République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Numéro d'ordre : ....

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

IMANE MANCER

Titre

EDSR avec coefficients de croissance linéaire et continue unidimensionnels

Membres du Comité d'Examen :

Pr. Khalfallah Nabil	Université de Biskra	Président
Pr. Manssouri Badreddinne	Université de Biskra	Encadreur
Dr. Labed Saloua	Université de Biskra	Examinateur

Juin 2021

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier deux résultats sur les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé). Le premier consiste d'une étude de base traitant l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où le générateur est Lipschitzien qui a été établi en 1990 par E. Pardoux et S. Peng. Tandis que le deuxième traite l'existence de la solution dans le cas unidimensionnel, où le générateur est de croissance linéaire et continue, qui a été établi en 1997 par Lepeltier et San Martin.

Mots-clés : Equation différentielle stochastique rétrograde, Générateur Lipschitzien, Cas unidimensionnel, Générateur de croissance linéaire et continue, Existence et unicité du solution.

الملخص

إن الهدف الأساسي لهذا العمل دراسة نتيجتين حول الحل بالنسبة للمعـــادلات التفاضلية العشوائية التراجعية. النتيجة الأولى أساسية تدرس وجود ووحدانية الحل عندما يكون المولد ليبشيزي وتعود لسنة 1990. أما النتيجة الثانية تدرس وجــود الحل في الحـــالة أحادية البعد عندما يكون المولد مستمر ذو نمو خطي وتعود لسنة 1997.

الكلمات المفتاحية :المعـادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، مولد ليبشيزي، الحـالة أحـادية البعد، مولد مستمر ذو نمو خطي، وجود الحل.

Abstract

The main objective of this work is to study two results on the solutions of Backward Stochastic Differential Equations (BSDE for short). The first consists of a basic study dealing with the existence and uniqueness of the solution in the case where the generator is Lipschitzien, which was established in 1990 by E. Pardoux and S. Peng. While the second deals with the existence of the solution in the one-dimensional case, where the generator is of linear and continuous growth, which was established in 1997 by Lepeltier and San Martin.

Key-words : Backward stochastic differential equation, Lipschitzian generator, One-dimensional case, Generator of linear and continuous growth, Existence and uniqueness of the solution.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu, **Allah** Le tout-puissant, qui m'a donné la volonté, la force et les bonnes chances pour réussir à chaque étape de ma vie.

Mes sincères remerciements à mon honorable encadreur le **Pr. Manssouri Badreddine**, de sa disponibilité, ses précieux conseils et la confiance, qu'il m'a accordée, qui ont fortement contribué à mener à bien ce travail.

Je remercie également les membres de jury, **Pr. Khalfallah Nabil** et **Dr. Labed Saloua**, qui ont accepté de lire et d'évaluer ce travail.

Avec un grand honneur, je veux exprimer ma profonde gratitude à messieurs **Pr. Chala Adel** et **Pr. Menacer Tidjani**, pour leurs conseils, encouragements et la main d'aide qu'ils me donnent tout au long mon parcours d'étude.

Enfin je voudrais dire :

Merci ma famille, mes enseignants, mes amis et tous les personnes qui m'ont encouragé.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$v.a$	:	Variable aléatoire.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance de la $v.a.$ X par rapport à une probabilité $\mathbb{P}$ fixée initialement.
MB	:	Mouvement Brownien.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	:	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0,T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$
$\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	:	Tribus Boréliènne sur $\mathbb{R}^d$.
1_A	:	Indicatrice de A, définie par : $1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
C^k	:	Ensemble des fonctions $k-$ fois dérivables où le $k^{ème}$ dérivée est continue.
$\mathbb{P}-p.s$	:	La notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{E}[X/\mathscr{G}]$	:	Espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
$\mathbb{R}^m$	:	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{m\times d}$	:	Ensemble des matrices réelles de dimension $k \times d$.
$tr(A)$	:	Trace de la matrice A.
A^t	:	Transposée de la matrice A.
BDG	:	Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.
I.P.P	:	Intégration par partie.
càdlàg	:	Continue à droite, admet limite à gauche.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
EDSR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on présente la théorie d'une classe particulière d'équations différentielles stochastiques, appelé équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs), où ses valeurs sont données en temps terminale T. Les EDSRs ont apparu pour la première fois en (1973) par Bismut dans le cas où le générateur est linéaire. En1990, la théorie des EDSRs a été grandement développée par Pardoux et Peng, dans lequel le générateur est non linéaire et lipschitzien. Aprés cette résultat, et en 1997, Lepeltier et San Martin ont prouvé l'éxistence d'une solution pour les EDSRs unidimensionnelles où le générateur est de croissance linéaire et continue.

