

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence :/2020



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع/2020

Mémoire de Master

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structure

Thème

**Effet des conditions aux bords sur la vibration
libre des plaques composites multicouches**

Nom et Prénom de l'étudiant :

BOUSSAADIA Fatiha

Encadreur :

Dr.BELARBI Mohamed Ouejdi

Année universitaire : 2019 - 2020

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement

A mes frères

A mes amies et mes proches

Sans oublier ma sœur FAIZA et ta famille

A ceux qui malgré la distance ont toujours été la présent par leurs apport morale.

Merci à tous et à toutes.



Résumé

L'utilisation des matériaux composites concerne aujourd'hui de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, nécessite une bonne connaissance précise et une caractérisation poussée de leur comportement mécanique et du comportement vibratoire de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique.

Le travail de ce mémoire a pour objet d'étudier le comportement dynamique des plaques stratifiées multicouches en matériaux composites. Un élément fini de forme rectangulaire ayant quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud est formulé sur la base de la théorie de premier ordre de cisaillement transverse (FSDT). Les calculs sont effectués numériquement en utilisant un programme en langage FORTRAN et un autre en MATLAB. Les résultats obtenus par le présent élément sont comparés avec les solutions analytiques et ceux obtenus par des modèles en EF. La comparaison montre la bonne performance de l'élément utilisé en terme de rapidité de convergence et de précision. En addition, l'influence de certains paramètres, tels que le rapport d'anisotropie, le nombre de couches, l'orientation des fibres, le rapport d'épaisseur et les conditions aux limites, etc.... sur la variation des fréquences fondamentales est analysé.

Mots clés: Matériaux composite, plaque stratifiée, théorie du premier ordre, éléments finis, vibration libre.

Abstract

The use of composite materials today concerns many industrial sectors. For the needs of modern technology, requires a good precise knowledge and a thorough characterization of their mechanical behavior and the vibration behavior of these structures is essential in the design or the verification of any deformable system in a dynamic environment.

The purpose of this dissertation is to study the dynamic behavior of multilayer laminated plates in composite materials. A finite element of rectangular shape having four nodes with five degrees of freedom per node is formulated on the basis of the first order theory of transverse shear (FSDT). The calculations are performed numerically using a FORTRAN language program and another in MATLAB. The results obtained by this element are compared with the analytical solutions and those obtained by models in FE. The comparison shows the good performance of the element used in terms of speed of convergence and precision. In addition, the influence of some parameter, such as anisotropy ratio, number of layers, fiber orientation, thickness ratio and boundary conditions, etc ... on the variation of fundamental frequencies is analyzed.

Keywords: Composite materials, laminated plate, first order theory, finite elements, free vibration.

ملخص

يتعلق استخدام المواد المركبة اليوم بالعديد من القطاعات الصناعية. لاحتياجات التكنولوجيا الحديثة ، يتطلب معرفة دقيقة جيدة وتوصيفاً شاملاً لسلوكها الميكانيكي وسلوك اهتزاز هذه الهياكل ضروري في التصميم أو التحقق من أي نظام مشوه في بيئة ديناميكية.

الغرض من هذه الرسالة هو دراسة السلوك الديناميكي للصفائح متعددة الطبقات في المواد المركبة. تمت صياغة عنصر محدود من الشكل المستطيل يحتوي على أربع عقد مع خمس درجات من الحرية لكل عقدة على أساس نظرية الدرجة الأولى للقص المستعرض (FSDT). يتم إجراء الحسابات عددياً باستخدام برنامج لغة FORTRAN وآخر في MATLAB. تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بواسطة هذا العنصر مع الحلول التحليلية وتلك التي تم الحصول عليها بواسطة النماذج في العناصر المحدودة. تظهر المقارنة الأداء الجيد للعنصر المستخدم من حيث سرعة التقارب والدقة. بالإضافة إلى ذلك ، يتم تحليل تأثير بعض العوامل ، مثل نسبة التباين ، وعدد الطبقات ، واتجاه الألياف ، ونسبة السماكة وظروف الحدود ، وما إلى ذلك ... على تباين الترددات الأساسية.

الكلمات المفتاحية : المواد المركبة ، اللوح الرقائقي ، نظرية الدرجة الأولى ، العناصر المحدودة ، الاهتزازات الحرة.

Table des matières

Résumé

Abstract

ملخص

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

1-Introduction	1
2- Objectif de mémoire	1
3- Plan de mémoire	1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites.

I-1-introduction.....	3
I-1-1-Définition générale.....	4
I-1-2-Quelques définitions de base	4
I-1-3-Historique.....	4
I-1-4-Domaine d'utilisation	5
I-1-5-Avantage et Inconvénients des matériaux composites.....	5
I-2- Les constituants des matériaux composites.....	6
I-2-1-Les renforts.....	6
I-2-2-Matrice.....	7
I-3-Classification des matériaux composites	7
I-3-1.Les composites structuraux	8
I-3-1.1-Composites stratifiées	8
I-3-1-2-Composites sandwiches	9
I-3-1-3-Monocouches.....	11
I-4-Modèles de structures multicouches existantes.....	11
I-4-1-le modèle tridimensionnel (3D).....	12
I-4-2-le modèle bidimensionnel (2D)	12

I-4-2-1-Approche monocouche équivalente:.....	12
I-4-2-1-1.Le modèle classique Love-Kirchhoff	13
I-4-2-1-2.Le modèle classique de Reissner-Mindlin	14
I-4-2-1-2.1-Facteurs de correction du CT.....	14
I-4-2-1-3.Les modèles d'ordre supérieur.....	15

Chapitre II : comportement mécanique et dynamique des plaques composites multicouches.

II-1- Introduction.....	16
II-2- la Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	17
II-2-1-Les hypothèses de la théorie	17
II-2-2-Champ des déplacements	17
II-2-3-Champ des déformations	18
II-2-4-Loi de Hooke généralisé	19
II-3-Types des matériaux:.....	20
II-3-1-Matériaux anisotropes:.....	20
II-3-2Matériaux orthotrope :.....	20
II-3-3Matériaux isotrope :.....	22
II-4-Relation contrainte déformation :.....	23
II-5-Expression des efforts résultants :.....	25
II-5-1-Résultantes en membrane :.....	25
II-5-2- Moment de flexion et de torsion :.....	26
II-5-3- Résultantes en cisaillement.....	27
II-6- Comportement dynamiques des plaques stratifiées :.....	29
II-6-1- Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures.....	29
II-6-2-Analyse vibratoire des plaques composites	29
II-6-3-Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre.....	30
II-6-3-1- Equilibre par rapport aux résultantes en membrane.....	31
II-6-3-2Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement.....	33
II-6-3-3-Relation fondamentale relatives aux moments.....	33
II-6-3-4-Résumé des Relations fondamentales.....	35
II-6-4Equations du mouvement du stratifié	36

Chapitre III : formulation élément fini.

III-1-introduction.....	37
III-2 Historique	38
III-3-maillage	38
III-4-principe de la méthode des éléments finis	39
III-5- Formulation de l'élément fini utilisé	40
III-5-1-description de l'élément utilisé	40
III-5-2-Cinématique de la théorie	40
III-5-3-approximation nodale des déplacements.....	40
III-5-4-relations cinématiques	42
III-5-5-loi de comportement	44
III-5-6-Evaluation de la matrice de rigidité	44
III-5-6-1 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées	44
III-5-6-2 Problème de flexion	44
III-5-6-3 Formulation de la matrice masse élémentaire.....	46
III- 6-Présentation du programme.....	48
III-6-1-Introduction	48
III-6-2-Description les sous-routines du programme.....	48

Chapitre IV : Validation de l'élément et étude paramétrique

IV-1- Introduction.....	50
IV-2- Formes des conditions aux limites.....	50
IV-3-Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques.....	52
IV-3- 1-plaque carrée isotrope uniformément chargée	52
IV-3-2-Plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites.....	55
IV-4- Validation de l'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques.....	56
IV-4-1 -Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites	56
IV-4-2-Plaque composite stratifiée	59
IV-5-Etude paramétrique.....	63
IV-5-1- Effet du rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale	63
IV-5-2-Effet de rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale	66
IV-5-3-Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale	67

Conclusion générale.....	71
1-conclusion	71

Liste des figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites.

Figure I-1 : La classification des principaux matériaux de renfort.....	6
Figure I-2 : La classification des principaux matériaux de matrice.....	7
Figure I-3 : Classification schématique des types de composites.....	8
Figure I-4 : Constitution d'un stratifié.....	8
Figure I-5 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.....	9
Figure I-6 : Désignations d'un stratifié.....	9
Figure I-7 : Un sandwich typique.....	10
Figure I-8 : les Différentes formes de l'âme (Cœur).....	10
Figure I-9 : Schématisation d'une monocouche.....	11
Figure I-10 : schéma d'une stratifiée par le modèle monocouche et layer wise.....	12
Figure I-11 : Cinématique de Love-Kirchhoff.....	13
Figure I-12 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	13
Figure I-13 : Cinématique d'ordre supérieur	15

Chapitre II : comportement mécanique et dynamique des plaques composites multicouches.

Figure II-1 : couche orthotrope.....	17
Figure II-2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	18
Figure II-3 : schématique d'un matériau orthotrope.....	21
Figure II-4 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée.....	23
Figure II-5 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.....	26
Figure II-6 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	27
Figure II-7 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement.....	27

Chapitre III : formulation élément fini et programmation.

Figure III-1 : Deux maillages plans avec leurs nœuds.....	39
Figure III-2 : Géométrie de l'élément rectangulaire et les variables nodales correspondantes	40

Chapitre IV : Validation de l'élément et étude paramétrique

Figure IV-1 : Schématisation d'un appui simple.....	51
Figure IV-2 : Représentation d'un encastrement.....	51
Figure IV-3 : Représentation d'un bord libre.....	52
Figure IV-4 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous chargement uniformément répartie.....	53
Figure IV-5 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.....	54
Figure IV-6 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope encadrée (EEEE), en fonction de nombre des éléments.....	54
Figure IV-7 : effet des conditions aux limites sur la flèche maximale d'une plaque isotrope carrée.....	56
Figure IV-8 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.....	58
Figure IV-9 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encadrée en fonction de nombre des éléments.....	58
Figure IV-10 : Plaque stratifiée carrée à trois couches, simplement appuyée sous chargement uniformément répartie.....	59
Figure IV-11 : Convergence de La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.....	61
Figure IV-12 : Convergence de La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0/90/0) simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.....	62
Figure IV-13 : effet des conditions aux limites sur la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0)	63
Figure IV-14 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée carrée croisée de 3 couches.....	65

Figure IV-15: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée carrée croisée de 5 couches.....	65
Figure IV-16 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de rapport d'épaisseur de plaque stratifiée carrée croisée de trois couches (0/90/0)	67
Figure IV-17 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de trois couches (0/θ/0).....	68
Figure IV-18: Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de 5 couches (0/θ/0/θ/0).....	69
Figure IV-19 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de neuf couches (0/θ/0/θ/0/θ/0/θ/0).....	69

Liste des tableaux

Chapitre III : formulation élément fini et programmation.

Tableau III-1: Fonctions des sous-routines	48
---------------------------------------------------------	----

Chapitre IV : Validation de l'élément et étude paramétrique

Tableau IV-1: Détails de conditions aux limites.....	52
-------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-2: La flèche maximale (\bar{w}) d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée et encastrée (CCCC).....	53
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-3: La flèche maximale d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites.....	55
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-4: Fréquences fondamentale ($\bar{\omega}$) d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites.....	57
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-5 : La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) de différents types de conditions aux limites	60
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-6 : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0/90/0) de différents types de conditions aux limites.....	61
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-7: Effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis.....	64
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-8 : Effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis croisée de trois couches (0/90/0).....	66
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Tableau IV-9: effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis.....	68
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

1-introduction :

De jour en jour, l'utilisation des matériaux composites prend de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels. Elles deviennent de plus en plus incontournables dans les secteurs du génie civil, de la marine, de l'automobile ainsi que dans les domaines de l'aéronautique et l'aérospatiale. Malgré les nombreux avantages que présentent ces matériaux (leurs rapports rigidité-poids, résistance-poids), il reste toujours des questions sur la complexité du comportement de ces derniers, à cause des problèmes liés principalement à leur hétérogénéité et leur anisotropie. De ce fait, dans de telles applications, l'étude du comportement vibratoire est d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Par conséquent, l'analyse vibratoire est une importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle.

2-Objectif de mémoire :

Dans ce travail, nous procéderons à l'étude du comportement de la vibration libre des plaques composites multicouches en utilisant un élément fini de forme rectangulaire. Ainsi, nous résumons les objectifs de ce travail dans l'étude de l'effet des conditions aux bords sur la fréquence naturelle des plaques composites multicouches.

3-Plan de mémoire:

Le travail de cette mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre, on a exposé quelques définitions sur les matériaux composites ,puis nous avons présenté les trois théories des plaques : Théorie classique des stratifiés (CLT) basée sur les hypothèses de Kirchhoff, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDF) qui est basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin et les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui sont basées sur l'approximation non linéaire des déplacements.

Le deuxième chapitre, nous avons fait premièrement un rappel sur la théorie des plaques épaisses ou la théorie de déformation de cisaillement au premier ordre (FSDF) pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. Et la deuxième partie consacrée à l'étude de comportement vibratoire des plaques composites multicouches.

Le troisième chapitre, est consacré à la formulation théorique d'un élément fini rectangulaire (R4) défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (5DDL) par nœud, basés sur la théorie du premier ordre (FSDT). Suite à cette formulation, nous avons présenté un programme en langage **FORTRAN77** qui permet de calculer la matrice de rigidité et la matrice masse, et un autre programme en langage **MATLAB** qui permet d'obtenir les valeurs propres de vibration.

Le quatrième chapitre, est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément fini dans l'analyse statique et dynamique (vibration libre) des plaques isotropes et des composites stratifiées avec différents cas de conditions aux limites. Dans la deuxième partie, on procède à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la fréquence fondamentale des plaques composites stratifiées.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I-1-introduction :

Les matériaux traditionnels tels que le verre, le carbone, le bore..., répondant à ces conditions par une manière très fragiles, un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure, et pour cela les ingénieurs et les chercheurs dans le monde entier à remplacer les matériaux classiques par des matériaux nouveaux capables de résister à des conditions extrêmes (haute performance).

Pour pouvoir réaliser des structures suffisamment tolérantes aux dommages, les chercheurs ont mis énormément d'efforts pour concevoir des matériaux de construction présentent une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée, bon comportement à la fatigue, une grande légèreté, et la possibilité de concevoir le matériau selon la nécessité.

Dans ce chapitre, on a exposé quelques définitions sur les matériaux composites. Puis nous avons présenté les trois théories des plaques : Théorie classique des stratifiés (CLT) basée sur les hypothèses de Kirchhoff, qui néglige l'effet de cisaillement transverse, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDF) basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin et les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) basées sur l'approximation non linéaire des déplacements.

I-1-1. Définition générale :

Le matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts non miscibles de nature différente mais ayant une forte capacité d'adhésion. [1]

Les composites sont constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. La matrice maintient les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées (modules et limites d'élasticité, résistance mécanique...).

Le concept de matériau composite, par le choix des constituants et de leurs proportions respectives, ainsi que le choix de la forme, des dimensions et de la disposition des renforts, permet donc de concevoir un matériau présentant les caractéristiques spécifiques recherchées [2].

I-1-2. Quelques définitions de base :

Homogène : mêmes propriétés en tout point du matériau.

Hétérogène : propriétés différentes d'un point à un autre.

Isotrope : mêmes propriétés dans toutes les directions.

Isotrope transverse : il existe un axe de symétrie par rapport à une droite.

Orthotrope : propriétés symétriques par rapport à 2 plans de symétrie.

Anisotrope : l'anisotropie (contraire d'isotropie) est la propriété d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation.

Un polymère : est une substance composée de macromolécules.

Un élastomère : est un polymère présentant des propriétés « élastiques », obtenues après réticulation. Il supporte de très grandes déformations avant rupture le terme de caoutchouc est un synonyme de usuel de élastomère.

I-1-3. Historique:

Historiquement, le concept du renforcement à l'aide de fibres est très ancien, ainsi on retrouve dans les références bibliques des allusions à l'utilisation de briques d'argiles renforcées à la paille en Egypte antique.

En avançant quelques milliers d'années dans l'histoire, le monde se trouve plongé dans la deuxième guerre mondiale et la révolution industrielle. C'est dès ces moments là que l'on observe l'ouverture du monde des composites accentué par le développement des polymères.

Le fer fut utilisé pour renforcer la maçonnerie et la construction, cela mena à la création du béton armé. Le premier bateau en fibres de verre fut construit en 1942, ceci fut accompagné par l'utilisation de plastique renforcé dans l'aéronautique et les composants électriques. Les

premières fibres de carbone et bore de hautes performances furent introduites dans les années 60.

En 1973, Dupont développées fibres de Kevlar. Dès lors, l'utilisation des composites s'étend aux domaines de l'aviation, de la marine, de l'automobile, des accessoires sportifs et des industries biomédicales [3].

I-1-4. Domaine d'utilisation :

L'utilisation des matériaux composites est très répandue dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'aéronautique, la mécanique, l'industrie automobile, l'industrie navale électricité et électronique, transports routiers, ferroviaires, maritimes, santé (instrumentation médicale), sports et loisirs (skis, raquette de tennis , club de golf...), de même que dans l'industrie sportive et le génie civil. Ces matériaux sont connus par leurs grands rapports rigidité – poids et résistance-poids, ainsi que pour d'autres propriétés mécaniques intéressantes telles que la résistance à la corrosion.

En outre, l'utilisation des matériaux composites dans le domaine de génie civil peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels comme l'acier, car ils permettent la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux exigences particulières d'une situation donnée. Parmi ces propriétés globales, on retrouve la rigidité [3].

I-1-5. Les Avantages et les Inconvénients des matériaux composites :

-les Avantages des matériaux composites

- légèreté.
- maintenance réduite.
- liberté de formes.
- Grande résistance à la fatigue.
- en forme de pièces complexes (principe du moulage).
- Une bonne isolation électrique.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone).
- Insensibles aux produits chimiques comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, pétrole,...

-les Inconvénients des matériaux composites :

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques.

