



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Réf. : Entrez la référence du document

Présenté et soutenu par :

Kinza Segni

Le : jeudi 10 septembre 2020

Couche limite laminaire sur une plaque plane avec aspiration et refoulement

Jury :

Dr.	Labeled Adnane	MCA	Université de Biskra	Président
Dr.	Chawki Mahboub	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	Tarek Djoudi	MAA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2019 – 2020

اهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك.. إلهي لك الحمد والشكر في الأولى
ولك الحمد والشكر في الآخرة.. ولك الحمد والشكر من قبل ولك الحمد والشكر من بعد.. اللهم لك

الحمد حمداً أبلغ به رضاك وأؤدي به شكرك وأستوجب به المزيد من فضلك

إلى من بلغ الرسالة.. وأدى الأمانة.. ونصح الأمة.. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

سيدنا محمد عليه أفضل الصلاة وأزكى التسليم

يا من أحمل اسمك بكل فخر.. يا من يرتعش قلبي لذكرك

يامن رحل إلى وطن النائمين طويلاً والذي تمنيت اليوم كثيراً أن تراني وأنا أرفع قبعتي عالياً

و أرى ابتسامتك التي تغمرني فرحاً

يارب إجعله في الفردوس الأعلى عدد ما نبض قلبي شوقاً إليه

يا من أودعتني لله أهديك هذا البحث.

إلى عشقي المقدس وملاكي الطاهر.. إلى من أوصاني الرحمن بها وجعل الجنة تحت قدميها.. إلى

من كان دعاؤها سر نجاحي.. إلى من ارتحت كلما تذكرت إبتسامتها في وجهي

إلى التي وهبتني كل ما تملك حتى أحقق لها آمالها إلى من كانت تدفعني قدما نحو الأمام لنيل

المبتغى.. إلى الإنسانية التي امتلكت الإنسانية بكل قوة.. إلى التي حصدت الأشواك عن دربي لتمهد

لي طريق العلم.. إلى مدرستي الأولى في الحياة..

أعز ملاك على القلب و العين جزاها الله عني خير الجزاء في الدارين عسى الله يطيل بعمرك

.. أمي ..

إلى حماة ظهري وذخري و ثروتي العظيمة .. إليهم أهدي هذا العمل المتواضع لكي أدخل على

قلوبهم شيئاً من السعادة إلى اخوتي

..محمد العربي.. سيف الاسلام.. وصابر ايوب

إلى زهرتا الحياة الدنيا .. إلى أميرتي قلبي إلى أختاي

..خلود..وصفاء المزدلفة

إلى جدتي قمره ملكة قلبي ومصدر السعادة في حياتي وعشقي الابدي أسأل الله أن يطيل عمرك

ويديم عليك الصحة والعافية

إلى عائلتي سقني ومصمودي فردا فردا

اهدي تخرجي لحبيبة القلب لمن كانت سندي بعد عائلتي لمن كانت عونني بعد الله، إلى نجمة سمائي

المتألئة في الحياة.. إلى اختي التي لم تلدها أمي ولكن ولدتها لي الأيام

لصديقتي الغالية وتوأم قلبي

.. نهلة..

رفيقات الصعاب ورفيقات الميكانيك العظيمة

.. نور .. منال..

شكرا لكم صديقاتي

اهدي كذلك هذا البحث للانسانة الرائعة والطيبة الى قلب الميكانيك النابض الى من امدتنا بجرعة

الامل احمد الله على معرفتها اتمنى لها كل الخير في حياتها

..سناء..

الى كل شخص ساهم بمساندتي واعانتني بالكلام الطيب

شكرا لكم

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل.

الطالبة: سقني كنزة

Remerciements

Je dois tout d'abord remercier ALLAH, pour m'avoir donné la santé et la force pour accomplir ce travail.

*Le grand merci à mon encadreur **Dr. Mahboub Chawki**, pour m'avoir confié ce thème de recherche, pour ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce travail.*

*Je tiens également à remercier les membres du jury **M. Tarek Djoudi** et **Dr. Labed Adnane** pour l'honneur Qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique, qui ont contribué à ma formation.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة الطبقة الحدية الديناميكية الصفائحية لمائع غير قابل للانضغاط فوق سطح مستو يتم عبره شفط أو حقن للمائع. من أجل ذلك قمنا بتبسيط معادلات "Prandtl-براندتل" و حلها عدديا باستعمال طريقة الفروق المنتهية و ذلك بدمج مخطط الصندوق لـ "Keller-كيللر" و مخطط "أويلر-Euler". التحليل بين أن سمك الطبقة الحدية و كذا توزيع السرعة داخلها يتأثران بالمعامل " λ ". النتائج المتحصل عليها أظهرت أن الشفط يؤثر على الطبقة الحدية بشكل مماثل لتأثير تدرج ضغط سالب، و أن الحقن يؤثر على الطبقة الحدية بشكل مماثل لتأثير تدرج ضغط موجب، و أنه في حالة " λ " أصغر من - 0.863 يحدث فصل للطبقة الحدية.

الكلمات المفتاحية : الطبقة الحدودية ، تدفق صفائحي ، الامتصاص/ النفخ ، طريقة مربع كيلر

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié la couche limite dynamique laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque horizontale avec aspiration ou refoulement. Pour cela nous avons simplifié puis résolu numériquement les équations de Prandtl avec la méthode des différences finies en utilisant les schémas de Keller-box et d'Euler. L'analyse montre que l'épaisseur de la couche limite et également le profil de la vitesse sont affectés par le paramètre " λ ". Les résultats obtenus montrent que l'aspiration a un effet similaire à celui d'un gradient de pression favorable; le refoulement a un effet similaire à celui d'un gradient de pression adverse; et qu'une séparation de la couche limite se produit pour $\lambda < -0.863$.

Mots clés : Couche limite; écoulement laminaire; aspiration/refoulement; méthode des différences finies.

Abstract

In this work, we have studied the laminar boundary layer of an incompressible fluid over a horizontal flat-plate with suction or blowing. To do so we simplified the Prandtl equations then solved them numerically with the finite difference method using Keller-box and Euler schemes. The analysis shows that the thickness of the boundary layer as well as the velocity profile are both affected by the parameter " λ ". The obtained results show that the suction has a similar effect as a favorable pressure gradient; the blowing has a similar effect as an adverse pressure gradient; and that a boundary layer separation occurs for $\lambda < -0.863$.

Keywords: Boundary layer; laminar flow; suction/blowing; finite difference method.

Tableaux des matériaux

اهداء	i
Remerciements	iii
ملخص	v
Tableaux des matériaux	vii
Liste des figures	ix
Nomenclature	xi
Introduction générale	9

Chapitre I: Généralité sur la couche limite

I.1. Introduction	5
I.2. Concept de la couche limite.....	5
I.2.1. Couche limite dynamique.....	5
I.2.2. Couche limite thermique	5
I.3. Paramètres caractéristiques de la couche limite	6
I.3.1. Epaisseur de la couche limite δ	6
I.3.2. Epaisseur de déplacement δ_1	6
I.3.3. Epaisseur de quantité de mouvement δ_2	6
I.3.4. Le facteur de forme H	6
I.3.5. Force de frottement	6
I.3.6. Coefficient de frottement	6
I.4. Equations fondamentales	7
I.4.1. Equation de continuité.....	7
I.4.2. Equation de Navier-Stokes.....	7
I.5. Equations de Prandtl (équations de la couche limite).....	7
I.6. Approche différentielle (équation de Blasius).....	8
I.7. Approche intégrale	8
I.7.1. Equation de Von Karman	8

I.7.2.	Profil de Pohlhausen.....	9
I.8.	Contrôle de la couche limite	9
I.8.1.	Contrôle passif.....	10
a)	Façonnement géométrique	10
b)	Parois rainurées ou ‘‘riblets’’ et le dispositif LEBU	10
c)	Les générateurs de vortex mécaniques.....	11
d)	Les dispositifs hypersustentateurs.....	11
I.8.2.	Contrôle actif.....	12
a)	Contrôle actif par aspiration de la couche limite	12
b)	Contrôle actif par soufflage de la couche limite	12
c)	Contrôle actif par jet pulsé	13
d)	Contrôle actif par jet synthétique	13
I.9.	Méthode de différence finie.....	14
I.9.1.	Schéma explicite	15
I.9.2.	Schéma implicite	15
I.10.	Méthode d’Euler	15
I.11.	Méthode de Thomas	16

Chapitre II: Revue de littérature

II.1.	Introduction	18
II.2.	Revue de littérature.....	18

Chapitre III: Formulation mathématique

III.1.	Introduction.....	25
III.2.	Descriptions du problème et hypothèses.....	25
III.3.	Modèle mathématique.....	26
III.4.	Forme réduite des équations de Prandtl	26
III.5.	Formulation du problème en différences finies	28
III.6.	Algorithme de résolution numérique	30

Chapitre IV: Résultats et discussion

IV.1.	Introduction.....	33
IV.2.	Choix de maillage	33
IV.3.	Interprétation des résultats	34
IV.3.1.	Avec aspiration ($\lambda > 0$).....	36
IV.3.2.	Avec refoulement ($\lambda < 0$)	37
IV.4.	Conclusion	39
Conclusion générale		40
Recherche bibliographique.....		42

Liste des figures

Figures	intitulé	page
Chapitre I		
I.1	Couches limites dynamique et thermique	4
I.2	Objectif de base du contrôle de la couche limite	9
I.3	Contrôle d'écoulement par une paroi rainurée ou riblets	10
I.4	Générateurs de vortex illustrées par trois différentes formes: a,b et c	10
I.5	Dispositif hypersustentateur des ailes d'avions	10
I.6	Soufflage et Aspiration de la couche limite	11
I.7	Jet pulsé	12
I.8	Schéma d'un jet synthétique	12
I.9	Maillage espace-temps	14
I.10	Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies	14
I.11	Arrangement de maille unidimensionnelle	15
Chapitre III		
III.1	Couche limite sur une plaque plane avec aspiration et refoulement	24
III.2	Schéma de discrétisation	27
III.3	Domaine de calcul numérique	29
III.4	Organigramme de résolution	31
Chapitre IV		
IV.1	Variation de $\overline{f''(0)}$ en fonction du nombre de nœuds $N \times M$	33
IV.2	Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 0$ (solution de Blasius)	34
IV.3	Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 1$	35
IV.4	Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 2$	36
IV.5	Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = -0.5$	37
IV.6	Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = -0.863$	38

Nomenclature

<i>Symbole</i>	<i>Dénomination</i>	<i>Unités</i>
<i>Lettre Latine</i>		
T_e	Température du fluide.	K ou °C
T_p	Température de la paroi.	K ou °C
C_f	Coefficient de frottement	/
τ_p	Contrainte de cisaillement à la paroi	/
\vec{q}	Vecteur vitesse	m/s
f	Densité massique des efforts extérieurs	/
f	Fonction de courant adimensionnelle	/
f'	Vitesse axiale adimensionnelle	/
f''	Dérivée de la vitesse axiale adimensionnelle	/
i, j	Indice itératif	/
L	Longueur caractéristique	m
N, M	Nombre de nœud	/
p	pression	Bar
t	Temps	/
m	Paramètre d'exposant de vitesse	/
n	paramètre d'exposant de température	/
d	Paramètre de soufflage ou d'aspiration sans dimension	/
u_e	Vitesse caractéristique	m/s
v_p	Vitesse de transfert de masse	m/s
u	Composante de vitesse/x	/

Nomenclature

v	Composante de vitesse/y	/
x, y	Coordonnées cartésiennes	/
<i>Lettre Grec</i>		
δ	Epaisseurs de la couche limite dynamique	m
δ_1	Epaisseur de déplacement	m
δ_2	Epaisseur de quantité de mouvement	m
H	Facteur de forme	/
$A_{i,j} B_{i,j} C_{i,j} D_{i,j}$	Matrice élémentaire	/
ε	Erreur relative	/
η	Variation des similarités	/
ξ	coordonnée normale adimensionnelle	/
μ	Viscosité dynamique	kg/m.s
ϑ	Viscosité cinématique	kg/m ³
ρ	Masse volumique	kg/m ³
σ	Tenseur des contraintes	/
ψ	Fonction de courant	/
Λ	paramètre de gradient de pression de Pohlhausen	/
λ	paramètre de transpiration	/
<i>Nombres adimensionnels</i>		
SaOB	Suction and oscillatory Blowing	/
SWBLI	shock wave boundary layer interaction	/
LEBU	Large Eddy Break Up (dispositif de contrôle passif).	/
Pr	Nombre de Prandtl	/
Re _L	Nombre de Reynolds	/

