



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté de Sciences et de Technologie  
Département de GENIE Mécanique

# MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine : Sciences et Techniques**

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Energétique**

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :  
**TAOUAGA Aimane**

Le : mardi 22 septembre 2020

## **Etude numérique de la convection mixte dans une cavité munie d'une plaque séparatrice**

---

### **Jury :**

Dr	AMRANE Mohammed Nadir	Pr	Université de Biskra	Président
Dr	GUERBAAI Salah	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Dr	Djemai Hocine	MCB	Université de Biskra	Examineur

## Remerciement

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la rédaction de  
ce mémoire.*

*Je voudrais dans un premier temps, remercier mon encadreur de  
mémoire M.GUERBAJ Salah, pour m'avoir accordé des entretiens et  
avoir répondu à toutes mes questions, ainsi que son grand soutien dans  
l'élaboration de ce mémoire.*

*Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Biskra,  
Mes parents, pour leur soutien constant et leurs encouragements.*

# Dédicace

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...*

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,*

*L'amour, le respect, la reconnaissance...*

*Aussi, c'est tout simplement que*

*Je dédie cette thèse*

**À MES CHERS PARENTS**

*Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect,*

*mon amour*

*éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti*

*pour mon instruction et mon bien être.*

*Je vous remercie pour tout le soutien*

*et l'amour que vous me portez*

*depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction*

*m'accompagne toujours.*

*Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.*

*Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé,*

*bonheur et longue*

*vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.*



Liste des tableaux

Liste des figures

Nomenclature

## Chapitre I

Introduction :	I
I-Généralités et études bibliographique	3
I-1 Notions fondamentales sur le transfert thermique :	3
I-1-1- Introduction	3
I-1-2-Les différents modes de transfert de la chaleur :	3
I-1-2-1- Conduction :	4
I-1-2-2- Rayonnement :	5
I-1-2-3- Convection :	5
I-3- Revue bibliographique	6

## Chapitre II

II- Formulation mathématique du problème	9
II-1 Présentation du problème :	9
II-1-1-Modèle physique :	9
II -1-2-Hypothèse simplificatrices :	9
II-2- Equations générales de transport :	10
II-2-1- Equations gouvernantes sous forme dimensionnelle :	11
II-2-2-Equations gouvernantes sous forme adimensionnelle :	12
II-3- Les conditions aux limite :	13
II-4- Les grandeurs caractéristiques	14
II-4-1- Le nombre nusselt :	14
II-4-2- Fonction du courant :	15

### **Chapitre III**

III. Méthode de résolution :	17
III.1 Principe de la méthode des volumes finis	17
III.2 Forme générale des équations de conservation	17
III.3 Méthode de discrétisation	18
III.3.1 Maillage et volume de contrôle	18
III.3.2 Discrétisation des équations de conservation	19
III.3.3 Règles principales de la méthode	21
III.3.4 Les différents schémas de discrétisation	21
III.3.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires	23
III.3.6 Couplage vitesse- pression	24
III.3.7 Séquence des opérations de l'algorithme simple :	26
III. 4 Structure générale du programme :	27

### **Chapitre IV**

IV- Résultats et discussions :	30
IV-1- Introduction	30
IV-2- Validation De Code	30
IV-3- Résultats Et Discussions	30

## liste des tableaux

---

**Tableau** (III.1) Valeurs de  $\emptyset$ , S et  $\Gamma$  correspondantes aux équations gouvernantes\_\_ 18

**Tableau**( III.2) Les coefficients  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  et  $a_N$  pour différents schémas \_\_\_\_\_ 22

## liste des figures

---

<b>Figure (II-1)</b> Modèle physique_____	9
<b>Figure(III.1)</b> : volume contrôle bidimensionnelle_____	17
<b>Figure(III.2)</b> :Représentation du maillage en volumes finis_____	19
<b>Figure (IV-1)</b> : Les lignes de courant et les isothermes pour $Ri=0.1$ (a) et $Ri=10$ (b)____	33
<b>Figure (IV -2)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I)_____	34
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=0.001$	
<b>Figure (IV -3)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I) _____	35
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=1$	
<b>Figure (IV -4)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I)_____	36
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=10$	
<b>Figure (IV -5)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II)_____	37
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=0.001$	
<b>Figure (IV -6)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II)_____	38
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=1$	
<b>Figure (IV -7)</b> : Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II)_____	39
pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour $K=10$	
<b>Figure (IV -8)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche_____	41
(cas I) pour $K=0.001$	
<b>Figure (IV -9)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite_____	42
(cas I) pour $K=0.001$	
<b>Figure (IV -10)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche_____	42
(cas I) pour $K=1$	
<b>Figure (IV -11)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite_____	43
(cas I) pour $K=1$	
<b>Figure (IV -12)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche_____	43
(cas I) pour $K=10$	
<b>Figure (IV -13)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite_____	44
(cas I) pour $K=10$	
<b>Figure (IV -14)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche_____	44
(cas II) pour $K=0.001$	
<b>Figure (IV -15)</b> : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite_____	45
(cas II) pour $K=0.001$	

## liste des figures

---

- Figure (IV -16) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche \_\_\_\_\_ 45  
(cas II) pour  $K=1$
- Figure (IV -17) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite \_\_\_\_\_ 46  
(cas II) pour  $K=1$
- Figure (IV -18) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche \_\_\_\_\_ 46  
(cas II) pour  $K=10$
- Figure (IV -19) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite \_\_\_\_\_ 47  
(cas II) pour  $K=10$



## Nomenclature :

### *Symboles latins*

Propriétés	Signification	Unité
$g$	Accélération d la gravité.	$m.s^{-2}$
$Gr$	Nombre du Grashof thermique.	-
$H$	hauteur de la cavité	$m$
$K$	Rapport des conductivité thermique $K=k_f/k_s$	
$L$	Largeur de la cavité	$m$
$Nu$	Nombre du Nusselt local.	-
$p$	Pression	$N.m^{-2}$
$P$	Pression adimensionnelle	-
$Pr$	Nombre de Prandlt	-
$Re$	Nombre de Reynolds.	-
$Ri$	Nombre de Richardson	-
$T$	Température dimensionnelle	$K$
$T_c$	Température de la paroi chaude	$K$
$T_f$	Température de la paroi froide	$K$
$u, v$	Composantes dimensionnelles de la vitesse.	$m.s^{-1}$
$U, V$	Composantes adimensionnelles de la vitesse.	-
$V_p$	Vitesse adimensionnelle de la paroi mobile	-
$x, y$	Cordonnées cartésiennes	$M$
$X, Y$	Cordonnées cartésiennes adimensionnelles.	-

∴

### *Symboles grecs*

$a$	Diffusivité thermique du fluide	$m^2.s^{-1}$
$\beta$	Coefficient de détente thermique	$K^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique.	$m^2.s^{-1}$
$\Gamma$	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
$\rho$	Masse volumique.	$Kg.m^{-3}$
$\theta$	Température adimensionnelle	-
$\phi$	Variable intervenant dans l'équation de transport	-

# INTRODUCTION

---

## INTRODUCTION :

Les phénomènes de transfert de chaleur est d'un intérêt considérable dans le domaine d'ingénierie. Cet intérêt se traduit par de nombreuses applications comme le dessalement d'eau de mer, la distillation, la climatisation, le séchage du bois, le refroidissement des composantes électroniques etc....

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes géométrant la convection.

Dans ce travail, nous procédons à une étude numérique du transfert de chaleur par convection associé au transfert de chaleur par conduction dans une cavité muni d'une plaque séparatrice épaisse dont la paroi verticales gauche est mouvement soit descendant (*cas I*) soit ascendant (*cas II*). L'étude a pour objet de déterminer l'influence de différents paramètres tels que le nombre de Richardson, le rapport des conductivités thermique (fluide-solide) et le sens de déplacement de la paroi verticale gauche sur la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur.

Le présent document s'organise en plusieurs chapitres présentés dans la suite :

Nous présentons dans le premier chapitre une introduction générale sur le transfert de chaleur en donnant les différentes définitions des différents modes de transfert thermique.

Le modèle physique choisi, à savoir les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le contenu du deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre, on présente la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations. Les systèmes d'équations algébriques obtenus associés aux conditions aux limites sont résolus par l'utilisation de l'algorithme TDMA.

Les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés dans le quatrième chapitre.

Enfin, on termine par une conclusion générale dans laquelle sont signalées les particularités des résultats obtenus dans cette étude et les perspectives qu'elles offrent.

# Chapitre I

## **Introduction**

### **I-Généralités et études bibliographique**

#### **I-1 Notions fondamentales sur le transfert thermique**

##### **I-1-1- Introduction**

##### **I-1-2- Les différents modes de transfert de la chaleur**

###### **I-1-2-1- Conduction**

###### **I-1-2-2- Rayonnement**

###### **I-1-2-3- Convection**

#### **I-3- Revue bibliographique**

**I- GENERALITES ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE****I-1 NOTIONS FONDAMENTALES SUR LE TRANSFERT THERMIQUE :****I-1-1- Introduction**

La science du transfert de chaleur (du transfert thermique) a pour objectif d'analyser les taux de transfert thermique ayant lieu dans un système. L'énergie transférée par transfert de chaleur n'est pas directement mesurable mais peut être appréciée par une quantité mesurable appelée température. On a constaté par expérience que lorsqu'il y a une différence de température dans un système, un flux de chaleur (flux thermique) apparaît et il est orienté de la région à haute température vers la région à basse température. Lorsqu'il y a un flux thermique dans un système, un gradient de température y est présent également. La connaissance de la distribution de la température dans un système est nécessaire dans l'étude du transfert thermique.

Les problèmes de transfert thermique jouent un grand rôle important dans les applications techniques, soit que les échanges doivent être importants et rapides, soit que, au contraire, on cherche à obtenir un excellent isolement thermique.

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur: la conduction, la convection et le rayonnement.

Le premier phénomène, la conduction, a lieu dans les solides. La convection se rencontre spécialement dans les fluides. L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu dans tous les milieux transparents aux ondes électromagnétiques. En réalité la distribution de la température, dans un milieu, est la conséquence des effets de ces trois modes de transfert thermique ; il est impossible d'isoler un mode de transfert thermique d'un autre mode. Pourtant, pour la simplicité de l'étude, on considère ces modes de transfert thermique séparément. Par exemple, on peut étudier la conduction couplée avec la convection et on néglige le rayonnement. Une grandeur souvent utilisée dans l'étude du transfert thermique est la densité du flux thermique qui représente la chaleur traversant l'unité de surface et par unité de temps.

**I-1-2-Les différents modes de transfert de la chaleur :**

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur: la conduction, la convection et le rayonnement. Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé.

Comme l'énergie thermique d'un milieu matériau correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement (molécules, atome, électrons libres ...), ceux-ci pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c'est à dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique soit par interaction directe avec les particules voisines (choc de molécule par exemple) ce qui correspond à la **conduction**. Soit par absorption ou émission de radiation électromagnétique, ce qui correspond au **rayonnement**.

Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transferts de chaleur appelé **convection**, les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

### I-1-2-1- CONDUCTION :

La conduction thermique est le phénomène de transport de la chaleur mis en jeu dans les solides ; elle est également présentée dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz.

Ce mode de transfert s'accomplit à travers deux processus différents :

- a- Le premier s'effectue par l'interaction moléculaire (choc), c.-à-d. le contact direct des molécules de haut niveau d'énergie avec celle de bas niveau. On le rencontre, dans une certaine mesure, dans tous les solides autant que l'état thermique des molécules entraîne une variation de température dans le système.
- b- Par le biais des électrons libres, il est très important dans les solides purs, la capacité de conduction des métaux est liée au nombre des électrons libres.

La loi correspondant à ce processus particulier de diffusion de la chaleur est telle que la densité  $\vec{\varphi}$  du flux de chaleur en un point est une fonction linéaire du gradient de température en ce point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (I - 1)$$

$\lambda$  : définit la conductivité thermique milieu au point considéré est un tenseur symétrique du second ordre, pour un milieu isotrope, la conductivité thermique se caractérise simplement par un scalaire unique  $\lambda$  qui dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.) ; il se mesure en  $W.m^2.K^{-1}$  et il est toujours positif.

La relation ci-dessus dit loi de FOURIER, se démontre à partir des lois de la mécanique statistique appliquées aux atomes, molécule ou électron libre du milieu considéré.

La conduction est le seul mode de transferts thermique intervenant au sein des milieux solides opaques.

### **I-1-2-2- RAYONNEMENT :**

Tous les corps émettent de l'énergie à cause de leur température et cette énergie émise s'appelle le rayonnement thermique. L'énergie rayonnée par un corps est émise dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétiques selon la théorie de Maxwell (la théorie classique des ondes électromagnétique) ou sous forme discrète de photons selon les hypothèses de Planck.

Les deux concepts ont été utilisés pour l'étude du transfert thermique par rayonnement. On peut donner des exemples de rayonnement : le rayonnement solaire, le rayonnement d'un radiateur infrarouge, d'un filament d'une lampe à incandescence, le rayonnement de l'arc électrique, etc.

La relation de base est celle de STEFAN BOLTEZMAN selon laquelle la puissance  $M^0$  du rayonnement thermique émis par unité de surface d'un corps noir (corps idéal émettant le maximum d'énergie par rayonnement thermique à une température donnée) est directement proportionnelle à la puissance quatrième de la température absolue

$$M^0 = \sigma T^4 \quad (I - 2)$$

Le rayonnement thermique comme toutes les radiations électromagnétique, n'exigeant pas de support matériel pour se propager, représente de ce fait la seule possibilité d'échange thermique entre des corps distants placés dans le vide.