- Faible conductivité électrique des composites à matrice organique, ce qui constitue un problème important pour la résistance aux impacts de foudres des fuselages composites.
- Coût important du passage matériau métallique à matériau composite, prenant en compte le coût matériau (des constituants) et le coût associé au procédé de fabrication.
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes.
- sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.

I-2- Les constituants des matériaux composites:

Un matériau composite est l'association de deux constituants : les renforts et la matrice

I-2-1. Les renforts :

Ils constituent l'armature ou le squelette supportant les efforts mécaniques, ils contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites, se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

Les renforts peuvent être classés selon :

- leur composition : métal, verre, Carbone,...
- leur forme :
 - *fibres : courtes, longues ou continues (tissus ou textures multidirectionnelle).
 - *charge renforçant : gravier, sable, bielles de verre,...
- leur disposition : mate ou tissé.

La classification des principaux matériaux de renfort couramment rencontrés est schématisée sur la figure I-1 :

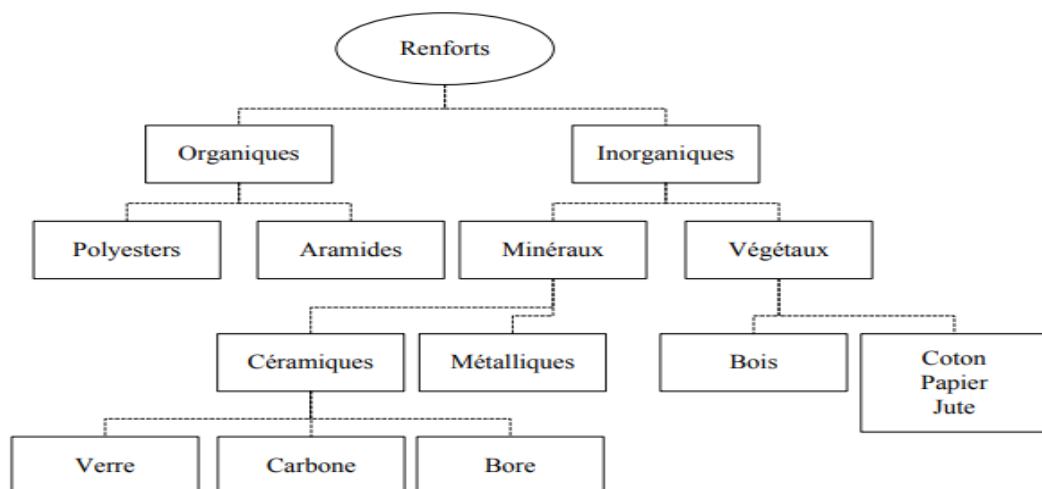


Figure I-1 : La classification des principaux matériaux de renfort [4].

I-2-2. Matrice :

Elle a pour rôle de lier les fibres et de répartir les efforts, en outre elle assure la protection chimique et donne la forme au produit réalisé, le choix de la nature de la matrice dépend de l'utilisation à laquelle est destinée le matériau composite. On utilise généralement des matrices qui se classent en trois grandes catégories, les résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques, et les matrices métalliques.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur Figure I-2 suivante :

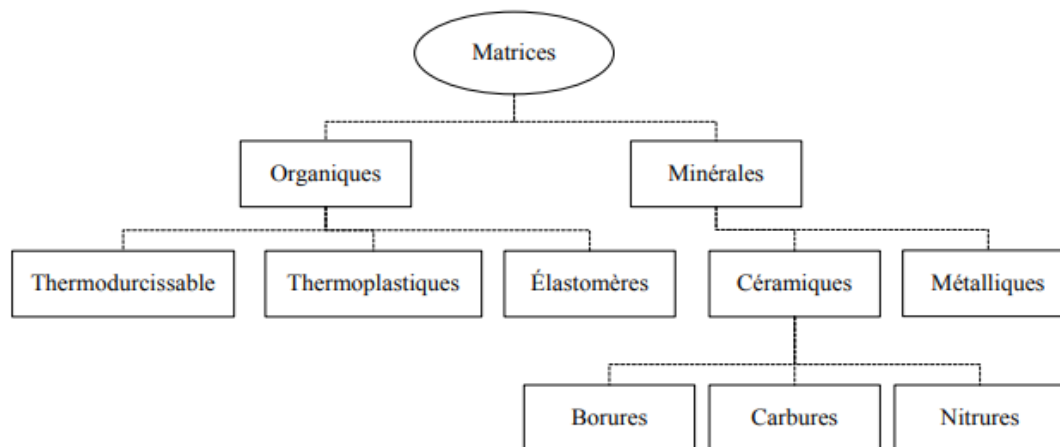


Figure I-2 : La classification des principaux matériaux de matrice [4].

I-3-Classification des matériaux composites :

Il existe différentes classifications dans la littérature scientifique qui classe les composites suivant la morphologie des agents de renforcement (fibre ou particules) ou aussi suivant ses composantes structurelles.

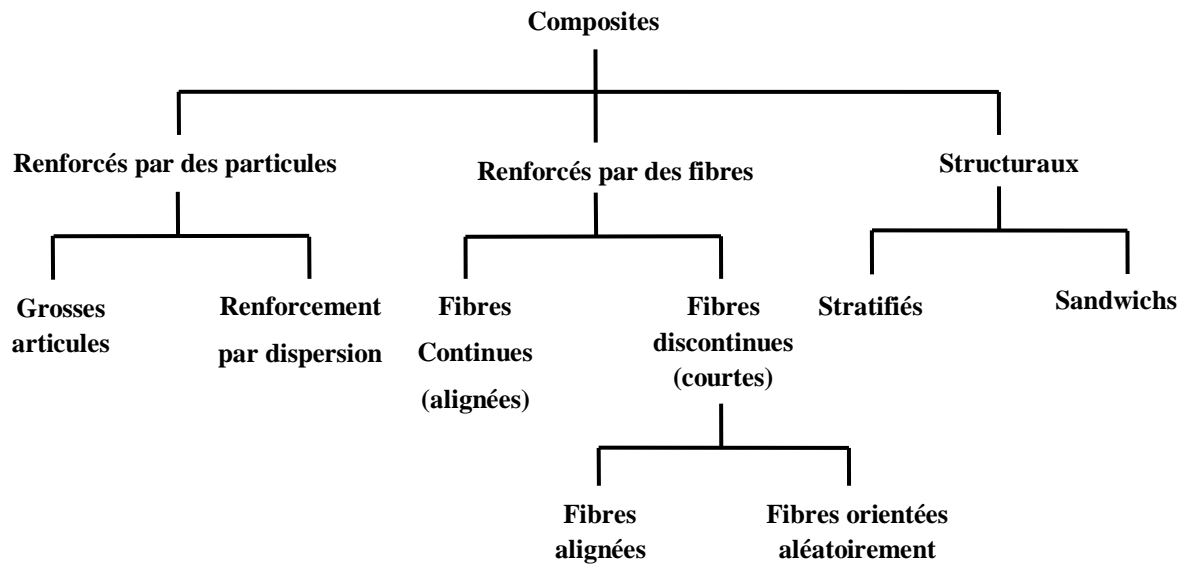


Figure I-3 : Classification schématique des types de composites [1]

I-3-1. Les composites structuraux :

En général, un composite structural est constitué d'un matériau homogène et d'un matériau composite. Ses propriétés dépendent de celles de ses constituants et de leur géométrie. Les composites stratifiés et les structures sandwichs sont les composites structuraux les plus courants. [5]

I-3-1.1- Composites stratifiées :

Les stratifiés sont des matériaux couramment rencontrés dans les éléments structuraux, qui de la superposition de plusieurs couches ou plis (couche d'un stratifié est souvent appelée une strate), qui peuvent être des nappes unidirectionnelles, de tissus ou des mats, imprégnés de résine. Chaque couche peut avoir une orientation propre. Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception. [6]

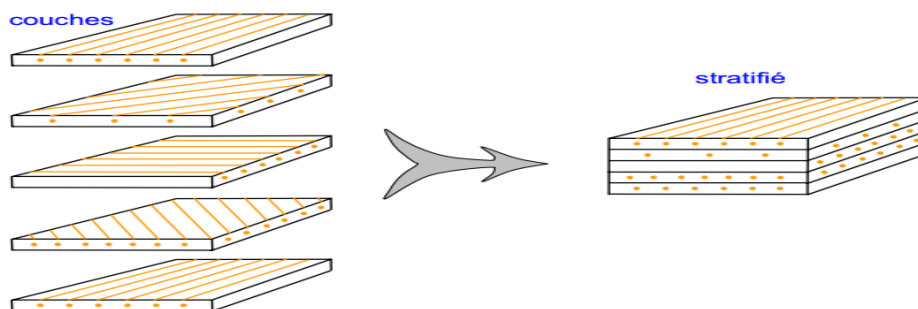


Figure I-4 : Constitution d'un stratifié [7].

On pourra avoir des stratifiés de type :

- Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.

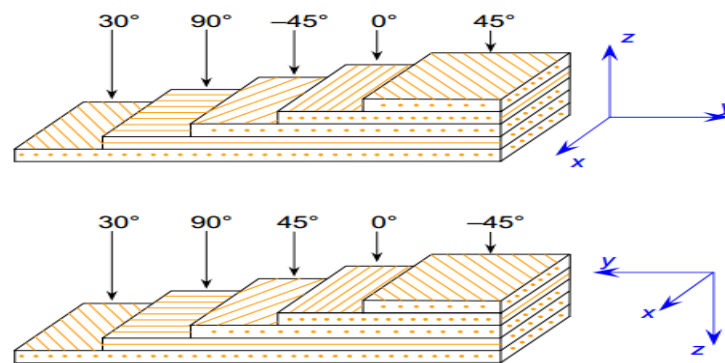


Figure I-5 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés [1].

- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

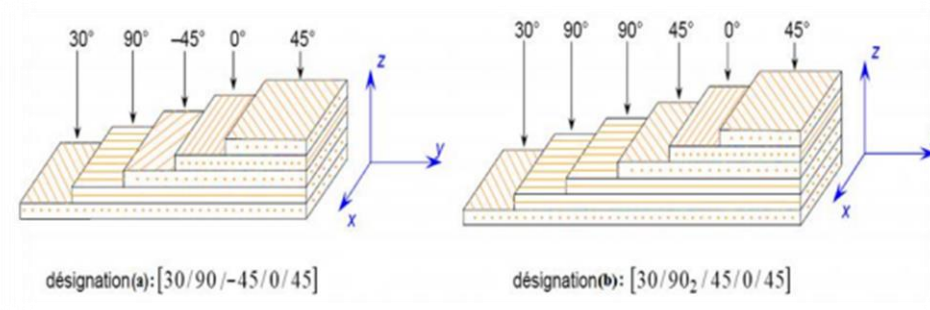


Figure I-6 : Désignations d'un stratifié [1].

-Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° [8].

I-3-1.2-Composites sandwiches :

Selon Vincent [9], Un sandwich typique est représenté à la figure (I-7)

Il est constitué :

* de deux peaux fines, (possédant de bonnes caractéristiques en traction).

*prenant une âme ou cœur en sandwich, (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.) Pour que les structures sandwich jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

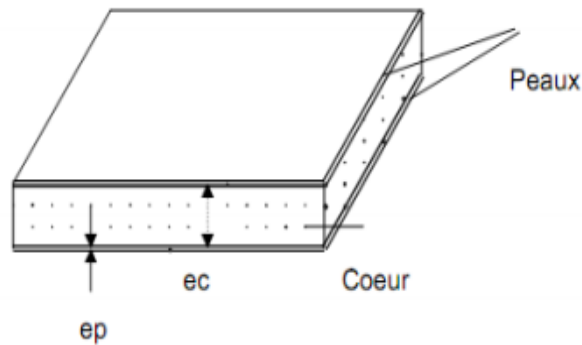


Figure I-7 : Un sandwich typique.

La fabrication d'un sandwich met en jeu trois couches de natures différentes.

La complexité de ces structures provient du nombre de matériaux différents susceptibles d'être employés :

- Matériau des peaux : tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche est candidat... que ce soit un métal, un matériau composite (le plus souvent des stratifiés).
- Matériau de l'âme : il se présente principalement sous quatre formes comme illustré à la figure I-8.

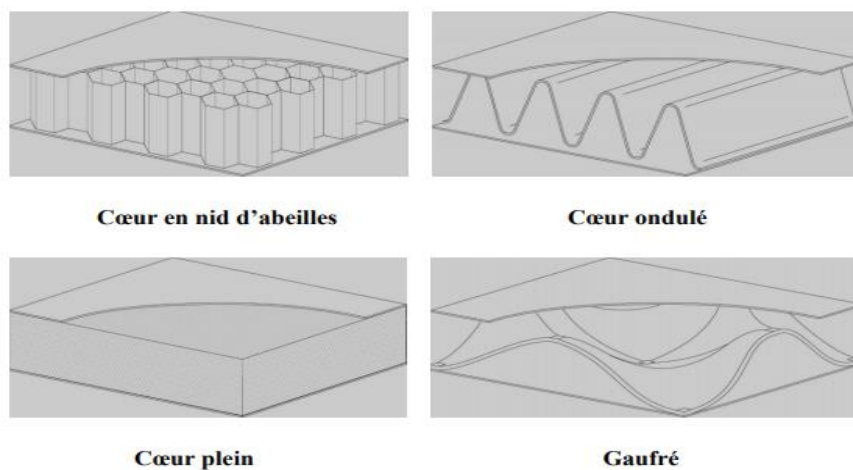


Figure I-8 : les Différentes formes de l'âme (Cœur).

I-3-1.3-Monocouches :

Les monocouches ou plis, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes [10].

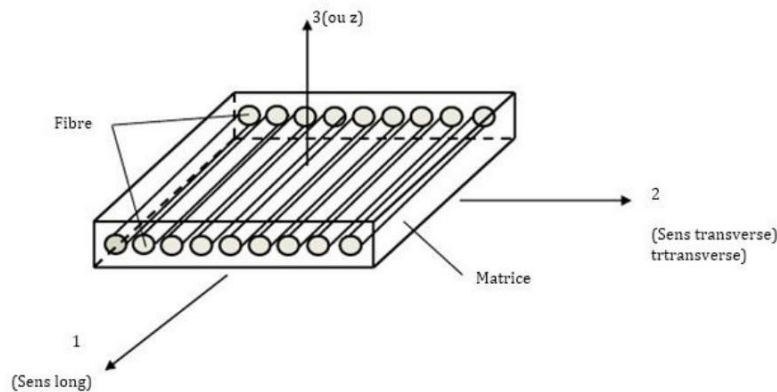


Figure I-9 : Schématisation d'une monocouche.

Les caractéristiques mécaniques de rigidité et résistance des couches normalement utilisées rendent en fait impossible l'utilisation de couches simples principalement à cause de:

- une trop forte anisotropie de la réponse élastique, au moins pour les couches à renfort unidirectionnel.
- une trop faible résistance en direction transversale.
- une trop petite épaisseur, ce qui rend d'un côté la rigidité, surtout celle flexionnelle trop petite et de l'autre donne un fort danger d'instabilité à la compression, dans les deux directions. Et par conséquent, Les couches en composite ne sont jamais utilisées seules, mais sous forme des stratifiés qui sont obtenus par superposition de plusieurs plis, le plus souvent identiques [10],[11].

I-4-Modèles de structures multicouches existantes :

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. Actuellement, la construction d'une plaque composite est très variable selon son application et son but. Citons par exemple, les sandwichs qui écartent les peaux pour augmenter la capacité portante en flexion, et les monolithiques dont les fibres sont orientées suivant les directions importantes de traction ou cisaillements plans [12].

Selon lesquelles on peut distinguer deux modèles principaux: le modèle tridimensionnel (3D) et le modèle bidimensionnel (2D).

I-4-1-le modèle tridimensionnel (3D) :

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [13], [14], [15], [16], [17].

I-4-2-le modèle bidimensionnel (2D) :

À ce jour, l'utilisation des modèles bidimensionnels (2D) est préférable dans la plupart des applications liées à l'analyse des structures multicouches. En fait, ces modèles sont plus pratiques que les modèles 3D en termes de simplicité dans la modélisation et d'efforts de calcul nécessaires. Parmi ces modèles, deux familles peuvent être distinguées (Figure I-10):

- Approche monocouche équivalente (ESL).
- Approche par-couche (LW) [18].

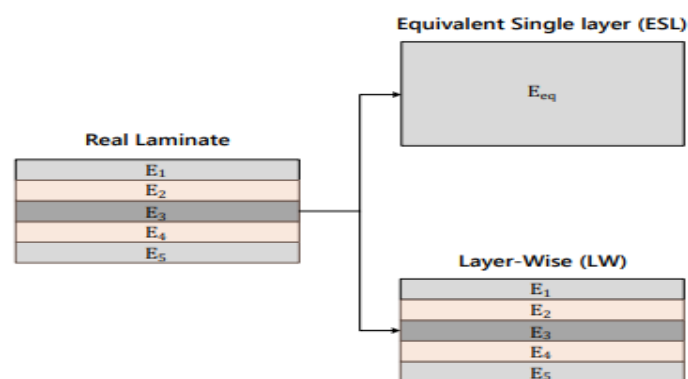


Figure I-10 : schéma d'une stratifiée par le modèle monocouche et layer wise [18].

I-4-2-1-Approche monocouche équivalente:

Dans l'approche monocouche équivalente (approximation globale), le nombre de degrés de liberté ne dépend pas du nombre de couches. Le cisaillement transverse peut être pris en compte à travers l'inclinaison de la section transverse.[12]

Dans cette approche, on peut distinguer trois théories bien connues, à savoir:

- Théorie classique des plaques (CLT).
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).
- Théories d'ordres supérieurs (HSDT).[18]

I-4-2-1-1. Le modèle classique Love-Kirchhoff : (CLT, classic lamination theory)

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "classique" de plaque. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée (figure I.11). Cela revient à dire que le cisaillement transverse est négligé. Les champs de déplacement d'une plaque de Love-Kirchhoff s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, z) &= u_\alpha(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1}) \quad , \alpha = 1, 2$$

avec :

1, 2 : les directions dans le plan de la plaque

3 : la normale à la plaque (figure I-11)

u_α : le déplacement membranaire de la direction α

w : la flèche de la plaque

$w_{,\alpha}$: la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

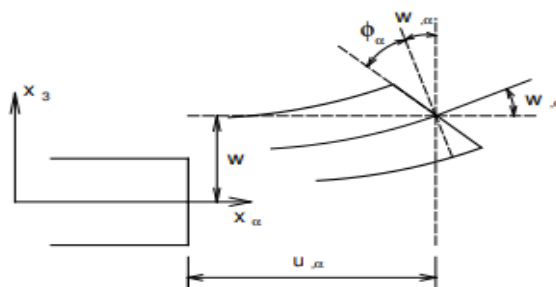


Figure I-11 : Cinématique de Love-Kirchhoff [12].