<i>Indices</i>		
$\bar{(\)}$	Moyenne	/
∞	Position à l'infinie	/
∇	L'opérateur nabla	/

Introduction générale

Introduction générale

1. Introduction

La mécanique des fluides est une partie de science qui étudie le comportement des fluides au repos et en mouvement. C'est une science qui trouve d'une grande importance dans de nombreux domaines: la mécanique, la chimie, la météorologie, la physique du plasma, l'aérodynamique, l'hydraulique, les turbomachines et les équipements thermiques [1]. L'aérodynamique est l'une des branches de la mécanique des fluides externe. Elle est spécialement réservée aux études de l'écoulement de l'air et plus pratiquement autour des corps solides [2]. Parmi de nombreuses évolutions dans la mécanique des fluides et le transfert de chaleur la théorie de la couche limite a gagné une place très importante. L'hypothèse de base de la couche limite repose sur le fait que le champ d'écoulement peut se composer de deux régions: une couche mince adjacente à une surface solide dans laquelle les forces de viscosité jouent un rôle important et la vitesse du fluide varie rapidement d'une valeur relativement élevée à une valeur nulle immédiatement sur la surface solide ; et un domaine extérieur de cette couche dans lequel le fluide en écoulement peut être considéré comme dénué de viscosité. En lien avec cette hypothèse, certains termes jouent un rôle négligeable dans les équations de Navier-Stokes. En omettant ces termes, on obtient les équations approximatives de la couche limite [3]. L'intérêt du développement des techniques de contrôle pour améliorer les performances des ailes d'avion, des compresseurs, des turbines et des éoliennes, réduire leurs consommations et leurs pollution et améliorer leurs stabilités. Le décollement de la couche limite et les structures organisées qui en découlent conduisent à des pertes de performances et à la génération de bruit. Ceci a conduit au désir d'appliquer le contrôle en vue de diminuer voire supprimé la zone décollée. Le contrôle d'écoulements consiste à manipuler l'écoulement afin de l'amener dans un état souhaité. C'est un défi important en aérodynamique. Diverses méthodes de contrôle ont été envisagées afin de contrôler le décollement, et qui peuvent être classées en deux classes : les méthodes passives (le changement de l'état de surface, l'utilisation de corps profilé) et les méthodes actifs (le soufflage, l'aspiration, les jets synthétiques). Pour agir sur les propriétés d'un écoulement, deux méthodes ont été alors développées : l'aspiration et le soufflage [4]. Beaucoup de développement ont été réalisés dans les domaines du mathématique appliqué et de l'informatique ce qui nous a aidé à résoudre des problèmes délicats par la voie de la

simulation numérique. L'importance de cette dernière réside dans le fait qu'elle peut résoudre facilement des problèmes difficiles où les techniques analytiques peuvent être fastidieuses ou semblent échouer. Elle peut nous permettre également d'éviter la réalisation d'expérimentation réelle qui est des procédures souvent longues et coûteuses [3].

2. Objectif de sujet

Le but majeur dans ce mémoire est d'étudier le contrôle par transpiration de la couche limite laminaire bidimensionnelle sur une plaque plane horizontale sans gradient de pression. Ce travail s'intéresse en particulier à déterminer numériquement la distribution de la vitesse d'écoulement en se basant sur un modèle mathématique issu de la théorie de la couche limite.

3. Organisation du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de l'introduction générale, en plus de quatre chapitres suivi à une conclusion générale. Le premier chapitre présente des généralités sur le concept de la couche limite dynamique, les équations fondamentales qui régissent ce phénomène, et une introduction brève sur le principe des méthodes numériques qui seront utilisées par la suite. Le deuxième chapitre présente une synthèse bibliographique de plusieurs travaux de nature expérimentale et numérique menés sur le même sujet abordé dans ce mémoire. Le troisième chapitre est consacré à la description et au modèle mathématique du problème envisagé et aussi à la résolution numérique de ce dernier. Le quatrième chapitre est réservé à la présentation des résultats obtenus avec leur interprétation. Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale qui résume les différents résultats obtenus.

Chapitre I

*Généralité sur la couche
limite*

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter des notions de base dans lequel s'inscrit ce mémoire. Nous allons commencer par quelques définitions et concepts de la couche limite; passant par les équations aux dérivées partielles et différentielles qui gouvernent ce phénomène tel que les équations de Prandtl, l'équation de Blasius, l'équation de Von Kàrmàn...etc.); et enfin les méthodes numériques qui seront utilisées dans ce mémoire pour résoudre les équations de la couche limite.

I.2. Concept de la couche limite

Le concept de la théorie de la couche limite a été introduit par Prandtl en 1904, qui a conçu et qui a donné l'idée d'une couche caractéristique des fluides dans la région juste près d'une frontière solide. Il a proposé que même pour une très faible viscosité, la condition d'adhérence devait être satisfaite à la limite solide (ce qui implique que la vitesse du fluide à une frontière solide soit la même que celle de la frontière elle-même [5]). Ce concept donne naissance à la mécanique des fluides moderne [6]. Un phénomène identique appelé couche limite thermique peut être également observée dans le cas d'un transfert de chaleur entre le fluide et le solide.

I.2.1. Couche limite dynamique

Dans cette couche on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de la paroi où la vitesse du fluide est nulle [7].

I.2.2. Couche limite thermique

Lorsqu'un fluide, à température T_e , s'écoule sur une paroi à température T_p , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact à la paroi et un gradient thermique se forme [7].

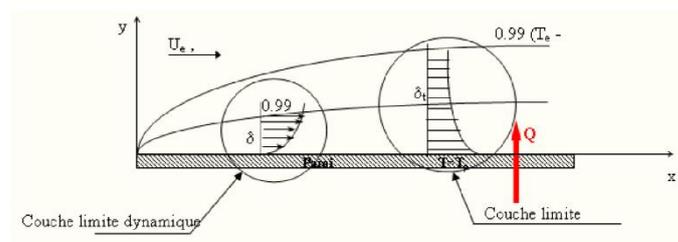


Figure I.1 : Couches limites dynamique et thermique [8].

I.3. Paramètres caractéristiques de la couche limite

I.3.1. Epaisseur de la couche limite δ

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite δ comme la distance à la paroi telle que [9] :

$$\frac{u(x,\delta)}{u_e(x)} = 0,99 \quad (\text{I.1})$$

I.3.2. Epaisseur de déplacement δ_1

L'épaisseur de déplacement δ_1 caractérise la perte de débit massique au travers d'une section de la couche limite par rapport au cas de l'écoulement de fluide parfait incompressible [9]:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (\text{I.2})$$

I.3.3. Epaisseur de quantité de mouvement δ_2

L'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 caractérise la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport au cas d'écoulement de fluide parfait [9]:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (\text{I.3})$$

I.3.4. Le facteur de forme H

On définit également le facteur de forme comme le rapport de ces deux dernières grandeurs

$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$; il permet de décrire l'évolution de la couche limite [9].

I.3.5. Force de frottement

La force de frottement est liée à la contrainte de cisaillement pariétale donné par [10]:

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (\text{I.4})$$

I.3.6. Coefficient de frottement

La contrainte de cisaillement pariétale peut être normalisée par la pression dynamique, on obtient ainsi un coefficient sans dimension dit coefficient de frottement local [10] :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} \quad (\text{I.5})$$

I.4. Equations fondamentales

Dans le cas d'un fluide Newtonien en écoulement bidimensionnel, incompressible et permanent, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (équations de Navier- Stokes) s'écrivent comme suit [11]:

I.4.1. Equation de continuité

L'équation de continuité est une affirmation sur la conservation de la masse. Il exprime le fait que, par unité de volume, la somme de toutes les masses entrantes et sortantes par unité de temps doit être égale au changement de masse dû au changement de densité par unité de temps, cela donne [12]:

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.6})$$

I.4.2. Equation de Navier-Stokes

Les équations de Navier Stokes proviennent de la conservation de la quantité de mouvement [3] :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \sigma + \rho f \quad (\text{I.7})$$

Où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla}$ représente la dérivée particulaire; et pour un fluide Newtonien et en tenant compte de l'hypothèse de Stokes, cette équation s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{q} + \rho f + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{q}) \quad (\text{I.8})$$

Pour le cas d'un fluide incompressible l'équation (I.8) devient :

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{q} + \rho f \quad (\text{I.9})$$

I.5. Equations de Prandtl (équations de la couche limite)

En effet, en comparant les ordres de grandeur des différents termes des équations de Navier-Stokes, Prandtl a montré que plusieurs d'entre eux sont négligeables dans la couche limite. En particulier, la vitesse dans la direction normale à la paroi est négligeable devant la vitesse tangentielle et la variation de la vitesse le long de la paroi est très faible devant la variation de la vitesse dans la direction normale à la paroi. Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées modélisent l'écoulement du fluide dans la couche limite et sont appelées

"équations de Prandtl". Pour un écoulement permanent bidimensionnel incompressible, elles s'écrivent de la manière suivante [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.10})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.11})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.12})$$

I.6. Approche différentielle (équation de Blasius)

Blasius en 1908 introduisit une technique permettant de transformer le problème bien connu de l'écoulement de la couche limite laminaire sur une plaque plane (eqns. (I.10)-(I.12)) en une équation différentielle ordinaire. L'équation de Blasius a une grande importance dans beaucoup d'applications d'ingénierie, dont la solution fournit de très bonnes approximations pour l'épaisseur de la couche limite et la force de traînée totale dans les écoulements externes laminaires [14].

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0 \quad (\text{I.13})$$

Les conditions aux limites sont:

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\infty) = 1$$

Où la prime désigne la dérivation par rapport à η qui est appelée variable de similitude et définie comme [14]:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u}{\nu x}} \quad (\text{I.14})$$

I.7. Approche intégrale

I.7.1. Equation de Von Karman

Cette méthode intégrale basée sur deux articles de Von Karman et Pohlhausen en 1921, est souvent appelée méthode de Karman-Pohlhausen [12]. Les solutions exactes aux équations de la couche limite ne peuvent être trouvées que dans des cas simples, telles que dans le cas d'une couche limite sur une plaque plane horizontale sans gradient de pression dont la solution

est obtenue par Blasius. Pour les cas plus complexes, la méthode de Karman-Pohlhausen est une technique alternative très utile. A l'extérieur de la couche limite où l'écoulement est considéré comme idéal (non visqueux) et à partir de l'équation de mouvement suivant x (eqn. (I.11)), il s'ensuit que [15]:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_e \frac{du_e}{dx} \quad (\text{I.15})$$

Par la suite, l'équation intégrale de Von Karman peut être établie en intégrant l'équation de mouvement (eqn. (I.11)) par rapport à y de 0 à ∞ [15]:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2+H}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2} \quad (\text{I.16})$$

I.7.2. Profil de Pohlhausen

Pour fermer l'équation de Von Kármán, Pohlhausen a proposé en 1921 d'exprimer le profil de vitesse dans la couche limite à l'aide d'une fonction polynômiale de quatrième degré [13]:

$$\frac{u}{u_e} = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4 = P_4(\eta) \quad (\text{I.17})$$

$$\text{Avec : } \eta = \frac{y}{\delta}$$

Les conditions aux limites appropriées conduisent à un système de 5 équations dont la résolution permet de déterminer les 5 constantes A_i . Finalement, le profil de vitesse s'écrit [13]:

$$\frac{u}{u_e} = [2\eta - 2\eta^3 + \eta^4] + \frac{A}{6}\eta(1 - \eta)^3 \quad (\text{I.18})$$

Avec A est le paramètre de Pohlhausen. La méthode de Pohlhausen n'est qu'un exemple, parmi beaucoup d'autres, qui montre comment fermer l'équation de Von Kármán pour une couche limite laminaire [13].