### **I-1-2-3- CONVECTION :**

Les transferts thermiques interviennent évidemment quel que soit l'état du milieu considéré, solide, liquide ou gazeux, dans ces deux derniers cas, la possibilité de déformation est importante. Ce qui permet aux particules fluides d'avoir, à l'échelle microscopique, une liberté de mouvement importante et par suite de transporter une quantité de chaleur directement liée à leur capacité calorifique.

On distingue la *convection forcée* dans laquelle le mouvement du fluide est produit par une action extérieure (pompe, ventilateur,...), la *convection libre* (ou naturelle), dans laquelle ce mouvement résulte simplement de la différence de densité entre les parties chaudes et froides du fluide et la *convection mixte* qui est la combinaison de ces deux derniers modes.

Ce processus de transfert étant compliqué, on s'intéresse alors qu'à la quantité chaleur échangée entre le fluide et la paroi solide qui le limite, alors on introduit un coefficient d'échange superficiel ( $h$ ) tel que le taux du transfert thermique par convection  $\Phi$  est proportionnelle à la différence de température qui existe entre le fluide et le solide.

$$\Phi = hA\Delta T \quad (I - 3)$$

Où :

$\Phi$  : le flux de chaleur convectif ( $W$ )

$h$ : coefficient d'échange thermique par convection ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )

### I-3- REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des processus de transfert de chaleur conjugué (transfert par convection associé au transfert par conduction) dans des enceinte carrée ou rectangulaires.

**Hakan F. Oztop et Ihsan Dagtekin [1]** ont a présenté une étude numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité carrée. Les parois verticales de la cavité sont maintenues à des températures différentes et animé d'un mouvement uniforme. L'étude a été réalisé pour trois cas différents caractérisés par la direction du mouvement des parois verticales. Le paramètre directeur est le nombre de Richardson, qui caractérise le régime du transfert thermique en mode de convection mixte.

Ils ont constaté que pour  $Ri < 1$ , l'écoulement est le transfert thermique sont dominé par la convection forcé. Tandique que pour  $Ri > 1$ , la convection libre est dominante et pour  $Ri = 1$  c'est la convection mixte qui règne sur le transfert de chaleur.

Une analyse numérique est réalisée par **Ahmet Koca [2]** pour étudier un écoulement en mode de convection conjuguée dans une cavité partiellement ouverte et équipée d'une source de chaleur installée verticalement. La source de chaleur est située sur la paroi inférieure de la

cavité et elle a une largeur de la carte des circuits imprimés (CCI). Les effets du nombre de Rayleigh, de la longueur et de la position d'ouverture, du rapport de conductivité, emplacement et hauteur du CCI sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement du fluide ont été analysé et discuté en détaille.

**Hakan F. Oztop et al [3]** ont étudié la convection mixte et la conduction dans une cavité divisée par une plaque de longueur et conductivité thermique finies en deux parties. La convection mixte se produit dans la partie gauche en raison de la flottabilité et à la paroi mobile. La conduction pure se produit dans la plaque et la convection naturelle se forme dans la partie droite de la cavité du fait de la différence de température entre la plaque et la paroi droite. Ils ont constaté que le transfert de chaleur

diminue avec l'augmentation du rapport de conductivité thermique pour tous les valeurs du nombre de Richardson et lorsque la conductivité thermique de la plaque est comparable au fluide, l'efficacité du transfert de chaleur est fortement réduite.

Le transfert de chaleur par convection mixte dans une enceinte muni d'une couche poreuse saturée en fluide binaire placée au centre de la cavité à été étudié numériquement par la méthode des volumes finis par **S. Hamimid [4] et al.**

Le problème de la convection naturelle conjuguée du nanofluide  $Al_2O_3$  – eau dans une cavité carrée avec un solide concentrique avec l'utilisation du modèle biphasé non homogène de Buongiorno a été étudiées numériquement par **A.I. Alsaberya et al [5]**. Les paramètres gouvernants de cette étude sont la fraction volumique des nanoparticules , le nombre de Rayleigh et la conductivité thermique du bloc solide.

**Kamil Kahveci [6]** a examiné une étude numérique la convection naturelle laminaire dans une enceinte divisée par une cloison d'épaisseur et de conductivité finies. L'enceinte est chauffée par un flux thermique uniforme sur une paroi verticale et refroidi à une température constante sur l'autre paroi. Les résultats montrent que la présence d'une cloison verticale a un effet considérable sur la circulation, l'intensité et, par conséquent, les caractéristiques de transfert de chaleur à travers l'enceinte.



# Chapitre II

## II- Formulation mathématique du problème

### II-1 Présentation du problème

#### II-1-1-Modèle physique

#### II -1-2-Hypothèse simplificatrices

### II-2- Equations générales de transport

#### II -2-1- Equations gouvernantes sous forme dimensionnelle

#### II -2-2-Equations gouvernantes sous forme adimensionnelle

### II -3- Les conditions aux limite

### II -4- Les grandeurs caractéristiques

#### II -4-1- Le nombre nusselt

#### II -4-2- Fonction du courant

## II- FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

### II-1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME :

#### II-1-1-Modèle physique :

Le modèle physique considéré est schématisé sur la *figure (II -1)*. Il s'agit d'une cavité rectangulaire bidimensionnelle de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , équipée d'une plaque séparatrice d'épaisseur et de conductivité thermique finies. La paroi gauche chauffée à une température  $T_c$  est en mouvement en bas (cas I) ou en haut (cas II). La paroi gauche est maintenue à une température  $T_f$  tel que  $T_c > T_f$ , tandis que les deux parois horizontales sont isolées thermiquement.

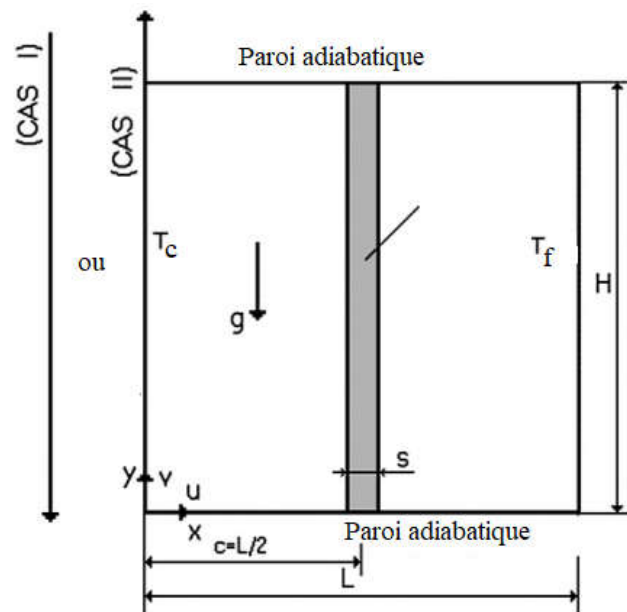


Figure (II-1) Modèle physique

#### II -1-2-Hypothèse simplificatrices :

Ces hypothèses sont largement utilisées pour l'étude des phénomènes de convection mixte, pour but de simplifier la formulation mathématique des équations de conservation : masse, quantité de mouvement et de l'énergie; ces dernières sont établies sur la base des hypothèses suivantes :

- 1- Régime d'écoulement laminaire.
- 2- La dissipation visqueuse est négligeable.
- 3- L'écoulement est supposé bidimensionnel.

4- Fluide Newtonien et incompressible.

5- Le régime est permanent ;

6- Le transfert de chaleur par rayonnement et les effets de Duffour et Soret sont négligeables

7- l'approximation de boussinesq est adopté pour l'étude de la convection mixte (les propriétés du fluide restent constantes, excepté la densité qui est variable dans le terme de gravité ( $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$ )).

## II-2- EQUATIONS GENERALES DE TRANSPORT :

Le système d'équation gouvernant les phénomènes de la convection mixte est régi par les équations générales de conservation de la masse, de quantités de mouvement et de

### Equation de continuité :

Elle déduit le principe de la conservation de masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II-1})$$

( $j = 1, 2, 3$ ).

- **Equation de quantité de mouvement :**

D'après la deuxième loi fondamentale de la dynamique, l'équation de conservation de quantité de mouvement d'un fluide incompressible et visqueuse s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}}_a + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}}_b = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_c + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right]}_d + \underbrace{F_i}_e \quad (\text{II-2})$$

( $i, j = 1, 2, 3$ )

a : taux de la quantité de mouvement.

b : taux de transport de quantité de mouvement

c : Représente les forces due à la pression.

d : Représente les forces de viscosité.

$e$  : Représente les forces du volume.

- **Equation de l'énergie :**

Elle est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation pour un fluide Newtonien incompressible, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \Phi \quad (\text{II-3})$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

$\alpha$ : Diffusivité thermique.

$k$  : Conductivité thermique.

$C_p$  : Chaleur spécifique à pression constante.

$\Phi$  : La dissipation visqueuse.

### II-2-1- Equations gouvernantes sous forme dimensionnelle :

D'après des hypothèses simplification nous obtenons le système d'équations suivant :

#### .Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-5})$$

#### . Equation de quantité de mouvement :

suivant  $x$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-6})$$

suivant  $y$  :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T - T_f) \quad (\text{II-7})$$

**Equation d'énergie :**

*-Milieu fluide*

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-8})$$

*-Milieu solide (plaque séparatrice)*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II-9})$$

**II-2-2-Equations gouvernantes sous forme adimensionnelle :**

Les paramètres non dimensionnels choisis sont :

$$X = \frac{x}{H}$$

$$Y = \frac{y}{H}$$

$$U = \frac{u}{V_p}$$

$$V = \frac{v}{V_p} \quad (\text{II-10})$$

$$P = \frac{p}{\rho V_p^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$$

En introduisant les variables adimensionnelles précédentes dans les équations différentielles. On obtient les équations adimensionnelles suivantes :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \text{ (II-11)}$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

Suivant X :

$$\frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial VU}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial X} \text{ (II-12)}$$

Suivant Y :

$$\frac{\partial UV}{\partial X} + \frac{\partial VV}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{Re^2} \theta \text{ (II-13)}$$

- **Equation de conservation de l'énergie :**

-Milieu fluide

$$\frac{\partial U\theta}{\partial X} + \frac{\partial V\theta}{\partial Y} = \frac{1}{RePr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \text{ (II-14)}$$

-Milieu solide (plaque séparatrice)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = 0 \text{ (II-15)}$$

### II-3- LES CONDITIONS AUX LIMITE :

La résolution de ces équations différentielles aux dérivées partielles nécessite des conditions aux limites.

Les conditions aux limites illustrées à la Figure (II-1) sont les suivantes.

$$Ax=0 \quad u=0, \quad v=\pm V_p \quad \text{et} \quad T=T_c$$

$$A \quad x=L \quad u=v=0 \quad \text{et} \quad T=T_f$$

Les limites horizontales sont;

$$\text{A } y=0. \quad u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$$\text{A } y=H \quad u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

A l'interface solide-fluide

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_s = K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_f$$

Lorsque la paroi gauche se déplace vers le bas, sa vitesse sera soit négative. Tandis que si son déplacement est vers le haut sa vitesse sera positive.

Les conditions aux limites adimensionnelles s'écrivent :

$$\text{A } X=0 \quad U = V = \pm 1 \quad \text{et } \theta = 1$$

$$\text{A } X=L/H \quad U = V = 0 \quad \text{et } \theta = 0$$

Les limites horizontales sont ;

$$\text{A } Y=0. \quad U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$$

$$\text{A } Y=1. \quad U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$$

A l'interface solide-fluide

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_s = K \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_f$$

## II-4- LES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

### II-4-1- Le nombre Nusselt :

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser les transferts thermiques entre un fluide et une paroi.

$$Nu = \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_p \quad (\text{II-16})$$

**II-4-2- Fonction du courant :**

La fonction du courant est calculée à partir de

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ ou } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{II-17})$$



# Chapitre III

## **III. Méthode de résolution**

### **III.1 Principe de la méthode des volumes finis**

### **III.2 Forme générale des équations de conservation**

### **III.3 Méthode de discrétisation**

#### **III.3.1 Maillage et volume de contrôle**

#### **III.3.2 Discrétisation des équations de conservation**

#### **III.3.3 Règles principales de la méthode**

#### **III.3.4 Les différents schémas de discrétisation**

#### **III.3.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires**

#### **III.3.6 Couplage vitesse- pression**

#### **III.3.7 Séquence des opérations de l'algorithme simple**

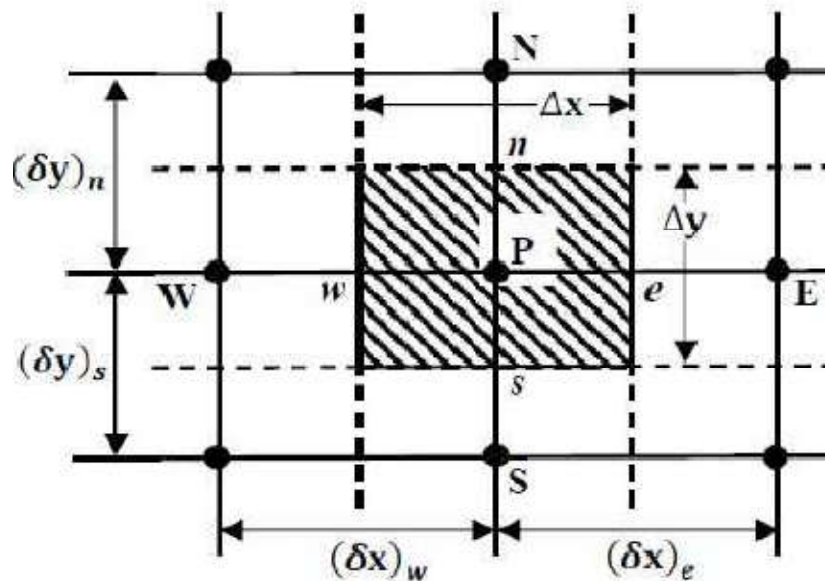
## **III. 4 Structure générale du programme**

### III. Méthode de résolution :

Vu la complication de la résolution analytique des équations de conservation mises en jeu, plusieurs méthodes numériques de résolution sont utilisées. Parmi ces méthodes, la méthode des volumes finis, décrite par Patankar en 1982, qui permet de transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques.