Rappelons ici brièvement le contexte où la notion d'EDSR a été introduite. Pour un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien B (d-dimensionnel) dont la filtration naturelle $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définie une EDSR à horizon déterministe T comme suit :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où : ξ est la condition terminale et f est le générateur associé à cette EDSR.

Notre travail consiste à étudier les résultats d'existence d'une solution pour les EDSRs dans le cas de Lepeltier et San Martin. Et donc il est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la théorie des intégrales stochastiques, les équations différentielles stochastiques (EDSs) et leurs propriétés. Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre, nous allons montrer le résultat fondamental qui est l'étude d'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR, où le générateur est non linéaire et lipschitzien. Ce résultat est établi par E. Pardoux et S. Peng en 1990.

Concernant le troisième chapitre, on va présenter le résultat d'existence de la solution d'une EDSR dont les coeffcients sont de croissance linéaire continue. Ce résultat a été obtenu par les chercheurs Lepeltier et San en 1996.

Chapitre 1

Intégrale stochastique et Equation Différentielle Stochastique

En faisant référence à [2], [5], [6] , [7], [8] et [11], ce chapitre contient quelques rappels de base concernant l'intégrale stochastique et les EDS.

1.1 Quelque définitions

Définition 1.1.1. ***(Tribu)***
Une tribu $\mathscr{F}$ *sur* Ω *est une famille de parties de* Ω *vérifiant :*

1) $\Omega \in \mathscr{F}$.

2) Stabilité par passage au complémentaire. i.e : $\forall A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$.

3) Stabilité par réunion dénombrable. i.e : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F} \Rightarrow (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathscr{F}$.

Définition 1.1.2. ***(Variable aléatoire)***
On appelle variable aléatoire toute application $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \mathscr{G})$ *qui est mesurable i.e :* $\forall A \in \mathscr{G}, X^{-1}(A) \in \mathscr{F}$.

Définition 1.1.3. ***(Processus stochastique)***
Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *définie sur un même espace de probabilité.*

* *Si* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ *on dit que le processus est à temps discret.*

* *Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ on dit que le processus est à temps continu.*

Définition 1.1.4.
On peut représenter le processus stochastique comme une application :

$$\begin{array}{cccc} X: & \mathbb{T}\times\Omega & \rightarrow & E \\ & (t,w) & \longmapsto & X(t,w) \end{array}$$

Remarque 1.1.1.
Pour t fixé $X(t,w)$ est une v.a, et pour w fixé $X(t,w)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.1.5. ***(Filtration)***
Une filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathscr{F}$ i.e : $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$; $\forall\ 0 \leq s < t$.

* *Le quadruplet $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité filtré.*
* *La filtration naturelle (canonique) d'un processus stochastique X est :*

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

Définition 1.1.6. ***(Processus mesurable)***
Un processus X est dit mesurable si l'application :

$$\begin{array}{ll} X: & (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}) \rightarrow (E,\mathscr{G}), \\ & (t,w) \longmapsto X(t,w), \end{array}$$

est mesurable.

Définition 1.1.7. ***(Processus adapté)***
Un processus X est dit adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ ou ($\mathscr{F}_t-$adapté) si pour tout t, X_t est $\mathscr{F}_t-$mesurable.

