République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Ben ssadi Farouk

Titre

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSs

Membres du Comité d'Examen :

Dr. ABBA Abedelmajid. *Université de Biskra*, ____ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad Eddine. *Université de Biskra*, ____ **Encadreur**

Dr. GHOUL Abdelhak. *Université de Biskra*, ____ **Examinateur**

2020

Dédicace

À mes trés chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, **ma mère SABAH** qui a été toujours à ma coté et elle ma soutenu toute ma vie, et **mon père CHAABAN** qui a sacrifié toute sa vie afin de ma voir devenir ceque je suis, merci infiniment mes parents

À mon trés chère **ma femme ABIR** qui n'a jamais cessé de me soutenir pour que je puisse finir mes études et à qui je voudrais exprimer mes affections et mes gratitudes

À mon trés chères frères : BADRE EDDINE et AMAR

À mon trés chères soeurs : SARA, SOUMIA, DOUAA

Ainsi qu'à toute ma belle famille

Et à tous mes amis de prés ou de loin

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre **ALLAH** tous puissante pour exprimer mes reconnaissances envers sa grande générosité. **ALLAH** ma donnée la volonté, la patience, et la santé durant toutes me années d'étude.

Je remercie vivement m'encadreur Dr : **LAKHDARI IMAD**, pour ses conseils précieuse durant toute cette période et pour sa patience avec moi.

Je suis trés honore que Dr : **ABBA ABEDELMAJID**, ait accepté rapporter mon travail et de présider mon jury de mémoire.

Je remercie Dr : **GHOUL ABDELHAK**, d'avoir accepté d'examiner mon travail. je suis trés heureuse de le voir participer à mon jury.

Un grand merci à mon guide Pr : **HFAYAD MOKHTAR**, pour son aide et ces conseils, instructions et leur patience avec moi merci

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance. Il existe deux approches de résolution du problème de contrôle optimal, bien connues, qui sont le principe du maximum de Pontriagine et le principe de la programmation dynamique.

Dans ce memoire, on s'intéresse au principe du maximum stochastique autrement dit, les conditions nécessaires d'optimalité en étudiant les systèmes dynamiques dont l'évolution est aléatoire. L'interêt des problèmes de contrôle réside notamment quand on parvient à optimiser un certain critère de performance appelé fonction côut, à l'aide de contrôle optimal et établir les conditions nécessaires satisfaites par ce contrôle aprés avoir assuré son existence.

Notre présentons notre mémoire de la manière suivante :

Le premier chapitre est un bref rappel sur l'espérence conditionnelle et ses propriétés.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique qui nous permet de définir les équations différentielles stochastiques EDSs (Filtration, processus stochastique, mouvement brownien, processus de Markov, intégrale stochastique) et étudier leur existence et unicité.

Dans le dernier chapitre, nous étudions le principe du maximum stochastique. Nous commençons par une formulation générale du problème, puis nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Chapitre §.1
Espérence conditionnelle

Chapitre 1

Espérence conditionnelle

Dans ce chapitre, on donne un bref rappel sur l'espérence conditionnelle et ses propriétés.

1.1 Conditionnement sur un évènement

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé. Soit A et B deux évènements de $\mathcal{F}$ (i.e $A, B \in \mathcal{F}$). Alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est : $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, pour tout B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ avec $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ est une nouvelle probabilité sur Ω.

1.1.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu G

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X une v.a définit sur cet espace. Soit G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.1 *On appelle l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant G est l'unique variable aléatoire et on la note $E(X \mid G)$ tel que :*

1) *G-mesurable*

2)

$$\int_A E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in G.$$

C'est l'unique (à une égalité $\mathbb{P}-$ p.s prés) variable G-mesurable Z telle que :

$$E[E(X \mid G)Y] = E(XY),$$

pour toute variable Y, G-mesurable bornée.

1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé et donné.

Soient X, Z deux variables aléatoires définies sur cet espace Soit G la tribu engendré par Z $(G = \sigma(Z))$.

Définition 1.1.2 *On appelle l'espérance conditionnelle de X sachant Z est une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de X par rapport la tribu G $(E(X \mid G))$ on la note $E(X \mid Z)$. Telle que $E(X \mid G)$ est une fonction de Z $(E(X \mid Z))$ est une variable aléatoire mesurable par rapport la tribu engendrée par Z).*

L'espérance conditionnelle $E(X \mid Z)$ est caractérisée par :

1. *C'est une variable $\sigma(Z)$ mesurable.*

2.
$$\int_A E(X \mid Z) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \sigma(Z).$$

1.1.3 Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à un évènement B

Soit B un évènement fixé de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit G une tribu engendrée par l'evènement A $(G = \langle A \rangle)$.

Définition 1.1.3 *On appelle l'espérance conditionnelle de X par rapport à G et on la note $E(X \mid G)$ est une variable aléatoire définie par :*

$$E(X \mid G)(\omega) = E(X \mid A) 1_A(\omega) + E(X \mid A^c) 1_{A^c}(\omega)$$

1.1.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé.

1) Soit a et b deux constantes tel que : $E(aX + bY \mid G) = aE(X \mid G) + bE(Y \mid G)$

2) Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$, Alors $E(X \mid G) \leq E(Y \mid G)$

3) Si X est G-mesurable, alors $E(X \mid G) = X$.

4) Si Y est G-mesurable, alors $E(XY \mid G) = YE(X \mid G)$.

5) $E[E(X \mid G)] = E(X)$.

6) Si X est indépendante de G, alors $E(X \mid G) = E(X)$.

7) Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall p \geq 1$. Alors $\|E(X \mid G)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$.