I.8. Contrôle de la couche limite

Afin d'atténuer les conséquences défavorables de SWBLI, des techniques de contrôle de couche limite sont conçues et appliquées. Le principe de base est illustré dans la (Figure (I.2)). En comparant les deux couches limites, on obtient un profil plus complet après contrôle, ce qui suggère qu'une énergie cinétique plus élevée est contenue dans le flux proche du mur. La couche limite est donc mieux à même de supporter le gradient de pression

défavorable induit par le choc. Le paramètre couramment utilisé pour l'évaluation de l'efficacité est le facteur de forme H . Le but de la plupart des techniques de contrôle de flux est de manipuler le flux de la couche limite vers des valeurs plus petites de H . La relation entre H et la plénitude de la couche limite peut également être observée à travers la comparaison de couches limites laminaires et turbulentes. Une classification possible est au moyen de deux catégories en fonction de la nécessité ou non d'un apport d'énergie externe: le contrôle passif et le contrôle actif. Les deux catégories sont abordées dans cette section [16].

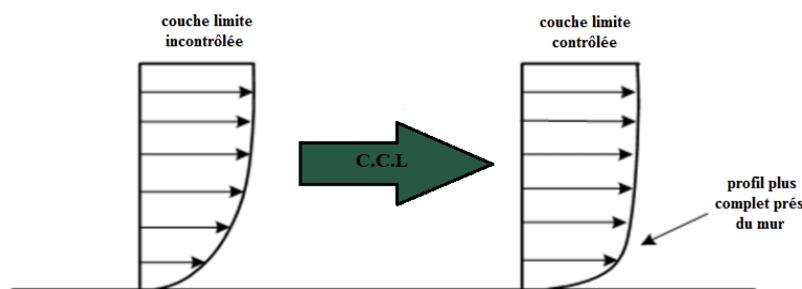


Figure I.2 : Objectif de base du contrôle de la couche limite [16].

I.8.1. Contrôle passif

Le principe consiste à modifier l'écoulement sans avoir besoin d'apport de masse ou d'énergie. Il peut être basique comme par exemple la forme du profil qui définit un gradient de pression, ce gradient peut être favorable à une couche limite laminaire ($\partial p/\partial x < 0$) sur une grande partie de corde, ou il peut être volontairement défavorable ($\partial p/\partial x > 0$) pour provoquer une transition vers une couche limite turbulente [17].

- a) **Façonnage géométrique:** Il s'agit de mise au point de forme de profil qui définit un gradient de pression précis voulu. Ce gradient peut être favorable à une couche limite laminaire sur une grande part du profil [18].
- b) **Parois rainurées ou "riblets" et le dispositif LEBU :** La paroi rainurée est une technique qui consiste à poser un revêtement comportant des milliers de rainures longitudinales de section généralement triangulaire [18].

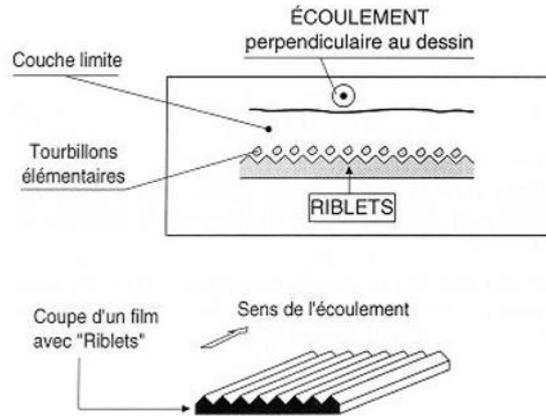


Figure I.3 : Contrôle d'écoulement par une paroi rainurée ou riblets [18].

c) Les générateurs de vortex mécaniques: Un générateur de vortex est une surface aérodynamique, constituée d'une arrête vive placée en incidence dans l'écoulement et générant ainsi un, ou plusieurs tourbillons, corotatifs ou contrarotatifs [18].

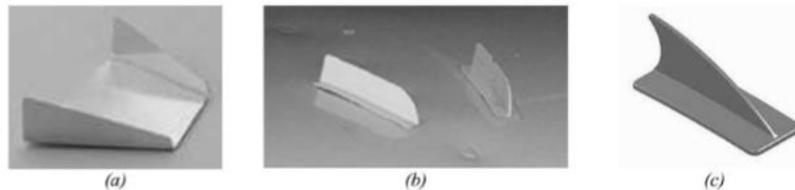


Figure I.4 : Générateurs de vortex (illustrées par trois différentes formes: a, b et c) [18].

d) Les dispositifs hypersustentateurs: Les dispositifs dits « hypersustentateurs » servent à modifier les propriétés d'un profil en augmentant la surface et/ou la courbure de l'aile, et ainsi retarder le décrochage ou augmenter le coefficient de portance sans dépasser la valeur critique de l'incidence [18].

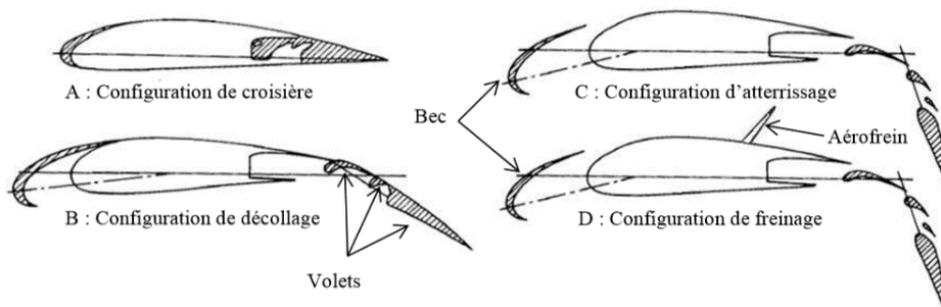


Figure I.5 : Dispositif hypersustentateur des ailes d'avions [19].

I.8.2. Contrôle actif

Le contrôle actif consiste à injecter une quantité d'énergie dans l'écoulement à contrôler. Cet apport d'énergie peut être :

- Pneumatique : soufflage, aspiration, jets pulsés, jets synthétiques.
- Mécanique : parois mobiles, volets, becs.
- Électrique : plasma froid (effet couronne).

Le contrôle actif est lui-même subdivisé en deux catégories : (Contrôle prédéterminé et Contrôle réactif) [17].

a) Contrôle actif par aspiration de la couche limite

Le principe de l'aspiration consiste à aspirer le fluide de faible vitesse, voisin de la paroi, ce qui permet de conserver une vitesse plus importante à la paroi, et donc d'éviter l'apparition d'un gradient inverse (Figure (I.6)). Cette technique cherche à maintenir le régime laminaire sur un parcours de la couche limite aussi long que possible pour une diminution considérable de la traînée, avec un nombre de Reynolds qui n'est pas trop important, c'est à dire sur les ailes, empennage, nacelles...[17].

b) Contrôle actif par soufflage de la couche limite

Le principe du soufflage continu en paroi est d'ajouter directement de la quantité de mouvement à la couche limite ralentie à proximité de la surface et permet de retarder son décollement. Cependant, comme l'aspiration, le soufflage continu ne permet pas un gain énergétique considérable [18].

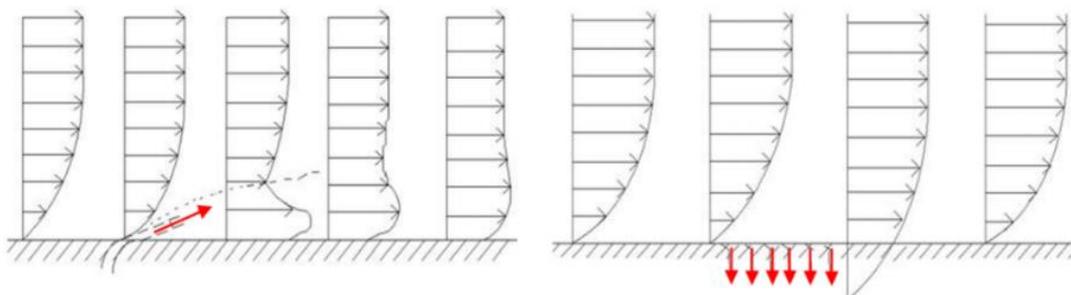
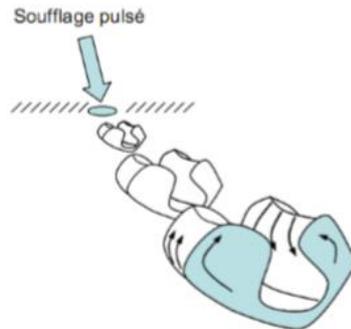


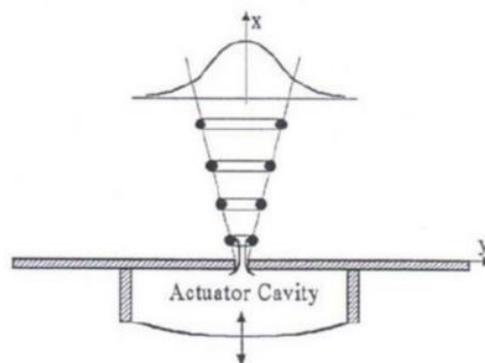
Figure I.6 : Soufflage et Aspiration de la couche limite [20].

c) Contrôle actif par jet pulsé

Une modulation en amplitude à basse fréquence des micro-jets permet une pénétration quatre fois plus importante dans l'écoulement transverse, on parle alors de jets pulsés. La fréquence d'actionnement a une influence directe sur la forme des jets alors créés [17].

**Figure I.7 : Jet pulsé [17].****d) Contrôle actif par jet synthétique**

Les jets synthétiques représentent la stratégie de contrôle la plus utilisée dans la littérature récente. Le fonctionnement de ces appareils est périodique et comporte une phase d'aspiration suivie d'une phase de soufflage. Le débit de masse moyen d'un jet synthétique est donc nul, ce qui est un avantage certain car cela permet de s'affranchir des problèmes dus au stockage de l'air soufflé ou aspiré [17].

**Figure I.8 : Schéma d'un jet synthétique [20].**

I.9. Méthode de différence finie

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques, elle a été introduite en 18^{ème} siècle par Euler. Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toutes ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. A l'aide de la méthode des différences finies l'équation aux dérivées partielles sera transformée en équation algébrique appliquée sur tous les nœuds de la maille de calcul; donc on obtient un système d'équations algébriques comportant autant d'équations que d'inconnues, résolu par une méthode appropriée [21].

Ceci implique que nous discrétisons le domaine espace-temps par une maille de pas Δt en temps et Δx en espace telles que les coordonnées discrètes soient [22]:

$$(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad (\text{I.19})$$

La solution discrète sera calculée en ces points (Figure (I.9)). Le principe des différences finies est donc de remplacer les dérivées en ces points par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dont on néglige les erreurs d'approximation [22].

Développements de Taylor par rapport à x :

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\Delta x}{1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O(\Delta x^2) \quad (\text{I.20})$$

Pour obtenir un problème discret on remplace les dérivées partielles par des expressions en différences finies telles que [22]:

- Différence finie en avant: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$
- Différence finie en arrière: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$
- Différence finie centrée: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$

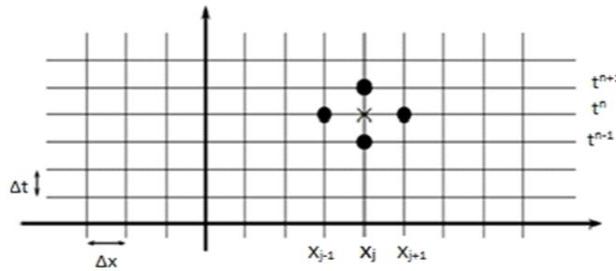


Figure I.9 : Maillage espace-temps [22].