#### III.1 Principe de la méthode des volumes finis

Dans la simulation par la méthode des volumes finis, le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles, traduisant le phénomène physique, sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers contenant un nœud dit: "nœud principal". Pour un nœud principal ( P ), les points E et W (E: Est, W: West) sont des voisins dans la direction X, tandis que N et S (N: Nord, S: Sud) sont ceux dans la direction Y. Le volume de contrôle entourant ( P ) est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points (e) et (w) dans la direction X, (n) et (s) dans la direction Y (voir figure III-1).



Figure(III.1) : volume contrôle bidimensionnelle

#### III.2 Forme générale des équations de conservation

Toutes les équations de transport résolues par la méthode des volumes finis peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cccc}
 & & \frac{\partial}{\partial t}(\rho r \phi) & + \text{div}(\rho r U \phi) = \text{div}(r \Gamma \text{grad} \phi) + r S & \text{(III-1)} \\
 \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & 
 \end{array}$$

Avec :

$r = 1$  pour des équations en coordonnées cartésiennes.

$\phi$ : est une variable dépendante ( $\phi = U, V, T, \dots$ ).

$\Gamma$  : Coefficient de diffusion.

I : terme instationnaire.

II : terme convectif.

III : terme diffusion.

IV : terme source.

On peut trouver les équations gouvernantes à partir de l'équation (III-1), en remplaçant les paramètres  $\phi$ ,  $\Gamma$  et  $S$  par leurs valeurs, comme le montre le tableau (III-1).

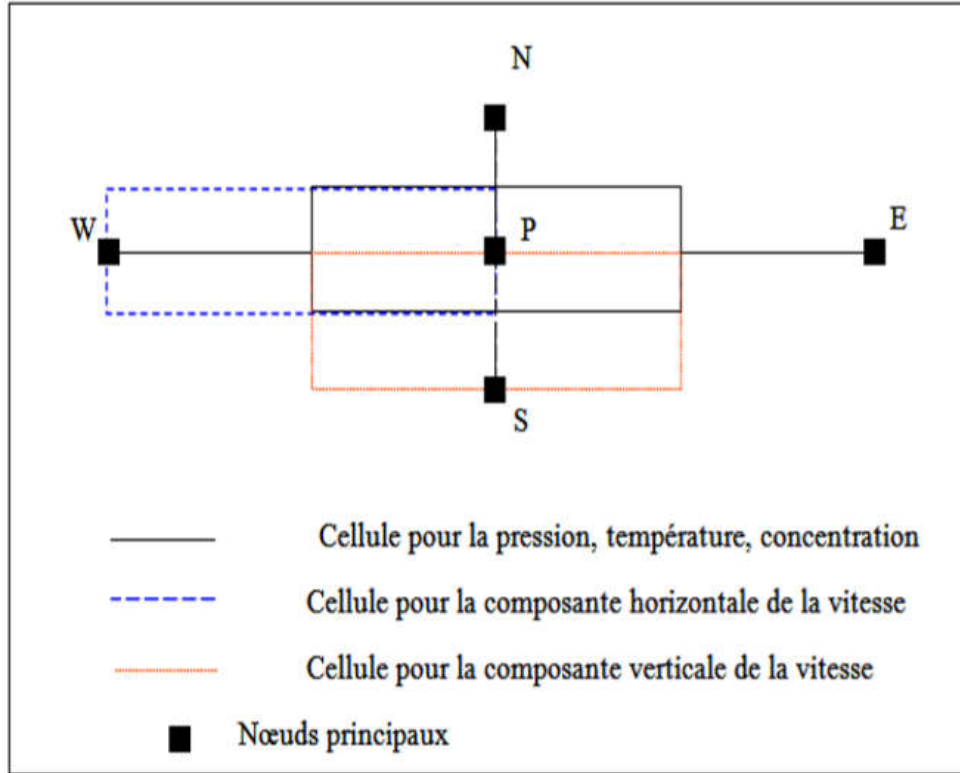
Equation	Variable $\phi$	Coefficient de Diffusion $\Gamma$	Terme source $S$
Continuité	$1$	$0$	$0$
Quantité de mouvement selon X	$U$	$\frac{2}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4Gr}{Re^2} \theta$
Quantité de mouvement selon Y	$V$	$\frac{2}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial y}$
Energie	$\theta$	$\frac{2}{Pr \cdot Re}$	$0$

**Tableau (III.1)** Valeurs de  $\phi$ ,  $S$  et  $\Gamma$  correspondantes aux équations gouvernantes

### III.3 Méthode de discrétisation

#### III.3.1 Maillage et volume de contrôle

Pour le calcul numérique, le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes élémentaires, appelés volumes de contrôle, entourant un nœud relatif aux différents paramètres à calculer.



Figure(III.2) Représentation du maillage en volumes finis.

**III.3.2 Discrétisation des équations de conservation**

L'équation discrétisée est une relation algébrique qui lie les valeurs de la variable dépendante à chaque nœud, elle est obtenue par l'intégration de l'équation différentielle gouvernant le mouvement.

L'intégration de l'équation (III-1) sur un volume de contrôle relatif à la variable  $\phi$  dans un système de coordonnées cartésiennes donne :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial u\phi}{\partial x} dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial v\phi}{\partial y} dx dy = \int_w^e \int_s^n \Gamma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n S dx dy \tag{III-2}$$

$$(u\phi)_e \Delta y - (u\phi)_w \Delta y + (v\phi)_n \Delta x - (v\phi)_s \Delta x = \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \Delta y + \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y \tag{III-3}$$

Où :

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P)$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P)$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P)$$

En remplaçant dans(III-3)

$$\frac{1}{2}u_e(\phi_E + \phi_P)\Delta y - \frac{1}{2}u_w(\phi_W + \phi_P)\Delta y + \frac{1}{2}v_n(\phi_N + \phi_P)\Delta x - \frac{1}{2}v_s(\phi_S + \phi_P)\Delta x =$$

$$\frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} \Delta y - \frac{\Gamma_w(\phi_W - \phi_P)}{(\delta x)_e} \Delta y + \frac{\Gamma_n(\phi_N - \phi_P)}{(\delta y)_e} \Delta x - \frac{\Gamma_s(\phi_S - \phi_P)}{(\delta y)_e} \Delta x + \bar{S}\Delta x\Delta y \text{ (III-4)}$$

Avec :

$$\bar{S} = S_c + S_p\phi_P \quad \text{(III-5)}$$

L'équation (III-4) peut s'écrire sous la forme :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_c \text{ (III-6)}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = -\frac{1}{2}F_e + D_e \\ a_W = \frac{1}{2}F_w + D_w \\ a_N = -\frac{1}{2}F_n + D_n \\ a_S = \frac{1}{2}F_s + D_s \\ a_P = -\frac{1}{2}F_e + \frac{1}{2}F_w - \frac{1}{2}F_n + \frac{1}{2}F_s + D_e + D_w + D_n + D_s + S_p \end{array} \right. \quad \text{(III-7)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + S_P \quad (\text{III-8})$$

Avec :

$$S_P = F_e - F_w + F_n - F_s \quad (\text{III-9})$$

Les débits massiques et les conductances sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_e = u_e \Delta y \quad , \quad D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{\delta x_e} \\ F_w = u_w \Delta y \quad , \quad D_w = \Gamma_w \frac{\Delta y}{\delta x_w} \\ F_n = u_n \Delta x \quad , \quad D_n = \Gamma_n \frac{\Delta x}{\delta y_n} \\ F_s = u_s \Delta x \quad , \quad D_s = \Gamma_s \frac{\Delta x}{\delta y_s} \end{array} \right. (\text{III-10})$$

### III.3.3 Règles principales de la méthode

La Méthode des volumes finis est basée sur quatre règles :

**Règle 1** : Consistance des faces du volume de contrôle. Lorsqu'on considère une face commune à deux volumes de contrôle, le flux traversant celle ci doit être représenté par la même expression dans l'équation de discrétisation.

**Règle 2** : Positivité des coefficients.

**Règle 3** : Lorsque le terme source est linéaire sous la forme :

$$S = Su + Sp\phi_p, \quad Sp \text{ doit être toujours inférieur ou égal à zéro.}$$

**Règle 4** : lorsque l'équation de continuité est satisfaite, le coefficient central doit être égal à la somme des coefficients voisins

### III.3.4 Les différents schémas de discrétisation

#### 1- Le schéma aux différences centrées

Nous introduisons maintenant quelques schémas de discrétisation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante  $\phi$  aux interfaces du volume de contrôle, Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (Central DifferenceScheme) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire mais qui reste, cependant, limite pour des valeurs de  $|Pe| = |F/D| < 2$ .

**2- Le schéma Upwind**

L'une des principaux inconvénients du schéma aux différences centrées est son incapacité à identifier la direction de l'écoulement. La valeur de la propriété  $\phi$  sur une face ouest du volume de contrôle est toujours influencée par l'ensemble  $\phi_P$  et  $\phi_W$  dans le schéma aux différences centrées. Dans un écoulement fortement convectif d'ouest en est, le traitement ci-dessus ne convient pas car la face ouest de la cellule devrait recevoir une influence beaucoup plus forte du nœud W que du nœud P.

**3- Le schéma hybride**

Le schéma hybride est une combinaison améliorée entre le schéma centré et le schéma "upwind". Il est identique au schéma centré pour  $-2 \leq Pe \leq 2$  et identique au schéma "upwind" pour  $|Pe| < 2$ ., mais avec  $D=0c$ 'est à dire qu'on ne surestime plus la diffusion.

**4- Le schéma de la loi de puissance**

Le schéma de la loi de puissance est une approximation de la solution exacte et donne de meilleurs résultats.

Le calcul des coefficients de l'équation algébrique (III-4) par différents schémas est résumé dans le tableau (III-2)

Schéma	$a_W$	$a_E$
Centré	$D_W + F_W/2$	$D_e - F_e/2$
Upwind	$D_W + \max(F_W, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$
Hybride	$\max[F_W, (D_W + F_W/2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$
Loi de puissance	$D_W \cdot \max[0, (1 - 0.1 Pe_W ^5)]$ $+ \max(F_W, 0)$	$D_e \cdot \max[0, (1 - 0.1 Pe_e ^5)]$ $+ \max(-F_e, 0)$
Schéma	$a_S$	$a_N$
Centré	$D_S + F_S/2$	$D_n - F_n/2$
Upwind	$D_S + \max(F_S, 0)$	$D_n + \max(0, -F_n)$
Hybride	$\max[F_S, (D_S + F_S/2), 0]$	$\max[-F_n, (D_n - F_n/2), 0]$
Loi de puissance	$D_S \cdot \max[0, (1 - 0.1 Pe_S ^5)]$ $+ \max(F_S, 0)$	$D_n \cdot \max[0, (1 - 0.1 Pe_n ^5)]$ $+ \max(-F_n, 0)$

**Tableau III-2** Les coefficients  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  et  $a_N$  pour différents schémas.

**III.3.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires**

L'équation (III-6) s'écrit sous forme indicelle comme suit :

$$a_P \Phi_{i,j} - a_E \Phi_{i+1,j} - a_W \Phi_{i-1,j} - a_N \Phi_{i,j+1} - a_S \Phi_{i,j-1} = S_{c_{i,j}} \quad (III-11)$$

L'algorithme TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) permet de calculer la solution d'un système linéaire lorsque la matrice est linéaire. C'est notre cas et la solution se fait colonne par colonne.

Pour chaque  $i$  (colonne) le système d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_P & -a_N & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_S a_P & -a_N & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a_S a_P & -a_N & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_S a_P & -a_N & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -a_S a_P & -a_N & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_S a_P & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{i,2} \\ \Phi_{i,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{i,nj-2} \\ \Phi_{i,nj-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_E \cdot \Phi_{i+1,2} + a_W \cdot \Phi_{i-1,2} + a_S \cdot \Phi_{i,1} + S_{c_{i,2}} \\ a_E \cdot \Phi_{i+1,3} + a_W \cdot \Phi_{i-1,3} + S_{c_{i,3}} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_E \cdot \Phi_{i+1,nj-2} + a_W \cdot \Phi_{i-1,nj-2} + S_{c_{i,nj-2}} \\ a_E \cdot \Phi_{i+1,nj-1} + a_W \cdot \Phi_{i-1,nj-1} + a_N \cdot \Phi_{i,nj} + S_{c_{i,nj-2}} \end{bmatrix} \quad (III-12)$$

Pour  $\Phi = U$  ,  $3 \leq i \leq ni - 1$  et  $2 \leq j \leq nj - 1$

Pour  $\Phi = V$  ,  $2 \leq i \leq ni - 1$  et  $3 \leq j \leq nj - 1$



Pour  $\emptyset = T, P$ ,  $2 \leq i \leq ni - 1$  et  $2 \leq j \leq nj - 1$

### III.3.6 Couplage vitesse- pression

Le couplage entre les équations de quantité mouvement et l'équation de continuité, pose un problème du fait que le champ de vitesse calculée par les équations de quantité de mouvementne satisfait plus l'équation de continuité. Pour dépasser ce problème, Patankar, 1980 a élaboréun algorithme appelé SIMPLE (Semi-ImplicitMethod for Pressure-Linked Equations). Cet algorithme est une procédure itérative pour calculer la pression en utilisant le maillage déplacé. La procédure itérative commence par l'estimation de la pression. Soit  $p^*$  le champ de pression estimé.