Remarque 1.1.2.
Le processus est toujours adapté à sa filtration naturelle $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.8. ***(processus progressivement mesurable)***
Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\mathbb{F}$, si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ et $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.1.9. ***(Équivalents,modification,indistinguable)***
Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques définiés sur un même espace de probabilité, il sont dits :

1) *équivalents (ou égaux en loi) si : $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ i.e pour tout $(t_1,t_2,...,t_n)$ et pour tout n on a :*
$$(X(t_1),X(t_2),...,X(t_n)) \overset{\mathscr{L}}{=} (Y(t_1),Y(t_2),...,Y(t_n)).$$
2) *Y est une modification de X si : $\forall t>0, P(X(t)=Y(t))=1$.*
3) *X et Y sont indistinguables, et on note $X \equiv Y$ si : $\mathbb{P}[X(t)=Y(t), \forall t\geq 0]=1$.*

Remarque 1.1.3.
On a : $3) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 1)$.

Définition 1.1.10. ***(Processus Gaussien)***
Un processus stochastique $X=(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien ssi toute combinaison linéaire finie de X est une v.a Gaussienne, i.e :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i \geqslant 0,\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \text{ on a } \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \text{ est une v.a Gaussienne.}$$

Définition 1.1.11. ***(mouvement Brownien)***
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un processus sur l'espace $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$. On dit que le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien (mB) standard si :

- *La variable aléatoire $B_0=0$ $\mathbb{P}-p.s.$*
- *Pour tout $0\leq s\leq t$,la variable aléatoire $B_t-B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,t-s)$.*
- *L'application : $t\to B_t$ est continue $\mathbb{P}-p.s.$*
- *$(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants, i.e : $\forall 0<t_1<t_2<...<t_n$, les variables $B_{t_n}-B_{t_{n-1}},...,B_{t_2}-B_{t_1},B_{t_1}-B_{t_0}$ sont indépendants.*

Théorème 1.1.1. *Le processus $X=(X_t)_{t\geq 0}$ est un mB si et seulement si : X est gaussien, centré, continu, et de covariance $cov(X_t,X_s)=\min(s,t)=t\wedge s$.*

1. La définition reste vraie pour $\mathbb{T}=[0,\infty[$.

2. On appelle $B=\left(B^1,...,B^d\right)^\top$ un mouvement Brownien d-dimentionnel si $B^1,...,B^d$ sont des mouvements Browniens independants.

Définition 1.1.12. ***(martingale)***
On dit que le processus $M=(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale si :

1. $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{T}$.

2. $\mathbb{E}(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s$, *pour tout* $0 \leq s \leq t$.

- M est une sous-martingale (resp sur-martingale) s'il vérifie (i), et si, de plus, $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}(M_t \mid \mathscr{F}_s) \geq M_s$ (resp $\mathbb{E}(M_t \mid \mathscr{F}_s) \leq M_s$).
- M est une martingale s'il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.
- Si M est une martingale, alors $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.
- Le mouvement Brownien est une $\left(\mathscr{F}_t^B\right)_t$ −martingale.

Définition 1.1.13. ***(Martingale locale)***
Un processus M adapté càglàd est une martingale locale, s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *telle que*
$\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}.p.s$, *et* $\left(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0\right)$ *est une martingale pour tout n.*

* Une martingale locale positive est une surmartingale. Une martingale locale uniformément intégrable est une martingale.

Définition 1.1.14. ***(Semi-martingale)***
Une semi-martingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme :

$$X = M + A \tag{1.1}$$

où M est une martingale locale càdlàg et A est un processus adapté à variation finie Une semi-martingale continue est une semi-martingale telle que dans la décomposition (1.1), M et A sont continus. Une telle décomposition où M et A sont continus, est unique.

1.2 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. Soit $\mathscr{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leqslant t)$ sa filtration naturelle. On défini alors les espaces de Banach suivants :

$\star$ $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \ boréliennes \ / \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}_+} |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}$.

$\star$ $\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{ X : (\Omega, \mathscr{F}) \to \left(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R})\right) \ / \|X\|^2 = \int\limits_{\Omega} X^2 d\mathbb{P} < +\infty \right\}$.