I.9.1. Schéma explicite

Pour un schéma explicite, les variables à un nouveau pas de temps sont évaluées chaque point du maillage par des calculs directs à partir des valeurs déjà connues (Figure (I.10)) [22].

I.9.2. Schéma implicite

Pour les méthodes implicites, les variables sont calculées simultanément à un nouveau pas de temps, par la résolution d'un système avec autant d'inconnues que de nœuds de la maille (Figure(I.10)) [22].

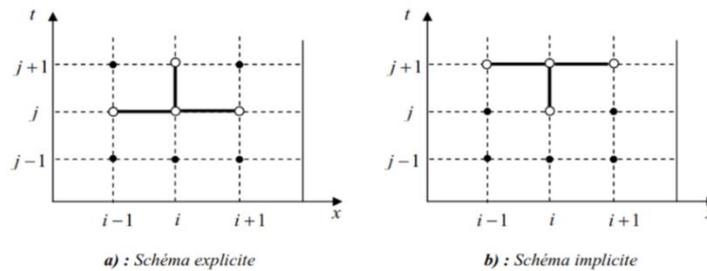


Figure I.10 : Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies [23].

I.10. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la méthode la plus simple de résolution, numérique d'équations différentielles ordinaires. Cette méthode est rarement utilisée en raison de manque de précision et de leur instabilité. Le but est d'obtenir une approximation de la solution en $t = t_1 = t_0 + h$. Nous n'avons pas l'équation de la courbe $y(t)$, mais nous en connaissons la pente $y'(t)$ en $t = t_0$. En effet, l'équation différentielle assure que :

$$y'(t_0) = g(t_0, y(t_0)) = g(t_0, y_0) \tag{I.21}$$

On peut donc suivre la droite passant par (t_0, y_0) et de pente $s(t_0, y_0)$. L'équation de cette droite, notée $d_0(t)$, est:

$$d_0(t) = y_0 + g(t_0, y_0)(t - t_0) \tag{I.22}$$

La méthode d'Euler est une méthode à pas séparé du premier ordre. Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation dy/dx par le schéma discret $(y_{i+1} - y_i)/h$. Le développement en série de Taylor permet d'approximer la solution [24] :

$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, y_n) \tag{I.23}$$

I.11. Méthode de Thomas

Nous avons appliqué l'algorithme de Thomas, également appelé l'algorithme de matrice tri-diagonale (TDMA), à la résolution d'un problème unidimensionnel, c.-à-d. lorsque la matrice d'équations résultante est tri-diagonale. Cet algorithme est basé sur une modification de la procédure d'élimination gaussienne qui tire parti des éléments nuls de la matrice [25].

$$a_i\phi_i + b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} = d_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{avec } c_1 = b_N = 0 \tag{I.24}$$



Figure I.11 : Arrangement de maille unidimensionnelle [26].

Ce qui suggère qu'en général ϕ_i peut être exprimé en fonction de ϕ_{i+1} selon [26]:

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \tag{I.25}$$

Lorsque l'équation (I.25) pour $i - 1$ est combinée avec l'équation (I.24) résulte [26]:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{i-1} = P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1} \\ a_i\phi_i + b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} = d_i \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_i = -\frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}\phi_{i+1} + \frac{d_i - c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}} \tag{I.26}$$

En comparant eqn. (I.25) avec eqn. (I.26) on trouve les relations de récurrence suivantes pour P_i et Q_i [26]:

$$P_i = -\frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}} \quad , \quad Q_i = \frac{d_i - c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{I.27}$$

Pour $i = N$ puisque $b_N = 0$, on en déduit [26]:

$$b_N = 0 \Rightarrow P_N = 0 \Rightarrow \phi_N = Q_N \tag{I.28}$$

Chapitre II

Revue de littérature

II.1. Introduction

Dans ce chapitre on va présenter des revues de littérature, dont les thèmes sont en rapport avec le problème envisagé dans ce mémoire. Les études incluses dans ces revues sont de nature expérimentale et théorique (numérique) avec toute sorte de méthode visant à résoudre des problèmes de la couche limite sur une plaque plans avec aspiration et refoulement.

II.2. Revue de littérature

NAHOUI et BAHI [27]

Cet article présente la couche limite laminaire, bidimensionnelle et incompressible sur une plaque plane et autour des profils NACA 0012 et NACA 661012 et son contrôle par soufflage et par aspiration, est étudiée par voie numérique. L'étude est basée sur le modèle de la couche limite de Prandtl utilisant la méthode des différences finies et le schéma de Cranck-Nicolson. La distribution de vitesse, l'épaisseur de la couche limite et le coefficient de frottement, sont déterminés et présentés avec et sans contrôle. L'application du contrôle a démontré son effet positif sur le point de transition et sur le coefficient de frottement. Les deux techniques de contrôle sont comparées pour différentes longueurs, vitesses et angles de soufflage et d'aspiration.

ROY et al [28]

Les auteurs ont effectué une analyse pour étudier l'influence de l'injection (aspiration) de fente non uniforme dans un écoulement laminaire permanent incompressible de type couche limite dans un canal divergent avec une vitesse décroissante de façon exponentielle en dehors de la couche limite. Les solutions non similaires à l'entrée du canal, aux bords de la fente et au point de séparation sont surmontées en appliquant un schéma implicite de différences finies avec la technique de quasi-linéarisation et le choix approprié de pas le long de la direction de l'écoulement. Ils ont observé que la séparation peut être retardée par l'aspiration non uniforme de fente et également en déplaçant la fente en aval mais l'injection donne un effet inverse.

PARVEEN et CHOWDHURY [29]

Dans cet article, l'analyse de stabilité d'un écoulement incompressible de couche limite laminaire est présentée. Pour cette analyse, l'équation différentielle partielle est convertie en équation différentielle ordinaire par une approximation appropriée. Le schéma implicite de

différences finies est utilisé pour trouver le point de séparation des équations de la couche limite. Les équations discrétisées finies pour l'écoulement donné forment à chaque position longitudinale un système d'équations linéaires avec une matrice de coefficients tri-diagonale. Pour assurer la validité des résultats, les méthodes ont été vérifiées avec des écoulements standards à savoir l'écoulement autour d'un cylindre circulaire et les écoulements de décélération linéaire de Howarth. Il est démontré que ces méthodes peuvent calculer avec précision les points de séparation de plusieurs écoulements pour lesquels des comparaisons sont faites avec des résultats publiés précédemment.

BOUREHLA et al [30]

Dans cet article, le profil analytique de couche limite au-dessus d'une plaque plane avec aspiration pariétale est obtenu conjointement par résolution numérique du problème de Blasius et analytique par la méthode intégrale approximative de Bianchini. Les lois obtenues dans le cas d'une aspiration uniforme ou non sont exprimées respectivement par les fonctions Lambert ou Erreur. Elles présentent une bonne approximation des profils numériques ou expérimentaux. Ce résultat permet de dégager l'expression analytique de diverses grandeurs caractéristiques de la couche limite et représente, de ce fait, une donnée nécessaire à la modélisation des effets d'aspiration pour le contrôle de la couche limite.

LAOUAR et MEZAACHE [31]

Le présent article traite l'influence de l'injection et de l'aspiration pariétales sur le comportement dynamique et thermique d'un écoulement turbulent externe. L'injection est produite en imposant une vitesse pariétale positive, ce qui correspond à des valeurs négatives de la fonction de courant. Quant à l'aspiration, elle est produite, en imposant des conditions pariétales inverses. L'écoulement est décrit par les équations de la couche limite bidimensionnelle et permanente. La turbulence est prise en considération à l'aide du modèle de turbulence de longueur de mélange basé sur la formulation algébrique de la viscosité apparente de Cebeci. L'étude numérique basée sur la méthode implicite des différences finies centrées est réalisée pour les deux cas laminaire et turbulent. Elle a permis aux auteurs de mettre en évidence l'influence des conditions pariétales d'injection et d'aspiration sur les grandeurs dynamiques et thermiques de l'écoulement.

ALI [32]

Dans le présent article l'auteur a obtenu des solutions auto-similaires des équations de couche limite laminaire dynamique et thermique dans un fluide initialement au repos entraîné par une

surface étirée soumise à une aspiration ou une injection. Cette surface a une vitesse et une température qui varient selon une loi de puissance. L'auteur a étudié l'effet de divers paramètres, tels que le nombre de Prandtl Pr , l'exposant de la température n , l'exposant de la vitesse m et le paramètre d'injection d , qui déterminent les profils de température et le coefficient de transfert de chaleur. Trois conditions aux limites de température ont été étudiées: distribution de température uniforme, température variable, et flux de chaleur uniforme à la surface. L'effet de la diminution de d s'avère significatif, en particulier pour les nombres élevés de Prandtl.

ALI [33]

Les solutions auto-similaires pour les équations de couche limite laminaire sur une surface étirée avec aspiration ou injection sont présentées. La surface est supposée se déplacer avec un profil de vitesse de la loi de puissance correspondant à un paramètre de vitesse $-0.93416 \leq m \leq -5.0$ et soumise à une aspiration ou injection correspondant à un paramètre de contrôle sans dimension $-1.0 \leq d \leq -4.0$. On a constaté que l'aspiration de la couche limite sur la surface étirée retarde la recirculation de l'écoulement tandis que l'injection augmente l'intensité de l'écoulement inverse pour des valeurs négatives de m plus élevées. Des solutions non-uniquees ont été obtenues pour diverses valeurs de m . La contrainte de cisaillement adimensionnelle à la surface étirée augmente avec l'augmentation de d jusqu'à un maximum, où il y a un équilibre entre la force de cisaillement et la force d'inertie de l'injection, puis elle diminue asymptotiquement à zéro pour certains écoulements décélérés ($m < 0$). Cependant, pour les écoulements accélérés ($m > 0$), elle augmente asymptotiquement à zéro.

WATANABE [34]

Le comportement des couches limites laminaires incompressibles dans un écoulement forcé au-dessus d'un coin avec l'aspiration ou l'injection uniforme a été théoriquement étudié. Les équations de couche limite le long d'un coin sont transformées en équations aux dérivées partielles non-similaires, et les équations différentielles ordinaires ont été obtenues au moyen de la méthode de différence-différentielle. Les solutions des équations résultantes sont exprimées sous une forme d'équations intégrales qui sont à leur tour résolues par des quadratures numériques itératives. Les résultats numériques sont donnés pour la distribution de la vitesse, de la température et des coefficients de frottement pariétal et de transfert de chaleur pour diverses valeurs du paramètre d'aspiration/injection.

MAROM et al [35]

Ce travail présente une étude expérimentale en cours visant à développer une compréhension fondamentale des mécanismes de contrôle des débits d'aspiration et de soufflage oscillatoire (SaOB) et fournit une base de données pour la validation des codes de CFD pour des écoulements instationnaires complexes avec systèmes de contrôle actif. Des études expérimentales ont été menées sur l'aspiration régulière seule, à partir d'un seul trou jusqu'à plusieurs trous et sur les actionneurs SaOB ; et sur le soufflage pulsé seul lors de l'interaction externe avec une couche limite laminaire sans gradient de pression. L'expérience utilise des mesures à fil chaud effectuées dans une soufflerie de couche limite laminaire avec aspiration régulière et soufflage pulsé à partir d'un seul actionneur. Les expériences d'aspiration montrent que la géométrie et la configuration des trous d'aspiration sont un facteur important dans la détermination de la structure et de la stabilité du champ d'écoulement de la couche laminaire en aval. Mesures des jets de soufflage oscillatoires (sans aspiration) interagissant avec une couche limite laminaire démontre que cette méthode de contrôle produit des structures instables qui peuvent être utilisées comme outil efficace de séparation des couches de limites.

