y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

où R est un nombre réel strictement positif, assez grand pour que tous les zéros de Q contenus dans le demi-plan supérieur se trouvent l'intérieur de K.On note par $z_1, z_{2,\ldots,}z_m$ les zéros de Q situés dans le demi-plan supérieur et soit Γ_R le demi-cercle de centre 0, de rayon R situé dans ce même demi-plan, orienté dans le sens direct. On a donc,

$$\int_{\partial K}\frac{P(z)}{Q(z)}=\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{\Gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=2\pi i\left(\sum_{K=1}^{m}Res(f,z_K)\right)$$

Comme $q-p\geq 2$, on a $\underset{|z|\to+\infty}{lim}\left|z\frac{P(z)}{Q(z)}\right|=0$,donc en appliquant le théorème précédent ,on a

$$\underset{R\to 0}{lim}\int_{\Gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$$

on en déduit que,

$$I=\underset{R\to 0}{lim}\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\left(\sum_{K=1}^{m}Res(f,z_K)\right)\tag{*}$$

Exemple 3.6.1

calculer cet integrale

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^4}{(x^2+1)^2}dx$$

On pose $f(x)=\frac{x^4}{(x^2+1)^2}$, on obtient alors

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{(x^2+1)^2}dx$$

On introduit la fonction $f(z)=\frac{z^4}{(z^2+1)^2}$,alors $f(z)$ possède deux pôle d'ordre 2 dans le demi-plan supérieur au point $z_0=\pm i$,et on a

$$\begin{aligned}Resf(i)&=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(f(z)(z-i))\\&=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\left(\frac{2z^4+4z^3i}{(z+i)^3}\right)=\frac{3}{4}i\end{aligned}$$

En utilisant la formule (*) ,on obtient

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^4}{(z^2+1)^2}dz=\frac{1}{2}\left[2\pi i\frac{3}{4}i\right]=-\frac{3\pi}{4}$$

3.7 Avantages et applications d'une intégration complexe

L'intégration complexe a plusieurs applications en physique thermodynamique, en génie électrique, en sciences biologiques et dans les domaines des mathématiques,Il est également inclus dans le calcul des centres de gravité, des centres de circulation, Flux de chaleur, de la dynamique des fluides, de l'intensité du courant électrique, mais dans cette recherche nous contenterons d'exemples pratiques dans le domaine des mathématiques.

Il y a des intégrales multiplicatives qui sont difficiles à calculer, donc l'intégrale complexe entre pour faciliter le calcul.

Supposons que les conditions d'intégration soient satisfaites.Tableau montrant les résultats des intégrales

$\int_a^b dx$ =Longueur	$\int_a^b f(x)$ =superficie
$\int\int_G dxdy$ = superficie	$\int\int_G f(x,y)dxdy$ =volume
$\int\int_H\int dxdydz =$ volume	$\int\int_H\int f(x,y,z)dxdydz$ =Masse
$\int\int\int\int_\Omega dxdydzdw$ =Masse	$\int\int\int\int_\Omega f(x,y,z,w)dxdydzdw$ =Densité

3.7.1 Calcul des intégrales réelles très difficiles à l'aide d'intégrales complexes

Exemple 3.7.1

calculer l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(kx - \sin x)dx \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

Nous mettons l'intégration auxiliaire tel que

$$J = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\sin(kx - \sin x)dx$$

Solution 3.7.1

Nous calculons $I - iJ$

$$\begin{aligned} I - iJ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x}[\cos(kx - \sin x) - i\sin(kx - \sin x)]dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x} e^{i(-kx+\sin x)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{ix}}}{e^{ikx}} dx \end{aligned}$$

en utilise le chemin γ tel que

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\quad x \to \gamma(x) = e^{ix}$