Les équation algébriques de conservation de quantité de mouvement pour les deux composantes de la vitesse peuvent s'écrire :

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b + (p_w - p_p) \Delta y \quad (III-13)$$

$$a_p v_p = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b + (p_s - p_p) \Delta y \quad (III-14)$$

Les équations (III-13) et (III-14) sont résolues pour obtenir le champ de vitesse  $u^*$  et  $v^*$  associé à au champ de pression estimé  $p^*$

$$a_p u_p^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_w^* - p_p^*) \Delta y \quad (III-15)$$

$$a_p v_p^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_s^* - p_p^*) \Delta y \quad (III-16)$$

Soit  $p'$  la correction de pression, les composantes des corrections des vitesses  $u$  et  $v$  sont  $u'$  et  $v'$ . Ainsi, les champs corrigés de pression et de vitesse peuvent s'écrire comme suit:

$$p = p' + p^* \quad u = u' + u^* \quad v = v' + v^* \quad (III-17)$$

La soustraction des équations (III.15) et (III.16) des équations (III.13) et (III.14) respectivement, donne :

$$a_p (u_p - u_p^*) = \sum_{nb} a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_w - p_w^*) - (p_p - p_p^*)] \Delta y \quad (III.18)$$

$$a_p (v_p - v_p^*) = \sum_{nb} a_{nb} (v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_s - p_s^*) - (p_p - p_p^*)] \Delta x \quad (III.19)$$

En utilisant les formules de correction (III-17) les équations (III.18) et (III.19) peuvent être réécrites ainsi :

$$a_p u_p' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + (p_W' - p_p) \Delta y \text{ (III.20)}$$

$$a_p v_p' = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}' + (p_s' - p_p) \Delta x \text{ (III.21)}$$

À ce moment une approximation est introduite: les termes  $\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}'$  et  $\sum_{nb} a_{nb} v_{nb}'$  sont négligés pour simplifier les équations (III-19) et (III-20). L'omission de ces termes est la principale approximation de l'algorithme SIMPLE. On obtient :

$$\begin{cases} u_{i,j} = u_{i,j}^* + (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}) \frac{\Delta y}{a_{i,j}} \\ v_{i,j} = v_{i,j}^* + (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}) \frac{\Delta x}{a_{i,j}} \\ u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + (p'_{i+1,j} - p'_{i,j}) \frac{\Delta y}{a_{i+1,j}} \\ v_{i,j+1} = v_{i,j+1}^* + (p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) \frac{\Delta x}{a_{i,j+1}} \end{cases} \quad \text{(III-22)}$$

Jusqu'à maintenant on a considéré les équations de conservation de la quantité de mouvement, mais le champ de vitesse, en même temps doit satisfaire l'équation de continuité . L'équation de continuité discrétisée, obtenue par l'intégration de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

sur le volume de contrôle associé donne :

$$(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \Delta y + (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \Delta x = 0 \quad \text{(III-23)}$$

La substitution des équations corrigées (III-22) dans l'équation de continuité discrétisée (III-23) donne :

$$\begin{aligned} & \left( u_{i+1,j}^* - (P'_{i+1,j} - P'_{i,j}) \frac{\Delta y}{a_{i+1,j}} \right) \Delta y + \left( u_{i,j}^* - (P'_{i,j} - P'_{i-1,j}) \frac{\Delta y}{a_{i,j}} \right) \Delta y + \\ & \left( v_{i,j+1}^* - (P'_{i,j+1} - P'_{i,j}) \frac{\Delta x}{a_{i,j+1}} \right) \Delta x + \left( v_{i,j}^* - (P'_{i,j} - P'_{i,j-1}) \frac{\Delta x}{a_{i,j}} \right) \Delta x = 0 \end{aligned}$$

Avec l'arrangement on obtient :

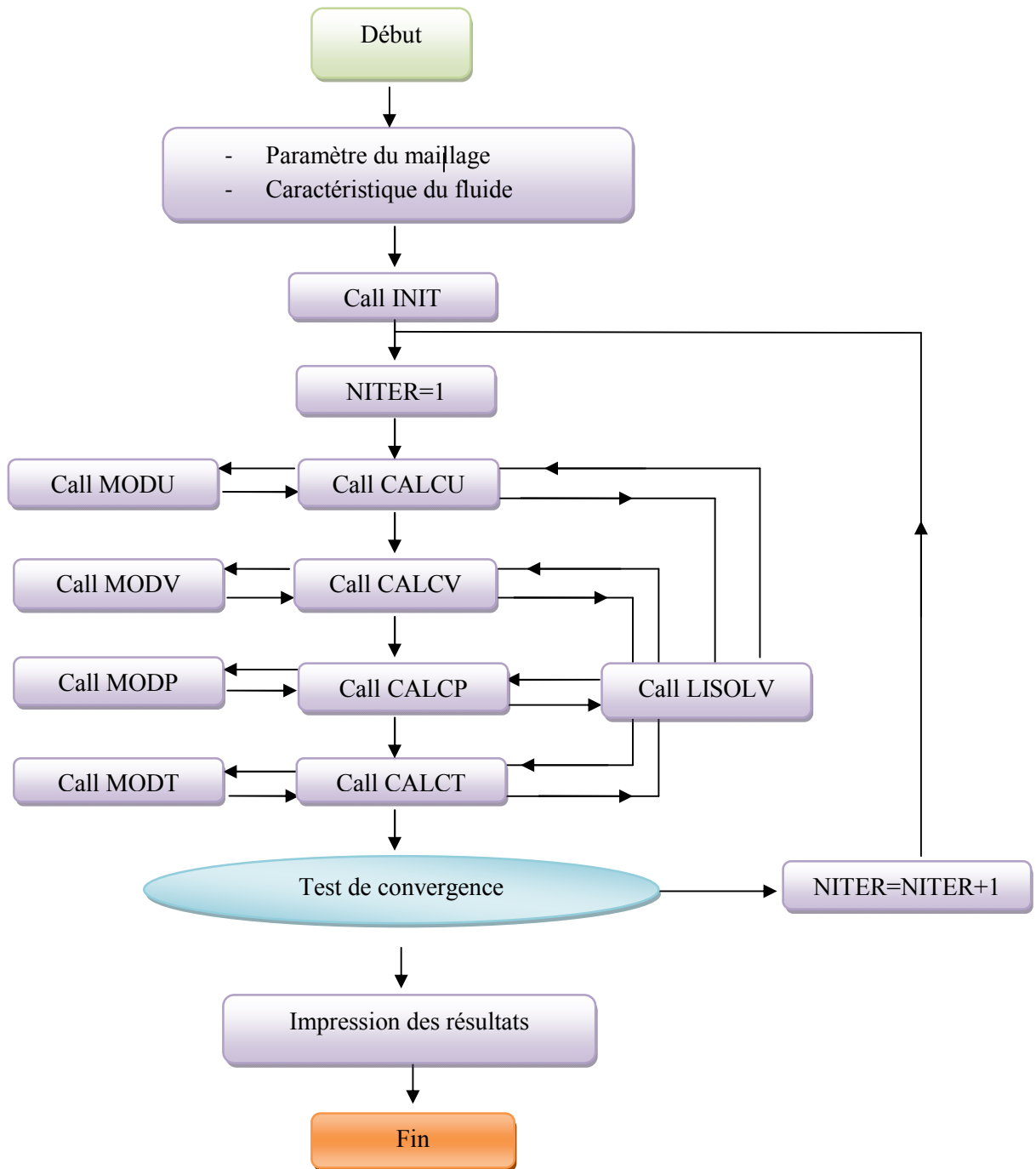
$$a_{i,j}p'_{i,j} = a_{i+1,j}p^*_{i+1,j} + a_{i-1,j}p^*_{i-1,j} + a_{i,j+1}p^*_{i,j+1} + a_{i,j-1}p^*_{i,j-1} + b'_{i,j}$$

### III.3.7 Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLE :

Après avoir présenté la méthode de discrétisation des différentes équations et le principe de base de l'algorithme SIMPLE, on peut résumer l'ensemble des séquences qui interviennent dans la résolution des équations mentionnées précédemment comme suit :

- 1- Estimer le champ de pression ;
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$  ;
- 3- Résoudre l'équation en  $p^*$  et cela en utilisant  $u^*$  et  $v^*$  ;
- 4- Calculer le champ de pression  $p$  et le champ des vitesses  $u$  et  $v$  à partir de leurs expressions de correction ;
- 5- Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres variables dépendantes  $\emptyset$  (température, concentration... etc.) ;
- 6- Traiter la pression  $P$  comme un nouveau estimé  $P'$ , et revenir à l'étape 2 pour répéter la même procédure jusqu'à convergence.

III.4 Structure générale du programme :



**INIT** : Détermine les paramètres géométriques intervenant dans le calcul pour chaque noeud du maillage et introduit les champs initiales de chaque variables.

**CALCU** : Calcule les coefficients de l'équation de quantité de mouvement en U ainsi que le terme source.

**CALCV** : Calcule les coefficients de l'équation de quantité de mouvement en V.

**CALCP** : Calcule les coefficients de l'équation des corrections de pression.

**CALCT** : Calcule les coefficients de l'équation de conservation de l'énergie.

**MODU** : Donne les conditions aux limites pour la vitesse U.

**MODV** : Donne les conditions aux limites pour la vitesse V.

**MODP** : Donne les conditions aux limites pour la pression.

**MODT** : Donne les conditions aux limites pour la température.

**LISOLV** : Résoudre les systèmes tridiagonales TDMA.

**PRINT** : S'occupe de l'impression des résultats dans un fichier.

# Chapitre IV

## **IV- Résultats et discussions**

### **IV-1- Introduction**

### **IV-2- Validation De Code**

### **IV-3- Résultats Et Discussions**

---

## IV- RESULTAS ET DISCUSSIONS :

### IV-1- Introduction

Après avoir écrit le programme de calcul en langage **FORTRAN**, les principaux résultats obtenus reflètent les effets de la plaque séparatrice sur la structure de l'écoulement et sur les échanges thermiques traduits par les contours des lignes de courant et les isothermes ainsi que la variation du nombre de Nusselt le long des parois gauche et droite de la cavité. Le traçage des contours et des courbes a été effectué en utilisant le logiciel de visualisation **Tecplot 11.5**.

### IV-2- Validation de code

Pour valider le code calcul écrit en langage **FORTRAN**, une comparaison a été obtenue entre les résultats du présent code de calcul et ceux trouvés dans la littérature [...] pour le cas d'une cavité dont les parois horizontales sont maintenues adiabatique tandis que la paroi verticale gauche est en mouvement en haut avec une température  $T_c$  et la paroi droite est en mouvement vers le bas et maintenue à une température  $T_h$  ( $T_h > T_f$ ).

La comparaison des résultats des contours qui présentent les lignes de courant et les isothermes (*Figure IV-1*) obtenue à partir du programme élaboré avec celles des articles publiés montre bien la validité du programme. Cette comparaison montre qu'il y a un accord qualitatif entre les résultats qu'on a obtenus et ceux d'Oztop [1], ce qui nous réconforte dans le choix de nos modèles mathématique et numérique.

Les résultats sont présentés sous forme de ligne de courant et isothermes pour  $Ri = 0.1$  et  $Ri = 10$  successivement. On constate une bonne concordance entre les deux résultats.

### IV-3- Résultats et discussions

Les calculs numériques ont été effectués pour un écoulement laminaire d'un fluide newtonien et incompressible dans une cavité équipée d'une plaque séparatrice d'épaisseur  $0.1 \times H$  et une paroi gauche mobile en bas (*cas I*) et en haut (*cas II*) avec un nombre de Grashof  $Gr = 10^5$  et un nombre de Richardson  $0.1 < Ri < 10$ .

#### Cas I :

Les principales caractéristiques de l'écoulement et de la température dans l'enceinte pour le cas I sont représentés sur les Figures (IV-2), (IV-3) et (IV-4) pour différentes valeurs du nombre de Richardson présentées par des lignes de courant (à gauche) et des isothermes (à droite).