LIN et al [36]

Cet article étudie l'écoulement stationnaire de couche limite laminaire du fluide de loi de puissance sur une surface plane avec l'effet de l'aspiration, d'injection et l'effet magnétique. un nouveau modèle de diffusion non linéaire est proposé qui tient compte des effets de la viscosité de loi de puissance sur les champs de concentration en supposant que le champ de concentration est similaire à celui de la vitesse, avec une loi de diffusion de Fick modifiée pour le fluide de loi de puissance. Les équations différentielles partielles fortement non linéaires sont réduites en un ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées et puis résolues numériquement par la méthode de tir couplée avec le schéma de Runge-Kutta et la méthode de Newton. L'effet du nombre de Hartmann, le paramètre d'aspiration ou d'injection, l'indice de loi de puissance, l'indice de loi de puissance de concentration, le paramètre de radio de concentration et le nombre généralisé de Schmidt sur le champ de vitesse et de concentration sont présentés graphiquement et analysés en détail.

YIH [37]

L'effet de l'aspiration (ou bien soufflage) constante sur un écoulement laminaire forcé bidimensionnel stationnaire autour d'un coin avec un flux de chaleur uniforme est analysé numériquement. Les équations non linéaires de la couche limite ont été transformées en des

équations différentielles qui ont été résolues avec un schéma implicite de différences finies (méthode de Keller-Box). Les résultats numériques pour la distribution de la vitesse, de la température, du coefficient de frottement local et du nombre de Nusselt local sont présentés pour diverses valeurs du nombre Prandtl Pr , du paramètre de gradient de pression m et du paramètre d'aspiration/soufflage ϵ . En général, il a été constaté que le coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt local augmentent due à l'aspiration du fluide. Cette tendance s'est inversée pour le soufflage du fluide. En plus, comme l'effet de soufflage est assez fort, c'est-à-dire $\epsilon \leq -0.65$, la séparation dans l'écoulement ne s'est produite que dans le cas de $m = 0$.

Chapitre III

Formulation mathématique

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va décrire dans un premier temps le problème physique. Ensuite, on va introduire les hypothèses suivant lesquelles le modèle mathématique régissant ce problème est développé, ainsi que les conditions aux limites nécessaires pour résoudre ce modèle. Et enfin, on va procéder à la résolution numérique du problème en question en utilisant la méthode des différences finies implicite (Keller-box) et la méthode d'Euler. Un algorithme montrant les différentes étapes de la procédure de calcul itératif sera également présenté à la fin de ce chapitre.

III.2. Descriptions du problème et hypothèses

Le présent travail vise à étudier l'effet de la distribution de vitesse d'aspiration/refoulement à travers la surface d'une plaque plane horizontale sur les différents paramètres de la couche limite se développant sur cette plaque après avoir été placée dans un écoulement uniforme. Donc, le domaine physique du problème est l'espace bidimensionnel dans le plan (x,y) délimité par la plaque horizontale à incidence nulle (Figure (III.1)). Dans le cadre de notre étude, les hypothèses simplificatrices appliquées sont les suivantes:

- L'écoulement est laminaire permanent.
- Le fluide est supposé newtonien incompressible.
- L'écoulement externe est uniforme de vitesse constante U_e (c'est-à-dire $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$).

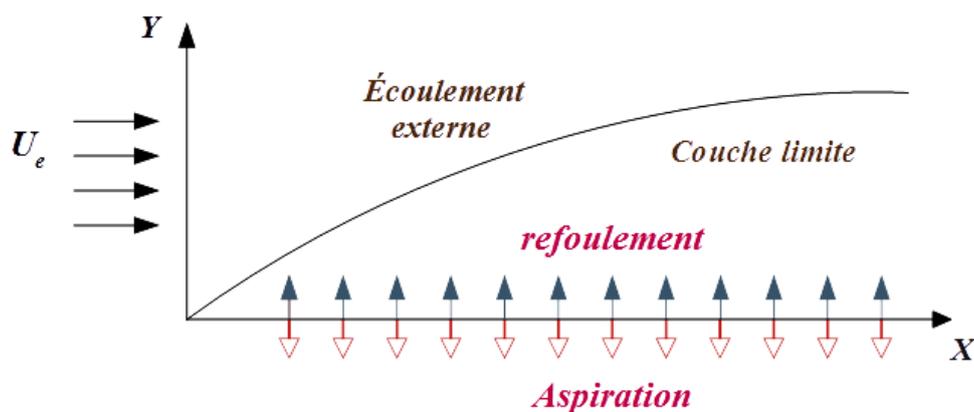


Figure III.1 : Couche limite sur une plaque plane avec aspiration et refoulement.

III.3. Modèle mathématique

En se basant sur les hypothèses susmentionnées, ce problème est régi par les équations de Prandtl sans gradient de pression :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III.2})$$

Où u et v sont les composants de vitesse dans les directions x et y respectivement, et ϑ est la viscosité cinématique du fluide. Lorsque le fluide s'écoule au voisinage d'une paroi solide, les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = v_p = C^{\text{ste}} \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$u = u_e = C^{\text{ste}} \quad \text{pour} \quad y \rightarrow \infty \quad (\text{III.4})$$

Où v_p est la vitesse de transfert de masse à la surface de la plaque avec ($v_p > 0$) pour le refoulement et ($v_p < 0$) pour l'aspiration, alors que ($v_p = 0$) correspond à une plaque imperméable.

III.4. Forme réduite des équations de Prandtl

Dans le but de simplifier le modèle mathématique précédent, l'analyse d'échelle nous permet d'estimer l'ordre de grandeur des termes de chaque équation et, par conséquent, de négliger certains termes devant d'autres. La forme de la fonction de courant suggérée par Blasius est [38]:

$$\psi(x, y) = \sqrt{u_e \vartheta x} f(\xi, \eta) \quad (\text{III.5})$$

Où $f(\xi, \eta)$ est la fonction de courant adimensionnelle et η et ξ sont des variables adimensionnelles définies par :

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{u_e}{x \vartheta}} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (\text{III.6})$$

À cette phase, il est clair que la fonction de courant sans dimension $f(\xi, \eta)$ est une fonction de la variable sans dimension ξ car la condition aux limites (III.3) ne permet pas d'avoir une solution auto-similaire de l'équation de la couche limite. La fonction de courant ψ est reliée au champ de vitesse par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e f' \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{(u_e \vartheta x)^{1/2}}{x} \left[\frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta f' \right] \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

A l'aide de (III.6) et (III.7), les dérivées premières et deuxième de la vitesse u parues dans l'équation (III.2), peut s'écrire comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e}{x} \left(\xi \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta f'' \right) \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_e \left(\frac{u_e}{\vartheta x} \right)^{1/2} f'' \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_e^2}{\vartheta x} f''' \quad (\text{III.10})$$

Maintenant on remplaçant les expressions (III.7)-(III.10) dans l'équation (III.2) nous obtenons après réarrangement:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{III.11})$$

Le membre à gauche de l'équation (III.11) est identique à celui de l'équation de Blasius; tandis que le membre à droite résulte de la condition d'imperméabilité ($v = v_p$) comme indiqué précédemment. De la même manière, les conditions aux limites (III.3) et (III.4) peuvent s'exprimer comme suit :

$$f' = 0 \quad \text{pour } \eta = 0 \quad (\text{III.12})$$

$$f' = 1 \quad \text{pour } \eta \rightarrow \infty \quad (\text{III.13})$$

A partir de (III.5) et (III.7) nous avons :

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(u_e \vartheta x)^{\frac{1}{2}} f \right]$$

Intégration selon x de cette équation entre 0 et x , et remplaçant par $y = 0$ donne :

$$f_p = -\frac{\int_0^x v_p dx}{(u_e \vartheta x)^{\frac{1}{2}}}$$

Etant donné que $v_p = C^{te}$, la troisième condition aux limites s'exprime par :

$$f_p = -\frac{v_p x}{(u_e \vartheta x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{v_p}{u_e} \frac{u_e x}{(u_e \vartheta x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{v_p}{u_e} \text{Re}_L^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} = \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.14})$$

Où Re_L est le nombre de Reynolds basé sur la longueur de la plaque, et $\lambda = -(v_p/u_e)Re_L^{\frac{1}{2}}$ est un paramètre sans dimension associé à l'intensité de la vitesse transpiration. La relation f_p reflète le fait que la surface de la plaque n'est pas une ligne de courant s'il y a une transpiration.

Afin de résoudre l'équation (III.11), il est commode de les réécrire sous une forme mieux adaptée à l'application des méthodes numériques souvent utilisées pour résoudre les problèmes de la couche limite. La première étape de la méthode adoptée pour résoudre le présent problème consiste à remplacer l'équation de troisième ordre (III.17) par un système de deux équations de première et de second ordre, telles que:

$$f' = g \tag{III.15}$$

$$g'' + \frac{1}{2}fg' = \xi \left\{ g \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right) - g' \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \right\} \tag{III.16}$$

Maintenant les conditions aux limites (III.12)-(III.14) deviennent :

$$f(\xi, 0) = \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \qquad g(\xi, 0) = 0 \qquad g(\xi, \infty) = 1 \tag{III.17}$$

III.5. Formulation du problème en différences finies

Dans cette section nous allons appliquer la méthode du point milieu avec un schéma "décentré arrière" pour la discrétisation de l'équation (III.15), et une technique similaire à celle de la méthode de Keller-box pour la discrétisation de l'équation (III.16) selon le schéma ci-dessous (Figure III.2)).

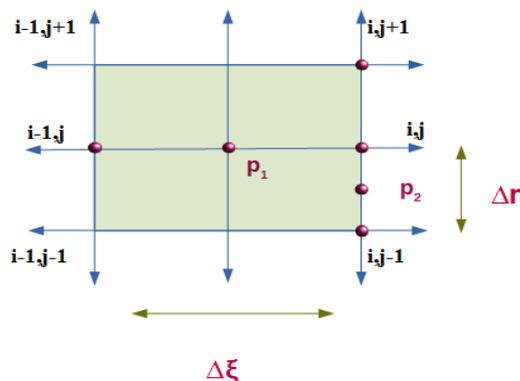


Figure III.2 : Schéma de discrétisation.

En commençant par l'équation (III.15), la discrétisation autour du point P₂ donne :

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta} = \left(\frac{g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2} \right) \quad (\text{III.18})$$

De même, la discrétisation de l'équation (III.16) autour du point P₁ donne:

$$\begin{aligned} \frac{g''_{i,j} + g''_{i-1,j}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2} \right) \left(\frac{g'_{i,j} + g'_{i-1,j}}{2} \right) = \\ \left(\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \left\{ \left(\frac{g_{i,j} + g_{i-1,j}}{2} \right) \left(\frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{\Delta\xi} \right) - \left(\frac{g'_{i,j} + g'_{i-1,j}}{2} \right) \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$\begin{cases} g''_{i,j} = \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \\ g''_{i-1,j} = \frac{g_{i-1,j+1} - 2g_{i-1,j} + g_{i-1,j-1}}{\Delta\eta^2} \\ g'_{i,j} = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \\ g'_{i-1,j} = \frac{g_{i-1,j+1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta\eta} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Après avoir remplacé les approximations en différences finies (III.20) dans (III.19), le réarrangement des équations (III.18) et (III.19) conduit à:

$$f_{i,j} = f_{i,j-1} + \Delta\eta \left(\frac{g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2} \right) \quad (\text{III.21})$$

$$A_{i,j} g_{i,j} = B_{i,j} g_{i,j+1} + C_{i,j} g_{i,j-1} + D_{i,j} \quad (\text{III.22})$$

Où les coefficients $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ et $D_{i,j}$ de l'équation (III.22) sont donnés par:

$$A_{i,j} = \frac{2}{\Delta\eta^2} + \frac{\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2}}{\Delta\xi} g_{i,j}$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{f_{i,j} + f_{i-1,j}}{8\Delta\eta} + \left(\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\eta\Delta\xi} \right)$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{\Delta\eta^2} - \frac{f_{i,j} + f_{i-1,j}}{8\Delta\eta} - \left(\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\eta\Delta\xi} \right)$$

$$D_{i,j} = \left(\frac{g_{i-1,j+1} - 2g_{i-1,j} + g_{i-1,j-1}}{\Delta\eta^2} \right) + \left(\frac{f_{i,j} + f_{i-1,j}}{4} \right) \left(\frac{g_{i-1,j+1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta\eta} \right) +$$

$$\frac{\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2}}{\Delta\xi} g_{i-1,j}^2 + \left(\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2} \right) \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\xi} \right) \left(\frac{g_{i-1,j+1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta\eta} \right)$$

Ces équations doivent être résolues de manière à satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$f_{i,1} = \lambda \xi_i^{\frac{1}{2}} \qquad g_{i,1} = 0 \qquad g_{i,M} = 1 \quad (\text{III.23})$$

Le domaine physique de calcul est divisé en $(N-1) \times (M-1)$ sous domaines uniformes appelés volume de contrôle, avec N et M sont les nombres de nœuds (voir Figure (III.3)). Etant donné que le domaine physique est semi-infini, on doit définir la limite supérieure, soit η_∞ , qui doit être suffisamment grande pour s'assurer qu'elle soit située en dehors de la couche limite et par conséquent la condition aux limites correspondante $g(\xi, \eta_\infty) = 1$ soit vérifiée; pour cette raison la valeur $\eta_\infty = 30$ est utilisée.