I-4-2-1-2. Le modèle classique de Reissner-Mindlin : (FSDT, First order Shear Deformation Theory)

Pour introduire le cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (figure I-12).

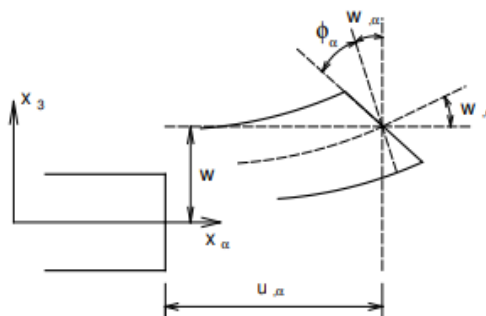


Figure I-12 : Cinématique de Reissner-Mindlin

-Le champ de déplacements de la plaque de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, z) &= u_\alpha(x_1, x_2) + z\varphi_\alpha(x_1, x_2) & , \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (I-2)$$

avec :

u_α : le déplacement membranaire de la direction α

w : la flèche de la plaque

φ_α : la rotation de la normale autour des axes x_α

u_3 est constant en z et donc ε_{13} et ε_{23} sont constants en z .

Ainsi, σ_{13} et σ_{23} sont constants par couches, ce qui est une très mauvaise approximation (en fait si $\sigma_{\alpha\beta}$ est affine par couche alors $\sigma_{\alpha 3}$ devrait d'après les équations d'équilibre être de degré 2).

De plus, $\varepsilon_{33} = 0$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse classique de plaque faite dans le modèle, à savoir $\sigma_{33} = 0$. Tout ceci fait que le modèle prédit très mal le comportement en cisaillement transverse et qu'il faut introduire la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte les effets de cisaillements transversaux [19].

I-4-2-1-2.1-Facteurs de correction du CT:

Les facteurs de correction du CT (FC), notés k , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal. Pour les matériaux isotropes homogène, le premier concept de FC a été présenté par Reissner [20, 21, 22]. Il a proposé une valeur de $5/6$ qui est largement utilisée, Puis, Mindlin [23] a proposé une valeur de $k = \frac{\pi^2}{12}$, et une autre méthode a été présentée par Ayad [24]. Il les évalue par une comparaison entre l'énergie de cisaillement obtenue via les équations d'équilibre et celle obtenue par la théorie du premier ordre.

Pour les composites stratifiées et les sandwichs les facteurs de correction dépendent essentiellement des propriétés matérielles du matériau (module de Young, coefficient de poisson, etc.), du rapport d'aspect, de la forme des fibres ainsi que leurs orientations, de la géométrie du stratifiée, du nombre de stratification et les conditions aux limites, ce qui rend ces facteurs difficiles à déterminer.

Il ya plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les facteurs de correction dans ces matériaux et la méthodologie la plus courante est basée sur la comparaison de certaines

réponses (l'énergie de déformation de CT, la vitesse de propagation d'une onde de flexion, la fréquence fondamentale du mode de vibration, etc.) prédite par la théorie du premier ordre.

I-4-2-1-3. Les modèles d'ordre supérieur : (HSDT : High order Shear Deformation Theory)

Pour dépasser les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories d'ordre supérieur où la distribution des champs dans l'épaisseur est non linéaire (Figure I-13).

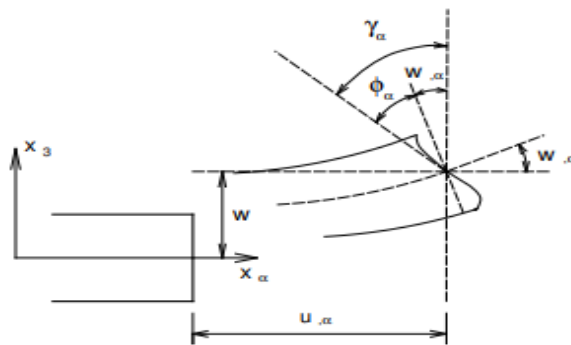


Figure I-13: Cinématique d'ordre supérieur

- La plupart des modèles d'ordre supérieur utilise un développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie tridimensionnelle. Le déplacement est donc assumé de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, z) = u_i(x_1, x_2) + z\varphi_i^{(1)}(x_1, x_2) + z^2\varphi_i^{(2)}(x_1, x_2) + z^3\varphi_i^{(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{I.3})$$

Avec : $i = 1 \dots 3$ [12].

Chapitre II

Comportement mécanique et dynamique des plaques composites multicouches

Chapitre II

Comportement mécanique et dynamique des plaques composites multicouches

II-1- Introduction :

L'utilisation des plaques composites a connu un grand développement durant ces dernières années, surtout dans les domaines civils parce que Les technologies modernes ont besoin des matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions.

Le comportement mécanique d'un matériau composite varie fortement avec l'orientation des fibres. Pour obtenir une résistance élevée, il faut orienter les fibres parallèlement à la direction des contraintes les plus élevées. Dans le cas des matériaux composites, l'élaboration du matériau et la fabrication du composant sont dans un grand nombre de cas simultanés et indissociables. Un premier type de structures réalisables à l'aide d'un matériau composite est constitué par les plaques ou de coques stratifiées .Dans une plaque sollicitée en flexion, ce sont les couches externes qui sont les plus sollicitées. [25]

Notre travail est divisé en deux parties, la première partie est purement théorique, il contient un rappel sur la théorie des plaques épaisses ou la théorie de déformation de cisaillement au premier ordre (FSDF) pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches.la deuxième partie est consacrée à l'étude de comportement vibratoire des plaques composites.

II-2- la Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (First-Order Shear Deformation Plate Theory) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

II-2-1- Les hypothèses de la théorie :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de Reissner-Mindlin, d'où :

- Cinématiques :
 - ✓ Hypothèse des sections droites : “Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais non nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée”.
 - ✓ La composante transversale du déplacement suivant l'épaisseur est constante.
- Mécaniques :
 - ✓ Hypothèse des contraintes planes: “La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes”.
 - ✓ Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère z comme axe d'orthotropie de toutes les couches (orthotropie dans le plan LT, Figure II-1). [26]

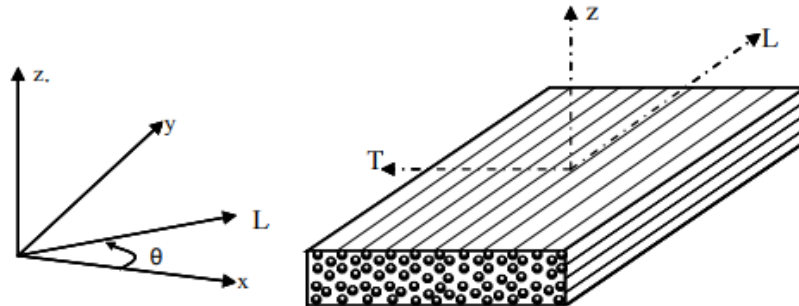


Figure II-1 : couche orthotrope [26]

II-2-2- Champ des déplacements :

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

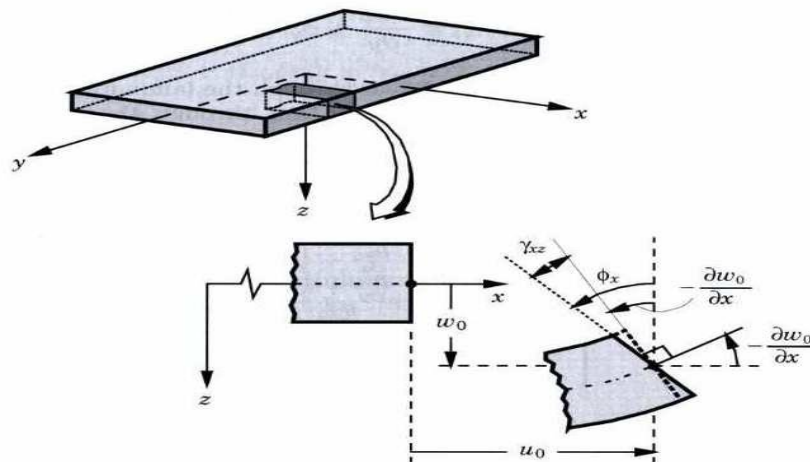


Figure II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin [27]

II-2-3-Champ des déformations :

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements. Il s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 2})$$

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

- le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 3})$$

- le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_{\pm 0}}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- Déformations de membrane :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 5})$$

Déformations en flexion et torsion :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 6})$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mf}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z\mathbf{K}(x, y) \quad (\text{II. 7})$$

Enfinement, le champ $\boldsymbol{\varepsilon}_{mf}(M)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mf} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 8})$$

Avec :

k_x, k_y et k_{xy} : Sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ k_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ k_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ k_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 9})$$

II-2-4-Loi de Hooke généralisé :

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être d'écrite en introduisant soit la matrice de rigidité notée C_{ij} , soit la matrice de souplesse S_{ij} .

La loi de Hooke s'écrit suivant l'une des deux formes : [28]

-La matrice de rigidité :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{II. 10})$$

-La matrice de flexibilité :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad , \text{ Avec : } [S] : [C]^{-1} \quad (\text{II. 11})$$

II-3-Types des matériaux:

II.3.1 Matériaux anisotropes:

Selon Ney [29], les matériaux anisotropes sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie.

La **loi de Hooke** peut être exprimée par:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} &= S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \end{aligned} \right\} \quad ij = 1, 2, \dots 6. \quad (\text{II. 12})$$

C_{ijkl} : La matrice de rigidité du matériau (Tenseur d'élasticité).

S_{ijkl} : Tenseur de souplesse.

ε_{kl} : Tenseur de déformation.

σ_{ij} : tenseur de contrainte.

La relation d'élasticité peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{sym} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

En inversant (3), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & \text{sym} & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 14})$$

II.3.2 Matériaux orthotrope :

Définition : On appelle matériaux orthotrope un matériau élastique homogène présentant en tout point deux symétries du comportement mécanique, chacune par rapport à un plan les deux plans étant orthogonaux [30].

Alors le nombre de constantes élastique indépendantes est réduit à 9 la loi de comportement exprimée dans les axes dits « d'orthotropes » définit au moyens du trièdre construit sur les

deux plans orthogonaux et leur intersection peut s'écrire sous la forme suivante, appelée notation ingénieur car elle fait apparaître modules d'élasticité et coefficients de poisson [figure-3]

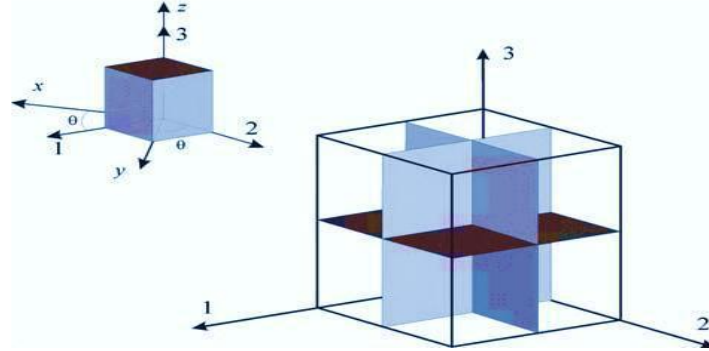


Figure II-3 : schématique d'un matériau orthotrope [31].

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 15})$$

En inversant l'équation (II. 15) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \\ \gamma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \\ \tau_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 16})$$

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2}, \frac{v_{13}}{E_1} = \frac{v_{31}}{E_3}, \frac{v_{23}}{E_2} = \frac{v_{32}}{E_3} \quad (\text{II. 17})$$

Les coefficients de souplesse sont définis par:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad (\text{II. 18})$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}, \quad S_{12} = -\frac{v_{12}}{E_1}, \quad S_{23} = -\frac{v_{23}}{E_2}, \quad S_{13} = -\frac{v_{13}}{E_1}$$

Avec : E_i (E_1, E_2, E_3) sont les modules d'élasticité longitudinaux.

G_i (G_1, G_2, G_3) sont les modules de cisaillement.

ν_{ij} ($\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$) est le coefficient de Poisson.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 19})$$

Donc :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= C_{23}, & C_{55} &= C_{13}, & C_{66} &= C_{12} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{23} &= \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \end{aligned} \quad (\text{II. 20})$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

II.3.3 Matériaux isotrope :

Les propriétés élastiques sont indépendantes des systèmes d'axes (il y a le même comportement dans toutes les directions). Le matériau possède ainsi une infinité de plans de symétrie, et le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2 : [32]

$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad \text{et} \quad G_{12} = G_{23} = G_{13} = G \quad (\text{II. 21})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 22})$$

$$\text{Avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II. 23})$$

II.4.Relation contrainte déformation :

Selon Berthelot [1], les stratifiés sont élaborés par l'empilement de couche successives dont la direction des fibres est variable d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axe de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$. En règle générale, l'axe (x_1) est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe (x_2) est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe (x_3) est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II-4). Il est question de caractériser les propriétés élastiques de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence (x, y, z) du stratifié, la direction des fibres fait un angle (θ) avec la direction x .

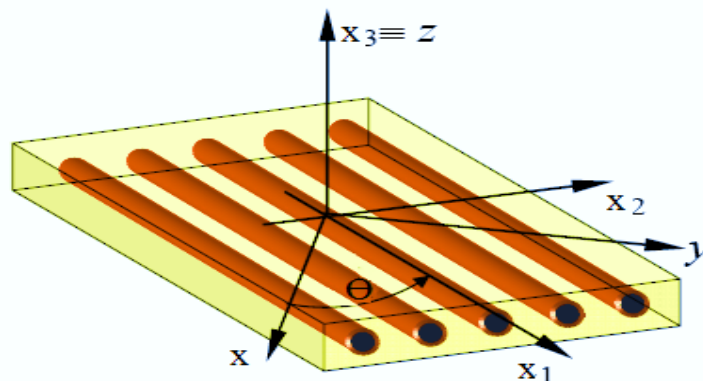


Figure II.4 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [1].

Les matrices d'élasticité \bar{Q} et de souplesse \bar{S} dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse C et S les relations de *changement de base* suivantes:[28]

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [Q] \cdot \{\varepsilon\} \\ \{\tau\} &= [S] \cdot \{\gamma\} \\ [\bar{Q}] &= [T_1]^{-1} [Q] [T_1] \\ [\bar{S}] &= [T_2]^{-1} [S] [T_2] \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 24})$$

Avec : T est la matrice de changement de base, donnée par :

$$\text{et } [T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } c = \cos \theta \quad \text{et} \quad s = \sin \theta \quad (\text{II.26})$$

Le Champ des contraintes dans la couche k s'exprime suivant la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{66} \\ \tau_{44} \\ \tau_{55} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{126} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{66} \\ \gamma_{44} \\ \gamma_{55} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Les coefficients $[\bar{Q}_{ij}]$ et $[\bar{S}_{ij}]$ sont exprimées respectivement comme suivant :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\ \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{S}_{44} &= S_{44}c^2 + S_{55}s^2 \\ \bar{S}_{45} &= (S_{55} - S_{44})sc \\ \bar{S}_{55} &= S_{44}s^2 + S_{55}c^2 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

A partir de l'équation (II. 27):

Les contraintes en membrane dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

$$\text{où} \quad \sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y) \quad (\text{II.30})$$

Et es contraintes en cisaillement transverse dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ \bar{S}_{54} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

II.5-Expression des efforts résultants :

II.5-1-Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [1], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Soit, en définitive:

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (\text{II.33})$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes *par unité de longueur*, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et de contrainte de cisaillement dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées sur la figure (II.5)

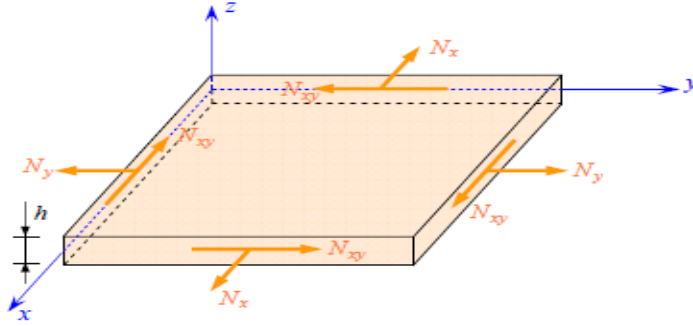


Figure II.5 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié [1].

II.5-2. Moment de flexion et de torsion :

Selon Berthelot [1] Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \quad (\text{II.35})$$

$$= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h^2_k - h^2_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h^3_k - h^3_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y)$$

Soit, en définitive:

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (\text{II.36})$$

avec :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^2_k - h^2_{k-1}) \quad (\text{II.37})$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^3_k - h^3_{k-1})$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la figure (II.6).

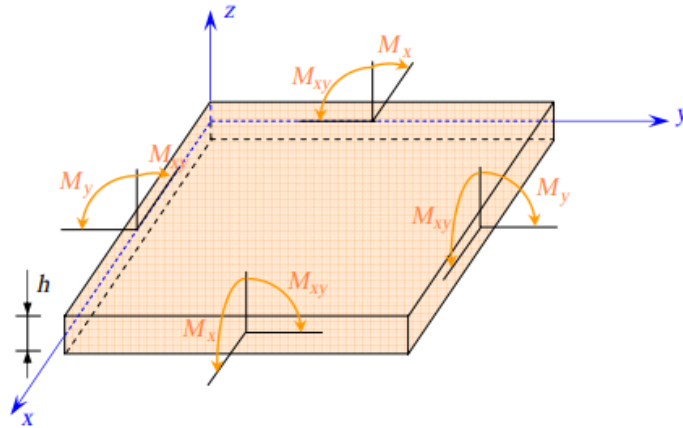


Figure II.6 : Schématisation des moments de flexion et de torsion [1].