Preuve. Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

1) Soit a, b deux constante, alors

$$E(aX + bY \mid G) = aE(X \mid G) + bE(Y \mid G).$$

$E(X \mid G) < \infty$ et $E(Y \mid G) < \infty$, tel que :

$$\begin{aligned}
\int_A E(aX + bY \mid G) d\mathbb{P} &= \int_A (aX + bY) d\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= a \int_A X d\mathbb{P} + b \int_A Y d\mathbb{P} \\
&= a \int_A E(X \mid G) d\mathbb{P} + b \int_A E(Y \mid G) d\mathbb{P} \\
&= \int_A aE(X \mid G) + bE(Y \mid G) d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_A [E(aX + bY \mid G) - (aE(X \mid G) + bE(Y \mid G))] d\mathbb{P} = 0, \ \forall A \in G.$$

On a $E(aX + bY \mid G)$ une v.a G-mesurable, $a \in \mathbb{R}$ et $E(X \mid G)$ v.a, G-mesurable, donc $aE(X \mid G)$ est une v.a G-mesurable, $b \in \mathbb{R}$ et $E(Y \mid G)$ v.a G-mesurable, donc $bE(Y \mid G)$ v.a G-mesurable.

Ce que implique

$$E(aX + bY \mid G) - (aE(X \mid G) + bE(Y \mid G)),$$

est une variable aleatoire G-mesurable, donc on obtient

$$E(aX + bY \mid G) - (aE(X \mid G) + bE(Y \mid G)) = 0. \ \mathbb{P}-p.s$$

D'où

$$E(aX + bY \mid G) = aE(X \mid G) + bE(Y \mid G) \qquad \mathbb{P}-p.s$$

2) Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Si $X \leq Y$, alors $E(X \mid G) \leq E(Y \mid G)$

On sait que si $E(X \mid G) < +\infty$, $E(Y \mid G) < +\infty$. On sait que d'après que $X \leq Y$ alors on a

$$\begin{aligned}
\int_A X d\mathbb{P} &\leq \int_A Y d\mathbb{P}, \ \forall A \in G \\
\int_A E(X \mid G) d\mathbb{P} &= \int_A X d\mathbb{P}, \ \forall A \in G \\
&\leq \int_A Y d\mathbb{P}, \ \forall A \in G \\
&\leq \int_A E(Y \mid G) d\mathbb{P}, \ \forall A \in G,
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\int_A [E(Y \mid G) - E(X \mid G)] d\mathbb{P} \geq 0, \forall A \in G.$$

On a : $E(X \mid G)$ une v.a G-mesurable et $E(Y \mid G)$ une v.a G-mesurable.Donc, $E(Y \mid G) - E(X \mid G)$ une v.a G-mesurable.

On déduit que

$$E(Y \mid G) - E(X \mid G) \geq 0,\ \mathbb{P} - p.s.$$

D'où, $E(Y \mid G) \geq E(X \mid G)$, $\mathbb{P} - p.s.$

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Si X est G-mesurable,alors $E(X \mid G) = X$?

On sait que $E(X \mid G)$ une v.a G-mesurable (par definition) telle que :

$$\int_A E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in G$$
$$\Rightarrow \int_A (E(X \mid G) - X) d\mathbb{P} = 0, \forall A \in G$$

On sait que $E(X \mid G)$: une v.a G-mesurable et X une v.a G-mesurable (par hypothèse) implique $E(X \mid G) - X$: une v.a G-mesurable. Ce qui implique

$$E(X \mid G) - X = 0,\ \mathbb{P} - p.s.$$
$$E(X \mid G) = X,\ \mathbb{P} - p.s.$$

d'où, $E(X \mid G) = X$, $\mathbb{P} - p.s.$

4) Soit X ,Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit G une sous tribu de$\mathcal{F}$.

Si Y est G-mesurable, alors $E(XY \mid G) = YE(X \mid G)$ $\mathbb{P} - p.s.$?

L'objectif est de démontrer :

$$\int_A E(XY \mid G) d\mathbb{P} = \int_A YE(X \mid G) d\mathbb{P}, \forall A \in G$$

$$\int_A (E(XY \mid G) - YE(X \mid G)) d\mathbb{P} = 0, \forall A \in G$$

On a $E(XY \mid G)$ une v.a G-mesurable (par definition) et Y une v.a G-mesurable (par hypothèse), $E(X \mid G)$ v.a G-mesurable, donc $YE(X \mid G)$ v.a G-mesurable

Ce qui implique $(E(XY \mid G) - YE(X \mid G))$ une v.a G-mesurable.

Etape 1 : *On pose :* $Y = 1_C$ tel que C est G-mesurable implique1_C est G-mesurable. Par un simple calcul, on trouve :

$$\int_A 1_C E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_{A\cap C} E(X \mid G) d\mathbb{P}$$
$$\stackrel{def}{=} \int_{A\cap C} X d\mathbb{P},\ \forall A \in G, \forall C \in G$$
$$\forall A \in G, \forall C \in G \Rightarrow A \cap C \in G.$$

Donc,

$$\int_A 1_C E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_A 1_C X d\mathbb{P}, \forall A \in G$$
$$\stackrel{def}{=} \int_A E(1_C X \mid G) d\mathbb{P}, \forall A \in G$$

On conclut que :

$$\int_A [1_C E(X \mid G) - E(1_C X \mid G)] d\mathbb{P} = 0, \forall A \in G.$$

Ce qui implique :

$$1_C E(X \mid G) - E(1_C X \mid G) = 0 \ \mathbb{P} - p.s.$$

D'où :

$$1_C E(X \mid G) = E(1_C X \mid G) \ \mathbb{P} - p.s.$$

Donc, $YE(X \mid G) = E(YX \mid G)$ $\mathbb{P}-p.s.$

Etape 2 : On pose que la variable aleatoire Y écrit sous forme d'une fonction étagé :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i},$$

tel que C_i est G-mesurable (i.e Y une v.a étagé)

Alors, on obtient par un calcul simple

$$\begin{aligned}
\int_A YE(X \mid G)d\mathbb{P} &= \int_A (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i})E(X \mid G)d\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A 1_{C_i}E(X \mid G)d\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A 1_{C_i}Xd\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= \int_A (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i})Xd\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= \int_A YXd\mathbb{P}, \forall A \in G \\
\overset{def}{=} \int_A E(YX \mid G)d\mathbb{P}, \forall A \in G.
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\int_A [YE(X \mid G) - E(YX \mid G)d\mathbb{P}] = 0, \forall A \in G.$$