Le problème considéré est intéressant et complexe, on constate que la convection mixte (dans la partie gauche de la cavité), la conduction (au niveau de la plaque séparatrice) et la convection naturelle (dans la partie droite de la cavité) se produisent dans le même système thermofluide. Dans ce cas, le fluide est en mouvement, en

raison de l'entraînement de la paroi, tourne dans sens antihoraire. Il heurte également sur la partition et provoque la formation de la deuxième cellule qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. La deuxième cellule se situe en haut à droite et au coin de la déviation gauche pour une valeur faible du nombre de Richardson  $Ri = 0,1$ . La recirculation du fluide dans cette zone est principalement générée par le déplacement de la paroi gauche. Dans un tel cas, la convection forcée joue un rôle majeur dans formation de ce modèle d'écoulement. La recirculation dans la partie droite de la cavité est due à la différence de température entre la plaque et la paroi froide, résultant en une faible convection naturelle. Le fluide qui est proche de la paroi chaud (côté droit de la plaque) a une densité plus faible, donc il se déplace vers le haut tandis que le fluide relativement lourd qui est proche du froid (paroi droite de la cavité) se déplace vers le bas. Ainsi, le fluide à l'intérieur l'enceinte est chauffée. On peut observer que l'écoulement du fluide dans la partie droite de la cavité est unicellulaire pour toutes les valeurs du nombre Richardson et tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Avec l'augmentation du nombre de Richardson, la convection forcée s'affaiblit et le rôle de la convection naturelle dans la formation du modèle d'écoulement devient plus grand, ce qui rend la deuxième cellule plus grande et son centre se déplace vers le centre de la partie gauche .

L'effet de la convection forcée et la convection naturelle favorise un transfert de chaleur naturel plus fort dans la partie droite de la cavité et les isothermes deviennent presque des lignes parallèles aux parois verticales pour une valeur du nombre de Richardson plus élevée.

Pour une valeur  $K$  plus élevée, en raison de la résistance thermique, il y a plusieurs lignes isothermes à travers plaque entraînant un transfert de chaleur plus faible.

## Cas II

*Figures (IV-5), (IV-6) et (IV-7)* montrent les lignes de courant (à gauche) et les isothermes (à droite) pour le *cas II* à différents valeurs du nombre de Richardson et rapport des conductivités thermiques. On voit clairement que le sens de rotation du fluide est le même que celui de la convection naturelle, le modèle d'écoulement n'est presque pas affectée par le sens du déplacement de la paroi mais le centre de la cellule de recirculation est fortement affectée par la vitesse ascendante. Le fluide entraîné par la paroi mobile heurte à la paroi supérieure et il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Une deuxième cellule extrêmement faible s'est formée en bas à droite de la partie gauche de la cavité. Cette deuxième cellule disparaît avec l'augmentation du nombre de Richardson. Une cellule de recirculation se forme à la partie droite du fait de la convection naturelle de sens horaire de rotation.

Les isothermes montrent que la température en haut à gauche de la partie gauche est presque uniforme. Pour le cas du rapport de conductivité thermique élevé, la région uniforme est étendue du fait du faible transfert thermique à cause de la résistance thermique élevée.



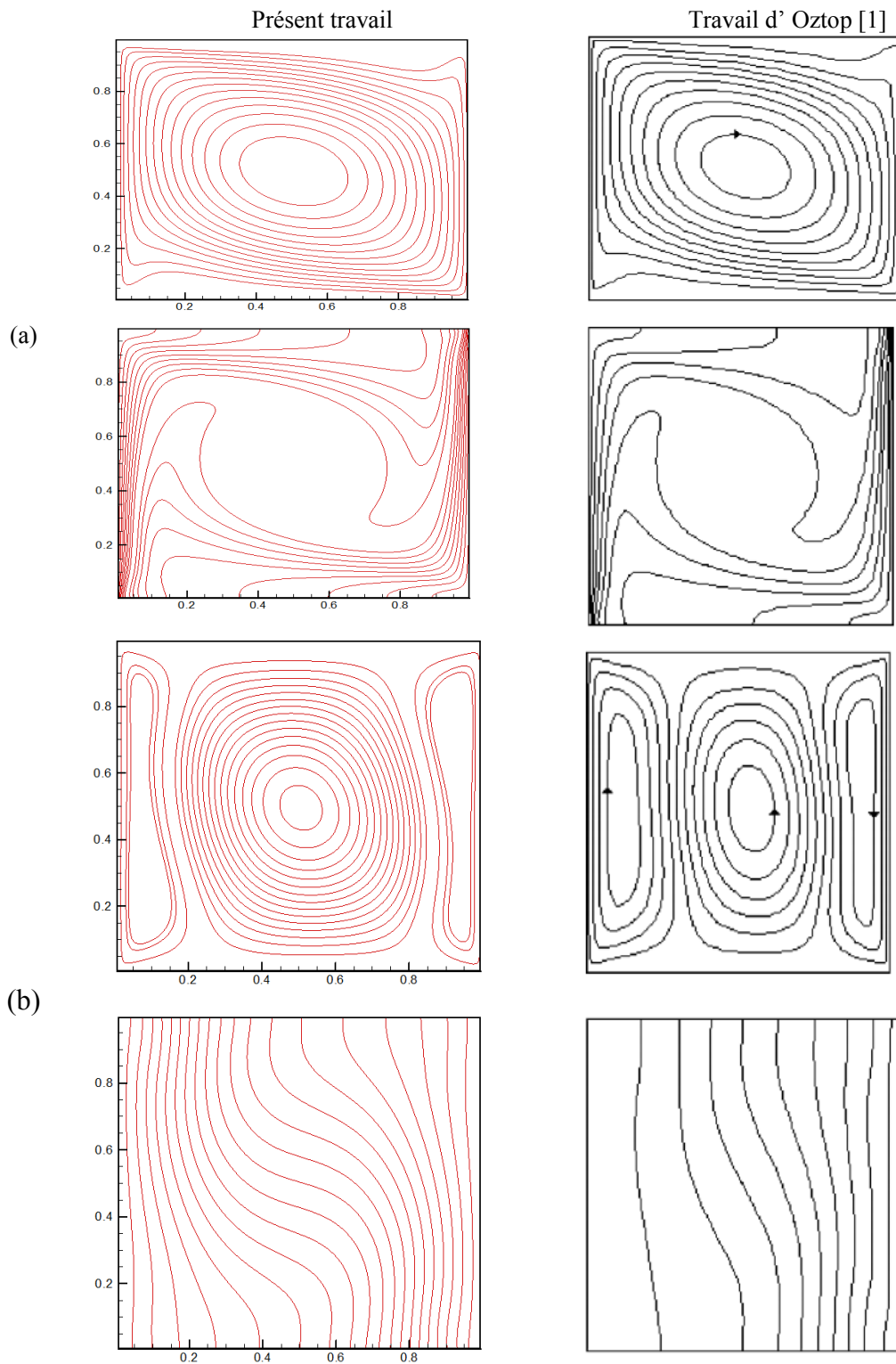
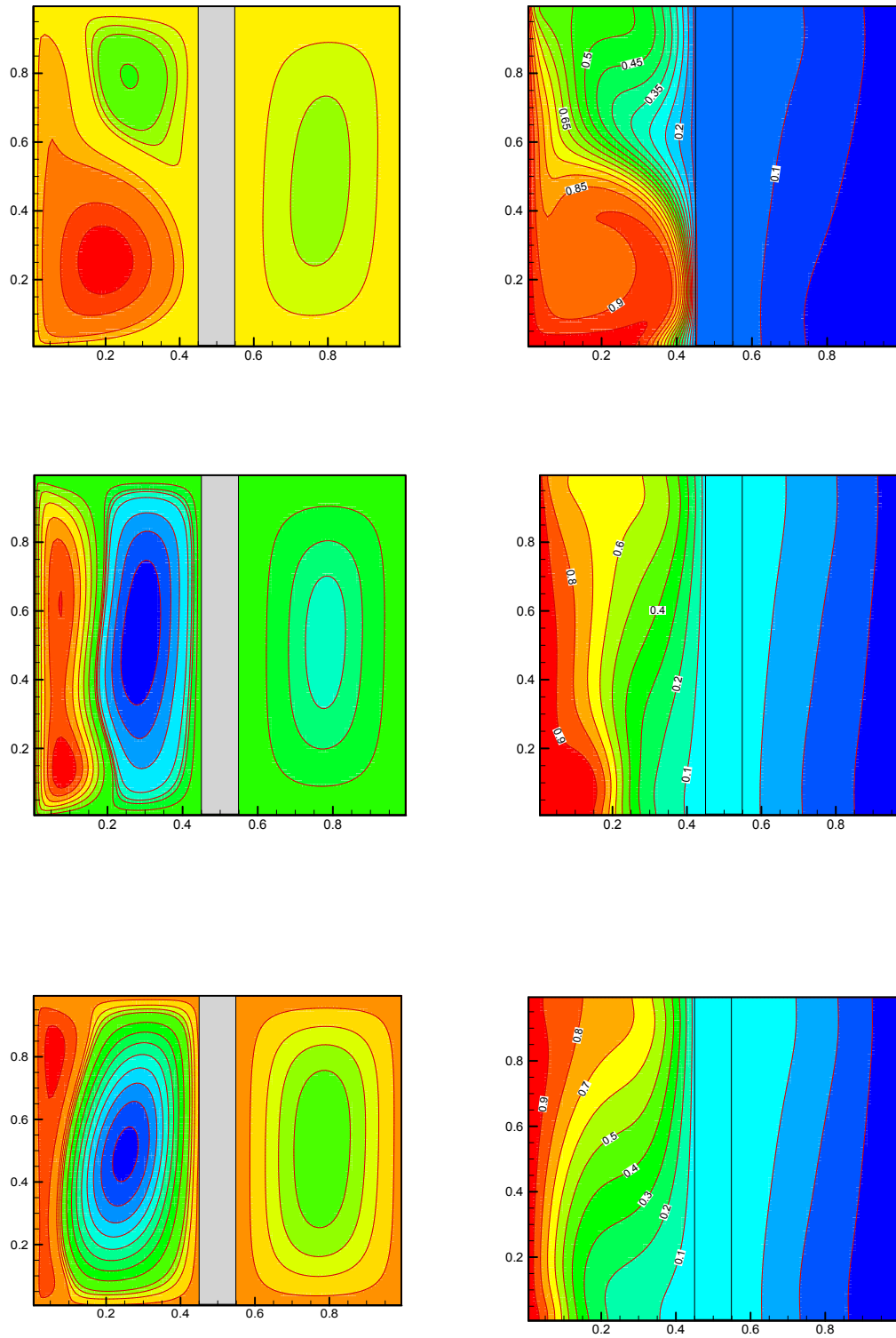
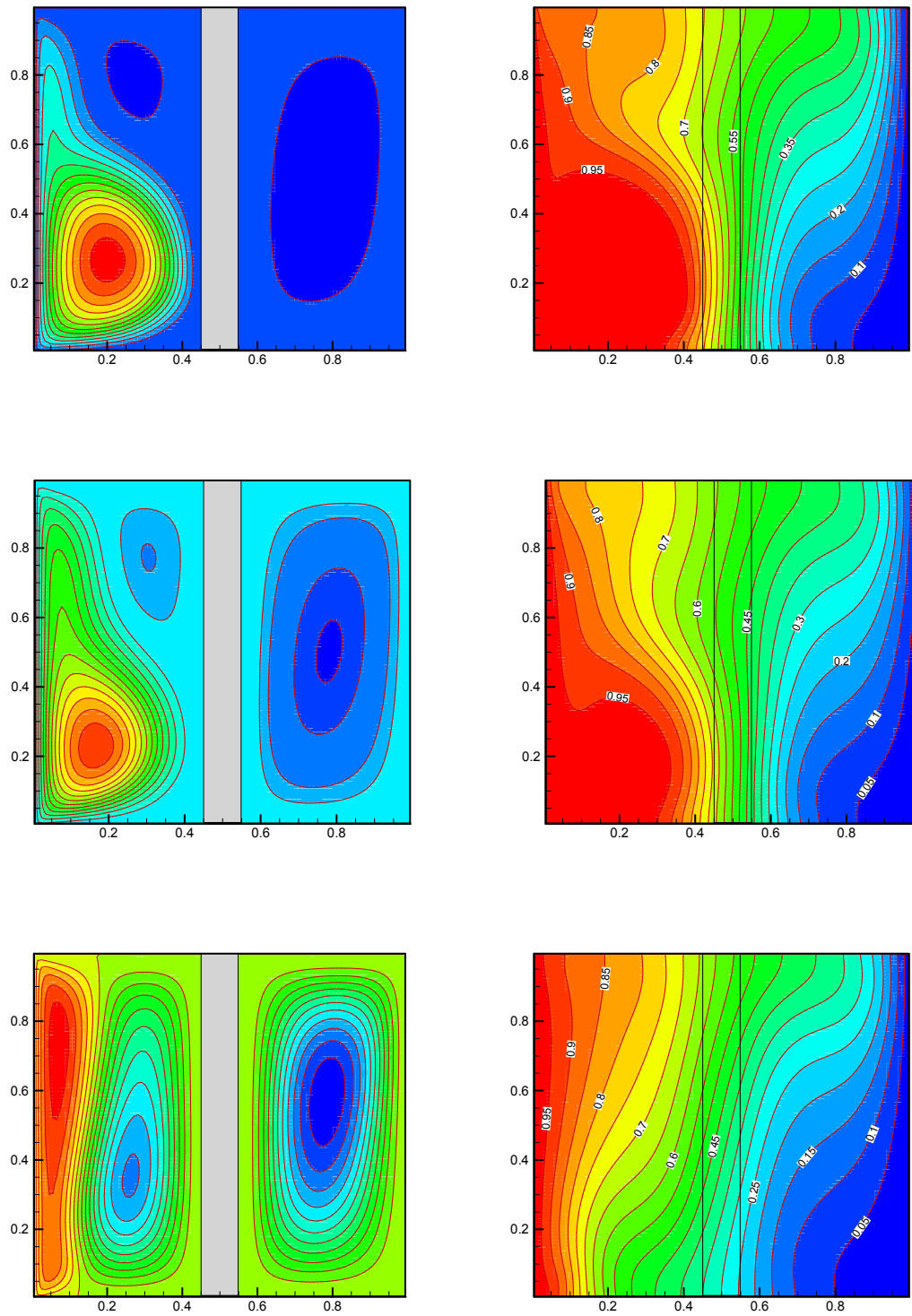