II.5-3- Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}_k dz. \quad (\text{II.38})$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure suivante :

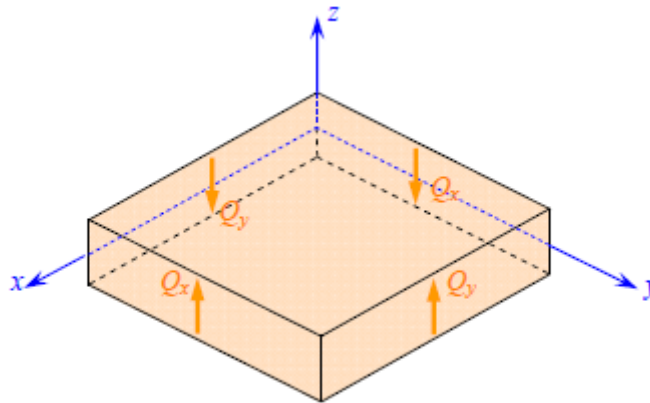


Figure II.7 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement [1].

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \quad (\text{II.40})$$

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Où

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma_c \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **ABDF**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ❖ La matrice **A** correspond au comportement de *membrane*.
- ❖ La matrice **D** correspond au comportement de *flexion*.
- ❖ La matrice **B** correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*.
- ❖ La matrice **F** correspond au comportement de *cisaillement transverse*.

II-6- Comportement dynamiques des plaques stratifiées :

II-6-1- Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures :

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, dans le but de comprendre et de contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit..). La maîtrise du problème inverse [33] permet de développer des techniques efficaces et rapides de caractérisation élastique ou viscoélastique, de contrôle de qualité, d'inspection et diagnostic des structures, basées sur les mesures des vibrations.

Dans les deux cas, la première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influant sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et des endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles. [34]

II-6-2-Analyse vibratoire des plaques composites :

Beaucoup de méthodes analytiques et d'analyse ont été utilisées pour étudier les vibrations de plaques et coques. Dans ce type d'analyse, les difficultés analytiques dans la résolution des équations ont jusqu'à maintenant été surmontées que dans certains cas particuliers, tandis que le cas général n'a pas encore reçu un traitement satisfaisant. L'approche par éléments finis s'est avérée être une méthode puissante et largement applicable pour l'analyse des problèmes complexes de vibration pour lesquels des solutions analytiques sont presque impossibles à trouver. Une variété de nouveaux éléments finis ont été proposés sur la base de différentes théories de structure, fonctions d'interpolation et procédures de formulation afin d'obtenir une prédiction plus précise de la vibration libre de plaques et coques.[35]

Khatri et Asnani [36] ont associé la puissance de la méthode vibrationnelle pour la mise en équation à un traitement individuel des couches pour étudier les vibrations d'une coque stratifiée conique en appui simple. Les équations du mouvement développées dans une approche viscoélastique (principe de correspondance) et tenant compte des inerties de translation et de rotation sont résolues par la méthode de Galerkin pour obtenir les modes propres et les amortissements. Koo et Lee [37] proposent, une modélisation éléments finis basée sur une distribution linéaire des déplacements plans amortissements de plaques

symétriques rectangulaires simplement appuyées. Qian et al [38] ont développé un élément finis plaque spécifique avec une distribution cubique des déplacements plans pour résoudre le problème d'identification (problème inverse) à partir des vibrations de flexion, et pour l'étude de sensibilité, de plaques rectangulaires complètement libre, en stratifiés unidirectionnels ou croisés. Cependant, la méthode des éléments finis est difficile à mettre en œuvre. Pour les problèmes d'optimisation, d'identification ou pour les études de sensibilité, les approches analytiques sont mieux adaptées. Wang [39] utilise la méthode Rayleigh-Ritz basée sur les fonctions B-spline dans le contexte de la théorie du premier ordre pour déterminer les fréquences et déformées propres de plaques en stratifiés quelconques en forme de losange. Hufenbach et al [40] utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre le problème des vibrations d'un tube stratifié symétrique, cylindrique, en appui simple. Le déplacement transversal est modélisé par la fonction caractéristique de la poutre appuyée-appuyée dans le cadre de la théorie de Timoshenko. Angoulvant [41] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz à 36 termes, aux plaques symétriques rectangulaires, basées sur la théorie classique des stratifiés, et a comparé deux types d'approximations : les fonctions poutres et les fonctions polynomiales pour différentes combinaisons de bords encastés ou libres. Il conclut que les fonctions poutres donnent de meilleurs résultats. Ayorinde et Yu [30] ont optimisé la méthode, dans le cas des plaques épaisses, sur la base d'une approximation à trois modes des déplacements et rotations par les fonctions poutres en formulation de Timoshenko. Cheung et Zhou [42] ont développé des fonctions poutres avec appuis intermédiaires pour modéliser des plaques symétriques, supportées en un ou plusieurs points à l'intérieur de leurs domaines, par la méthode de Rayleigh-Ritz. Anlas et Goker [43] ont utilisé des polynômes orthogonaux comme fonctions d'approximation avec transformation de base pour décrire les vibrations libres de plaques symétriques en forme de losange simplement appuyées ou complètement encastées. Nallim et al [44] généralise cette approche pour les plaques quadrilatérales de formes quelconques, à stratification symétriques pour différentes conditions aux limites.

II-6-3-Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre :

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données par la forme élémentaire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} + f_i = \rho a_i \quad (\text{II-44})$$

où : $i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\
\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + f_y &= \rho a_y \\
\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z
\end{aligned} \tag{II-45}$$

Ou : f_x , f_y et f_z : sont les forces volumiques appliqué au point M.

a_x , a_y et a_z : sont les composantes d'un vecteur d'accélération au point M.

ρ : la masse volumique.

➤ L'expression de l'accélération écrire :

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\
a_y &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\
a_z &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{II-46}$$

II-6-3-1- Equilibre par rapport aux résultantes en membrane :

L'intégration des équations (II-45), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \tag{II-47}$$

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \tag{II-48}$$

Deuxième terme s'écrit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \tag{II-49}$$

Le troisième terme de l'équation (II-45) s'écrit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2) \quad (\text{II-50})$$

Où : $\sigma_{xz}(\frac{h}{2})$ et $\sigma_{xz}(\frac{h}{2})$ Sont les contraintes de cisaillement extérieures exercées respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, notées :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz}(\frac{h}{2}) \quad \text{Et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz}(-\frac{h}{2}) \quad (\text{II-51})$$

L'intégrale de la composante suivant x de la force de volume se note :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{II-52})$$

L'intégration du second terme de l'équation (II-47) compte tenu de la forme du champ des déplacements nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \\ &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II-53})$$

Finalement en posant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad \text{et} \quad R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (\text{II-54})$$

L'équation d'équilibre en membrane, dans la direction x et la direction y dont l'équation d'équilibre est donnée par :

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + (\tau_{1x} - \tau_{2x}) + F_x = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II-55})$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + (\tau_{1y} - \tau_{2y}) + F_y = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\text{Où : } \tau_{1y} = \sigma_{yz}(\frac{h}{2}) \quad \text{Et} \quad \tau_{2y} = \sigma_{yz}(\frac{h}{2}) \quad (\text{II-56})$$

Et la force de volume se note :

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz \quad (\text{II-57})$$

II-6-3-2 Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement :

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (II-45) conduit à :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad (\text{II-58})$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz &= \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2) = q(x, y) = q \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

Où : q est la différence entre les pressions exercées sur les faces de la plaque.

La relation d'équilibre devient alors :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II-60})$$

avec:

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz \quad (\text{II-61})$$

II-6-3-3-Relation fondamentale relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières équations (II-45), puis en intégrant suivant l'épaisseur.

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad (\text{II-62})$$

En intégrant par parties :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \left[z \sigma_{xz} \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz}(h/2) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}(-h/2) - Q_x \quad (\text{II-63})$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (\text{II-64})$$

Le second membre de l'équation (II-62) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \\ &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II-65})$$

En posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{II-66})$$

La grandeur I_{XY} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque localisé au point (x, y) et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II-67})$$

En introduisant la composante des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \quad (\text{II-68})$$

De même, la deuxième équation (II-45) conduit à :

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II-69})$$

En introduisant la composante des moments :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz \quad (\text{II-70})$$

II-6-3-4-Résumé des Relations fondamentales :

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + (\tau_{1x} - \tau_{2x}) + F_x = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + (\tau_{1y} - \tau_{2y}) + F_y = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II-71})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

Avec :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad (\text{II-72})$$

Les grandeurs ρ_s , R et I_{xy} se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de n couches, la couche K ayant une masse volumique ρ_k . Nous avons :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1})$$

et

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (\text{II-73})$$

II-6-4-Equation du mouvement du stratifié :

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (\text{II-74})$$

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial \varphi_x}{\partial t^2} \\ & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \\ & H_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial w_0}{\partial t^2} \\ & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ & - F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t^2}. \\ & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\ & F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial \varphi_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{II-75})$$

Chapitre III

Formulation élément fini et programmation

Chapitre III

Formulation élément fini et programmation

III-1-introduction :

L'analyse numérique des plaques est se faire par différences finis, éléments finis ou éléments de frontières. Les avantages et potentialité de la méthode des éléments sont tels que les autres méthodes sont peu utilisées, sauf dans certains cas particuliers. La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier des structures continues ayant des propriétés géométriques et des conditions de charges appliquées. Donc, elle est Bienne adaptée à l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, puisqu'elle seule aujourd'hui est capable de résoudre ce type de problème et toute généralité. Elle est donc auxiliaire aux plus précieux pour l'ingénieur [45].

Les matériaux composites multicouches sont le plus souvent modélisés par éléments finis afin d'obtenir une estimation des contraintes et des déformations dues aux efforts extérieurs. En raison de leurs différentes applications industrielles, les éléments finis ont attiré l'attention d'un grand nombre de groupes de recherche. Ceci a conduit à une amélioration considérable des caractéristiques des matériaux composite [46].

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini rectangulaire (R4) basés sur la théorie du premier ordre, destiné à l'étude des plaques composites stratifiées. La formulation de l'élément est effectuée via le principe d'**énergie potentielle totale**.

Un programme en langage **FORTRAN77** est utilisé pour calculer la matrice de rigidité et la matrice de masse. Ensuite nous allons utiliser un autre programme en langage **MATLAB** qui permet d'obtenir les valeurs propres de vibration.

III-2 Historique :

L'idée fondamentale derrière la méthode des éléments finis remonte loin en arrière. Les grecs par exemple avaient reconnu que l'on peut approcher la solution d'un problème complexe en le divisant en problèmes plus simples [47].

Historique On peut raisonnablement situer les débuts de la méthode des éléments finis vers les années cinquante. Les premières applications furent issues de la mécanique des milieux continus déformables et notamment du domaine aéronautique. Ces problèmes faisaient intervenir des géométries complexes ce qui rendait difficile une approche numérique par des méthodes plus classiques comme les différences finies. En 1960, Clough introduit la terminologie "éléments finis" dans un article portant sur l'analyse de l'élasticité linéaire en deux dimensions d'espace. Dans les années soixante, la méthode des éléments finis connaît un développement important, notamment à cause du nombre croissant d'ingénieurs utilisant cette méthode pour traiter des problèmes de milieux continus déformables. À la fin des années soixante. L'idée que les éléments finis ne s'appliquent qu'à des problèmes symétriques et coercitifs, où une formulation vibrationnelle est possible, est progressivement abandonnée et les ingénieurs commencent à s'intéresser également à des problèmes sortant de ce cadre. Les années soixante-dix marquent le développement de la théorie mathématique des éléments finis. Un grand nombre de résultats empiriques connus des ingénieurs vont se trouver confirmés et clarifiés, ce qui permettra de jeter des bases solides pour étendre la méthode à un champ d'applications encore plus vaste. Dans ce contexte, une notion fondamentale est celle de problème bien À l'heure actuelle, la méthode des éléments finis occupe une place de premier plan dans le monde du calcul scientifique. Il existe plusieurs dizaines d'ouvrages, de manuels d'utilisation et de monographies consacrés à l'étude de cette méthode et on peut dénombrer plus d'une centaine de milliers de travaux sur ce sujet dans la littérature scientifique [48].

III-3- Maillage :

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, c'est-à-dire un ensemble de nœuds et d'éléments. Le choix du maillage détermine notamment les fonctions de base qui représentent les champs de déplacement, et a donc une influence considérable sur les résultats. Dans une simulation par éléments finis, l'interaction du produit avec son environnement est elle aussi modélisée, sous la forme d'efforts et de déplacements nodaux [49].

Il y a deux objets géométriques pour la modélisation par maillage sont :

Le premier est un découpage du domaine géométrique occupé par le produit en sous-domaines de formes simples. Ces sous-domaines sont tridimensionnels (volumes), bidimensionnels (surfaces) ou unidimensionnels (lignes), selon la théorie dans laquelle on se place (par exemple, en mécanique des milieux continus 3D, ce sont des volumes, mais en théorie des poutres, il s'agit de lignes).

Le deuxième objet est une liste de points particuliers, situés aux sommets des sous-domaines ainsi que, quelquefois, aux milieux de leurs arêtes : les nœuds (Figure III-1).

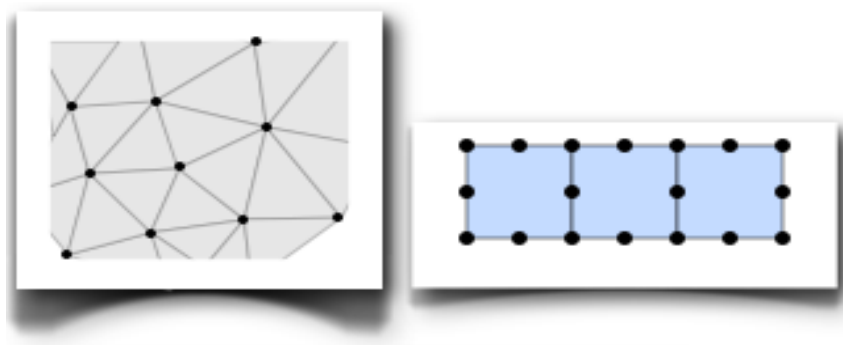


Figure III-1: Deux maillages plans avec leurs nœuds. [4]

III-4-principe de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques [45].

La méthode des éléments finis consiste à mailler la structure à étudier en un certain nombre Des éléments finis de géométrie simple (segment de droite ou arc pour une structure linéique ; triangle ou quadrangle pour une structure surfacique ; tétraèdre, prisme ou hexaèdre pour une structure volumique, etc.). Le champ des déplacements en un point quelconque est ensuite évalué par interpolation des valeurs des déplacements aux nœuds du maillage, qui constituent les variables nodales du problème. Les équations de l'élasticité permettent ensuite d'exprimer en fonction des variables nodales l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des actions mécaniques exercées sur la structure. L'application du théorème de l'énergie potentielle totale conduit enfin au système d'équations dont les variables nodales sont solutions [50].

III-5- Formulation de l'élément fini utilisé :

III-5-1-description de l'élément utilisé :

Dans la présente étude, un élément fini bi-dimensionnelle (2D), construit sur la base de l'approche monocouche équivalente en utilisant la théorie du premier ordre (FSDT). L'élément formulé est de forme rectangulaire défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (5DDL) par nœud. Deux degrés dans le plan(x, y) qui sont $u_0(x, y), v_0(x, y)$ et trois hors plan $w_0(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$ (Figure III-2)

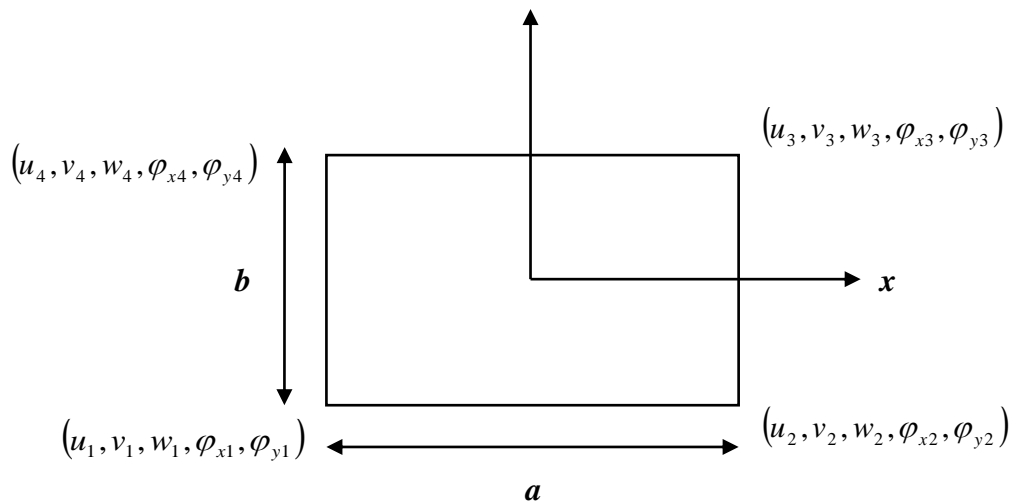


Figure III-2: Géométrie de l'élément rectangulaire et les variables nodales correspondantes.

III-5-2-Cinématique de la théorie :

L'élément utilisé est basé sur la théorie du premier ordre, alors les déplacements dans le plan et hors plan sont données par :

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-1)}$$

Les variables des déplacements sont : $u_0(x, y), v_0(x, y)$ et $w_0(x, y)$.

Et les rotations sont : $\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$.

III-5-3-approximation nodale des déplacements :

Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (\text{III-2})$$

Où : $\delta(x,y)$ est le vecteur des déplacements.

N_i les fonctions de forme pour l'élément.

δ_i est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément,

i étant le numéro du nœud considéré ($i=1, 2, 3, 4$).

Les fonctions d'interpolation N_i de type Lagrange ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \\ N_2 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \\ N_3 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \\ N_4 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y) \end{array} \right. \quad (\text{III-3})$$

L'approximation des variables cinématiques peut être exprimée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot u_i \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot v_i \\ w(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot w_i \quad i=1,4 \\ \varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{xi} \\ \varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{yi} \end{array} \right. \quad (\text{III-4})$$

Où $(u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi})$ sont les déplacements d'un nœud i .

Et le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, étant le numéro du nœud considéré i .