Ce qui implique :

$$YE(X \mid G) - E(YX \mid G) = 0 \ \mathbb{P}-p.s.$$

D'où : $YE(X \mid G) = E(YX \mid G) \ \mathbb{P}-p.s.$

Etape 3 : *Si* Y une v.a positive G-mesurable, alors il existe une suite de v.a étagé $(Y_n)_{n\geq 1}$ positive croissante telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} Y_n = Y$$

D'après **Etape 2 :** *on a :*

$$\int_A Y_n E(X \mid G)d\mathbb{P} = \int_A Y_n Xd\mathbb{P}, \forall A \in G \tag{1.1}$$

Cas 1 : Si X une v.a positive tel que : $Y_n \to Y$ quand $n \to +\infty$ et $(XY_n)_{n\geq 1} \to XY_n$ quand $n \to +\infty$

$(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante et $X \geq 0$, alors $(XY_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante tel que : $Y_n \leq Y_{n+1}$

implique $XY_n \leq XY_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $X \geq 0$.

D'après le lemme de **Beppo Lévy** *et 1.1*, on a :

$\int_A XY_n d\mathbb{P} \to \int_A XY d\mathbb{P}, \forall A \in G$ quand $n \to +\infty$

$\int_A Y_n E(X \mid G) d\mathbb{P} \to \int_A Y E(X \mid G) d\mathbb{P}, \forall A \in G$ quand $n \to +\infty$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A Y_n E(X \mid G) d\mathbb{P} = \lim_{n\to+\infty} \int_A Y_n X d\mathbb{P}, \forall A \in G$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned} \int_A Y E(X \mid G) d\mathbb{P} &= \int_A Y X d\mathbb{P}, \forall A \in G \\ &\overset{def}{=} \int_A E(XY \mid G) d\mathbb{P}, \forall A \in G \end{aligned}$$

On conclut que :

$$\int_A [Y E(X \mid G) - E(XY \mid G)] d\mathbb{P} = 0, \forall A \in G$$

On sait que Y une v.a G-mesurable et $E(X \mid G)$ une v.a G-mesurable (par definition), donc $YE(X \mid G)$ une v.a G-mesurable, $E(XY \mid G)$ une v.a G-mesurable

Donc, $[YE(X \mid G) - E(XY \mid G)]$ est G-mesurable

implique,

$$YE(X \mid G) - E(XY \mid G) = 0 \ \mathbb{P}-p.s.$$

D'où, $YE(X \mid G) = E(XY \mid G) \ \mathbb{P}-p.s.$

Cas 2 : Soit X une v.a quelconque

On a : $X = X^+ - X^-$, tel que X^+, X^- deux variable aléatoires positives, alors d'après le **Cas 1** on a :

$$\begin{cases} YE(X^+ \mid G) = E(X^+Y \mid G), \\ \qquad\qquad et \\ YE(X^- \mid G) = E(X^-Y \mid G), \end{cases}$$

ce qui implique

$$Y[E(X^+ \mid G) - E(X^- \mid G)] = E(X^+Y - X^-Y \mid G),$$

ceci donne aussi $YE(X^+ - X^- \mid G) = E(Y(X^+ - X^-) \mid G)$.

D'où, $YE(X^{\pm} \mid G) = E(YX^{\pm} \mid G)$

i.e $YE(X \mid G) = E(XY \mid G)$.

Etape 4 : Si Y une v.a intégrable

D'après l' **Etape 3** *on a :*

$Y \equiv Y^{\pm} = Y^+ - Y^-$ telle que Y^+, Y^- deux variables aléatoires positives

On a :

$$\begin{cases} E(XY^+ \mid G) = Y^+E(X \mid G) \\ E(XY^- \mid G) = Y^-E(X \mid G) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow E(XY^+ \mid G) - E(XY^- \mid G) = Y^+E(X \mid G) - Y^-E(X \mid G).$$

D'après la linéarité de l'espérance conditionnelle

$$\Longrightarrow E(X(Y^+ - Y^-) \mid G) = (Y^+ - Y^-)E(X \mid G).$$

D'où, $E(XY^{\pm} \mid G) = Y^{\pm}E(X \mid G)$

i.e $E(XY \mid G) = YE(X \mid G)$

5) Soit G une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$E(E(X \mid G)) = E(X)$?

On a par definition $E(X \mid G)$ est une variable aléatoire G-mesurable telle que :

$$\int_A E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in G.$$

On pose :$A = \Omega$

Tel que :

$$\int_\Omega E(X \mid G) d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

D'où, $E(E(X \mid G)) = E(X)$.

6) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a définit sur cet espace, G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Si X est indépendante de G, alors $E(X \mid G) = E(X)$?

On sait que :

$E(X)$ une constante,$\forall A \in G$

telle que :

$$\int_A E(X) d\mathbb{P} = E(X) \int_A d\mathbb{P}, \forall A \in G \text{ et } E(X) \overset{def}{=} \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Alors,

$$\begin{gathered}(\int_\Omega X d\mathbb{P})(\int_A d\mathbb{P}), \forall A \in G \\ \int_\Omega X d\mathbb{P} \int_\Omega 1_A d\mathbb{P}, \forall A \in G\end{gathered}$$

On a X est indépendant de G, alors X est indépendant de $1_A, \forall A \in G$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\int_A E(X)d\mathbb{P} &= (\int_\Omega Xd\mathbb{P})(\int_\Omega 1_A d\mathbb{P}), \forall A \in G \\
&= \int_\Omega X1_A d\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&= \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in G \\
&\stackrel{def}{=} \int_A E(X \mid G)d\mathbb{P}, \forall A \in G,
\end{aligned}$$

implique

$$\int_A E(X) - E(X \mid G)d\mathbb{P} = 0, \forall A \in G$$

On a $E(X)$ une constante est G-mesurable et $E(X \mid G)$ une v.a est G-mesurable, donc $E(X) - E(X \mid G)$ une v.a est G-mesurable.