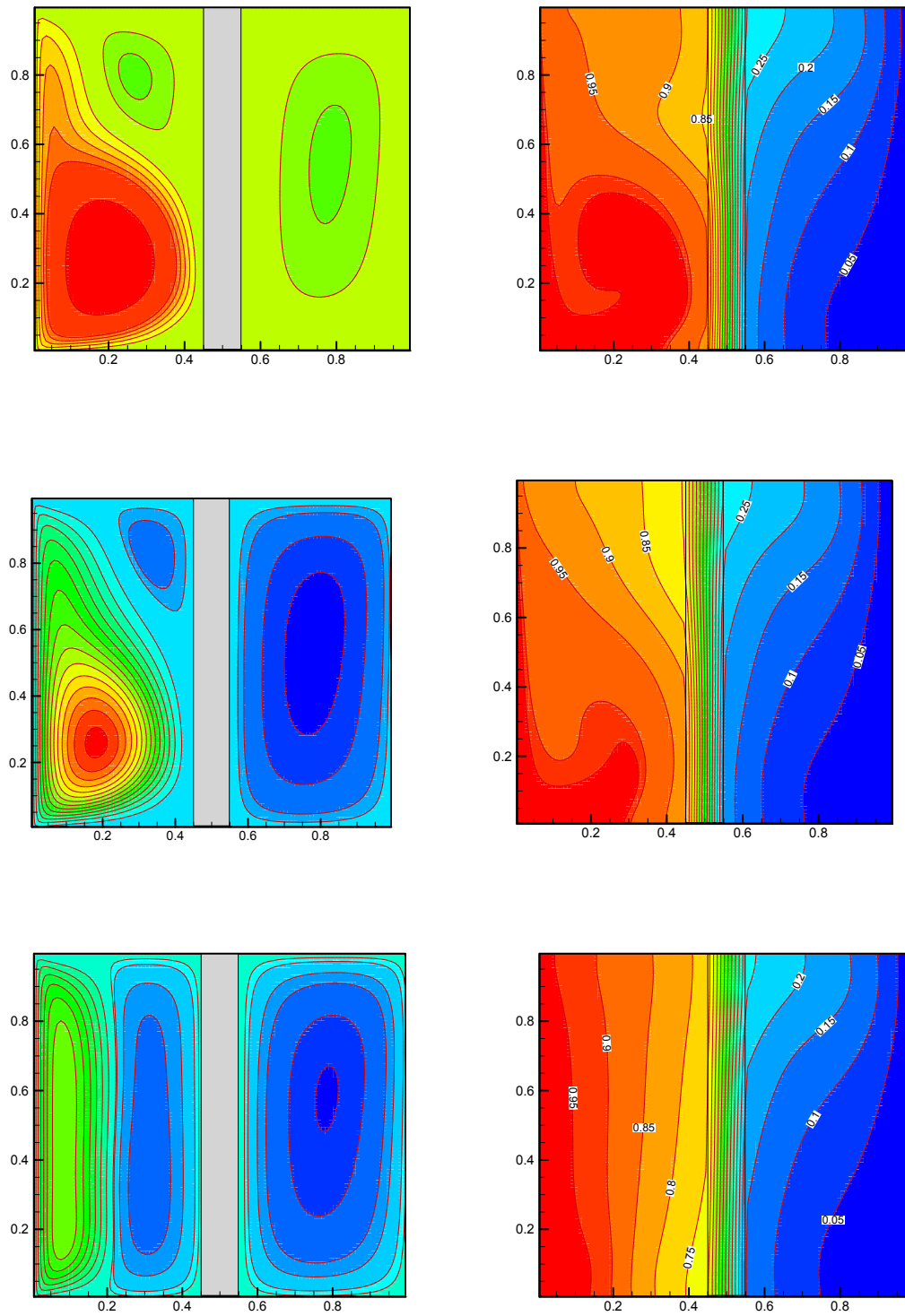
Figure (IV-1) : Les lignes de courant et les isothermes pour  $Ri=0.1$  (a) et  $Ri=10$  (b)



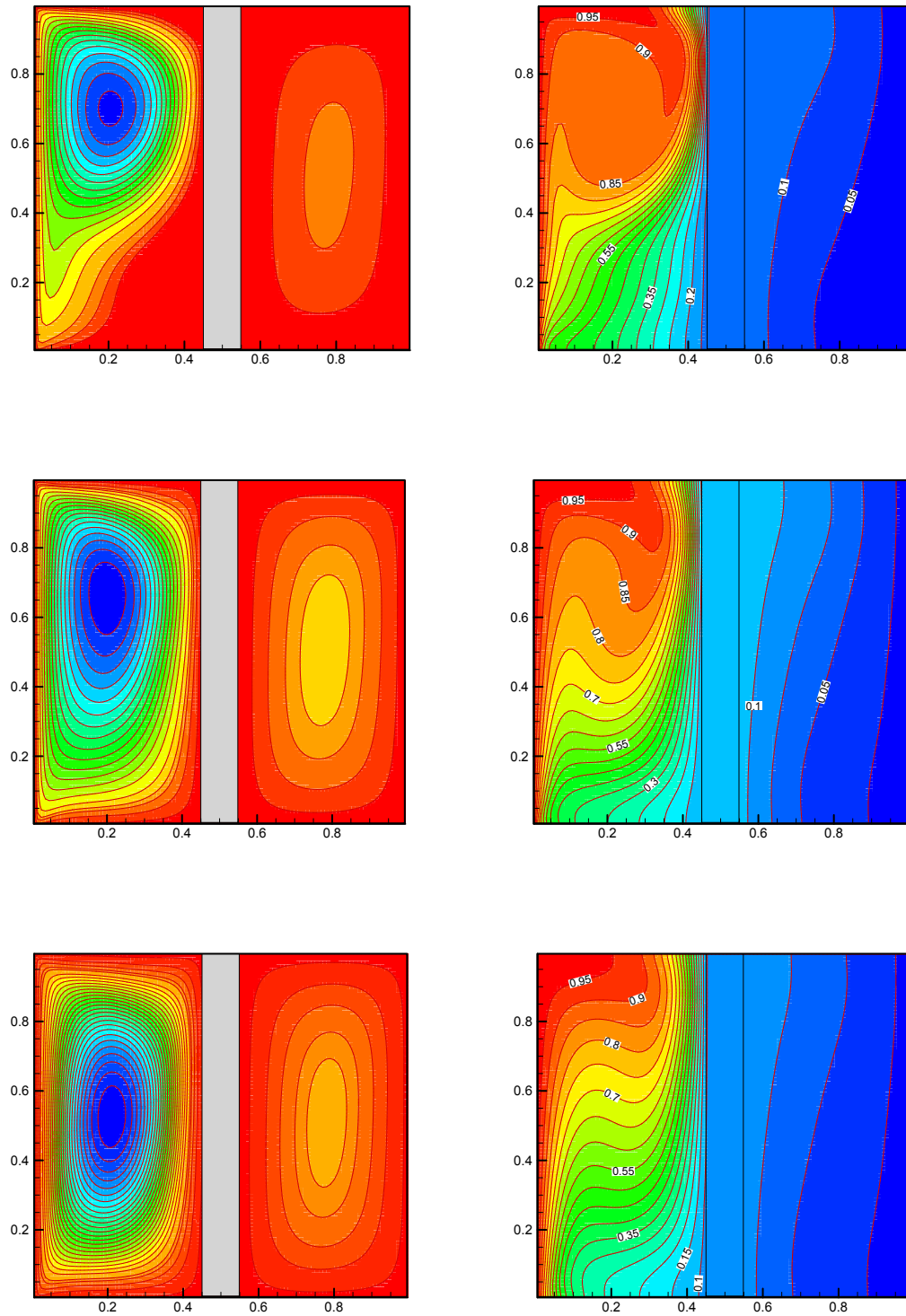
**Figure (IV -2) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=0.001$



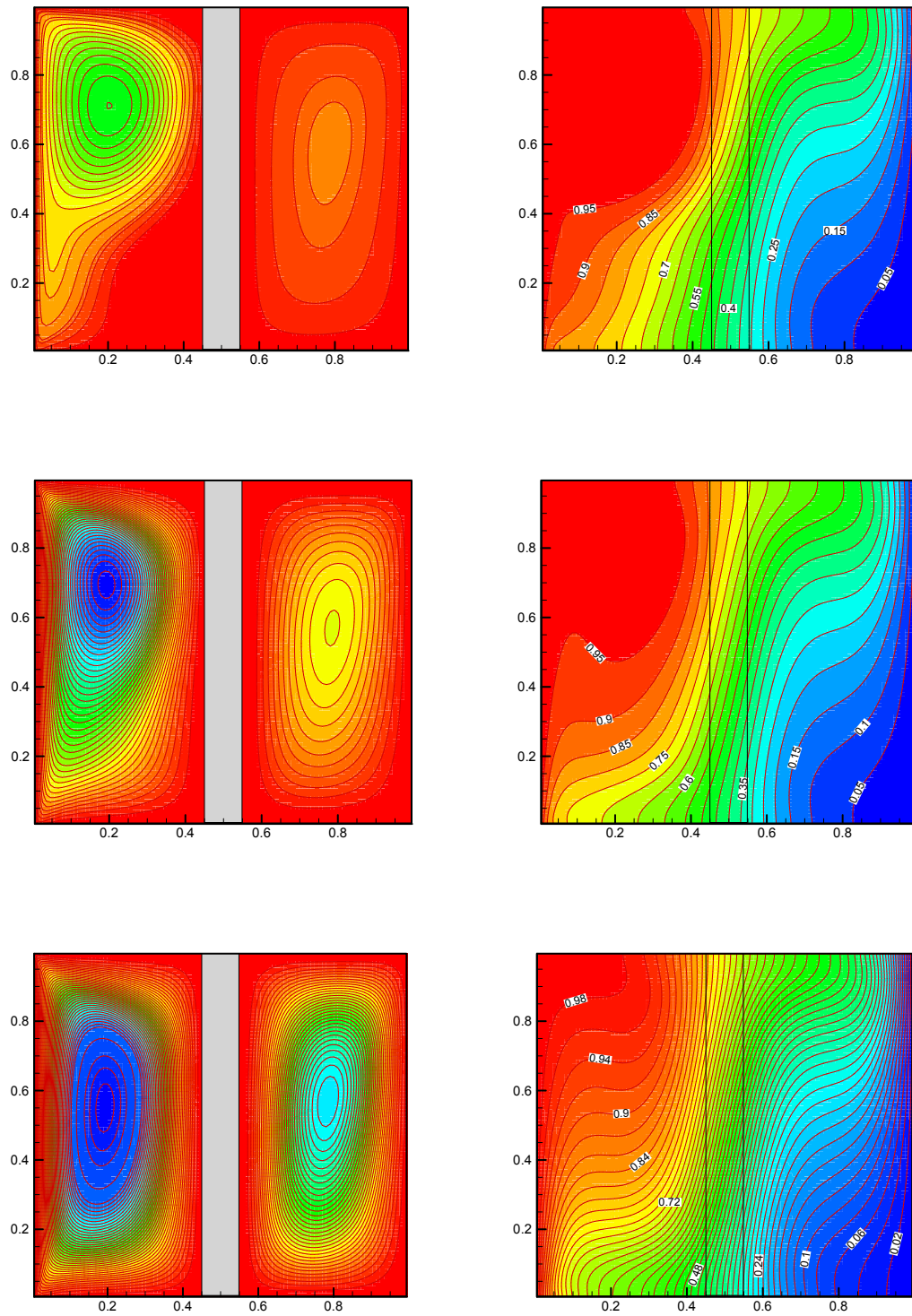
**Figure (IV -3) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=1$