Le vecteur déplacement sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-5)}$$

III-5-4-Relations cinématiques :

Les déformations sont liés aux déplacements par :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x},
 \end{aligned} \quad \text{(III-6)}$$

On peut s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\
 \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\
 \gamma_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy}, \\
 \gamma_{yz} &= \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}.
 \end{aligned} \quad \text{(III-7)}$$

➤ Les déformations en *membrane* sont exprimées par :

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{\delta_i\} \quad (\text{III-8})$$

$$\text{Où : } [B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-9})$$

$[B_m]$: La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

➤ Les déformations en *flexion* et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = \mathbf{z}k(x, y). \quad (\text{III-10})$$

Où : k la matrice de courbure s'écrit :

$$\{k\} = [B_f]\{\delta_i\} \quad (\text{III-11})$$

Où :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

➤ Les déformations en *cisaillement transverse* sont exprimées par :

$$\{\gamma\} = [B_c]\{\delta_i\} \quad (\text{III-13})$$

Les déformations peuvent être en fonction de vecteur des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c]\{\delta_i\} \quad (\text{III-14})$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III-15})$$

Où les matrices $[B_m]$, $[B_f]$, $[B_c]$ peuvent être obtenues à partir de la dérivation des fonctions de forme.

Avec, les exposants m , f et c désignent respectivement membranaire, flexionnelle et cisaillement transversal.

III-5-5-loi de comportement :

Les expressions des résultantes et des moments sont :

$$\begin{aligned}\{N\} &= \int \{\sigma\} dz = [A]\{\varepsilon_m\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} &= \int \{\sigma\} z dz = [B]\{\varepsilon_m\} + [D]\{\kappa\} \\ \{Q\} &= \int \{\tau\} dz = [F]\{\gamma\}\end{aligned}\quad (\text{III-16})$$

III-5-6-Evaluation de la matrice de rigidité :**III-5-6-1 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :**

Selon Berthelot [1], L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \delta \varepsilon^T d v. \quad (\text{III-17})$$

Où v est le volume de la plaque.

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_A \left(\{\varepsilon_m\}^T \{N\} + \{\kappa\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{V\} \right) dA \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \left(\{\varepsilon_m\}^T [A]\{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_m\}^T [B]\{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B]\{\varepsilon_m\} + \{\kappa\}^T [D]\{\kappa\} + \{\gamma\}^T [F]\{\gamma\} \right) dA \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \left([B_m]^T \{\delta\}^T [A][B_m]\{\delta\} + [B_m]^T \{\delta\}^T [B][B_f]\{\delta\} + [B_f]^T \{\delta\}^T [B][B_m]\{\delta\} + \right. \\ &\quad \left. [B_f]^T \{\delta\}^T [D][B_f]\{\delta\} + \{\delta\}^T [B_c]^T [F]\{\delta\}[B_c] \right) dA\end{aligned}\quad (\text{III-18})$$

Donc :

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_A \left(\{B_m\}^T [A]\{B_m\} + \{B_m\}^T [B]\{B_f\} + \{B_f\}^T [B]\{B_m\} + \{B_f\}^T [D]\{B_f\} + \right. \\ &\quad \left. \{B_c\}^T [F]\{B_c\} \right) dA.\end{aligned}\quad (\text{III-19})$$

III-5-6-2 Problème de flexion :

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + W \quad (\text{III-20})$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation, soit :

$$\partial\Pi = \partial U - \partial W = 0 \quad (\text{III-21})$$

$$\int_A \left\{ \partial\delta \right\}^T \left([B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] \right. \\ \left. + [B_f]^T [D][B_f] + [B_c]^T [F][B_c] \right) \delta dA - \left\{ \partial\delta \right\} \{F_e\} = 0 \quad (\text{III-22})$$

Qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[K_e] \cdot \{\delta\} = \{F_e\} \quad (\text{III-23})$$

Où la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K_e] = \int_A \left(\underbrace{[B_m]^T [A][B_m]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m]^T [B][B_f]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f]^T [B][B_m]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ \left. + \underbrace{[B_f]^T [D][B_f]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c]^T [F][B_c]}_{\text{cisaillement}} \right) dA \quad (\text{III-24})$$

La matrice $[K_e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[K_e] = [K_e]^1 + [K_e]^2 + [K_e]^3 + [K_e]^4 + [K_e]^5 \quad (\text{III-25})$$

Où :

$$[K_e]^1 = \int_A [B_m]^T [A][B_m] dA \\ [K_e]^2 = \int_A [B_m]^T [B][B_f] dA \\ [K_e]^3 = \int_A [B_f]^T [B][B_m] dA \\ [K_e]^4 = \int_A [B_f]^T [D][B_f] dA \\ [K_e]^5 = \int_A [B_c]^T [F][B_c] dA \quad (\text{III-26})$$

L'assemblage des matrices de rigidité et des vecteurs forces élémentaires permet d'obtenir l'équation suivante :

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (\text{III-27})$$

Avec $[K]$ est la matrice de rigidité globale, $\{F\}$ est le vecteur de force global et $\{\delta\}$ est le Vecteur des déplacements global des nœuds de la plaque.

III-5-6-3 Formulation de la matrice masse élémentaire :

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres. Nous l'avons développée à partir de l'expression suivante de l'énergie cinétique T .

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \quad (\text{III-28})$$

$$\delta T = \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv \quad (\text{III-29})$$

Où :

ρ : Désigne la masse volumique représentative du volume V .

u, v et w , sont les composantes du vecteur de déplacement.

La matrice de masse globale est obtenue par assemblage des matrices de masses élémentaire $[M_e]$ s'écrit comme suit:

$$[M_e] = \iint [N]^T [m][N] dx dy \quad (\text{III-30})$$

La matrice de fonction de forme est donnée par [51] :

$$[N] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-31})$$

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-32})$$

Où les moments d'inerties $I_i = (0,1,2)$ sont définis par:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (\text{III-33})$$

L'équation dynamique de la structure stratifiée, en l'absence de charges extérieures, est obtenue en utilisant le principe de Hamilton (III-34), que l'on peut exprimer entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - W - T) dt = 0 \quad (\text{III-34})$$

Dans l'étude de la vibration libre ; le travail des forces égal à zéro, donc l'énergie potentielle totale Π égale l'énergie de déformation U .

L'équation générale de mouvement et pour système non forcé (vibrations libres non amorties) est :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (\text{III-35})$$

Où $[M]$ et $[k]$ sont respectivement les matrices globales de masse et de rigidité de la plaque, $\{\delta\}$ et $\{\ddot{\delta}\}$ sont respectivement le vecteur des variables nodales et le vecteur d'accélération nodale du système défini au temps t .

En pose : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Alors : $\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2 \{\delta\}$

La recherche des **fréquences naturelles** vibratoires revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$[K]\{X\} - \omega^2 [M]\{X\} = 0 \quad (\text{III-36})$$

Où :

ω : est la fréquence naturelle de vibration de la plaque (rd/s).

$\{X\}$ est le vecteur des déplacements global (les modes de vibration).

III- 6-Présentation du programme :

III-6-1-Introduction :

Dans cette étude on utilise programme en langage **FORTRAN77** et un autre programme en langage **MATLAB**, le premier programme permet de résoudre l'équation $F = K \cdot \delta$ et calculer la matrice de rigidité $[K]$ et matrice masse $[M]$, le deuxième programme destiné pour trouver les fréquences fondamentale à partir de résoudre l'équation suivante :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (\text{III-37})$$

III-6-2-Description les sous-routines du programme :

Tableau III.1: Fonctions des sous-routines.

Subroutine	Fonction
<i>COMP5</i>	Permet de calculer les caractéristiques mécaniques du stratifié $[A], [B], [D]$ et $[F]$
<i>HICH</i>	Construction du tableau de localisation.
<i>MINDLIN</i>	Construction des matrices de rigidité élémentaires.
<i>FORCE</i>	Création du vecteur forces élémentaire.
<i>ASSEMB</i>	A pour rôle d'assembler les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force, globaux respectivement.
<i>LIMIT 1</i>	Permet d'introduire les conditions aux limites pour calculer le déplacement en utilisant la procédure suivante : Annule tous les termes non diagonaux et égalise le terme diagonal à l'unité dans la matrice de rigidité et égalise le terme correspondant dans le vecteur force pour tous les degrés de liberté bloquée.
<i>GAUSS</i>	Cette sous-routines résout le système d'équation linéaire et calculer les déplacements à partir de l'équation $F = K\delta$.
<i>LOCAL</i>	Localiser les matrices réduites dans la matrice globale.
<i>XELEM</i>	Réduire la matrice de rigidité élémentaire de 20×20 à 12×12 .
<i>ASSEMB K</i>	Assembler les matrices de rigidité élémentaires réduites.

LIMIT 1 K	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
ELIMIN K	Éliminations des lignes et des colonnes de matrice de rigidité réduite dans les éléments nuls.
MASSE	Création de la matrice de masse élémentaire.
ASSEMB VIB	Assembler les matrices de masse.
LIMIT 1 VIB	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de masse.
ELIMIN VIB	Éliminations des lignes et des colonnes de matrice de masse correspondant aux déplacements fixés.

Chapitre IV

Validation de l'élément et étude paramétrique

Chapitre IV

Validation de l'élément et étude paramétrique

IV-1-introduction :

Ce chapitre est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément utilisé en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests des plaques isotropes, composites stratifiées avec différents cas de conditions aux limites. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Ainsi, on procède à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres tels que le degré d'anisotropie E_{11}/E_{22} , nombre de couches, le rapport d'épaisseur a/h et l'orientation des fibres θ sur la fréquence fondamentale des plaques composites stratifiées.

IV-2.Formes des conditions aux limites :

IV-2-1-Appui simple :

Si le bord de la plaque ($x = a$) est simplement appuyé, la flèche w le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion M_x le long de ce bord.

La figure (IV-1) représente la condition d'appui simple. L'expression de cette condition est donnée par :

$$(w)_{x=a} = 0, M_n = 0, N_n = 0 \text{ et } M_{nt} = 0$$

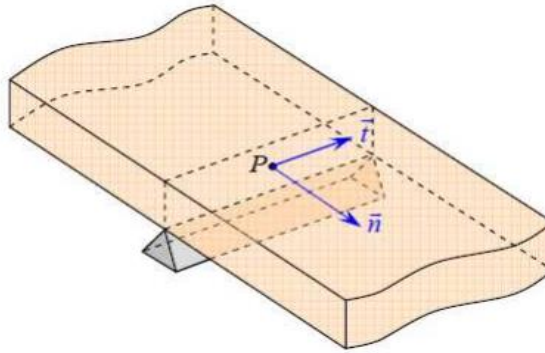


Figure IV-1 : Schématisation d'un appui simple [1]

IV-2-2- Encastrement :

Si le bord $x = a$ de la plaque est encastéré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

En considérant la figure (IV-2), la condition de bord encastéré peut s'exprimer selon :

$$(w)_{x=a} = 0, M_n = 0, u_{0n} = 0 \text{ et } u_{nt} = 0$$

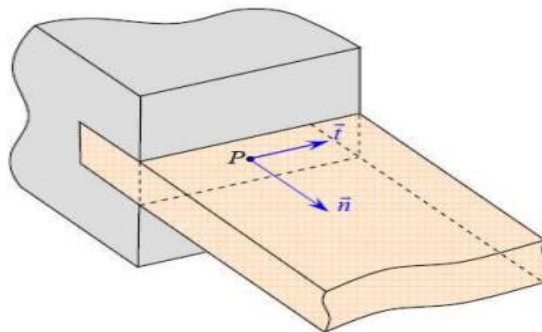


Figure IV-2 : Représentation d'un encastrement [1].

IV-2-3-Condition de bord libre :

Un bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et moments

Si le côté d'une plaque $x = a$ est entièrement libre, il est naturel que le bord ne subit ni moments de torsion et de flexion, ni des forces de cisaillement vertical.

$$N_n = N_{nt} = Q_n = M_n = M_{nt} \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$$

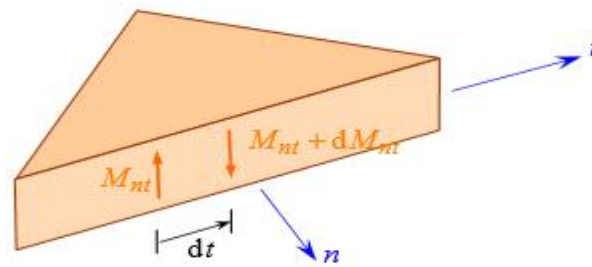


Figure IV-3 : Représentation d'un bord libre [1]

Tableau IV-1: Détails de conditions aux limites.

Conditions aux limites	Bord	
	x = 0, a	y = 0, b
Simplement appuyée(SSSS)	$w=\varphi_y=1$	$w=\varphi_x=1$
Encastrée (CCCC)	$u=v=w= \varphi_x =\varphi_y=1$	$u=v=w= \varphi_x =\varphi_y=1$
Deux bords opposés simplement appuyée et deux autres bords encastrés (SCSC)	$w=\varphi_x=1$	$u=v=w= \varphi_x =\varphi_y=1$
Deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres (CFCF)	$u=v=w= \varphi_x =\varphi_y=1$	$u=v = w=\varphi_x=\varphi_y=0$
Deux bords opposés simplement appuyée et deux autres bords libres (SFSF)	$w=\varphi_y=1$	$u=v = w= \varphi_x=\varphi_y=0$
Un bord simplement appuyée et un autre encastré et deux autres bords libres (SFCE)	$x=0 : w=\varphi_y=1$ $x=a : u=v=w= \varphi_x =\varphi_y=1$	$u=v = w= \varphi_x=\varphi_y=0$

IV-3-Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques :

IV-3- 1 plaque isotrope uniformément chargée:

On peut étudier comme premier exemple une plaque carrée isotrope chargée uniformément par $q= 1$. Le rapport d'épaisseur (a/h) est égal 10. Les propriétés mécaniques du matériau sont:

Module d'élasticité $E = 10.92$, coefficient de Poisson $\nu= 0,3$ et Module de cisaillement $G=4.2$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (IV-1)

$$w_{max} = 100 \frac{DW}{qa^4} \quad (IV-2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (IV-3)$$

Différents cas de maillage de 2*2 à 14*14 avec deux types de conditions aux limites sont considérés. La convergence des résultats du flèche maximale est montrée sur le tableau (IV-2) et les figures(IV-5), (IV-6). La comparaison des résultats a été faite avec des modèles en élément finis de Ferreira [52] et à ceux de la solution analytique [53].

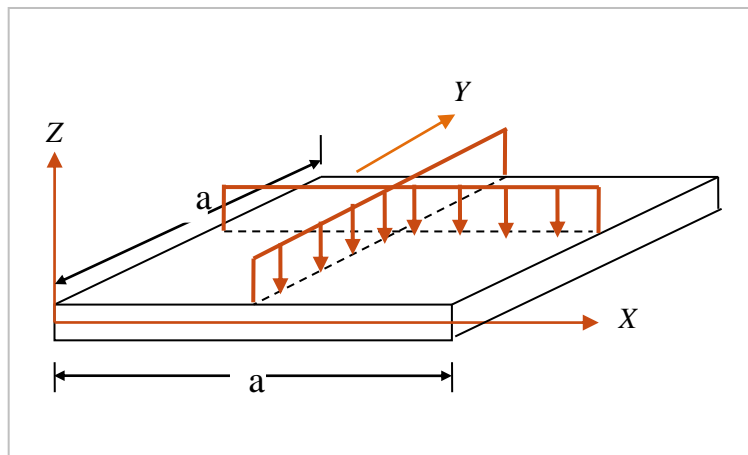


Figure IV-4 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous chargement uniformément répartie.

Tableau IV-2: La flèche maximale (\bar{w}) d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée (SSSS) et encadrée (CCCC).

Références	Flèche maximale	
	SSSS	CCCC
présent élément (2*2)	0.3488	0.0267
présent élément (4*4)	0.4242	0.1431
présent élément (6*6)	0.4283	0.1475
présent élément (8*8)	0.4289	0.1488
présent élément (10*10)	0.4289	0.1494
présent élément (12*12)	0.4287	0.1497
présent élément (14*14)	0.4285	0.1499
Solution analytique Reddy [53]	0.4270	0.1560
Numérique (Ferreira) [52]	0.4263	0.1503

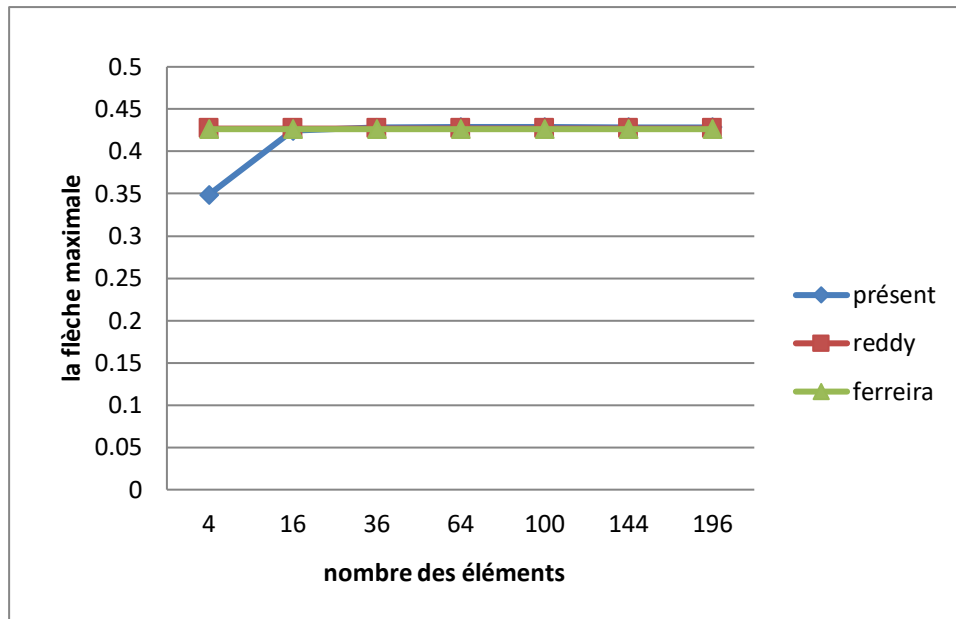


Figure IV-5: Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS).