$\star$ $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0,t]) = \left\{ \theta : \left(\Omega \times [0,t], \mathscr{F}_t \otimes \beta([0,t])\right) \to \left(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R})\right) \ / \|\theta\|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t |\theta(s)|^2 ds\right] < +\infty \right\}$.

1.2.1 Intégrale de Wiener

C'est l'intégrale du type : $\int\limits_0^t X_s dB_s$, où X est une fonction déterministe (ne dépend pas de ω), et $(B_s)_{s \geqslant 0}$ est un mouvement Brownien.

Cas des fonctions en éscalier

Soit f_n une fonction en escalier, alors $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{p_n} \alpha_{i-1} 1_{]t_{i-1}, t_i]}(x)$. L'intégrale de Wiener correspond à f_n est défini par :

$$I_t(f_n) = \int_0^t f_n(s) dB_s = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

De plus, la variable aléatoire $I_t(f_n)$ est une variable aléatoire Gaussienne d'espérance nulle et de variance :

$$\begin{aligned} var(I_t(f_n)) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i-1}^2 var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i-1}^2 \int_0^t 1_{]t_{i-1}, t_i]}(s) ds = \int_0^t f_n^2(s) ds \\ &= \|f_n\|_2^2 \end{aligned}$$

Cas générale

Pour construire $I_t(f)$ quand f est une fonction quelconque de $\mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$, on utilise l'isométrie et les lemmes suivantes :

Lemme 1.2.1. ***(Hilbertien)***
Soit $f \in \mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$, alors il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$ vers f, c'est-à-dire qui vérifié :

$$\|f_n - f\|_2^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Lemme 1.2.2. ***(Gaussienne)***
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes, suivant la loi $N(\mu_n, \delta_n)$, qui converge dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire X, alors :

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mu, \delta_n \underset{n\to\infty}{\to} \delta et X \sim N(\mu,\delta).$$

* Soit maintenant $f \in \mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$. Alors, d'après le lemme hilbertien, il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Dans ce cas, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$. Et par isométrie, la suite de v.a. $(I_t(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$.[1] Et donc, $(I_t(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers une v.a appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ noté $I_t(f)$.

D'aprés le lemme Gaussienne, $I_t(f) \sim N(0, \|f\|_2^2)$.[2]

Propriété 1.2.1. ***(Propriétés de l'intégrale de Wiener)***

1. *$I_t(f)$ n'est jamais une variable p.s positive même si f est positive.*

2. *L'application $f \mapsto I_t(f)$ est linéaire.*

$$I_t(\alpha f + \beta g) = \alpha I_t(f) + \beta I_t(g)\ , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. *L'application $f \mapsto I_t(f)$ est isométrique de $\mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$.*

1. Par isométrie, $\|I_t(f_n) - I_t(f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$.
2. $\|f\|_2^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2$.

$$\langle I_t(f), I_t(g)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega I_t(f).I_t(g)d\mathbb{P} = E\left(I_t(f).I_t(g)\right) = \int_0^t f(s)g(s)ds$$

et alors,

$$\langle I_t(f), I_t(g)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle f(s), g(s)\rangle_{\mathbb{L}^2([0,t])}$$ [3]

4. $I_t(f)$ *est l'unique v.a gaussienne mesurable par rapport à* $\left(\mathscr{F}_t^B\right)_{t\geqslant 0}$*, telle que :*

$$E[I_t(f)B_u] = \int_0^u f(s)ds\ , \forall u \in [0,t].$$

Processus lié à l'intégrale stochastique

Dans la première partie on a défini l'intégrale de Wiener pour $f \in \mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$, alors cet intégrale est un v.a.

Maintenant on définit l'intégrale de Wiener pour $f \in \mathbb{L}^2_{loc}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right) = \bigcup_{t>0} \mathbb{L}^2([0,t],\mathbb{R})$, ce qui permet de définir cet intégrale pour une classe plus grande de fonctions, et dans ce cas l'intégrale de Wiener est un processus stochastique, c-à-d, pour $f \in \mathbb{L}^2_{loc}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$, le processus $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$ à un sens pour tout $t \geqslant 0$.