En conclut que : $E(X) - E(X \mid G) = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$

D'où, $E(X \mid G) = E(X)$ $\mathbb{P}-p.s.$

7) Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), p \geq 1$. Alors $\|E(X \mid G)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)} < \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

On sait que $X \leq |X|$

$$E(X \mid G) \leq E(|X| \mid G)$$

(d'après la croissance de l'esperance conditionnelle)

Implique que

$$|E(X \mid G)|^p \leq (E(|X| \mid G))^p \leq E(|X|^p \mid G)$$

(d'après l'inégalité de Jensen, $p \geq 1$)

$$\Longrightarrow E(|E(X \mid G)|^p) \leq E(E(|X|^p \mid G)) = E(|X|^p).$$

D'après la propriété de l'esperance conditionnelle on a $E((E(X \mid G)) = E(X))$, on sait que $\|Y\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)} = E(\,|Y|^p)$, Alors on a le résultat suivant

$$\|E(X \mid G)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)} = E(\,|E(X \mid G)|^p) \; et \; \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)} = E(\,|X|^p).$$

Alors,

$$E(\,|E(X \mid G)|^p) \leq E(\,|X|^p).$$

On conclut que, $\|E(X \mid G)\|_{_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)}} \leq \|X\|_{_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)}}$. ■

1.1.5 L'espérance conditionnelle dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Soit X une v.a de carré intégrable, G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Alors $E(X \mid G)$ est la projection de X sur l'espace de v.a, G-mesurable de carré intégrable (i.e $E(X \mid G)$ est une variable aléatoire qui minimise $E((X - Y)^2)$ parmi les v.a.s Y, G-mesurable).

Chapitre §.2
Généralité sur le calcul stochastique et l'EDS

Chapitre 2

Généralité sur le calcul stochastique et l'EDS

2.1 Processus stochastique

Définition 2.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramètre du temps t variant dans I.*

1. *Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
2. *Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t\in T}$ associée à ω.*

Remarque 2.1.1

1. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.*
2. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.*

Définition 2.1.2 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F}$= $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous*

$0 \leq s \leq t$ dans T

1. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

2. On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

   c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

3. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 2.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 2.1.4 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Définition 2.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application*

$(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 2.1.6 (Processus càdlàg) *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 2.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 2.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 2.1.7 (Mouvement Brownien) *on appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(ii) *Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

(iii) *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 2.1.8 (Mouvement Brownien standard) *Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s, \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 2.1.2 *Soit W un mouvement Brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*
2. *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $Z_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$, donc (Z_t) est un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$.*

Théoreme 2.1.1 *Un processus W est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 2.1.3 *Soit W un MB alors presque sûrement on a :*

– *W n'est pas différentiable en aucun point t.*

– *W n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 2.1.9 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si pour $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 2.1.10 (Martingales) *Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale si :*

1. *pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$adapté ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;*
3. *pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s, \quad \mathbb{P}-p.s.$*

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Proposition 2.1.4 *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien*

(i) *$W_t^2 - t$ est une martingale.*

(ii) *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ est une martingale.*

Remarque 2.1.3 *Le mouvement Brownien standard $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(W_s, s \leq t)$.*

Théoreme 2.1.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soit W_t un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$,et M_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adapté. Alors, il existe un processus adapté Z_s tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t Z(s)dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 2.1.11 (Martingale local) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, $\mathbb{P} - p.s.$ et pour tout n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Définition 2.1.12 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit $[0, T]$ un intervalle et $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, une subdivision de $[0, T]$ de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X indexé par $[0, T]$ associé a π_n :

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ admet une limite dans (en un certain sens) lorsque $\|\pi_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ variation d'ordre p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée vaiation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

2.2 Calcul d'Itô

2.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à W_t, alors l'intégrale d'Itô

$$\int_0^T \phi_s dW_s \text{ est définie par la limite en moyenne quadratique de} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et W_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.
l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ pour des processus ϕ

1. Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = \left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

2. Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s$ de carré intégrable.

On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (W_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$ car $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que

$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2, \\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2), \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dW_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i), \\
&= \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

2.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéairité :
$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \phi_s^1 dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 dW_s.$$
2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$
$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$
3. Propriétés de martingale : pour tout processue ϕ les processus :
$$t \to I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale continues.

$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2 \mid \mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du / \mathcal{F}_s^W\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2 dW_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2 ds\right),$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

2.2.3 Processus d'Itô

Définition 2.2.1 (processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s \quad \mathbb{P} - p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dW_s.$$

2.2.4 Formule d'Itô

Théoreme 2.2.1 (première formule d'Itô) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

Théoreme 2.2.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 2.2.1 *La formule dItô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (i.e $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $W(t)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \textstyle\int_0^t f_s(s, X_s)\,\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\,\varphi_s ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\,\theta(s)\right] + \textstyle\int_0^t f_x(s, X_s)\,\theta_s dW_s \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t\,.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

2.3 Equation différentielle stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) avec un terme aléatoire modélisant un bruit autour de phénomène déterministe, la parturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien.

Définition 2.3.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) donnée par :*

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s) ds \ + \int_0^t \sigma(x_s) dW_s,$$

ou sous forme

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\{W; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien d-dimensionnel. Le coefficient* $b(t, x_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, x_t)$ *de* dW_t *est appelé terme de diffusion.*

Pour trouver une solution (forte) à l'équation (2.1) signifie trouver une processus stochastique (x_t) $t \geq 0$ continue $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, x_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, x_s) dW_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s, x_s)| \, ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, x_s)|^2 \, ds < +\infty, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

2. (x_t), $t \geq 0$ vérifie (2.1) :

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s) ds \ + \int_0^t \sigma(s, x_s) dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

2.3.1 Existence et unicité

Le théorème dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat l'existence et l'unicité du solution de l'équation (2.1).

Théoreme 2.3.1 (d'existence et d'unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $k < +\infty$:*

1. *Conditons de lipschitz :* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$.
2. *Conditons de coissance linéaire ;* $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$.
3. $\mathbb{E}(x^2) < +\infty$.