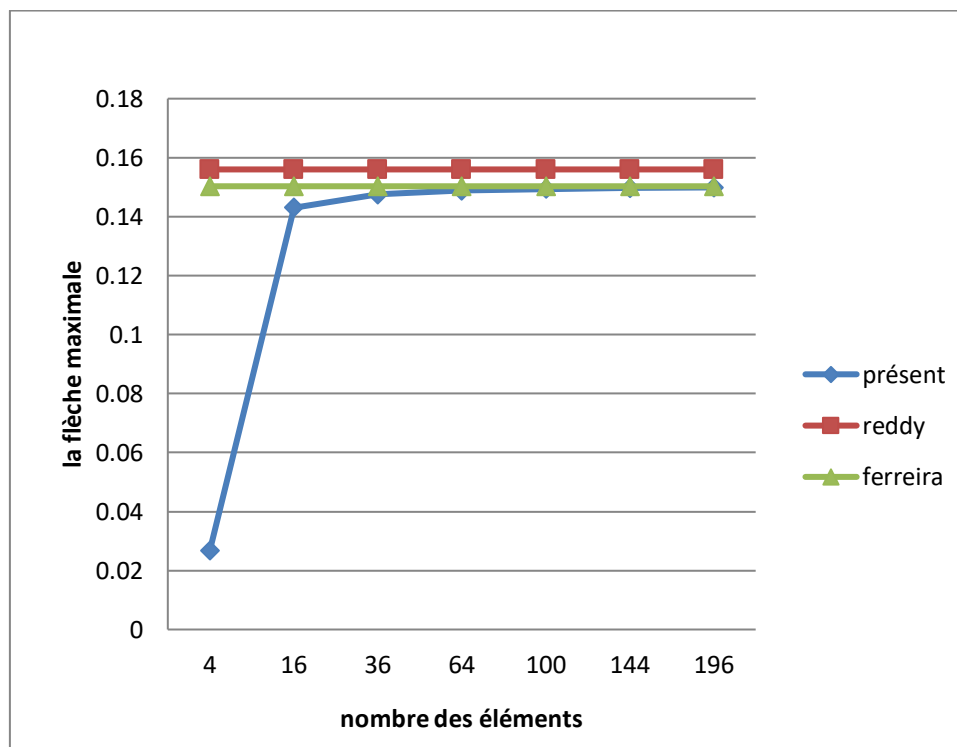


Figure IV-6 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope encadrée (CCCC).

D'après le tableau (IV-2) et les figures (IV-5) et (IV-6), on remarque que les résultats obtenus par le présent élément rectangulaire (R4) sont très bon accord avec ceux

obtenus par des solutions analytiques et numériques. On outre, la bonne performance de l'élément en termes de rapidité de convergence et de précision a été confirmée.

IV-3-2-Plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites :

Dans cette partie, nous allons montrer l'effet des conditions aux limites sur la flèche maximale d'une plaque carrée isotrope. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (IV-3) et la figure (IV- 7). On remarque que les valeurs maximales de la flèche se trouvent dans le cas d'une plaque où deux bords opposés simplement appuyée et deux autres bords libres (SFSF) et les valeurs minimales se trouvent dans le cas d'une plaque encastree (CCCC). Cela revient à la différence dans la rigidité de plaque.

Tableau IV-3 : La flèche maximale d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites.

Conditions aux limites	Références	La flèche maximale
SCSC	présent élément (2*2)	0.0562
	présent élément (4*4)	0.2040
	présent élément (6*6)	0.2140
	présent élément (8*8)	0.2170
	présent élément (10*10)	0.2185
	présent élément (12*12)	0.2192
	présent élément (14*14)	0.2196
SFSF	présent élément (2×2)	1.6421
	présent élément (4×4)	1.2872
	présent élément (6×6)	1.3094
	présent élément (8×8)	1.3258
	présent élément (10×10)	1.3348
	présent élément (12×12)	1.3401
	présent élément (14×14)	1.3435
CFCF	présent élément (2×2)	0.1481
	présent élément (4×4)	0.2642
	présent élément (6×6)	0.2815
	présent élément (8×8)	0.2876
	présent élément (10×10)	0.2901
	présent élément (12×12)	0.2912
	présent élément (14×14)	0.2919
SFCF	présent élément (2×2)	0.6345
	présent élément (4×4)	0.5319
	présent élément (6×6)	0.5463
	présent élément (8×8)	0.5529
	présent élément (10×10)	0.5558
	présent élément (12×12)	0.5572
	présent élément (14×14)	0.5579

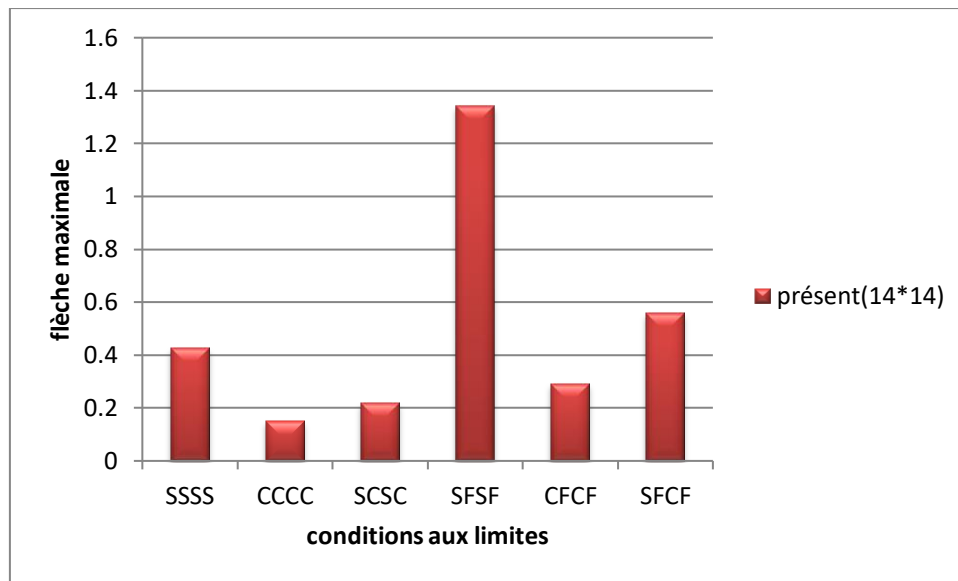


Figure IV-7 : Effet des conditions aux limites sur la flèche maximale d'une plaque isotrope carrée.

IV-4-Validation de l'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :

IV-4-1 Plaque isotrope carrée avec différents types de conditions aux limites :

On considère une plaque isotrope carrée avec un rapport d'épaisseur. Les propriétés mécaniques du matériau sont: $E = 10.92$, $\nu = 0.3$, $G = 4.2$ et $\rho = 1$

Dans la présente étude, différents cas de maillage de (2*2) à (14*14) sont utilisés. Les résultats de la fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$), normalisés par la formule (IV-4), sont présentés dans le tableau (IV-4) avec différents types de conditions aux limites.

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (\text{IV-4})$$

La convergence de la flèche d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites est présentée sur les figures (IV-8) , (IV-9).

Tableau IV-4: Fréquences propres ($\bar{\omega}$) d'une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites.

Conditions aux limites	Références	$\bar{\omega}$
SSSS	présent élément (2×2)	1. 2257
	présent élément (4×4)	0.9881
	présent élément (6×6)	0.9524
	présent élément (8×8)	0.9423
	présent élément (10×10)	0.9373
	présent élément (12×12)	0.9347
	présent élément (14×14)	0.9335
	Ferreira[53]	0.9320
	Mindlin [19]	0.9300
CCCC	présent élément (2×2)	4.4721
	présent élément (4×4)	1.8522
	présent élément (6×6)	1.6945
	présent élément (8×8)	1.6461
	présent élément (10×10)	1.6242
	présent élément (12×12)	1.6125
	présent élément (14×14)	1.6058
	Ferreira [53]	1.5996
	Rayleigh-Ritz[54]	1.5940
SCSC	présent élément (2×2)	3.2334
	présent élément (4×4)	1.4864
	présent élément (6×6)	1.3767
	présent élément (8×8)	1.3425
	présent élément (10×10)	1.3274
	présent élément (12×12)	1.3193
	présent élément (14×14)	1.3148
SFSF	présent élément (2×2)	0.3381
	présent élément (4×4)	0.4680
	présent élément (6×6)	0.4680
	présent élément (8×8)	0.4655
	présent élément (10×10)	0.4655
	présent élément (12×12)	0.4629
CFCF	présent élément (2×2)	0.3381
	présent élément (4×4)	0.8851
	présent élément (6×6)	0.9820
	présent élément (8×8)	0.9928
	présent élément (10×10)	0.9952
	présent élément (12×12)	0.9976
présent élément (14×14)	0.9988	

SFCF	présent élément (2×2)	0.3381
	présent élément (4×4)	0.6918
	présent élément (6×6)	0.7071
	présent élément (8×8)	0.7088
	présent élément (10×10)	0.7088
	présent élément (12×12)	0.7088
	présent élément (14×14)	0.7088

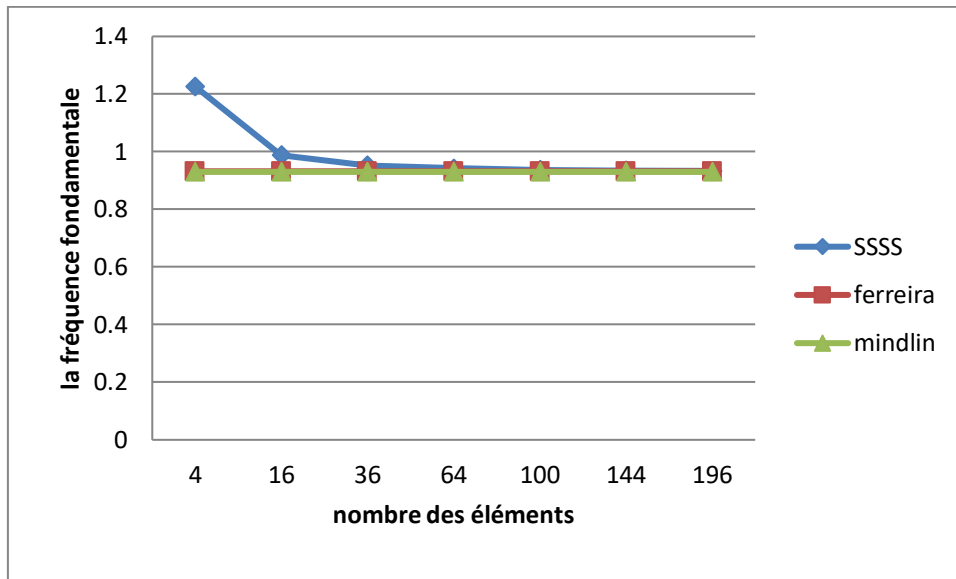


Figure IV-8 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.

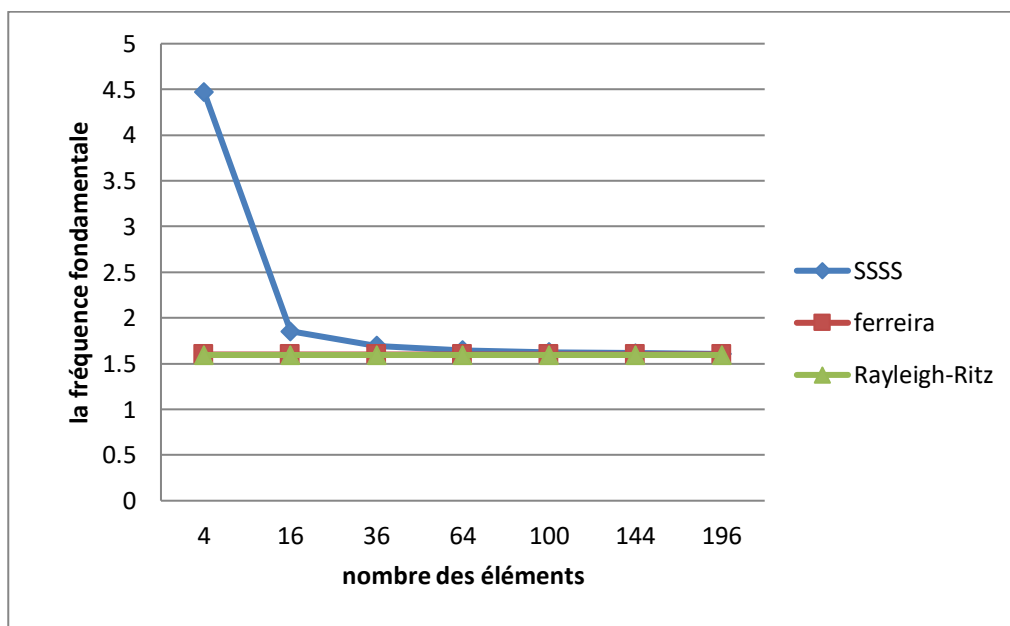


Figure IV-9 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastée en fonction de nombre des éléments.

Interprétation des résultats :

D'après le tableau (IV-4) et les figures (IV-8), (IV-9), montrent la convergence de l'élément utilisé pour une plaque carrée isotrope avec différents types de conditions aux limites. On peut remarquer que les résultats de la fréquence fondamentale obtenus par le présent élément utilisé sont en bon accord avec ceux obtenus par solution analytique de Mindlin [19] et Rayleigh-Ritz[54] et par Ferreira [52] qui a utilisé un élément quadrilatère à quatre nœuds formulé sur la base de la théorie du premier ordre (Q4-FSDT).

IV-4-2-Plaque composite stratifiée :

Dans cet exemple, On considère une plaque stratifiée carrée avec différents types de conditions aux limites sont étudiées et deux types de stratifications croisées de trois (0 / 90 / 0) et cinq (0 / 90 / 0 / 90 / 0) couches, en gardant la même épaisseur totale, sont analysés pour un rapport d'épaisseur $a/h = 5$. Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10, \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1$$

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \cdot h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (\text{IV-5})$$

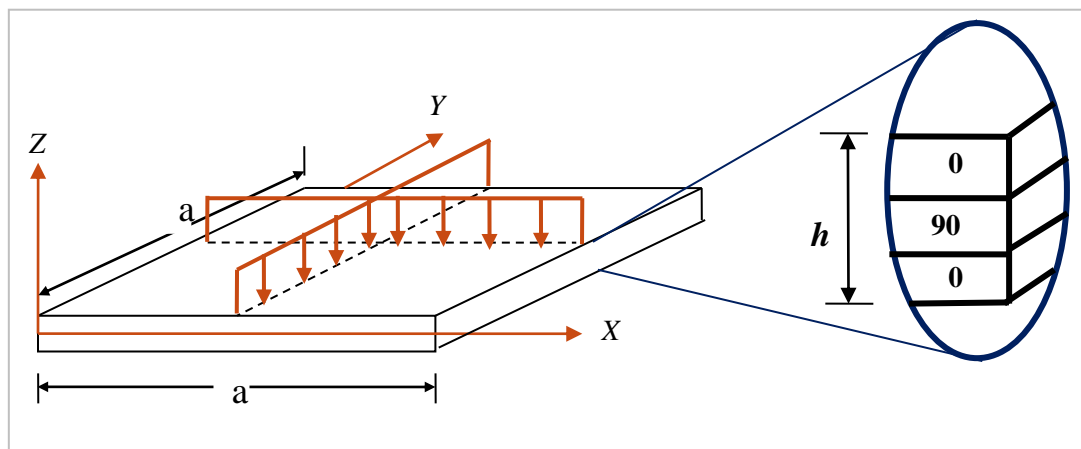


Figure IV-10 : Plaque stratifiée carrée à trois couches, simplement appuyée sous chargement uniformément répartie.

Les résultats des fréquences fondamentales obtenus dans la présente analyse sont présentés dans le tableau (IV-5) et (IV-6) avec les solutions d'élasticité 3D de Noor [55], et les solutions de Vuksanović basée sur la théorie d'ordre supérieur (HSDT).

Tableau IV-5: La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) de différents types de conditions aux limites.

Conditions aux limites	Références	$\bar{\omega}$
SSSS	présent élément (2×2)	0.4047
	présent élément (4×4)	0.3432
	présent élément (6×6)	0.3338
	présent élément (8×8)	0.3308
	présent élément (10×10)	0.3294
	présent élément (12×12)	0.3288
	présent élément (14×14)	0.3283
	Noor [55] Vuksanović	0.3284 0.3318
CCCC	présent élément (2×2)	0.6633
	présent élément (4×4)	0.4957
	présent élément (6×6)	0.4737
	présent élément (8×8)	0.4665
	présent élément (10×10)	0.4631
	présent élément (12×12)	0.4614
	présent élément (14×14)	0.4603
SCSC	présent élément (2×2)	0.5758
	présent élément (4×4)	0.4165
	présent élément (6×6)	0.3971
	présent élément (8×8)	0.3908
	présent élément (10×10)	0.3879
	présent élément (12×12)	0.3864
	présent élément (14×14)	0.3854
SFSF	présent élément (2×2)	0.0938
	présent élément (4×4)	0.2293
	présent élément (6×6)	0.2653
	présent élément (8×8)	0.2702
	présent élément (10×10)	0.2715
	présent élément (12×12)	0.2720
CFCF	présent élément (2×2)	0.0938
	présent élément (4×4)	0.2522
	présent élément (6×6)	0.3194
	présent élément (8×8)	0.3481
	présent élément (10×10)	0.3623
	présent élément (12×12)	0.3704
présent élément (14×14)	0.3740	

SFCF	présent élément (2×2)	0.0938
	présent élément (4×4)	0.2408
	présent élément (6×6)	0.2968
	présent élément (8×8)	0.3154
	présent élément (10×10)	0.3195
	présent élément (12×12)	0.3216
	présent élément (14×14)	0.3226

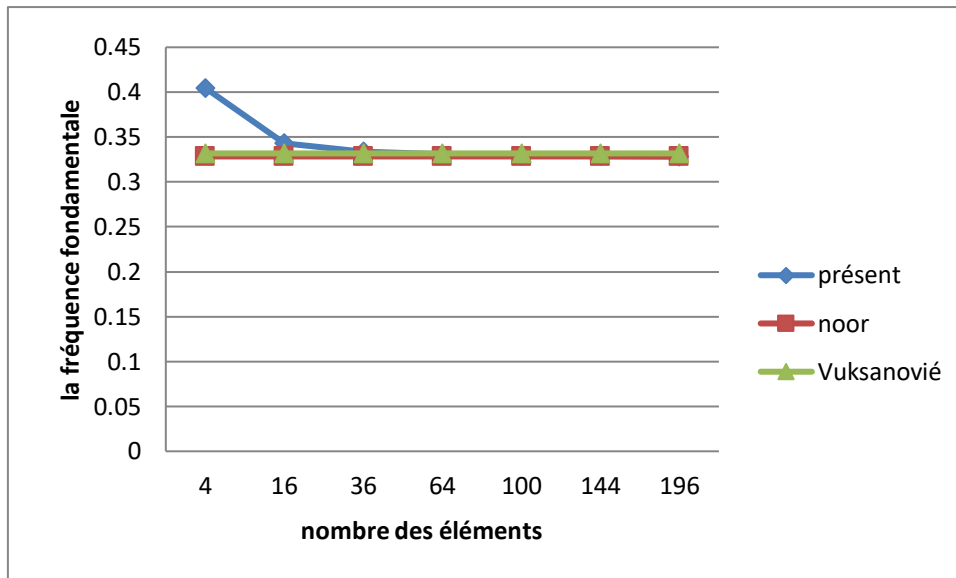


Figure IV-11 : Convergence de La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.