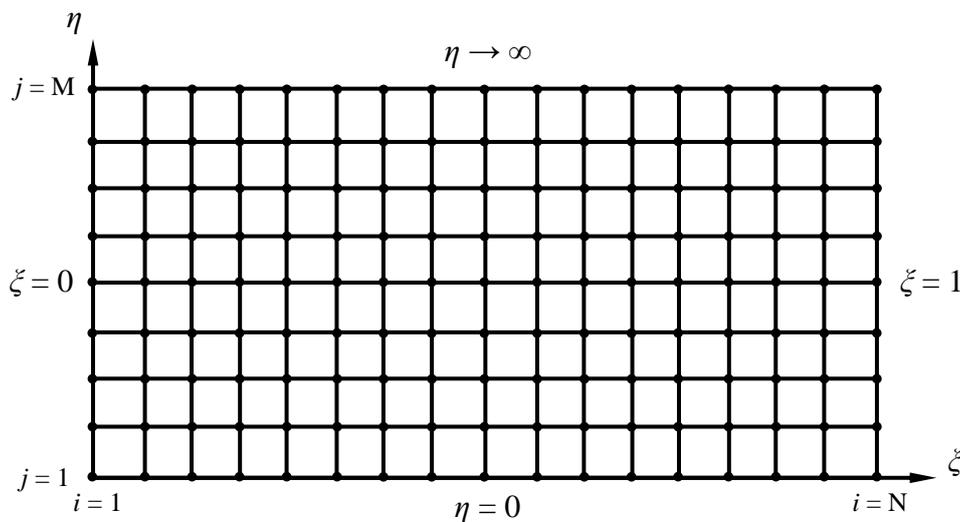


Figure III.3 : Domaine de calcul numérique.

III.6. Algorithme de résolution numérique

Un système d'équations algébriques non linéaires est obtenu car les coefficients qui apparaissent dans les équations discrétisées dépendent des variables elles-mêmes, ces équations nécessitent l'utilisation d'une méthode numérique itérative pour leur résolution. Les équations (III. 21) et (III. 22), avec les conditions aux limites (III. 23) forment un système d'équations algébriques non linéaires couplées qui doivent être résolues simultanément en utilisant un procédé itératif (Gauss-Seidel par exemple). Pour $\xi = 0$, l'équation (III.16) devient identique à celle de Blasius, et la solution à cette position devient une condition aux limites pour la position suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtient la solution dans tout le domaine de calcul.

Etant donné que le système d'équations algébriques décrit par l'équation (III. 22) ayant une structure tri-diagonale, il peut être résolu en utilisant l'algorithme de Thomas qui permet la propagation de l'information des deux limites du domaine de calcul aux points internes, ce qui augmente la vitesse de convergence vers la solution

unique du problème. Donc, l'équation (III.22) peut s'écrire sous forme de la relation de récurrence suivante :

$$g_{i,j} = P_{i,j} g_{i,j+1} + Q_{i,j} \tag{III.24}$$

De même, pour $g_{i,j-1}$ nous avons :

$$g_{i,j-1} = P_{i,j-1} g_{i,j} + Q_{i,j-1} \tag{III.25}$$

En substituant cette équation dans (III.22) nous obtenons :

$$A_{i,j}g_{i,j} = B_{i,j}g_{i,j+1} + C_{i,j}(P_{i,j-1} g_{i,j} + Q_{i,j-1}) + D_{i,j} \tag{III.26}$$

En réarrangeant cette équation sous la forme de l'équation (III.24), les coefficients $P_{i,j}$ et $Q_{i,j}$ s'obtiennent comme suit :

$$P_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \qquad Q_{i,j} = \frac{C_{i,j}Q_{i,j-1} + D_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \tag{III.27}$$

Le procédé algorithmique suivant dans dans l'organigramme suivant :

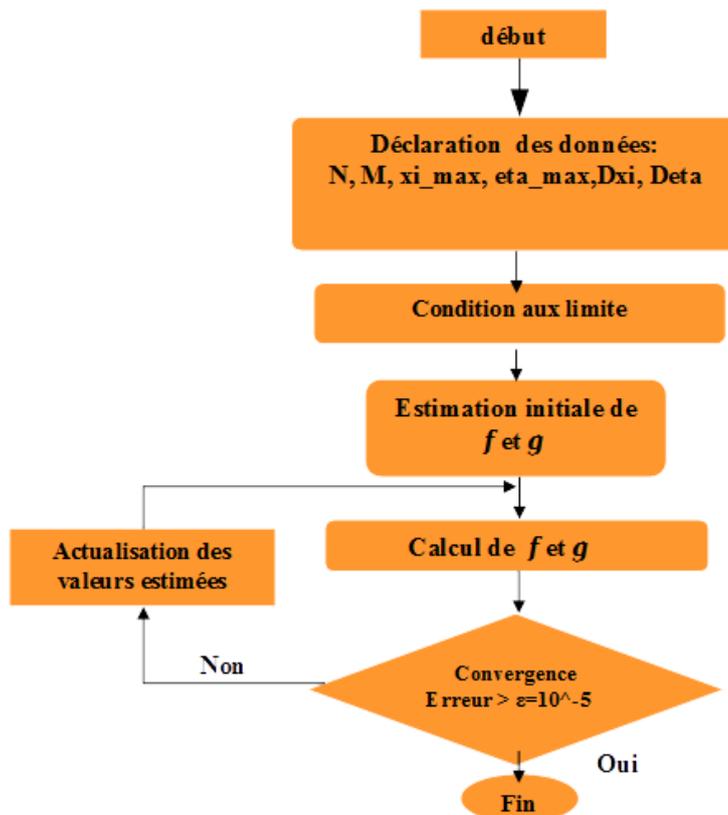


Figure III.4: Organigramme de résolution.

Chapitre IV

Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de l'étude numérique de la couche limite laminaire se développant sur une plaque plane horizontale avec aspiration ou refoulement. Pour la résolution numérique des équations régissant le présent problème, nous avons utilisé deux schémas de discrétisation, Euler et Keller-box; dont la solution du système d'équations (de matrice de coefficients tri-diagonaux) qui en résultent est obtenue par la méthode de Thomas. La procédure de calcul itératif est effectuée avec un programme informatique que nous avons développé sous Matlab. Une valeur maximale de la variable adimensionnelle normale à la surface de la plaque $\eta = 30$ est choisie. Les résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre de transpiration $\lambda = -\left(\frac{v_p}{u_e}\right) \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}$ sont présentés sous forme de graphes.

IV.2. Choix de maillage

Afin de sélectionner le maillage uniforme assurant un compromis entre la précision des résultats et le coût (temps) de calcul, il est nécessaire d'effectuer un test numérique pour montrer la sensibilité des résultats du choix de maillage. Le nombre de nœuds $N \times M$ à partir duquel les résultats (en terme de $\overline{f''(0)}$) ne dépendent pas considérablement du raffinement de maillage sera utilisé dans cette étude.

Etant donné que le gradient de vitesse suivant η est plus important que celui suivant ξ , on s'intéresse qu'au raffinement de maillage suivant η ; donc, le nombre de nœuds le long de la plaque N prend une valeur fixe soit égale à 101, alors que le nombre de nœuds dans la direction normale à la plaque M allant de 101 à 2001.

On peut clairement voir à partir de la figure (IV.1) que $\overline{f''(0)}$ varie en fonction du nombre de nœuds; mais lorsque ce dernier augmente, la valeur de $\overline{f''(0)}$ tend à se stabiliser. L'erreur relative entre la valeur de $\overline{f''(0)}$ pour $M=1001$ et $M=2001$ est inférieure à 0.3 % dans le cas

d'aspiration ($\lambda = 0.5$) et de refoulement ($\lambda = -0.5$); donc, le maillage uniforme de 101×1001

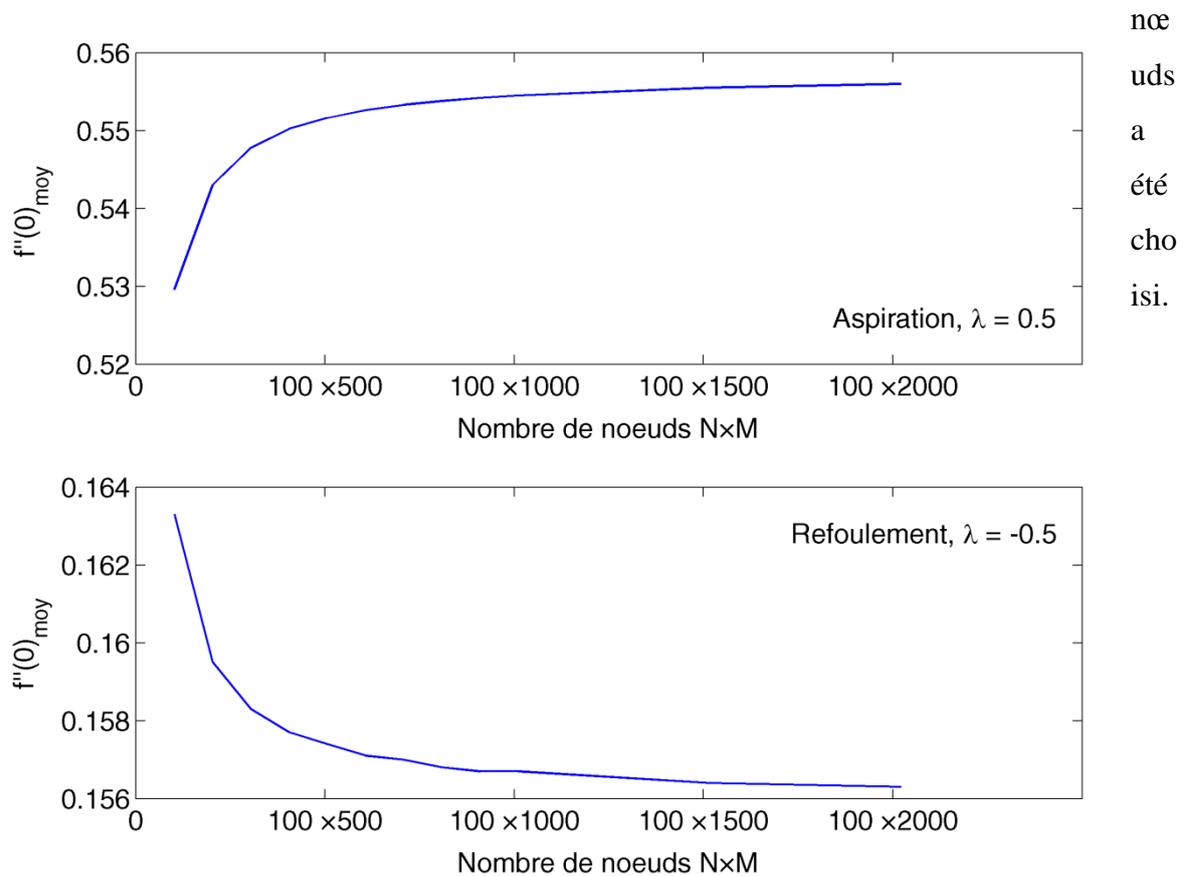


Figure IV.1 : Variation de $\overline{f''(0)}$ en fonction du nombre de nœuds $N \times M$.