Alors : pour tout $t \geq 0$ l'équation (2.1) admet solution unique dans $[0,T]$. D'autre part la solution $(x_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty.$$

Preuve. a- Pour démontrer l'existence d'une solution forte, on définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \|x\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right). \end{array} \right\}$$

Pour $x \in S_c^2$ posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(x_t) = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s,$$

le processus $\Psi(x)$ est bien définie.et est continu si $x \in S_c^2$.
Soient x et y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(s,x_s)ds - b(s,y_s))\, ds \right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(s,x_s)ds - \sigma(s,y_s))\, dW_s \right|^2.$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(x_t) - \Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,x_s)ds - b(s,y_s)|\, ds\right)^2\right] \\ &\quad + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right]\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s,x_s)-b(s,y_s)|^2\,ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)ds-\sigma(s,y_s)|^2\,ds\right].$$

Comme les fonction b et σ sont lipschiz

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right]\leq 2k^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_t-y_t|^2\,dr\right]. \tag{2.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$,
$|\Psi(0)|^2\leq 3x^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2$,
d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croussance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(0)|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}(x^2)+K^2T^2+4K^2T\right), \tag{2.3}$$

Les estimations (2.2) et (2.3) montrant alors que le processus $\Psi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$x_0=0,\quad \text{et},\quad x^{n+1}=\Psi(x^n),\ \text{pour } n\geq 0.$$

On obtient (2.2), pour tout $n\geq 0$ notant par C à la place de $2k^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right]\leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^1\right|^2\right],$$

et notant D le majorant de l'inégalité (2.3),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right]\leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right\|_{L^2}\leq\sqrt{D}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$, x^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $x\in S_c^2$. On vérifier que x est solution de l'EDS (2.1) en passant à la limite dans la définition $x^{n+1}=\Psi(x^n)$.

Si x et y deux solution de (2.1) dans S_c^2 alors : $x=\Psi(x_t)$ et $y=\Psi(y_t)$. L'inégalité (2.1) alors donne pour tout $u\in[0T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|x_t-y_t|^2\right]\leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u\sup_{0\leq t\leq r}|x_s-y_s|^2\right]dr,$$

le lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t-y_t|^2\right]=0,$$

ce si implique que x et y sont indistinguables i.e. $\mathbb{P}(x_t=y_t,\forall 0\leq t\leq T)$. ■

Chapitre §.3
Principe du Maximum stochastique

Chapitre 3

Principe du maximum stochastique

Dans ce chapitre, on va étudier le principe du maximum stochastique. Nous donnons une formulation générale du problème, puis nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité tel que $\mathcal{F}_0$ contient $\mathbb{P}$-nulle, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ pour un horizon temporel T arbitrairement fixe, et satisfait les condition habitulles. Supposons que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$ est génère par un brownien standard de dimension d. On note par U l'ensmble de tout les contrôles admissibles. Tout élément $y \in \mathbb{R}^n$ sera indentifie à un vecteur de colonne avec n composantes, et la norme $|y| = |x^1| + ... + |x^n|$. Le produit scalaire de deux vecteurs y et x quelconques sur $\mathbb{R}^n$ et noté par yx ou $\sum_{i=1}^{n} y^i x^i$. Pour toute fonction h, on note par h_y (resp. h_{yy}) le gradient ou le Jacobien (resp.le Hessian) de h par rapport à la variable y.

Définition 3.1.1 *Un contrôle admissible et un processus mesurable et adapté* $u : [0,T] \times \Omega \to U$*, telle que* $\mathbb{E}\left[\int_0^T u(s)\, ds\right] < +\infty$.

On considère l'équation diffrentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dy\left(t\right) & = b\left(t, y\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + \sigma\left(t, y\left(t\right), u\left(t\right)\right) dB\left(t\right) \\ y\left(0\right) & = y, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d},$$

sont des fonctions donnés.

Supposons que la fonction de coût $J\left(u\right)$ est de la forme

$$J\left(u\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, y\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + g\left(y\left(T\right)\right)\right], \tag{3.2}$$

où

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le problème du contrôle stochastique est de trouver un contrôle optimale $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ telle que

$$J\left(\widehat{u}\right) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J\left(u\right). \tag{3.3}$$

Soient les hypothèses suivantes sur les coefficients b, σ, f, et g :

(H1) Les fonctions b, σ, et f sont différensiables en continue par rapport à (y, u), et g et continuement différensiable en y.

(H2) Les dérivés $b_y, b_u, \sigma_y, \sigma_u, f_y, f_u$, et g_y sont continues en (y, u) et uniformement borné.

(H3) b, σ, f sont bornés par $K_1\left(1 + |y| + |u|\right)$, et g est borné par $K_1\left(1 + |y|\right)$, où $K_1 > 0$.

On définit l'Hamiltonian $\mathbb{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{H}(t,y,u,p,q) = f(t,y,u) + pb(t,y,u) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} q^j \sigma^j(t,y,u), \tag{3.4}$$

où q^j et σ^j pour $j = 1,..,n$, est la $j^{ème}$ colonne de la matrice q et σ respectivement.

Soit $\widehat{u}$ un contrôle optimal et $\widehat{y}$ est la trajectoire optimale correspondante. On considére une paire (p,q) de processus adaptés de carrés intégrables associés à $\widehat{u}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ telle que

$$\begin{cases} dp(t) = & -\mathbb{H}_y(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t),p(t),q(t))dt + q(t)\,dB(t), \\ p(T) = & g_y(\widehat{y}(T)). \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Le but de cette section est de trouver les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par le contrôle optimal sachant que la solution existe. L'idée est d'utiliser une perturbation convexe sur le contrôle optimal, conjointement avec quelques estimations de la trajectoire et des performances de l'état fonctionnel, et en tendant les perturbations vers zéro, on obtient, ainsi une certaine inégalité, et par le théoreme de resprésentation des martingale on peut énoncer le principe du maximum stochastique.