Théorème 1.2.1. *Soit* f , $g \in \mathbb{L}^2_{loc}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$,

- $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus gaussienne, centré, de fonction de covariance* $\Gamma(s,t) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)du.$
- $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus à accroissement indépendant (et stationnaire si* f *est constante).*
- *Les processus* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *et* $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(u)du\right)_{t\geqslant 0}$ *sont* $\left(\mathscr{F}_t^B\right)_{t\geqslant 0}$*−martingale.*
- $E\left(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du.$

3. $E(I_t(f).I_t(g)) = cov(I_t(f), I_t(g)) = \frac{1}{2}(var(I_t(f)+I_t(g)) - var(I_t(f)) - var(I_t(g))).$

Théorème 1.2.2. *(**Formule d'I.P.P**) Si f est une fonction de classe $C^1\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$,*

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f^{'}(s)B_s ds,\ \forall t \geqslant 0$$

1.2.2 Intégrale d'Ito

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t X_s dB_s$, où $(X_s)_{s\geq 0}$ est un processus stochastique .

Définition 1.2.1.
On dit que $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" s'il est $\mathscr{F}_t^B$−adapté, càdlàg et $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty,\ \forall t \geq 0.$

Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ^n est étagé, s'il existe une suite de réels $t_i/0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{p_n}$, et une suite de variables aléatoires $\theta_i/\ \theta_i \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_{t_i}, \mathbb{P})$, telle que :

$$\theta_s^n = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_{i-1}\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(s).$$

On remarque immédiatement que θ^n est un "bon processus". On définit alors :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

De plus, comme $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ est indépendante de $\mathscr{F}_{t_{i-1}}^B$ et θ_{i-1} est $\mathscr{F}_{t_{i-1}}^B - mesurable$, alors $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, et θ_{i-1} sont indépendantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\theta^n)\right] &= \sum_{i=1}^{p_n} \mathbb{E}[\theta_{i-1}]\mathbb{E}\left[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right] = 0 \\
var\left[I_t(\theta^n)\right] &= \sum_{i=1}^{p_n} var\left[\theta_{i-1}(B_{ti} - B_{t_{i-1}})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \mathbb{E}\left[\theta_{i-1}^2\right]\mathbb{E}\left[(B_{ti} - B_{ti-1})^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s^n\right)^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Cas général

Si θ est un bon processus, alors il existe $(\theta^n)_{n\geq 0}$ suit de processus étagés tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s - \theta_s^n\right)^2 ds\right] \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

Et pour tout $t > 0$, il existe une v.a $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que :

$$\mathbb{E}\left[(I_t(\theta) - I_t(\theta^n)\right]^2 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

On pose : $I_t(\theta) = \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$, $\forall t > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t(\theta)] &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} I_t(\theta^n)\right] = 0 \\
var[I_t(\theta)] &= var\left[\lim_{n\to\infty} I_t(\theta^n)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s^n\right)^2 ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s)^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Propriété 1.2.2. ***(Propriétés de l'intégrale stochastique)***

- $\theta \longmapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire.*
- $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s.*
- *Généralement,* $\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ *n'est pas gaussienne, sauf dans le cas où* θ *est déterministe.*
- $\theta \longmapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ *est isométrique de* $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0,t])$ *dans* $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0,t])$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

en général, $$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^u \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds\right].$$

- $\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ *est une* $(\mathscr{F}_t^B)$*−martingale.*
- *Le processus* $\left(\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds$ *est une* $(\mathscr{F}_t^B)$*−martingale.*

- *La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

- *La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds.$$

Extensions au martingales locales

Définition 1.2.2.
On dit que $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus local" s'il est :

$$\mathscr{F}_t^B - adapté, càdlàg\ et \int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty, \forall t \geq 0.$$

* Comme la condition d'intégrabilté, $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$, est parfois trop exigeante dans la pratique, on va définir $I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$, pour θ est un bon processus local (θ n'appartient pas à $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0,t])$).
* Dans ce cas, $I_t(\theta)$ ce n'est pas une martingale, plutôt c'est une martingale locale et $E(I_t(\theta))$ peut être non nul.