IV.3. Interprétation des résultats

Les résultats de cette étude sont présentés ci-dessous pour différentes valeurs du paramètre de transpiration, $\lambda = -0.863; -0.5; 0; 1; 2$. Dans le cas d'une plaque (imperméable) où $\lambda = 0$, on obtient la condition aux limites $f_p = 0$ et la fonction de courant réduite f peut s'exprimer en fonction d'une seule variable η dite variable de similitude. L'équation à résoudre dans ce cas est celle de Blasius ($f''' + \frac{1}{2}f f'' = 0$) et la solution obtenue est dite solution auto-

similaire car quelque soit la position sur l'axe des x les profils de la vitesse longitudinale u sont identiques en η . La figure (IV.2) montre la variation des f , f' et f'' en fonction de η qui peuvent être comparées avec la solution exacte de Blasius afin de vérifier notre programme.

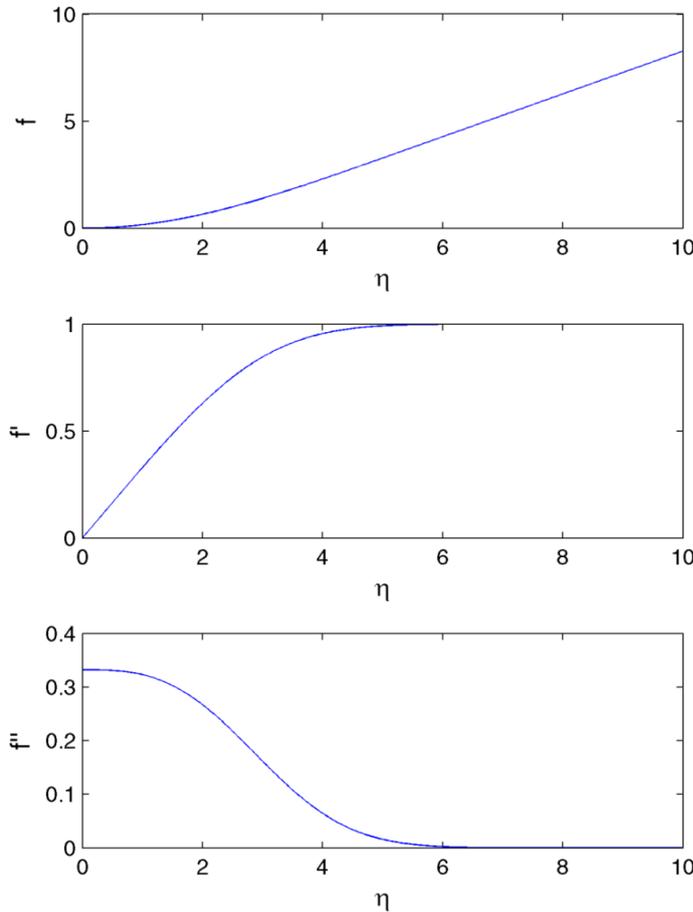


Figure IV.2 : Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 0$ (solution de Blasius).

Pour $\lambda \neq 0$, la fonction de courant réduite f varie en fonction des deux variables ξ et η , dont les valeurs positives sont associées à l'aspiration du fluide et les valeurs négatives sont associées au refoulement du fluide. La solution non auto-similaire permettant les changements des profils de vitesse le long de la plaque est présentée dans ces cas pour trois positions $\xi = 0; 0.5; 1$. La solution montre que pour une couche limite attachée (sans séparation) le

paramètre de transpiration λ doit être supérieur à une valeur limite égale approximativement à -0.863.

IV.3.1. Avec aspiration ($\lambda > 0$)

Les figures (IV.3) et (IV.4) montrent la variation des f , f' et f'' en fonction de η respectivement pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. A partir de ces figures on peut constater que l'aspiration a un effet similaire à celui d'un gradient de pression négatif (favorable) qui permet à la contrainte de cisaillement à la paroi $\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p$ d'augmenter, car les particules fluides de quantité de mouvement (suivant x) faible à l'intérieur de la couche limite sont aspirées à travers la surface de la plaque laissant leur place aux particules fluides de quantité de mouvement (suivant x) plus élevée se trouvant à l'extérieur de la couche limites.

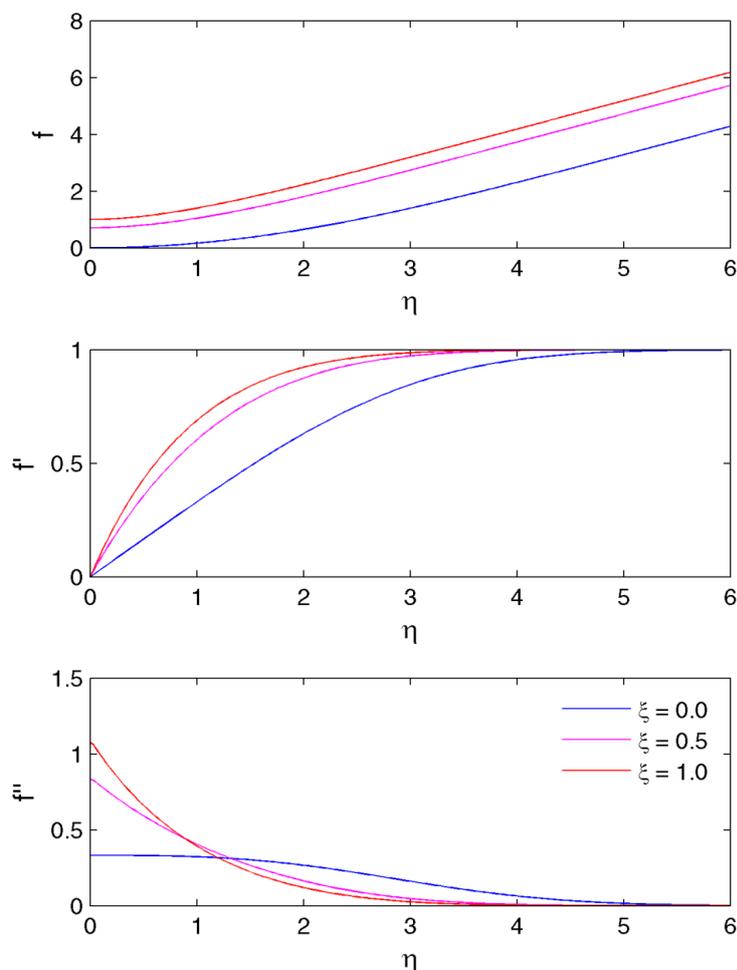


Figure IV.3 : Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 1$.

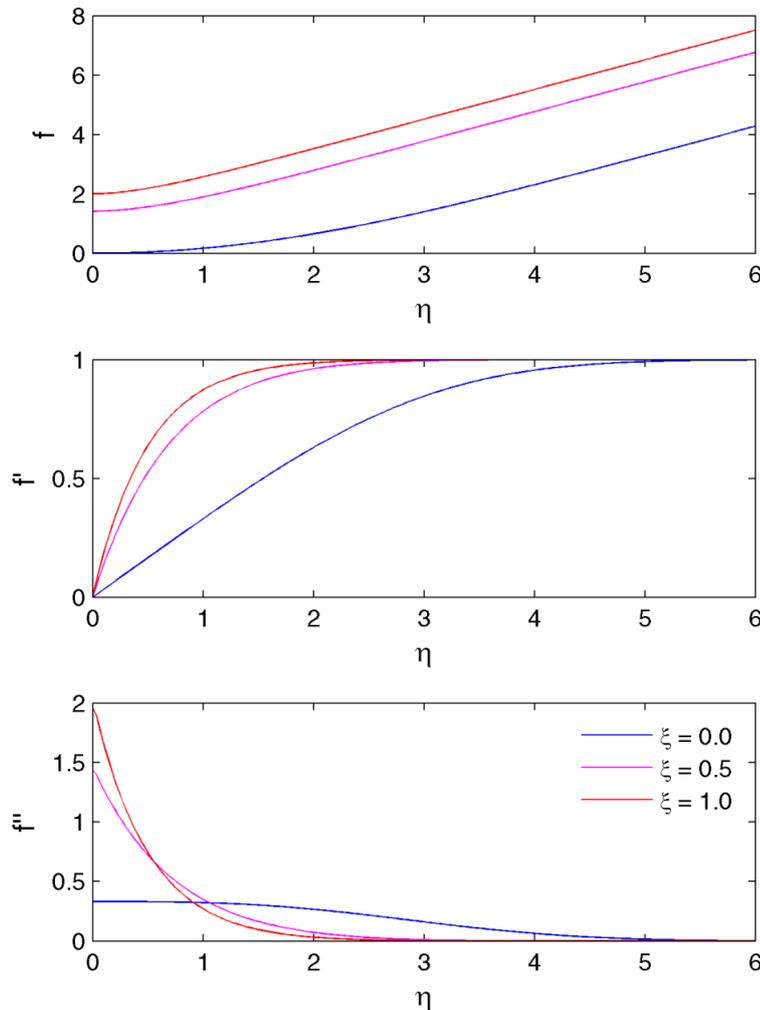


Figure IV. 4 : Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = 2$.

IV.3.2. Avec refoulement ($\lambda < 0$)

Les figures (IV.5) et (IV.6) montrent la variation des f , f' et f'' en fonction de η respectivement pour $\lambda = -0.5$ et $\lambda = -0.863$. A partir de ces figures on peut constater que le refoulement du fluide a un effet similaire à celui d'un gradient de pression positif (adverse) qui permet à la contrainte de cisaillement près de la paroi de diminuer jusqu'à ce qu'elle s'annule à $\xi = 1$ pour $\lambda = -0.863$, car en injectant un fluide de quantité de mouvement (suivant x) égale à zéro, les particules fluides de quantité de mouvement (suivant x) faible à

l'intérieur de la couche limite seront déplacées loin de la plaque ce qui va provoquer éventuellement la séparation de la couche limite pour des vitesses de refoulement élevées. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas avoir une solution des équations ((III.5) - (III.17)) pour $\lambda < -0.863$, puisque à cette valeur la séparation se produit juste au bord de fuite de la plaque.

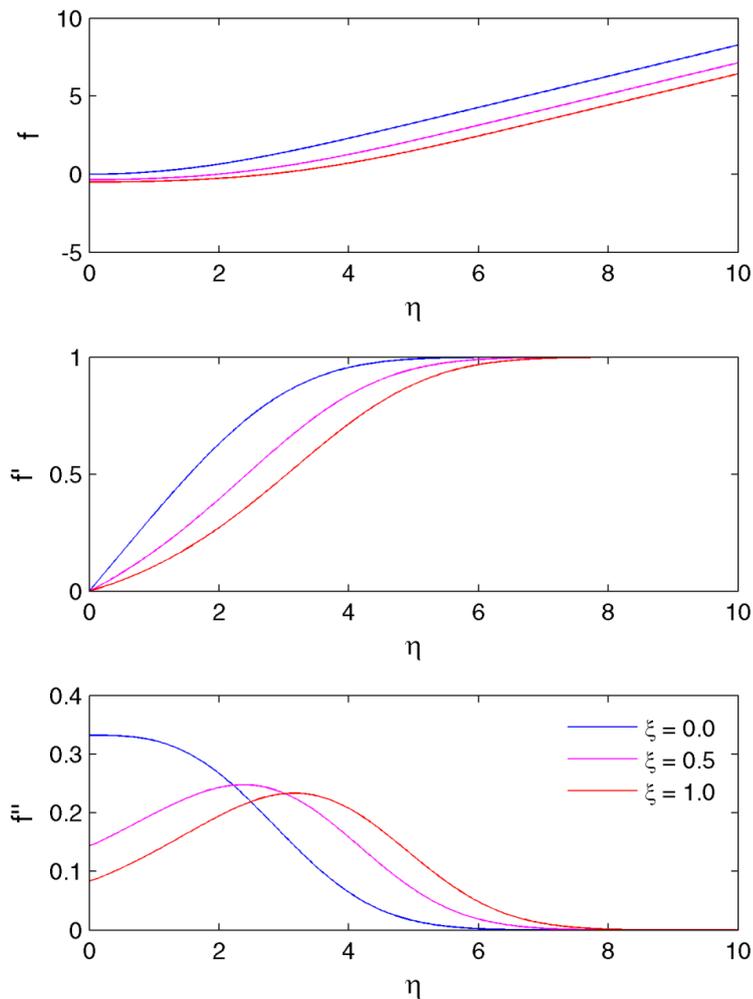


Figure IV.5 : Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = -0.5$.