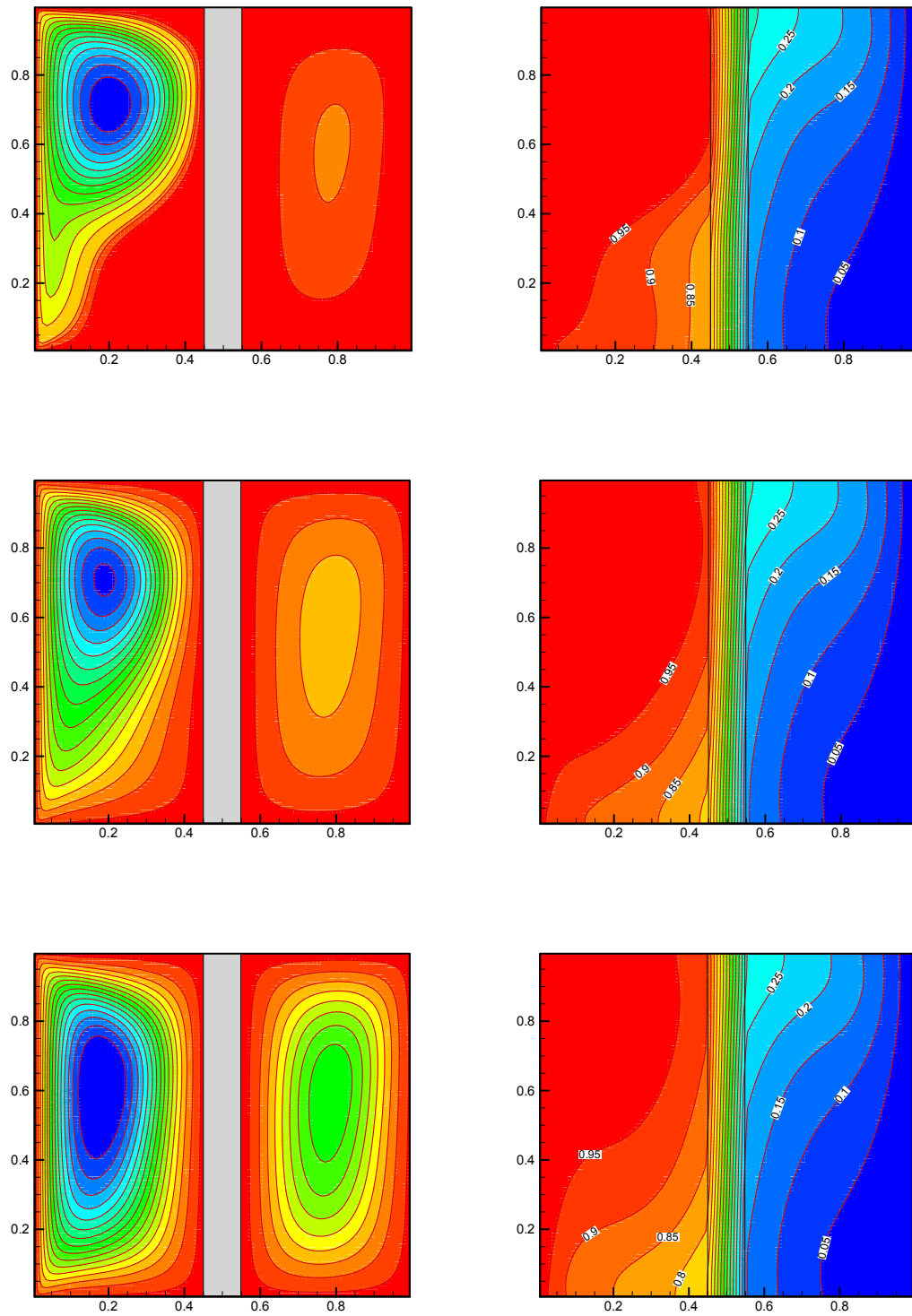
**Figure (IV -4) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas I) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=10$



**Figure (IV -5) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=0.001$



**Figure (IV -6) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=1$



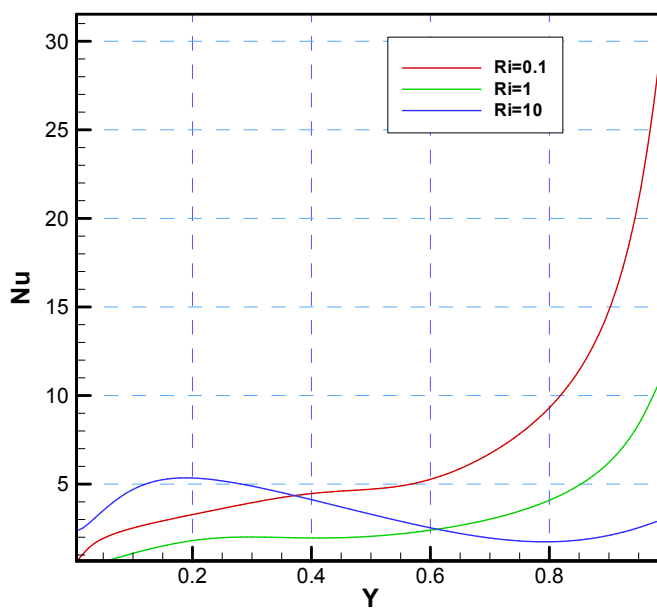
**Figure (IV -7) :** Les lignes de courant à gauche et les isothermes à droite (cas II) pour différents valeurs du nombre de Richardson et pour  $K=10$

Les Figure (IV-8) , (IV-10) et (IV-12) illustre la variation du nombre de Nusselt local le long de paroi gauche de la cavité pour le cas I à différents nombres de Richardson et rapport de conductivité thermique. Pour des valeurs du nombre de Richardson élevé et pour des faibles rapports des conductivités thermiques, une variation de forme sinusoïdale s'est produite dû à la domination du transfert de chaleur par convection naturelle.

Dans ce cas, le mouvement d'écoulement se produit principalement en raison des forces de flottabilité puisque la vitesse de la paroi mobile est faible. Une augmentation linéaire du Nusselt est observée le long de la paroi droite de la cavité (Figure (IV-9), (IV-11) et (IV-13).

Avec l'augmentation du rapport de conductivité thermique, les valeurs du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche et le long de la paroi droite diminuent.

Les Figure (IV-14) , (IV-15) , (IV-16) (IV-17) , (IV-18) et (IV-19) affiche la variation du nombre de Nusselt local à différents rapport des conductivités thermiques pour le cas II. Il y a une grande différence entre les deux cas pour la variation du Nusselt le long de la paroi gauche, cette différence découle de la direction du la paroi mobile.



**Figure (IV -8) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche (cas I) pour  $K=0.001$



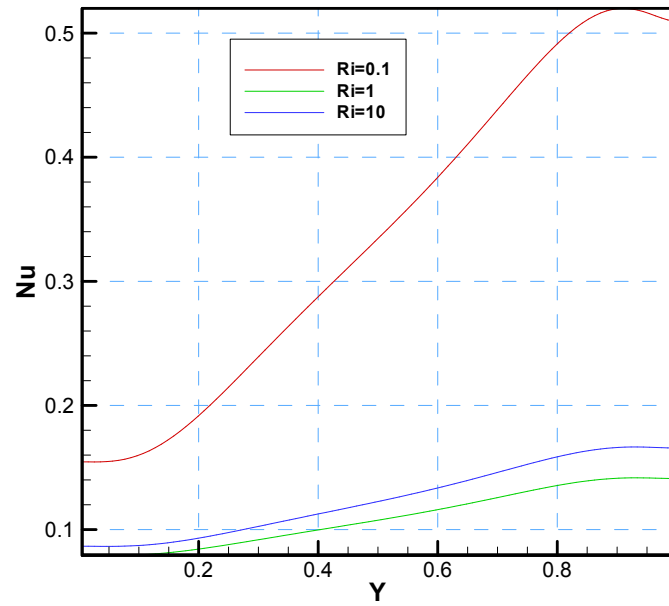


Figure (IV -9) : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite (cas I)  
pour  $K=0.001$

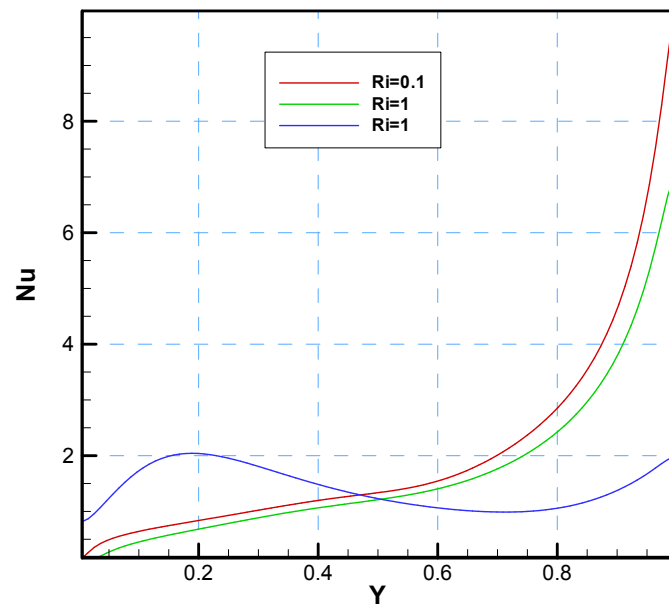


Figure (IV -10) : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche (cas I)  
pour  $K=1$

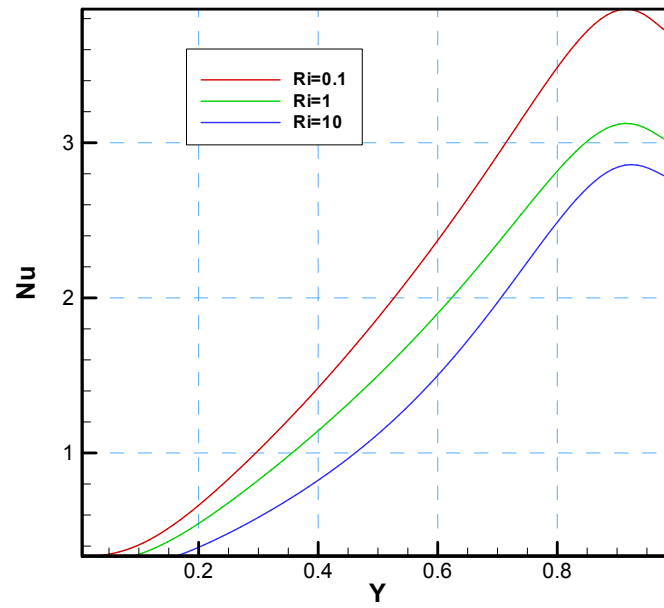


Figure (IV -11) : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite (cas I) pour  $K=1$

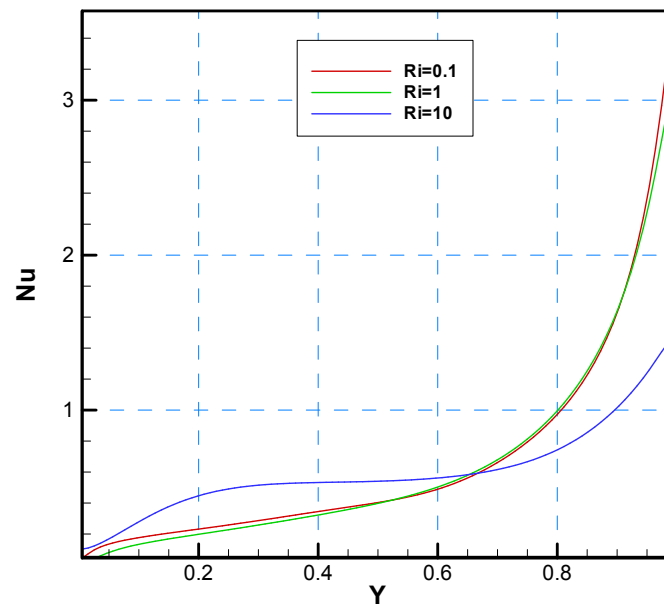
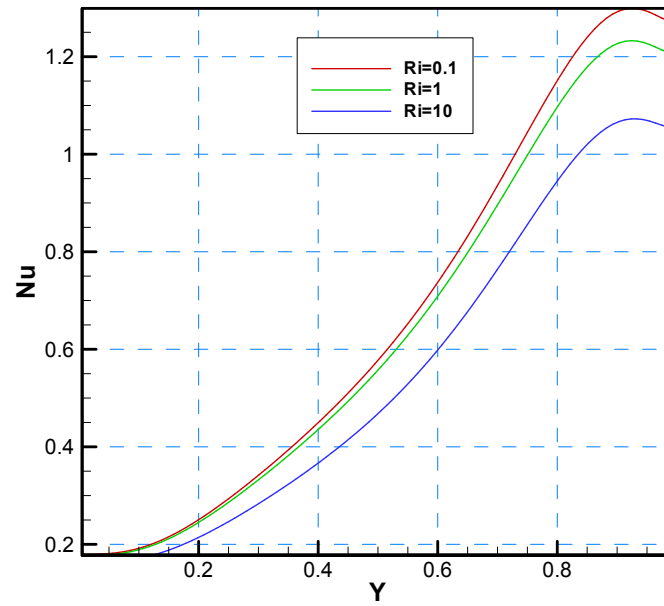
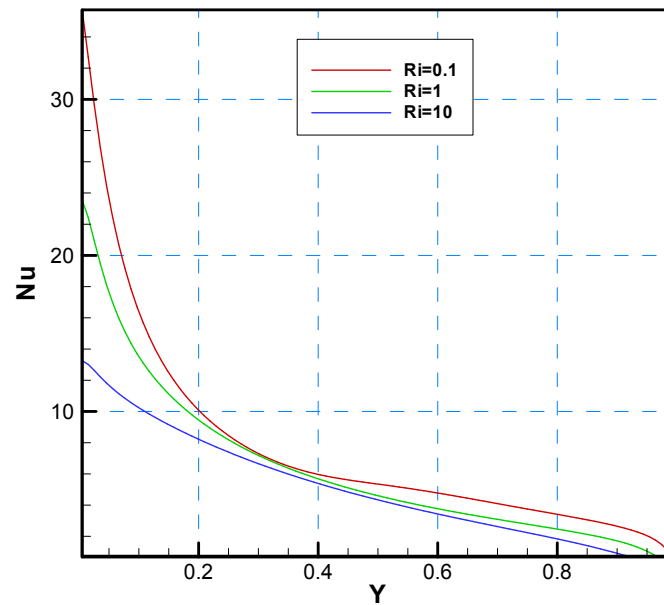