$d\gamma(x) = \gamma'(x)dx \qquad , de^{ix} = ie^{ix}dx$

$dx = \frac{de^{ix}}{ie^{ix}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I - iJ &= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{ix}}}{(e^{ix})^{k+1}} de^{ix} \\ &= -i\int_0^{2\pi} \frac{e^z}{z^{k+1}} dz \end{aligned}$$

d'aprés la formule de cauchy

$$I - iJ = \begin{Bmatrix} \frac{2\pi}{k!} + 0i & \text{si } k+1 > 0 \\ 0 & \text{si } k+1 \leq 0 \end{Bmatrix}$$

alors$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(kx - \sin x)dx = \begin{Bmatrix} \frac{2\pi}{k!} & \text{si } k+1 > 0 \\ 0 & \text{si } k+1 \leq 0 \end{Bmatrix}$

Exemple 3.7.2

Calcul des intégrales à partir de la formule

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}\qquad ,\alpha>\beta>0$$

Solution 3.7.2

on a $\underset{x\to\gamma(x)=e^{ix}}{\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}}$ est un chemin lacet, $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\quad ,dx=\frac{de^{ix}}{ie^{ix}}$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\beta\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}.\frac{de^{ix}}{ie^{ix}}\\&=\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{\alpha+\beta\frac{z^2+1}{2z}}.\frac{dz}{iz}\\&=2i\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{\beta z^2+2\alpha z+\beta}dz\\&=\frac{2i}{\beta}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{z^2+\frac{2\alpha}{\beta}z+1}dz\end{aligned}$$

calculer Δ

$\Delta=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}>0$

alors l'eqaution admet deux solutions distincts

$\Rightarrow z_1=\frac{-\alpha}{\beta}-\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}\quad , z_2=\frac{-\alpha}{\beta}+\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$

$|z_1-0|=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}>1$

donc z_1 est situé à l'extérieur du cercle γ

$|z_2-0|=\frac{-\alpha}{\beta}+\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}<1\Leftrightarrow\beta<\alpha$

donc z_2 est situé à l'intérieur du cercle γ

alors

$$I=-\frac{2i}{\beta}\oint\limits_{\gamma}\frac{\frac{1}{z-z_1}}{z-z_2}dz=-\frac{2i}{\beta}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_2}dz$$

d'aprés la formule de cauchy

$$I = \frac{2i}{\beta}(\frac{2\pi i}{0!})f(z_2) = \frac{4\pi}{\beta}.\frac{1}{z_2 - z_1}$$
$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Exemple 3.7.3

Calculez l'intégrale suivante

$$I = \int\int_G \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tel que $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$

Solution 3.7.3

I :L'intégration donne du volume

on a $x > 0$ et $y > 0$,$0 < x^2 + y^2 < +\infty$

on utilise le changement de variable

$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\}$ on trouve $0 < r < +\infty$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$dxdy = |J|drd\theta$

donc $G' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < +\infty\}$

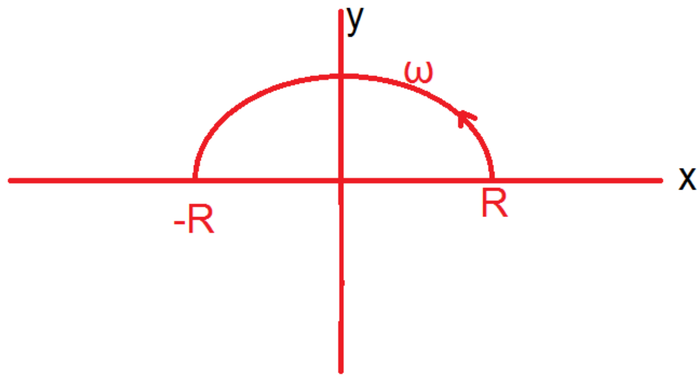
$$\begin{aligned} I &= \int\int_{G'} \frac{rdrd\theta}{r(1 + r^2)^3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{dr}{(1 + r^2)^3}\right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dr}{(1 + r^2)^3} \end{aligned}$$

Nous calculons l'intégrale complexe

$$K = \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^3}$$

tel que $\gamma = \omega \cup [-R, R]$ .Voir la figure ci-dessous

titre



$_{1}0.pdf$

on vue que $z = i$ est un pôle d'ordre 3 inclus dans γ

$$Res(i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{(z+i)^3}) = -\frac{3i}{16}$$