Théoreme 3.2.1 (Conditions nécessaires d'optimalité) *Soit $\widehat{u}$ un contrôle optimal qui minimise la performance fonctionnelle J sur $\mathcal{U}$, et soit $\widehat{y}$ la trajectoire optimale correspondante, alors il existe un processus adapté $(p,q) \in \mathbb{L}^2(([0,T];\mathbb{R}^n)) \times \mathbb{L}^2\left(([0,T];\mathbb{R}^{n\times d})\right)$ qui est la solution unique de l'EDSR (3.5), telle que pour tout $v \in U$*

$$\mathbb{H}_u(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t),p(t),q(t))(v_t - \widehat{u}(t)) \leq 0, \quad \mathbb{P}-a.s.$$

Pour démontrer le théorème 3.2.1, on présente ce qui suit :

3.3 Equation variationnelle

Soit $v \in \mathcal{U}$ telle que $(\widehat{u}+v) \in \mathcal{U}$, la condition de convexité du domaine de contrôle assure que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ le contrôle $(\widehat{u}+\varepsilon v)$ est également en $\mathcal{U}$. On note y^{ε} la solution de EDS (3.1) correspond au contrôle $(\widehat{u}+\varepsilon v)$, puis par les arguments standards du calcul, il est facile de vérifier le résultat de convergence suivante :

Lemme 3.3.1 *D'après l'hypothèse* (**H1**)*, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y^{\varepsilon}(t) - \widehat{y}(t)\right|^2\right] = 0. \tag{3.6}$$

Preuve. Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y^{\varepsilon}(t) - \widehat{y}(t)\right|^2\right] \leq K \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{\tau\in[0,s]} \left|y^{\varepsilon}(r) - \widehat{y}(r)\right|^2\right] ds \tag{3.7}$$

$$+ K\varepsilon^2 \left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,s]} \left|v(r)\right|^2\right] ds\right), \tag{3.8}$$

et d'aprés la définition 3.1.1, et le lemme de Gronwall, le résultat suit immédiatement en laissant ε aller à zéro. ■

On définit le processus $z(t) = z^{\widehat{u},v}(t)$ par

$$\begin{cases} dz(t) &= \left\{b_y\left(t, \widehat{z}(t), \widehat{u}(t)\right) z(t) + b_u\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) v(t)\right\} dt \\ & \quad + \sum\limits_{j=1}^{d} \left\{\sigma_y^j\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) z(t) + \sigma_u^j\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) v(t)\right\} dB^j(t), \\ z(0) &= 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

A partir de (**H2**) et la définition 3.1.1, on peut trouver une solution unique z qui résout l'équation variation (3.9), et l'estimation suivante est valable.

Lemme 3.3.2 *D'après l'hypothèse* (**H1**)*, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left|\frac{y^{\varepsilon}(t) - \widehat{y}(t)}{\varepsilon} - z(t)\right|^2 = 0. \tag{3.10}$$

Preuve. On pose
$$\Gamma^{\varepsilon}(t) = \frac{y^{\varepsilon}(t) - \widehat{y}(t)}{\varepsilon} - z(t).$$

On note par $y^{\mu,\varepsilon}(t) = \widehat{y}(t) + \mu\varepsilon\left(\Gamma^{\varepsilon}(t) + z(t)\right)$, et $u^{\mu,\varepsilon}(t) = \widehat{u}(t) + \mu\varepsilon v(t)$. Ensuite, nous avons immédiatement que $\Gamma^{\varepsilon}(0) = 0$ et $\Gamma^{\varepsilon}(t)$ vérifier l'EDS suivante

$$\begin{aligned}
d\Gamma^{\varepsilon}(t) = & \left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(b\left(t, y^{\mu,\varepsilon}(t), u^{\mu,\varepsilon}(t)\right) - b\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right)\right)\right. \\
& \left. - \left(b_y\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) z(t) + b_u\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) v(t)\right)\right\} dt \\
& + \left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\sigma\left(t, y^{\mu,\varepsilon}(t), u^{\mu,\varepsilon}(t)\right) - \sigma\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right)\right)\right. \\
& \left. - \left(\sigma_y\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) z(t) + \sigma_u\left(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)\right) v(t)\right)\right\} dB(t).
\end{aligned}$$

Comme les dérivées des coefficients sont bornées et à partir de la définition 3.1.1, il est facile de vérifier par l'inégalité de Gronwall que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\Gamma^{\varepsilon}(t)\right|^2 \leq & K\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_0^1 b_y\left(s, y^{\mu,\varepsilon}(s), u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)\Gamma^{\varepsilon}(s)\, d\mu\right|^2 ds + K\mathbb{E}\left|\rho^{\varepsilon}(t)\right|^2 \\
& + K\mathbb{E}\int_0^t \left|\int_0^1 \sigma_y\left(s, y^{\mu,\varepsilon}(s), u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)\Gamma^{\varepsilon}(s)\, d\mu\right|^2 ds,
\end{aligned}$$

où $\rho^{\varepsilon}(t)$ est donner par

$$\begin{aligned}
\rho^{\varepsilon}(t) = & -\int_0^t b_y\left(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)\right) z(s)\, ds \\
& - \int_0^t \sigma_y\left(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)\right) z(s)\, dB(s) \\
& - \int_0^t b_v\left(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)\right) v(s)\, ds \\
& - \int_0^t \sigma_v\left(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)\right) v(s)\, dB(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int_0^1 b_y\left(s,y^{\mu,\varepsilon}(s),u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)z(s)\,d\mu ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_v\left(s,y^{\mu,\varepsilon}(s),u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)v(s)\,d\mu ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_y\left(s,y^{\mu,\varepsilon}(s),u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)z(s)\,d\mu dB(s)\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_v\left(s,y^{\mu,\varepsilon}(s),u^{\mu,\varepsilon}(s)\right)v(s)\,d\mu dB(s).
\end{aligned}
$$

Puisque b_y, σ_y sont bornés, alors

$$
\mathbb{E}\left|\Gamma^{\varepsilon}(t)\right|^2 \leq M\mathbb{E}\int_0^t \left|\Gamma^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds + M\mathbb{E}\left|\rho^{\varepsilon}(t)\right|^2,
$$

où M est une constante dépondant de la constante K et T. D'après le lemme 3.3.2, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho^{\varepsilon}(t)=0$. Par le lemme de Gronwall et en laissant ε aller à 0, on obtient le résultat demandé. ■

3.4 Inégalité variationnelle

Soit Φ est la solution de l'équation linéaire suivante :

$$
\begin{cases}
d\Phi_{s,t} &= b_y\left(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)\right)\Phi_{s,t}dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_y^j\left(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)\right)\Phi_{s,t}dB^j(t),\\
\Phi_{s,s} &= I_d,
\end{cases}
$$

où I_d est la matrice d'identité $n\times n$, cette équation est linéaire avec des coefficients bornées, de plus elle admet une solution unique.