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.3.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ une mouvement Brownien, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô si

$$\forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

tel que :

1. *X_0 est $\mathscr{F}_0$-mesurable.*
2. *$(b_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus.$\left(\mathscr{F}_t^B\right)_{t\geqslant 0}$ −adapté, continue, et à variation finie.*
3. *$(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ est un bon processus local.*

On écrit généralement, le processus d'Itô en utilisant la forme différentielle :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Le coefficient b s'appelle la dérivée (ou le drift) du processus, et σ son coefficient de diffusion.

1.2.4 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô.

Théorème 1.2.3. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Et sous la forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt.$$

Théorème 1.2.4. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, et de classe C^2 par rapport à x. On a :*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X_s\rangle,$$

tel que :

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.2.5. *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, alors :*

$$\begin{aligned} f(X_1(t),X_2(t)) = f(X_1(0),X_2(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1(s),X_2(s))dX_1(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_1(s),X_2(s))dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_1(s),X_2(s))d\langle X_1\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_1(s),X_2(s))d\langle X_2\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_1(s),X_2(s))d\langle X_1,X_2\rangle_s. \end{aligned}$$

1.3 Equation différentielle stochastique

Définition 1.3.1.
Pour tout couple (b,σ), on appelle équation différentielle stochastique une relation notée $EDS(b,\sigma)$ de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s. \tag{1.2}$$

Ou sous la forme différentielle,

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t.$$

Généralement, on peut considérer les $EDSs$ en dimension quelconque.
Soit $B = (B^1,...,B^m)$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (avec $m \geq 1$), et soient $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to M_{d,m}(\mathbb{R})$ deux fonctions mesurable borné (par rapport à x). Ici, la solution de l'équation 1.2 est un processus $X = (X^1,\cdots,X^d)$, où pour tout $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$, $(X_t^i, t \geq 0)$ est un processus continu adapté et

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s,X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)dB_s^j$$

Remarque 1.3.1.
On dit qu'une $EDS(b,\sigma)$ est homogène, si b et σ ne dépend pas de t, c-à d :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Définition 1.3.2.
Une soulution de l'équation 1.2 est constituée d'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, où on défini un mouvement brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et d'un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tels que :

i. $(X_t)_{t\geq 0}$ *est continu et* $\mathcal{F}_t$*−adapté* $\forall t \geq 0$.

ii. $\forall t \geqslant 0, \int\limits_0^t |b(s,X_s)|\,ds < +\infty \; et \int\limits_0^t \sigma(s,X_s)^2\,ds < +\infty.$ [4]

iii. $\forall t \geqslant 0, X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(s,X_s)\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$

1.3.1 Existence et unicité

Existence faible

- On appelle référentiel un quintuplet $\mathscr{R} = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P}, \mathbb{B})$ constitué d'un espace de probabilité filtré ou on défini un mouvement brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
- On dit qu'un processus continu X défini dans un référentiel $\mathscr{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une solution faible de l'équation 1.2 avec la condition initiale Z si (B,X) est une solution de l'équation 1.2 et si $X_0 = Z \quad \mathbb{P}$-p.s.

Existence fort

On dit qu'un processus continu X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une solution fort de l'équation 1.2, si X est $(\mathscr{F}_t)-$adaptée. [5]

Unicité faible

Si tous les processus X étant solutions de l'équation 1.2 qui sont définies dans des référentiels éventuellement distincts sont de même loi.

Unicité fort (en trajectoire)

On dit que les solutions de l'équation 1.2 sont uniques en trajectoire si deux solutions X et Y définis dans le même référentiel [6] et avec la même condition initiale Z, sont indistinguables

$$P(\exists t \in \mathbb{R}_+ / X_t \neq Y_t) = 0.$$

---

4. i. indique que $\int\limits_0^t b(s,X_s)\,ds$ et $\int\limits_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s$ sont bien défini.
5. Telle que l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés.
6. L'espace de probabilité et le Brownien étant fixés.

Remarque 1.3.2.
La condition initiale Z est un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathscr{F}_0-$ mesurable (donc indépendant de B).