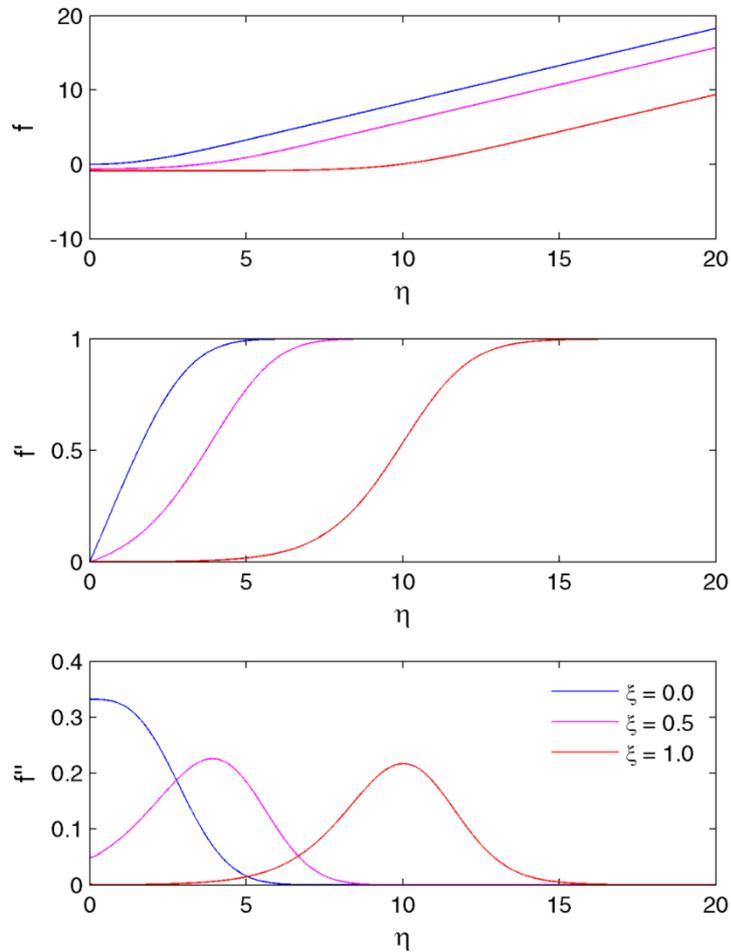


Figure IV.6 : Variation de f , f' et f'' en fonction de η pour $\lambda = -0.863$.

IV.4. Conclusion

Les résultats présentés ci-dessus montrent l'influence de la vitesse de transpiration, en terme du paramètre adimensionnel λ , sur le champ de vitesse d'un écoulement de la couche limite laminaire attachée sur une plaque plane horizontale. Ceci nous permet de sélectionner la valeur optimale de cette vitesse pour une application donnée. Mentionnons également que ces résultats correspondent à $\lambda \geq -0.863$, comme la transformation de variables (III.5) et (III.6) utilisée plus haut n'est pas adéquate pour λ inférieur à cette valeur.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié numériquement le phénomène de la couche limite laminaire qui se développe sur une plaque plane horizontale avec aspiration ou refoulement. Ce phénomène est très important pour réduire la consommation d'énergie ou améliorer les performances des avions, turbines, compresseurs, éoliennes, etc., ce qui a toujours été une cible majeure pour tous les chercheurs dans le domaine de l'aérodynamique. Notre étude a montré l'effet de l'aspiration et du refoulement sur la distribution de vitesse dans la couche limite en utilisant les équations de Prandtl et les conditions aux limites associées.

L'analyse dimensionnelle montre que pour le cas présent, il existe une solution auto-similaire de l'équation (III.11) (c.-à-d. que la solution ne dépend que de la variable η) si la vitesse de transpiration est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

L'expérimentation numérique montre que dans le cas de refoulement, il existe une solution sur toute la plaque si le paramètre adimensionnel λ est supérieur ou égal à -0.863; pour λ inférieur à cette valeur, une séparation de la couche limite se produit avant le bord de fuite et la solution existe seulement du bord d'attaque au point de séparation.

La distribution de la vitesse longitudinale sur la plaque plane reflète bien le phénomène de la couche limite qui peut être observé à l'aide des techniques de visualisation. Ces distributions nous permettent de déterminer les caractéristiques importantes de ce phénomène contrôlé par le paramètre λ .

Recherche bibliographique

- [1] **M. MEZIANI, Y. SALHI**. Influence du contrôle de la couche limite dynamique laminaire sur le frottement partiel. mémoire de master. Université de Biskra, PP [1], (2015).
- [2] **M. GHODBANE et al.** Etude numérique et validation des caractéristiques aérodynamiques d'écoulement autour des obstacles ovales en fonction des paramètres géométriques. *Revue des Energies Renouvelables* 18(3), PP [493-502], (2015).
- [3] **F. AZIEZ**. Simulation numérique de la convection naturelle sur une plaque plane horizontale. Mémoire de master. Université de Biskra, PP [1-6-7], (2017/2018).
- [4] **A. NAHOUI**. Contrôle de la couche limite laminaire d'un écoulement stationnaire, visqueux, compressible et subsonique autour d'un profil bidimensionnel. Thèse de doctorat. Université Constantine 1, PP [1], (2018).
- [5] **A. SINGH**. Studies on variation of boundary layer parameters on rough surfaces in turbulent boundary layer zone. National institute of technology Rourkela, PP [1], (2015).
- [6] **N. MOKRANI**. Simulation numérique par code fluent d'une couche limite contrôlée et non contrôlée sur un profil d'aile NACA 0012 à incidence de 18°. Mémoire de master. Université de Tizi Ouzou, PP [22], (2009/2010).
- [7] **T. BENYAMMA , A. BACI**. Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse. Mémoire de master. Université Biskra, PP [5], (2017-2018).
- [8] **S. NEMDILI**. Investigation numérique de l'écoulement turbulent et du transitoire de chaleur autour d'un élément cubique avec jet impactant. Thèse de doctorat. Université d'Oran, PP [55], (2014/2015).
- [9] **L. BILLON**. Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries complexe. Thèse de doctorat. Université de Paris, PP [78-79], (2016).

- [10] **M. RECHACHE, M. A. BEN AZZOUZ**. Réalisation d'un logiciel pédagogique d'analyse d'écoulement potentiel subsonique autour. Mémoire de master. Université de Blida, PP [59], (2011).
- [11] **A. BENSLIMANE**. Introduction à la mécanique de fluide. Cours. Université de Bejaia, PP [68], (2011).
- [12] **H. SCHLICHING**. Boundary-Layer theory. 9th edition: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, PP [51], (2017).
- [13] **CH. BAYEUX**. Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle Applications au givrage. Thèse de doctorat. Université de Toulouse, PP [4-5], (2017).
- [14] **U. KARABULUT, A. KILIÇ**. Various techniques to solve Blasius equation. Article Bandırma Onyedi Eylül University, PP [130], (2018).
- [15] **R. OLIMUDER**. The boundary layer of a fluid stream over a flat plat. University of twente, PP [13-14], (2013).
- [16] **Z. SUN**. Micro Ramps in Supersonic Turbulent Boundary Layers. Master of Engineering. University of China, PP [5-6], (2014).
- [17] **H. IDER, M. ILLOUL**. Contrôle actif par soufflage du décollement naissant à l'extrados du profil NACA 0015. Mémoire master. Université de Tizi Ouzou, PP [16-18-21], (2016/2017).
- [18] **M. GAOUIR**. Contrôle passif de l'écoulement à l'extrados du profil NACA 4412. Mémoire master. Université de Tizi Ouzou, PP [17-18-20], (2013/2014).
- [19] **F. DEMERS**. Amélioration d'aérodynamisme des ailes d'avion par actionnement plasma. Université de Montreal, PP [1], (2015).
- [20] **A. M. OUADAH**. Contrôle du décollement de la couche limite sur les ailes d'avions par jet synthétique. Mémoire master. Université d'Oran, PP [9-12], (2012/2013).
- [21] **A. BOUHELAL**. Contribution à l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle mince dans un intervalle de nombre de mach: $0 < m < 3$. Mémoire de master. Université de Biskra, PP [52], (2014).

- [22] **H. ELGOUIZI**. L'application de la Méthode des Différences Finies au modèle de Barré de Saint-Venan. Mémoire master. Université de Msila, PP [42-43-45], (2011/2012).
- [23] **A. MAHFOUDI**. Contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite gravitaire en charge. Mémoire master. École nationale supérieure d'hydraulique - Arbaoui Abdellah, PP [28], (2015).
- [24] **K. MEFTAH, L. SDIRA**. Méthode Numérique. Cours master 1. Université de Biskra, PP [55-56], (2015).
- [25] **L. CHUNLEI**. Numerical Solution Techniques in Mechanical and Aerospace Engineering. <https://www2.seas.gwu.edu/~chliang/mae286/lecture3b.pdf>, PP [5].
- [26] **F. MOUKALLED et al.** The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. New York Dordrecht London, PP [316-317], (2016).
- [27] **A. NAHOUI, L. BAHI**. Incompressible laminar boundary layer control by blowing and suction. Université Mentouri, Constantine 1, Algeria, n°38, PP [21-28], (2014).
- [28] **S. ROY, et al.** Role of non-uniform slot injection (suction) model on the separation of a laminar boundary layer flow. Journal of Mathematical and Computer Modelling, vol 50, n° (1-2), PP [45-52], (2009).
- [29] **N. PARVEEN, Md. M. K. CHOWDHURY**. Stability analysis of the laminar boundary layer flow. Journal of Bangladesh Mathematical Society, vol 29, PP [23-34], (2009).
- [30] **A. BOUREHLA et al.** Approximations analytiques par les fonctions Lambert et Erreur des profils de couche limite laminaire avec aspiration uniforme ou non. Congrès français de mécanique. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 Rue Louis Blanc, 92400 Courbevoie, France (FR), (2011).
- [31] **A. LAOUAR, E. MEZAACHE**. Étude de l'influence de l'injection et de l'aspiration pariétales sur le comportement dynamique et thermique d'un écoulement externe turbulent. Sous la Condition de Flux de Chaleur et de Température Imposés. Mémoire de magister. Université 20 Août 55, (2005).

- [32] **M. E. ALI**. The effect of suction or injection on the laminar boundary layer development over a stretched surface. *Journal of King Saud University-Engineering Sciences*, vol 8, n°1, PP [43-57], (1996).
- [33] **M. E. ALI**. On thermal boundary layer on a power-law stretched surface with suction or injection. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 16.4, PP [280-290], (1995).
- [34] **T. WATANABE**. Thermal boundary layers over a wedge with uniform suction or injection in forced flow. *Acta Mechanica*, vol 83, n° 3-4, PP [119-126], (1990).
- [35] **L. MAROM et al**. Suction and Pulsed Blowing Interaction with a Laminar Boundary Layer. In: 55th ISR Aero Conf, (2015).
- [36] **Y. LIN et al**. A new diffusion for laminar boundary layer flow of power law fluids past a flat surface with magnetic effect and suction or injection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 90, PP [1090-1097], (2015)
- [37] **K. A. YIH**. Uniform suction/blowing effect on forced convection about a wedge: uniform heat flux. *Acta Mechanica*, vol. 128, n° (3-4), PP [173-181], (1998).
- [38] **T. CEBECI, P. BRADSHAW**. Physical and computational aspects of convective heat transfer. Springer Science & Business Media, PP [76], (2012).