D'apés la formule d'Itô nous pouvons vérifié que $d\left(\Phi_{s,t}\Psi_{s,t}\right)=0$, et $\Phi_{s,s}\Psi_{s,s}=I_d$, où Ψ

est la solution de l'équation suivant

$$\begin{cases} d\Psi_{s,t} & = -\Psi_{s,t}\left\{ b_y\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right) - \sum\limits_{j=1}^{d}\sigma_y^j\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)\sigma_y^j\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)\right\} dt \\ & \quad -\sum\limits_{j=1}^{d}\Psi_{s,t}\sigma_y^j\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)dB^j\left(t\right), \\ \Psi_{s,s} & = I_d, \end{cases}$$

donc $\Psi = \Phi^{-1}$, si $s = 0$ en écrit simplement $\Phi_{0,t} = \Phi_t$, et $\Psi_{0,t} = \Psi_t$. Par l'intégration par partie, nous pouvons voir que la solution de l'équation (3.9) est données par $z\left(t\right) = \Phi_t \eta_t$, où η_t est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\eta_t & = \Psi_t\left\{ b_u\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)v\left(t\right) - \sum\limits_{j=1}^{d}\sigma_y^j\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)\sigma_u^j\left(t,\widehat{y}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)v\left(t\right)\right\} dt \\ & \quad +\sum\limits_{j=1}^{d}\Psi_t\sigma_u^j\left(t,x_t^\star,u_t^\star\right)v\left(t\right)dB^j\left(t\right), \\ \eta_0 & = 0. \end{cases}$$

Maintenant, on introduir la perturbation convexe suivante du contrôle optimal $\widehat{u}$ par

$$u^\varepsilon = \widehat{u} + \varepsilon v, \tag{3.11}$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$, et $\varepsilon \in (0,1)$.

D'après l'optimalité du contrôle $\widehat{u}$, alors $\varepsilon^{-1}\left(J\left(u^\varepsilon\right) - J\left(\widehat{u}\right)\right) \geq 0$. Donc, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\left(J\left(u^\varepsilon\right) - J\left(\widehat{u}\right)\right) \geq 0. \tag{3.12}$$

Le reste est consacré au calcul de la limite ci-dessus.

Lemme 3.4.1 *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H1})$, *on a :*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\left(J\left(u^{\varepsilon}\right)-J\left(\widehat{u}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{f_y\left(s,\widehat{y}\left(s\right),\widehat{u}\left(s\right)\right)z\left(s\right)+f_u\left(s,\widehat{y}\left(s\right),\widehat{u}\left(s\right)\right)v\left(s\right)\right\}ds+g_y\left(\widehat{y}\left(T\right)\right)z\left(T\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-1}\left(J\left(u^{\varepsilon}\right)-J\left(\widehat{u}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 \left\{f_y\left(s,y^{\mu,\varepsilon}\left(s\right),u^{\mu,\varepsilon}\left(s\right)\right)z\left(s\right)+f_u\left(s,y^{\mu,\varepsilon}\left(s\right),u^{\mu,\varepsilon}\left(s\right)\right)v\left(s\right)\right\}d\mu ds \right.\\ &\qquad \left. +\int_0^1 g_y\left(y^{\mu,\varepsilon}\left(T\right)\right)z\left(T\right)d\mu\right]+\beta^{\varepsilon}\left(t\right), \end{aligned}$$

où

$$\beta^{\varepsilon}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 f_y\left(s,y^{\mu,\varepsilon}\left(s\right),u^{\mu,\varepsilon}\left(s\right)\right)\Gamma^{\varepsilon}\left(s\right)d\mu ds+\int_0^1 g_y\left(y^{\mu,\varepsilon}\left(T\right)\right)\Gamma^{\varepsilon}\left(T\right)d\mu\right].$$

D'après le lemme 3.3.2, et comme les dérivées f_y, f_u, et g_y sont bornées, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\beta^{\varepsilon}\left(t\right)=0$.

■

En remplaçant par $z\left(t\right)=\Phi_t\eta_t$ dans (3.13), cela conduit à

$$I=\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{f_y\left(s,\widehat{y}\left(s\right),\widehat{u}\left(s\right)\right)\Phi_s\eta_s+f_u\left(s,\widehat{y}\left(s\right),\widehat{u}\left(s\right)\right)v\left(s\right)\right\}ds+g_y\left(\widehat{y}\left(T\right)\right)\Phi_T\eta_T\right].$$

Considérons la martingale continue et de carré intégrable suivante

$$M\left(t\right):=\mathbb{E}\left[\int_0^T f_y\left(s,\widehat{y}\left(s\right),\widehat{u}\left(s\right)\right)\Phi_s ds+g_y\left(\widehat{y}\left(T\right)\right)\Phi_T\left|\mathcal{F}_t\right.\right].$$

Par le théorème de représentation des martingales, il existe $Q=\left(Q^1,..,Q^d\right)$ où $Q^j\in\mathbb{L}^2$, pour $j = 1, ..., d,$

$$M(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_y(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, \Phi_s ds + g_y(\widehat{y}(T))\, \Phi_T\right] + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t Q^j(s)\, dB^j(s).$$

Nous introduisons un peu plus de notation, on note

$$\widehat{y}(t) = M(t) - \int_0^t f_y(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, \Phi_s ds.$$