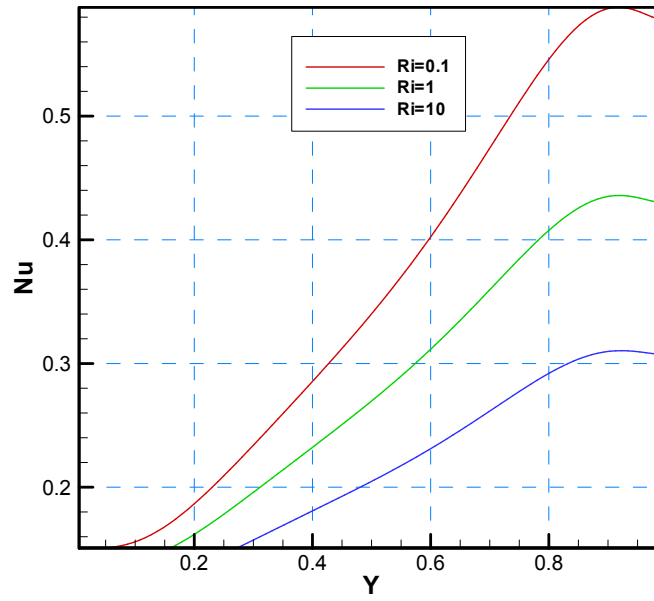
Figure (IV -12) : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche (cas I) pour  $K=10$



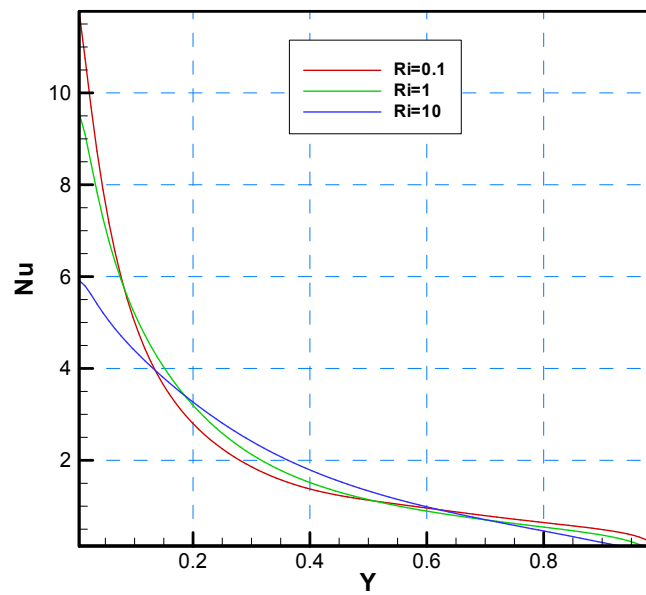
**Figure (IV -13) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite  
(cas I) pour  $K=10$



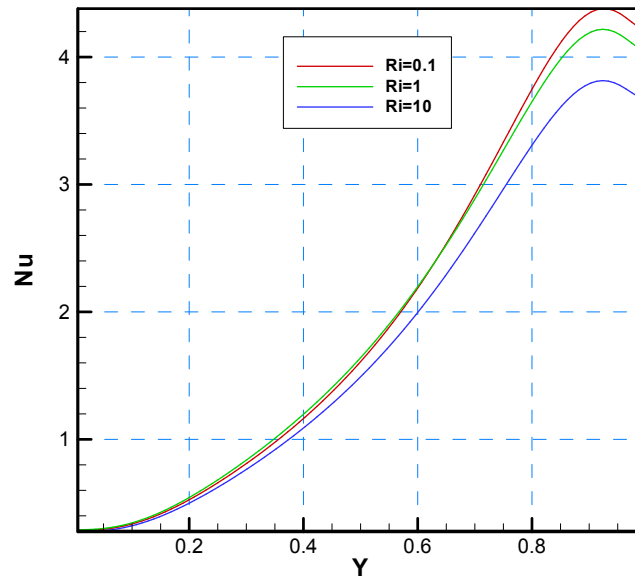
**Figure (IV -14) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche  
(cas II) pour  $K=0.001$



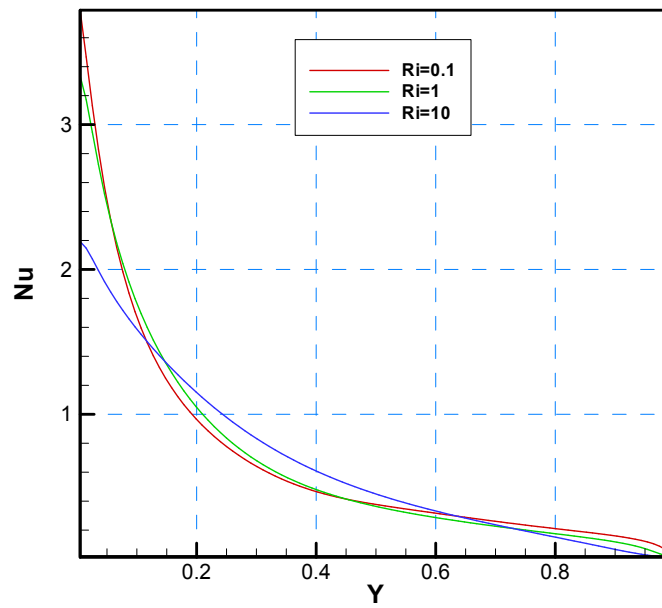
**Figure (IV -15) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite (cas II) pour  $K=0.001$



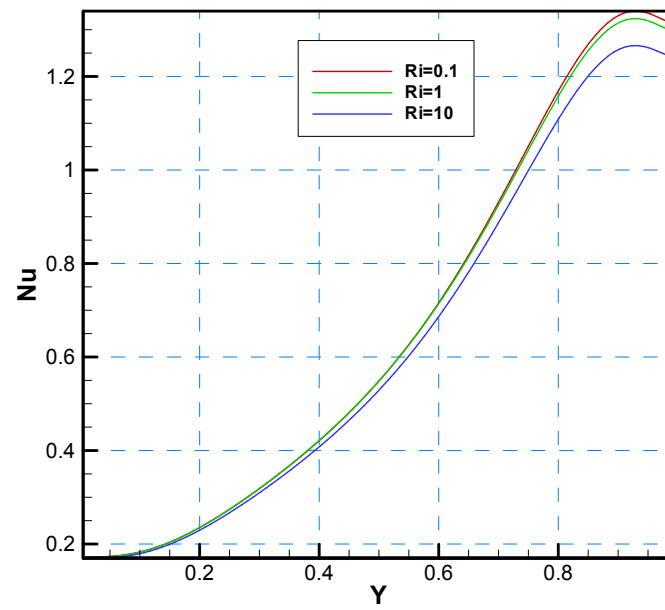
**Figure (IV -16) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche (cas II) pour  $K=1$



**Figure (IV -17) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite (cas II) pour  $K=1$



**Figure (IV -18) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi gauche (cas II) pour  $K=10$



**Figure (IV -19) :** Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi droite  
(cas II) pour  $K=10$

## CONCLUSION

---

### CONCLUSION :

Le travail présenté dans ce mémoire est une étude numérique de l'écoulement d'un fluide incompressible avec transfert de chaleur couplé (convection - conduction) dans une cavité muni d'une plaque séparatrice épaisse dont la paroi verticale gauche est en mouvement soit descendant (*cas I*) soit ascendant (*cas II*). La modélisation mathématique de ce problème physique est basée sur les équations de conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les propriétés thermo-physiques sont considérées constantes et l'approximation de Boussinesq a été adoptée. Des hypothèses simplificatrices ont été introduites et justifiées. Le système d'équations simplifié est résolu numériquement par la méthode des volumes finis. Le couplage vitesse-pression est traité par l'algorithme SIMPLE.

Un code de calcul a été développé, écrit en langage FORTRAN validé en comparaison avec les résultats numériques disponibles dans la littérature.

Les principaux résultats tirés de ce travail peuvent être résumés comme suit :

- l'orientation de la paroi mobile n'affecte pas le sens de l'écoulement dans la partie droite de l'enceinte.
- Elle affecte complètement la structure d'écoulement au niveau de la partie gauche de la cavité.
- Le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du nombre de Richardson pour toutes les valeurs du rapport des conductivités thermiques.
- Le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du rapport des conductivités thermiques pour toutes les valeurs du nombre de Richardson.

Pour les perspectives cette étude peut être étendue pour étudier les effets de l'emplacement et l'épaisseur de la plaque séparatrice en incluant les effets de nombre Prandtl.

## Références bibliographiques

- [1] Hakan F. Oztop et Ihsan Dagtekin , Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 1761–1769
- [2] Ahmet Koca , Numerical analysis of conjugate heat transfer in a partially open square cavity with a vertical heat source, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 35 (2008) 1385–1395.
- [3] Hakan F. Oztop , Zepu Zhao et Bo Yu, Conduction-combined forced and natural convection in lid-driven enclosures divided by a vertical solid partition, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 36 (2009) 661–668.
- [4] S. Hamimid , M. Guellal , A. Amroune et N. Zeraibi, Effect of a Porous Layer on the Flow Structure and Heat Transfer in a Square Cavity, *FDMP*, vol.8, no.1, pp.69-90, 2011
- [5] A.I. Alsaberya, M.A. Sheremet , A.J. Chamkha et I. Hashima, Conjugate natural convection of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–water nanofluid in a square cavity with a concentric solid insert using Buongiorno’s two-phase model, *International journal of mechanical sciences* 136 (2018) 200-219
- [6] Kamil Kahveci , Natural Convection in a Partitioned Vertical Enclosure Heated With a Uniform Heat Flux, *Journal of Heat Transfer*, JUNE 2007, Vol. 129 / 717.
- [7] S. V. Patankar, *Numerical Heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation and McGraw-Hill Book Company, New York, 1980, 197p.
- [8] W. M. Kays and M. E. Crawford *Convective heat and mass transfer*, McGraw-Hill, Inc, 3<sup>rd</sup> ed., 1993 , 601p.
- [9] H. K. Versateeg et W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics*, Longman Scientific & Technical, England, 1995, 257p.



**Résumé :**

Dans ce travail nous proposons une étude numérique de la convection mixte laminaire associée à la conduction thermique d'un écoulement d'un fluide Newtonien et incompressible dans une cavité rectangulaire munie d'une plaque séparatrice épaisse. La paroi verticale gauche est en mouvement soit en bas (cas I) soit en haut (cas II). La convection mixte règne sur la partie comprise entre la paroi gauche chaude et la plaque séparatrice, la conduction se produit le long de la plaque, tandis que la convection libre se produit dans la deuxième partie de la cavité (zone comprise entre la plaque et la paroi droite). Les équations différentielles de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie ont été intégrées et discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats numériques obtenus pour différents valeurs du nombre de Richardson et rapport des conductivités thermiques solide-fluide sont présentés sous forme de lignes de courant, lignes isothermes et variation du nombre de Nusselt. Cette étude a été réalisée pour  $0.1 \leq Ri \leq 10$  et  $0.001 \leq K \leq 10$ . Tout au long de l'étude, le nombre de Grashof et le nombre de Prandtl sont pris constants égaux à  $10^5$  et  $0.71$  respectivement.

**Mots clé :** *convection conjuguée, cavité rectangulaire, transfert de chaleur, méthode des volumes finis*

**Abstract:**

In this work we propose a numerical study of the laminar mixed convection associated with the thermal conduction of a flow of a Newtonian and incompressible fluid in a rectangular cavity divided by a thick separator plate. The left vertical wall is moving down (case I) or up (case II). Mixed convection prevails over the part between the hot left wall and the separator plate, conduction occurs along the plate, while free convection occurs in the second part of the cavity (area between the plate and the right wall). The differential equations of conservation of mass, momentum and energy were integrated and discretized using the finite volume method. The numerical results obtained for different values of the Richardson number and the ratio of the solid-fluid thermal conductivities are presented in the form of streamlines, isotherms and variation of the Nusselt number. This study was carried out for  $0.1 \leq Ri \leq 10$  and  $0.001 \leq K \leq 10$ . Throughout the study, the Grashof number and the Prandtl number are taken constant equal to  $10^5$  and  $0.71$  respectively.

**Keywords:** *conjugated convection, rectangular cavity, heat transfer, finite volume method*

## المخلص

نقترح في هذا العمل دراسة عددية للحمل الحراري المختلط والصفائحي المرتبط بالتوصيل الحراري لتدفق سائل نيوتوني وغير قابل للضغط في تجويف مستطيل مقسوم بلوحة فاصلة سميكة. يتحرك الجدار العمودي الأيسر لأسفل (الحالة الأولى) أو لأعلى (الحالة الثانية). يسود الحمل الحراري المختلط على الجزء الموجود بين الجدار الأيسر الساخن ولوحة الفصل ، ويحدث التوصيل على طول اللوحة ، بينما يحدث الحمل الحراري الحر في الجزء الثاني من التجويف (المنطقة الواقعة بين اللوحة والجدار الأيمن). تم تكامل المعادلات التفاضلية لحفظ الكتلة والزخم والطاقة وتقديرها باستخدام طريقة الحجم المحدود. النتائج العددية التي تم الحصول عليها لقيم مختلفة لعدد ريتشاردسون ونسبة الوصل الحراري سائل - صلب في شكل خطوط التيار ومتساوية الحرارة وتغير في رقم نسلت. أجريت هذه الدراسة لـ  $0.1 \leq Ri \leq 10$  و

$0.001 \leq K \leq 10$  . طوال الدراسة ، تم أخذ رقم قراشوف ورقم برانت ثابتاً يساوي  $10^5$  و  $0.71$  على

التوالي.

**الكلمات المفتاحية:** الحمل الحراري المترافق ، التجويف المستطيل ، نقل الحرارة ، طريقة الحجم المحدود