$\Rightarrow K = 2\pi i(-\frac{3i}{16}) = \frac{3\pi}{8}$

$\frac{3\pi}{8} = K = \oint\limits_{\omega} \frac{1}{(z^2+i)^3} + 2\int_{-R}^{R} \frac{dr}{(r^2+i)^3}$

$=\oint\limits_{\omega} \frac{dz}{(z^2+i)^3} + \int_0^R \frac{dr}{(r^2+i)^3}$

$0 \leq \left|\oint\limits_{\omega} \frac{1}{(z^2+i)^3}\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^3} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors $\lim\limits_{R\to+\infty} \oint\limits_{\omega} \frac{1}{(z^2+i)^3} = 0$

Nous entrons la limite des deux côtés et trouvons

$\int_0^R \frac{dr}{(r^2+i)^3} = \frac{3\pi}{16}$

donc $I = \frac{\pi}{2}(\frac{3\pi}{16}) = \frac{3\pi^2}{32}$

Bibliographie

[1] Chaterji, S. D. 1997 Cours d'Analyse 2 - Analyse complexe . Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

[2] F. Bayenet et C. Margaria, problèmes de mathèmatiques appliquées ; Fonctions d'une variable complexe, Ellipses, Paris, 1986.

[3] M. Krasnov, A. Kissélev et G. Makarenko, Fonction d'une variable complexe, calcul opérationnel et théorie de la stabilité, Mir- Moskou, 1985

[4] P. Dolbeault, Analyse complexe, Masson, Paris, 1999.

[5] P. Tauvel, Analyse complexe : Exercices corrigés, Dunod, Paris, 1999.

[6] P. Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod, Paris, 2006.

[7] Remmert, R. 1991 Theory of Complex F unctions . Springer-V erlag.

[8] Valiron, G. 1966 Th eorie des fonctions . Masson.

[9] W. Rudin, Analyse réelle et complexe : Cours et exercices, Dunod, Paris, 1998.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{C}$	:	L'espace du nombres complexes
$D.C$	:	Dommaine de convergence
$\int$	:	Symbole d'intégration sur un intervalle
$\oint$	:	Symbole d'intégration sur un chemin .
$H(\Omega)$	:	l'espace des fonctions holomorphes sur Ω

الملخص

في هذه المذكرة تمت دراسة التكامل المركب الذي يعتبر من احد النظريات المهمة و المشوقة في الرياضيات.فقد قمنا باثبات نظرية مشابهة للتكامل الخطي لدالة تحليلية في المستوي المركب .يظهر من اول و هلة ان هذا أمر صعب جدا.لانه يوجد عدد لا محدود من المنحنيات التي تصل بين نقطتين محدودتين .ولكن الاثبات يكون سهلا و التطبيقات مفيدة جدا

الكلمات المفتاحية : التحليل المركب ، التكامل المركب ، التكامل على مسار ، التكامل على منحنى

Résumé

Dans cette mémoire, l'intégration complexe a été étudiée, qui est considérée comme l'une des théories importantes et intéressantes en mathématiques. Nous avons prouvé une théorie similaire à l'intégration linéaire d'une fonction analytique dans le plan complexe. Il apparaît dès le premier coup d'œil que c'est très difficile. Parce qu'il y a un nombre illimité de courbes qui relient Entre deux points sont limités, mais la preuve est facile et les applications sont très utiles.

Mots-clés :Analyse complexe, Intégration complexe ,Intégration sur un chemin ,d'intégration sur une courbe.

Abstract

In this thesis, complex integration was studied, which is considered one of the important and interesting theories in mathematics. We have proved a theory similar to the linear integration of an analytical function in the complex plane. It appears at first glance that it is very difficult. Because there is an unlimited number of curves that connect between two points are limited, but the proof is easy and the applications are very useful.

Key-words : Complex analysis, Complex integration, Integration on the integration path on a curve