Les processus adjoints défini par

$$\begin{cases} p(t) & = \widehat{y}(t)\, \Psi_t, \\ q^j(t) & = Q^j(t)\, \Psi_t - p(t)\, \sigma_y^j(t, \widehat{y}(t), \widehat{u}(t)), \text{ for } j = 1, ..., d. \end{cases} \tag{3.14}$$

Théoreme 3.4.1 *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H1})$, *on a*

$$I = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ f_u(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)) + p(s)\, b_u(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)) + \sum_{j=1}^{d} q^j \sigma_u^j(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)) \right\}\right].$$

Preuve. À partir de la formule d'intégration par partie, et en utilisant la définition de $p(t), q^j(t)$ pour $j = 1, .., d,$ on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} E[y(T)\, \eta(T)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ p(t)\, b_u(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)) + \sum_{j=1}^{d} q^j(s)\, \sigma_u^j(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s)) \right\} v(t)\, dt \right. \\ &\quad - \int_0^T f_y(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, \eta_t \Phi_t dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De plus

$$I = \mathbb{E}\left[y(T)\, \eta(T) + \int_0^T f_y(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, \Phi_t \eta_t dt + \int_0^T f_u(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, v(t)\, dt\right], \tag{3.16}$$

en remplaçant (3.15) dans (3.16), cela complète la preuve. ■

3.5 Conditions suffissantes d'optimalité

Théoreme 3.5.1 *Soit $\widehat{u}$ un contrôle admissible, notons $\widehat{y}$ le processus d'état contrôlé associé, et soit (p,q) une solution d' EDSR (3.5).*

Supposons que :

1- $\mathbb{H}(t,y,u,p(t),q(t))$ et g sont des fonctions concaves.

2- Pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{H}(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t),p(t),q(t))=\inf_{u\in U}\mathbb{H}(t,\widehat{y}(t),u(t),p(t),q(t)), \tag{3.17}$$

alors $\widehat{u}$ est un contrôle optimal.

Preuve. Nous considérons la différence

$$\begin{aligned}J(\widehat{u})-J(u)=\mathbb{E}&\left[\int_0^T(f(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t))-f(t,y(t),u(t)))\,dt\right]\\&+\mathbb{E}[g(\widehat{y}(T))-g(y(T))].\end{aligned}$$

Puisque g est concave, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(\widehat{y}(T))-g(y(T))]&\geq\mathbb{E}[(\widehat{y}(T)-y(T))\,g_y(\widehat{y}(T))]\\&=\mathbb{E}[(\widehat{y}(T)-y(T))\,p(T)]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^T(\widehat{y}(t)-y(t))\,dp(t)+\int_0^T p(t)\,d(\widehat{y}(t)-y(t))\right]\\&\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^T\sum_{j=1}^n\left(\sigma^j(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t))-\sigma^j(t,y(t),u(t))\right)q^j(t)\,dt\right],\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T(\widehat{y}(t)-y(t))\,dp(t)\right]=\mathbb{E}&\left[\int_0^T(\widehat{y}(t)-y(t))(-H_y(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t),p(t),q(t)))\,dt\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T(\widehat{y}(t)-y(t))\,q(t)\,dB(t)\right],\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T p(t)\, d(\widehat{y}(t) - y(t))\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T p(t)\,(b(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)) - b(t,y(t),u(t)))\, dt\right]$$
$$+\,\mathbb{E}\left[\int_0^T p(t)\,(\sigma(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)) - \sigma(t,y(t),u(t)))\, dB(t)\right].$$

D'autre part le processus

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \{p(t)\,(\sigma(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)) - \sigma(t,y(t),u(t)) + (\widehat{y}(t) - y(t))\, q(t))\}\, dB(t)\right]$$

est une martingale locale continue pour tout $0 < t \leq T$, et d'après que $(p,q) \in \mathbb{L}^2\left(\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)\right) \times \mathbb{L}^2\left(\left([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}\right)\right)$, on déduit que les intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales ont une espérance nulle. Par la concavité du Hamiltonien $\mathbb{H}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[g(\widehat{y}(T)) - g(y(T))\right] \geq -\mathbb{E}\left[\int_0^T (H(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t),p(t),q(t)) - H(t,y(t),u(t),p(t),q(t)))\, dt\right]$$
$$+\,\mathbb{E}\left[\int_0^T p(t)\,(b(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)) - b(t,y(t),u(t)))\, dt\right]$$
$$+\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (\sigma(t,\widehat{y}(t),\widehat{u}(t)) - \sigma(t,y(t),u(t)))\, q(t)\, dt\right].$$

Par la définition d'Hamiltonien $\mathbb{H}$, on obtient

$$J(\widehat{u}) - J(u) \geq 0,$$

alors $\widehat{u}$ est un contrôle optimal. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le principe du maximum stochastique pour un système gouverné par une equation différentielle stochastique (EDS). Nous avons commencé par étudié l'espérence conditionnelle et ses propriétés. D'autre part on a étudié la théorie du calcul stochastique qui nous permet de définir les équations différentielles stochastiques EDSs. Finalement, nous avons étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité satisfaites par ce contrôle.

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. : Lectures on stochastic control. In : Nonlinear filtering and stochastic control. pp. 1-62. Springer, (1982)

[2] Pham, H. : Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, vol. 61. Springer, (2007)

[3] Lakhdari, I.E. : Optimal control for stochastic differential equations governed by normal martingales. MOHAMED KHIDER UNIVERSITY, BISKRA (2018).

[4] Yong, J., Zhou, X.Y. : Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, vol. 43. Springer Science & Business Media, (1999)

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	Equation différentielle stochastique retrograde
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$
b	la derivé (drift)
σ	Terme de diffusion.
$\mathcal{U}$	L'ensemble des contrôles admissibles.
$J(\cdot)$	La fonction de coût.
$\widehat{u}$	contrôle optimal.
$\mathbb{H}(t, X, u, p, q, r)$	L'Hamiltonian.
$p(t)$	Processus adjoint.
$\mathbb{P} - p - s.$	Presque sûrment pour lamesure de probabilité $\mathbb{P}$.