Tableau IV-6 : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0/90/0) de différents types de conditions aux limites

Conditions aux limites	Références	$\bar{\omega}$
SSSS	présent élément (2×2)	0.4213
	présent élément (4×4)	0.3547
	présent élément (6×6)	0.3444
	présent élément (8×8)	0.3409
	présent élément (10×10)	0.3394
	présent élément (12×12)	0.3387
	présent élément (14×14)	0.3381
	Noor [55]	0.3409
	Vuksanović	0.3442
CCCC	présent élément (2×2)	0.6633
	présent élément (4×4)	0.5237
	présent élément (6×6)	0.5013
	présent élément (8×8)	0.4938
	présent élément (10×10)	0.4902
	présent élément (12×12)	0.4884
	présent élément (14×14)	0.4872

SCSC	présent élément (2×2)	0.5689
	présent élément (4×4)	0.4444
	présent élément (6×6)	0.4253
	présent élément (8×8)	0.4189
	présent élément (10×10)	0.4161
	présent élément (12×12)	0.4144
	présent élément (14×14)	0.4135
SFSF	présent élément (2×2)	0.1200
	présent élément (4×4)	0.2415
	présent élément (6×6)	0.2555
	présent élément (8×8)	0.2571
	présent élément (10×10)	0.2577
	présent élément (12×12)	0.2577
	présent élément (14×14)	0.2577
CFCF	présent élément (2×2)	0.1200
	présent élément (4×4)	0.2698
	présent élément (6×6)	0.3239
	présent élément (8×8)	0.3463
	présent élément (10×10)	0.3579
	présent élément (12×12)	0.3637
	présent élément (14×14)	0.3655
SFCE	présent élément (2×2)	0.1200
	présent élément (4×4)	0.2559
	présent élément (6×6)	0.2982
	présent élément (8×8)	0.3071
	présent élément (10×10)	0.3095
	présent élément (12×12)	0.3108
	présent élément (14×14)	0.3116

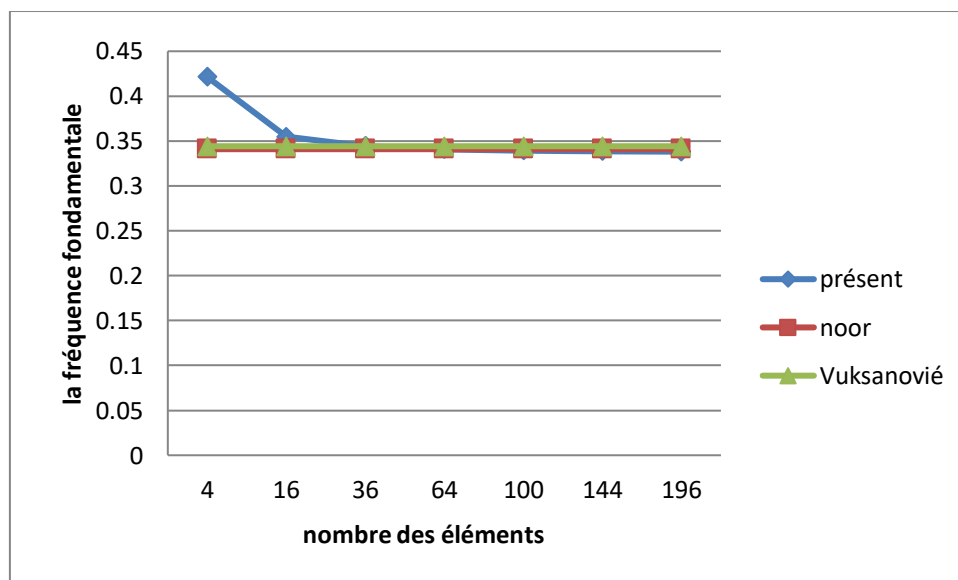


Figure IV-12 : Convergence de La fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0/90/0) simplement appuyée en fonction de nombre des éléments.

Interprétation des résultats :

D'après les tableaux (IV-5) et (IV-6) et les figures (IV-11) et (IV-12), La convergence de la valeur de la première fréquence fondamentale obtenue dans la présente élément sont un bon accord avec les solutions analytiques d'élasticité 3D de Noor [55], et les solutions de Vuksanović (HSDT).

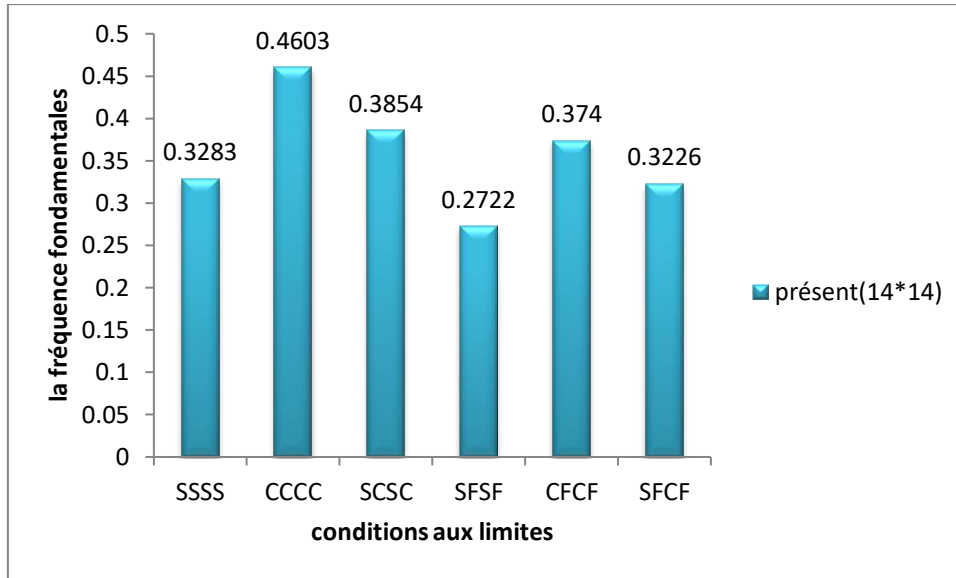


Figure IV-13: effet des conditions aux limites sur la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée (0/90/0).

Interprétation des résultats :

D'après le tableau (IV-6) et la figure (IV-13), on remarque que la valeur de fréquence fondamentale maximale dans le cas d'une plaque stratifiée carrée encartée (CCCC) et par contre la valeur de minimale dans le cas d'une plaque stratifiée carrée deux bords opposés simplement appuyée et deux autres bords libres (SFSF).

IV-5-Etude paramétrique :

IV-5-1- Effet du rapport d'anisotropie sur la fréquence propre :

Dans cette section, nous allons montrer l'effet de l'anisotropie sur la variation des valeurs de fréquences naturelles pour différents cas des appuis (SSSS, CCCC, SCSC, SFSF, CFCF, SFCF). Pour ce faire, une plaque stratifiée a été choisie dont l'épaisseur est de $a/h = 5$ et une stratification croisée de trois couches (0 / 90 / 0) et cinq couches (0 / 90 / 0 / 90 / 0). Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = \text{variable} \quad \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (\text{IV-6})$$

Tableau IV-7: Effet de l'anisotropie (E_{11}/E_{22}) sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis.

Conditions aux limites	Références	Nombre des couches	E_{11}/E_{22}				
			3	10	20	30	40
SSSS	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.2632	0.3288	0.3727	0.3971	0.4134
		(0/90/0/90/0)	0.2642	0.3381	0.3952	0.4294	0.4529
CCCC	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.4041	0.4614	0.4882	0.5028	0.5131
		(0/90/0/90/0)	0.4094	0.4884	0.5281	0.5470	0.5583
SCSC	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.3239	0.3864	0.4231	0.4589	0.4772
		(0/90/0/90/0)	0.3338	0.4144	0.4704	0.5008	0.5198
SFSF	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.1769	0.2720	0.3243	0.3500	0.3652
		(0/90/0/90/0)	0.1679	0.2577	0.3110	0.3381	0.3547
CFCF	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.3032	0.3704	0.3900	0.3981	0.4027
		(0/90/0/90/0)	0.2936	0.3637	0.3860	0.3948	0.3999
SFCF	présent élément (12×12)	(0/90/0)	0.2996	0.3216	0.3563	0.3722	0.3816
		(0/90/0/90/0)	0.2300	0.3108	0.3476	0.3644	0.3746

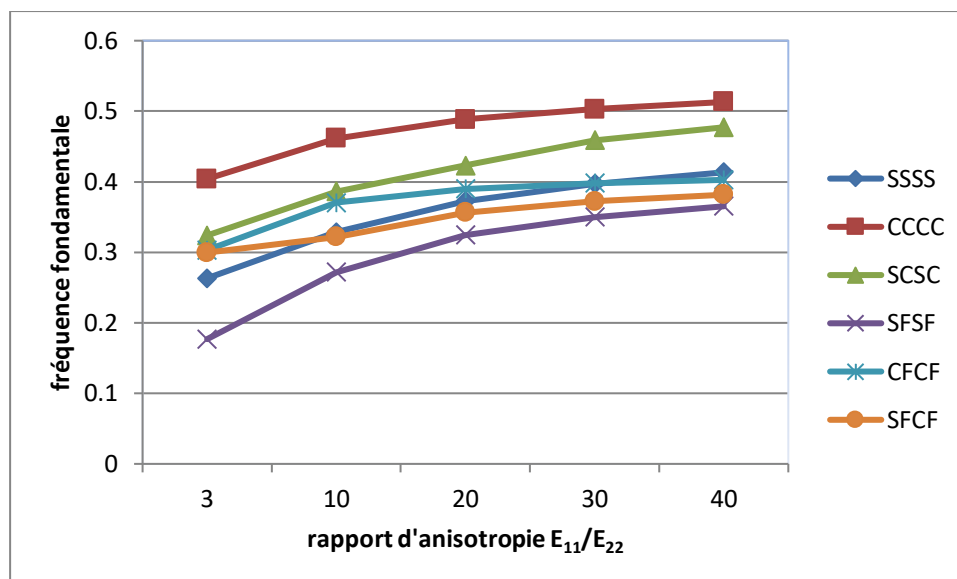


Figure IV-14: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée carrée croisée de 3 couches.

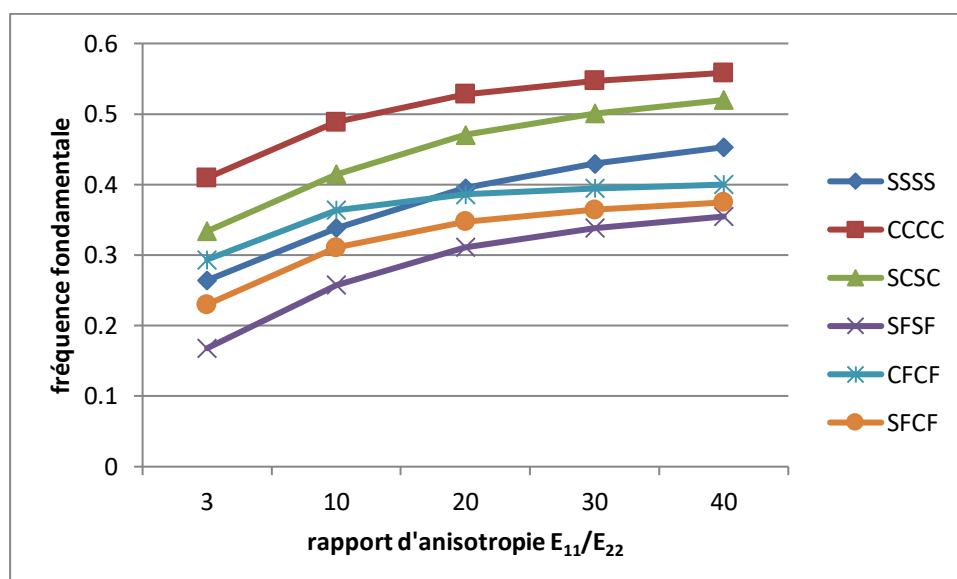


Figure IV-15: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée carrée croisée de 5 couches.

Interprétation des résultats :

D'après Le tableau (IV-7) et les figures (IV-14) et (IV-15), nous pouvons constater que l'augmentation du rapport d'anisotropie (E_{11}/E_{22}) conduit à une augmentation de la fréquence fondamentale et cela pour différents type d'appuis (SSSS), (CCCC), (SCSC), (SFSF), (CFCF) et (SFCF).

Nous pouvons remarquer également que au-delà d'un rapport d'anisotropie qui est égal à ($E_{11}/E_{22}=40$), la fréquence fondamentale commence à se stabiliser comme le

montre le graphe dans la figure (IV-14) et (IV-15). et on remarque que la valeur de fréquence fondamentale augmente légèrement en augmentant le nombre de couches.

IV-5-2-Effet de rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale :

Dans cette section, nous allons montrer l'effet de rapport d'épaisseur sur la variation des valeurs de fréquences naturelles pour différents nombre de couches, La plaque est stratifiée carrée dont le types de stratifications croisées symétrique (0 / 90 / 0). Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 25 \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (\text{IV-7})$$

Avec le rapport d'épaisseur $a/h = \text{Variable}$.

Tableau IV-8 : Effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis croisée de trois couches (0/90/0).

Conditions aux limites	Modèle EF	a/h					
		2	5	10	20	50	100
SSSS	présent élément (12×12)	1.2709	0.3864	0.1300	0.0374	0.0061	0.0015
CCCC	présent élément (12×12)	1.4357	0.4963	0.2005	0.0693	0.0132	0.0034
SCSC	présent élément (12×12)	1.4108	0.4469	0.1497	0.0424	0.0070	0.0018
SFSF	présent élément (12×12)	1.0207	0.3390	0.1170	0.0332	0.0056	0.0014
CFCF	présent élément (12×12)	1.0566	0.3947	0.1655	0.0574	0.0109	0.0028
SFCF	présent élément (12×12)	1.0263	0.3654	0.1438	0.0458	0.0082	0.0021

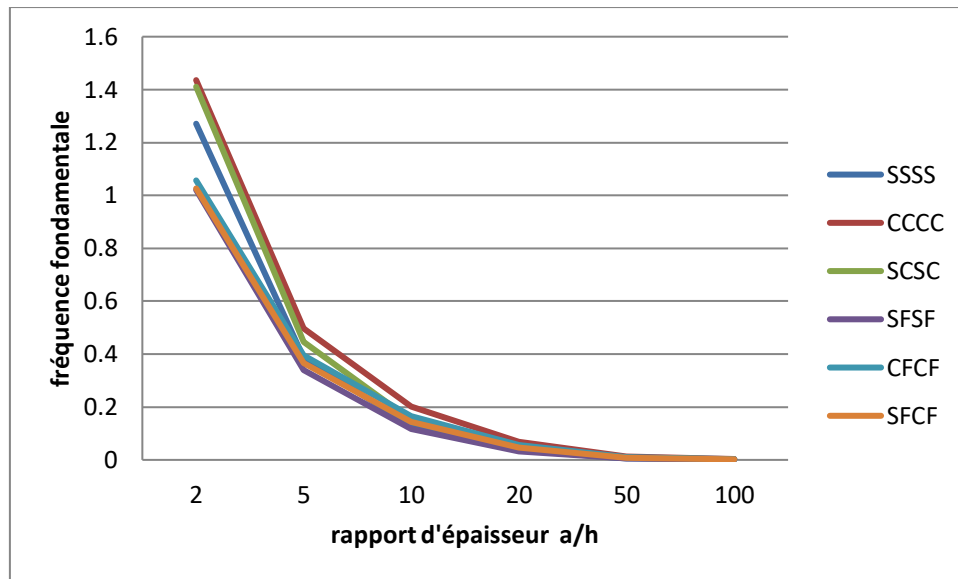


Figure IV-16 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de rapport d'épaisseur (a/h) de plaque stratifiée carrée croisée de trois couches (0/90/0).

Interprétation des résultats :

D'après Le tableau (IV-8) et la figure (IV-16), nous pouvons constater que les valeurs de fréquence fondamentale diminuent avec l'augmentation de rapport d'épaisseur (a/h) quelque soit le type de condition aux limites.

IV-5-3-Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale :

Dans cette section, nous allons montrer l'effet de l'orientation des fibres sur la variation des valeurs de fréquences fondamentales pour différents cas d'appuis, pour ce faire, une plaque stratifiée symétrique a été choisi dont l'épaisseur est de $a/h = 5$.

Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10, \frac{G_{12}}{E_{22}} = \frac{G_{13}}{E_{22}} = 0.6, \frac{G_{23}}{E_{22}} = 0.5, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot h \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (\text{IV-8})$$

Tableau IV-9: effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaque stratifiée carrées avec différents types d'appuis.

Angle θ		Modèle EF	Conditions aux limites					
			SSSS	CCCC	SCSC	SFSF	CFCF	SFCF
3 couches	0/15/0	présent	0.3229	0.4574	0.3774	0.2769	0.3776	0.3280
	0/30/0	élément (12×12)	0.3306	0.4572	0.3789	0.2753	0.3772	0.3263
	0/45/0		0.3311	0.4577	0.3812	0.2737	0.3755	0.3245
	0/60/0		0.3305	0.4591	0.3835	0.2726	0.3735	0.3228
	0/90/0		0.3288	0.4614	0.3864	0.2720	0.3704	0.3216
0/15/0/15/0	présent		0.3324	0.4580	0.3796	0.2744	0.3783	0.3256
0/30/0/30/0	élément (12×12)	0.3396	0.4608	0.3868	0.2678	0.3742	0.3200	
0/45/0/45/0		0.3434	0.4671	0.3960	0.2617	0.3697	0.3153	
0/60/0/60/0		0.3422	0.4763	0.4048	0.2587	0.3663	0.3124	
0/90/0/90/0		0.3387	0.4884	0.4144	0.2577	0.3637	0.3108	
0/15/0/15/0/ 15/0/15/0		présent élément (12×12)	0.3338	0.4580	0.3805	0.2722	0.3770	0.3230
0/30/0/30/0/ 30/0/30/0	0.3437		0.4614	0.3900	0.2610	0.3704	0.3138	
0/45/0/45/0/ 45/0/45/0	0.3487		0.4697	0.4015	0.2512	0.3637	0.3068	
0/60/0/60/0/ 60/0/60/0	0.3468		0.4818	0.4121	0.2466	0.3590	0.3028	
0/90/0/90/0/ 90/0/90/0	0.3426		0.4973	0.4234	0.2452	0.3558	0.3008	

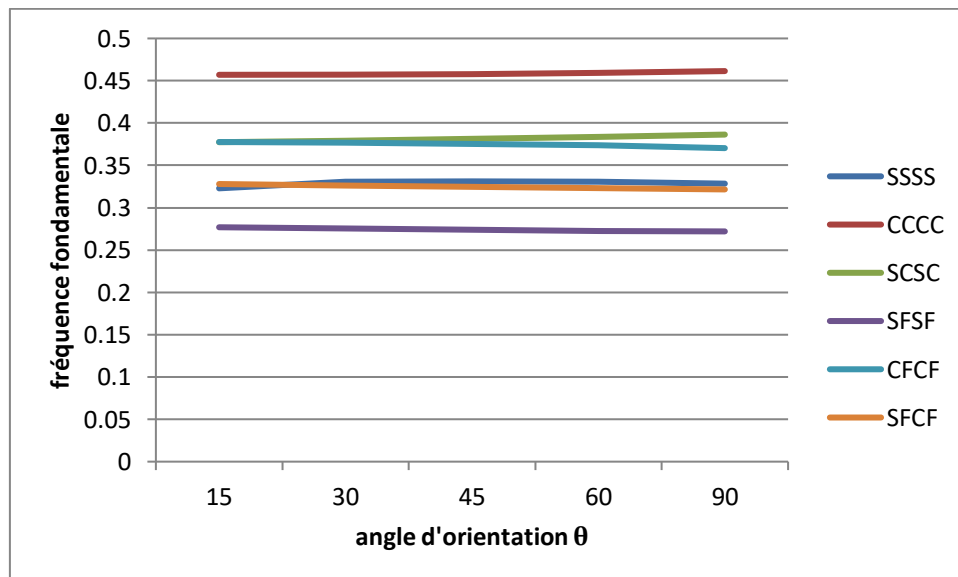


Figure IV-17: Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de trois couches (0/θ/0).

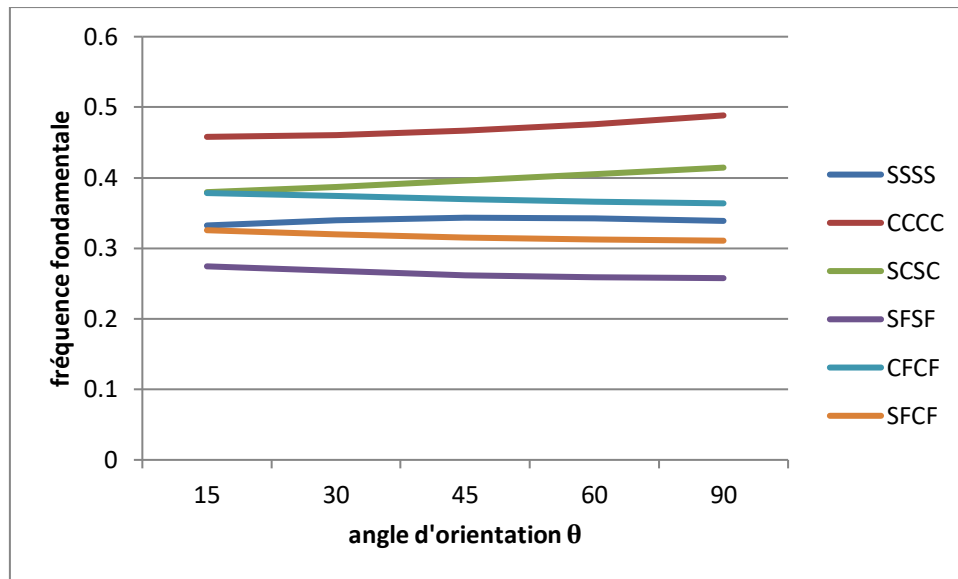


Figure IV-18 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de cinq couches (0/θ/0/θ/0).

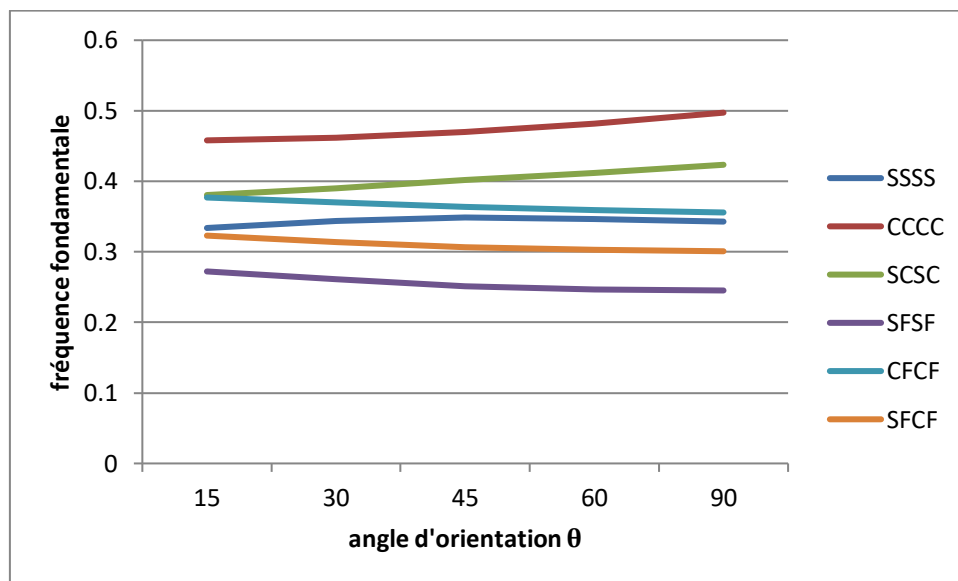


Figure IV-19 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée carrée croisée de neuf couches (0/θ/0/θ/0/θ/0/θ/0).

Interprétation des résultats :

D'après Le tableau (IV.9) et les figures (IV-17),(IV-18),(IV-19), nous pouvons constater :

-Pour une plaque carrée simplement appuyée (SSSS), la fréquence augmente dans l'intervalle $[0^\circ, 45^\circ]$ pour atteindre son maximum à 45° , puis diminue symétriquement dans l'intervalle $[45^\circ, 90^\circ]$ dans différentes nombre des couches (trois couches, cinq couches, neuf couches).

-Pour une plaque carrée encastrée(CCCC) et une plaque simplement appuyée-encastree (SCSC), les valeurs de fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation d'angle d'orientation.

- Pour les autres cas d'appui (SFSF, CFCF, SFCF), la valeur de la fréquencecroit jusqu'à 30 puis décroît jusqu'à 90.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

1-conclusion :

Dans cette étude, l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées sous différents cas de conditions aux limites a été étudiée. Pour atteindre nos objectifs, un élément fini rectangulaire à 4 nœuds avec 5 degrés de libertés est formulé sur la base de la théorie de la déformation du premier ordre (FSDT). Les résultats obtenus sont comparés avec des modèles analytiques et ceux obtenus par des modèles numériques en utilisant la MEF. Selon la comparaison, on a constaté que le programme donne des résultats très satisfaisant en termes de précision et de rapidités de convergence. Par ailleurs, beaucoup de paramètres liés au stratifiée et à son hétérogénéité intrinsèque influent directement sur la valeur de la fréquence fondamentale qui est proportionnel à :

- Plus le rapport d'anisotropie (E_{11}/E_{22}) est élevé, plus la fréquence fondamentale sera élevée, cela pour différents type d'appuis.
- La valeur de flèche maximale est minimale dans le cas d'une plaque encartée (CCCC). Par contre, la valeur de fréquence fondamentale est maximale.
- Plus le rapport d'épaisseur (a/h) est élevé, la fréquence fondamentale se réduit aux différents types d'appuis.
- Plus l'angle d'orientation θ : la fréquence fondamentale augmente dans l'intervalle $[0^\circ, 45^\circ]$ pour atteindre son maximum à $\theta = 45^\circ$, puis diminue symétriquement dans l'intervalle $[45^\circ, 90^\circ]$ dans différentes nombre des couches dans le cas de plaque simplement appuyée (SSSS), par contre sera augmenté avec l'augmentation d'angle d'orientation pour une plaque carrée encastree(CCCC) et une plaque simplement appuyée-encastree (SCSC).

En fin il faut noter la précision de la méthode des éléments finis qui donne des résultats très acceptables comparés à l'étude théorique.

Références bibliographiques

- [1] Berthelot J. M., «**Matériaux Composites: Comportement Mécanique Et Analyse Des Structures**», 4^{ème} édition, 2010.
- [2] Daniel.G., « **Matériaux Composites** », 3^{ème} édition. Paris: Hermès, 1991.
- [3] Michael.E., **Détermination Des Propriétés Et Applications Des Composites**, Gymnase Auguste Piccard Lausanne, Nov. 2009.
- [4] Daniel. G., « **Matériaux Composites** », 5^{ème} édition, Lavoisier Paris 2005.
- [5]Kaskas S., **Etude L'effet Du Cisaillement Transverse Sur Le Comportement Mécanique De Poutre Composite**, Mémoire de Magister, Université de CONSTANTINE, Avril 2010.
- [6] KALLEL-KAMOUN.I., **Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique** , Mémoire de Doctorat, Université de SHERBROOKE (CANADA) ,30 Juin 1999.
- [7] Arbaoui .J. D., **Etude Comparative Et Caractérisations Mécaniques Des Structures Sandwichs Multicouches**, Thèse de Doctorat, Université PAUL VERLAINE – METZ, Octobre.
- [8] <http://thesis.univ-biskra.dz/2282/3/ChapI.PDF>
- [9]Vincent .M., **Méthodes D'analyse Par Eléments Finis Des Contraintes Aux Interfaces Dans Les Structures Sandwich**, thèse de doctorat, École Doctorale, Université BLAISE PASCAL - CLERMONT II.
- [10]- Locif .D. , **Evaluation Simultanée Des Vitesses De Propagation Et D'atténuation Des Ultrasons Dans Des Matériaux Composites Et Polymériques**, Mémoire de magistère université de BOUMERDES, 2007.
- [11]- VANNUCCI.P., **Cours Matériaux Composites**, Université de VERSAILLES ET SAINT QUENTIN-EN-YVELINES,A.U,2005-2006.

[12] Duong. V. A., **Développement En Dynamique D'un Elément Fini Multicouche Avec Interfaces Imparfaites**, thèse de doctorat, l'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,2008.

[13] Pagano. N.J. , **Exact Solutions For Composite Laminates In Cylindrical Bending**, Journal of Composite Materials, 3(3) :398–411, 1969.

[14] Pagano .N.J. ,**Exact Solutions For Rectangular Bidirectional Composites And Sandwich Plates**, J. Compos. Mater., Vol.4 :20–34, 1970.

[15] Pagano .N.J., **Stresses Fields In Composite Laminates**, Int. J. Solids Struct, 14 :385–400, 1978.

[16] Srinivas.S, Joga .C.V., and Rao. A.K., **An Exact Analysis For Vibration Of Simply-Supported Homogeneous And Laminated Thick Rectangular Plates**, Journal of Sound and Vibration, 12(2) :187–199, 1970.

[17] Meyer-Piening .H. R., **Experiences With "Exact" Linear Sandwich Beam And Plate Analyses Regarding Bending, Instability And Frequency Investigations**, Proceedings of the Fifth International Conference On Sandwich Constructions, Zurich, Switzer-land, vol. I :37–48, 2000.

[18] Belarbi. M. O., **Eléments Finis Pour L'analyse Des Structures Sandwichs**, thèse de doctorat, université de BISKRA, 2015.

[19] Mindlin. R., **Influence Of Rotatory Inertia And Shear In Flexural Motions Of Isotropic Elastic Plates**, ASME J.appl. Mech., 18 :1031–1036, 1951.

[20] Reissner, E., **The Effect Of Transverse Shear Deformation On The Bending Of Elastic Plates**, J. appl. Mech, 12 (2) :69-77,1945.

[21] Reissner, E., **Reflections On The Theory Of Elastic Plates**, Applied Mechanics Reviews, 38 (11) :1453-1464,1985.

[22] Reissner, E., **A Consistent Treatment Of Transverse Shear Deformations In Laminated Anisotropic Plates**, AIAA Journal, 10 (5) :716-718, 1972.

[23] Mindlin, R., **Influence Of Rotary Inertia And Shear On Flexural Motions Of Isotropic**, elastic plates, J. of Appl. Mech., 18 :31-38,1951.

- [24] Ayad, R., **Eléments Finis De Plaque Et Coque En Formulation Mixte Avec Projection En Cisaillement**, Thèse de doctorat, Université de Technologie de COMPIEGNE, FRANCE. 1993.
- [25] SEDIRA.L. , **Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux**. Thèse en co-tutelle , Université Mohamed Khider – Biskra, Algérie et Université de Reims Champagne Ardenne, France. Juin 2013.
- [26] TAFLA. A., **Eléments Finis Mixtes-Hybrides Naturels Sans Facteurs Correctifs Du Cisaillement Pour Les Plaques Et Les Coques Composites Multicouches**, Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [27] BELARBI. M. O., tati (2015), **A new C° Finite Element Model For The Analysis Of Sandwich Plates Using Combined Theories**. *International Journal Of Structural Engineering* , 6(3) :212-239.
- [28] KHECHAI .A. , **Etude Numérique De L'effet Des Singularités Géométriques Sur La Distribution Des Contraintes Dans Les Plaques Stratifiées**, mémoire de master, université Biskra, 2013.
- [29]- NYE, J. F. **Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices**. 4. ed. London: Oxford University Press, 1969.
- [30] Daniel .G. , "Matériaux Composites», Hermès ,1997.
- [31] KOLLAR, L. P. ,SPRINGER, G., **Mechanics of Composite Structures** , Cambridge University Press. 2003.
- [32] CHERIDI.H. , **Analyse Dynamique Des Plaques Minces Et Epaises: Application Aux Matériaux Homogènes Et Non Homogènes**, mémoire de magistère, université de MENTOURI –CONSTANTINE.
- [33] KOO K.N., LEE L, « **Vibration And Damping Analysis Of Fiber-Reinforced Composites Material Conical Shells** », *Journal of sound and vibration*, 1996, 193(3), 581-595
- [34] MEBARKI .a., **Analyse Dynamique Libre Des Plaques Composites Multicouches**, mémoire de Magister, université de MENTOURI –CONSTANTINE,2009.

- [35] KERBOUCHE .H., **Détermination Des Paramètres Modaux Des Plaques Composites Orthotropes En Vibration Par Ansys**, mémoire de master, Université KASDI MERBAH OUARGLA,2017.
- [36] LEISSA. A.W., « **Vibration Of Plates** », Nasa SP-160, Washington DC, 1969.
- [37]JAOUEN.J. , « **Vibration de flexion des plaques** » , Rapport de recherche Université de SHERBROOKE, 2002.
- [38] MESTAT.P., « **Etude Critique Des Modelisations De Plaques Encastées En Vibration** » ,Travail de fin d'études (Memoire de DEA) , 1981
- [39] LEISSA. A.W., « **Plate Vibration Research** », classical theory, shok vibration or simply supported Edgas”, journal of Applied Mechanics (1959)
- [40] HEARMON. R.F.S., « **The Frequency Of Flexural Vibration Of Rectangular Plates With Clamped Or Simply Supportes Edges** », journal of applied mechanics, (1959), 26, 537-540.
- [41] HARIK.I.E., Liu X. , Malakrishnan. N., « **Analytical Solution To Free Vibration Of Rectangular Plates** », Journal of sound and vibration, (1992), 153(1), 51-62.
- [42]KOPMAZ.O.,TELLIS ., « **Free Vibration Of Rectangular Plate Carrying A Distributed Mass** », Journal of sound and vibration, (2001), 251 (1), 39-97.
- [43].TIMOSHENKO,S. P ., **Theory Of Vibration In Engineering -GTTI**, 1931 section56, p. 308tr.from English.
- [44]. JAE.H.K. HYSIN-JUSTIM, « **Exact Solutions For The Force Vibration Of Rectangular Plates Having In-Plane Moments Acting On Two Simply Supported Edges** », Journal of sound and vibration, (2003), 273, 933-948.
- [45] **DERBANE. S., Modélisation Des Plaques Par La Méthode Des Eléments Finis**, mémoire de magistère, université Biskra, 2012.
- [46] BOUYAYA.L., **Etude Théorique Et Numérique Du Comportement Dynamique D'un Stratifié Composite Unidirectionnel**, 21ème Congrès Français de Mécanique.
- [47] FORTIN. A. , GARON. A., **Les Elément Finis De La Théorie A La Pratique**,1997-2011.

[48] ERN. A., GUERMOND. J.L., **Eléments Finis Théorie Application Mise En Œuvre.**

[49]https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/le-modele-en-elements-finis-2-choix-des-elements

[50] BOUYAYA.L., **Analyse Numerique Du Comportement Dynamique De Structures Composites A Renforcement Fibreux, thèse de DOCTORAT EN SCIENCES,** université MENTOURI CONSTANTINE,2011.

[51]- PushpaRaj .S., **Dynamic analysis of laminated composite plates with holes.** National Institute of Technology Rourkela Orissa -769008, India May 2012.

[52]-Ferreira.A. J. M., **Matlab codes for Finite Element analysis,** Portugal: Springer, 2009 Vol. 157: Solid Mechanics and Its Applications.

[53]- Reddy .J.N., **A simple higher-order theory for laminated composite plates,** Journal of applied mechanics, 51 (4) ,(1984).

[54]- Dawe .D. J., and Roufaeil .O. L., **Rayleigh-ritz , vibration analysis of mindlin plates,** Journal of Sound and Vibration, 69(3), 1980.

[55]- Noor .A.K., **Free vibrations of multilayered composite plates,** AIAA J,11(7),1973.