Théorème 1.3.1. ***(Yamada-Watanabe)***
Si l'équation 1.2 admet une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables, alors elle admet une unique solution fort.

Théorème 1.3.2. ***(Ito)***
On dit que l'équation 1.2 admet une unique solution forte si $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^d$, $\forall i = 1,..,d$, $\forall j = 1,..,m$, $\forall t \geqslant 0$:

- ▷ $\forall x, y \in K, \exists M_k > 0$ *telle que* $|b_i(t,x) - b_i(t,y)| + \left|\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)\right| \leqslant M_k\,|x-y|$.[7]
- ▷ $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \exists M > 0$ *telle que* $\left|b_i(t,x) + \sigma_{ij}(t,x)\right| \leqslant M(1+|x|)$.[8]
- ▷ $Z \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$.

Démonstration.

1. On commence par montrer que les solutions sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
|X_t|^2 &\leqslant 3\,|X_0|^2 + 3\left|\int_0^t b(s,X_s)\,ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t |\sigma(s,X_s)|\,dB_s\right|^2 \\
\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) &\leqslant 3\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right) + k\mathbb{E}\left(\int_0^t (1+|X_s|)^2\,ds\right) \\
\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) &\leqslant k' + 2k\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s|^2\right) ds.
\end{aligned}
$$

Où $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, $k = sup\left(3TM^2, 3M^2\right)$, et $k' = 3\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right) + 2kT$.
Et d'aprés l'inégalité de Gronwall,

$$
\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leqslant k' \exp(2kt) < \infty.
$$

7. Condition de Lipschitz locale.
8. Condition de croissance linéaire.

2. Pour montrer l'existence, on pose

$$X_t^n = f(X_t^{n-1}) = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 &\leqslant \left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right|^2 \\
&\leqslant 2\left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds\right|^2\right) + \\
2\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right|^2\right)
\end{aligned}$$

D'aprés Cauchy-Schwartz et l'isométrie d'Ito,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\int_0^t ds \int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right) + \\
2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) &\leqslant 2T\mathbb{E}\left(\int_0^t M_k^2 \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t M_k^2 \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right) \\
&\leqslant k \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right) ds
\end{aligned}$$

ici, $k = sup\left(2TM_k^2, 2M_k^2\right)$.
Pour $X_s^0 = 0$,

$$\mathbb{E}\left(\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\left|\int_0^s b\left(u, X_u^0\right) du + \int_0^s \sigma\left(u, X_u^0\right) dB_u\right|^2\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right) &\leqslant 2TM^2\mathbb{E}\left(\int_0^s \left(1 + \left|X_u^0\right|\right)^2 du\right) + 2M^2\mathbb{E}\left(\int_0^s \left(1 + \left|X_u^0\right|\right)^2 du\right) \\
&\leqslant k'\mathbb{E}\left(\int_0^s du\right) = k'T.^{9}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2\right) \leqslant k\int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right) ds \leqslant k\int_0^t k'\mathbb{E}\left(\int_0^s du\right) ds \leqslant kk'\frac{T^2}{2}$$

Pour $n > 0$,

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leqslant k\int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right) ds \leqslant \frac{k^n k'}{n!}\int_0^t s^n ds \leqslant \frac{k^n k'}{(n+1)!}T^{n+1}.$$

Il reste à montrer que $\left(X_t^n\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sum_{k=n}^{m-1} \left(\mathbb{E}\left|X_t^{k+1} - X_t^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{k^n k'}{(n+1)!}T^{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Et donc $\left(X_t^n\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et comme $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un espace complet, $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Maintenant, on va vérifier que X est une solution de l'équation 1.2, en passant à la limite dans la définition $X_t^{n+1} = f(X_t^n). = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dB_s$

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds - \int_0^t b(s, X_s) ds\right|^2\right] \leqslant T M_k^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s\right|^2\right) ds \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dB_s - \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s\right|^2\right] \leqslant M_k^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s\right|^2\right) ds \longrightarrow 0$$

Alors,

$$\begin{cases} f(X_t^n) \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\longrightarrow} X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \\ X_t^{n+1} \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\longrightarrow} X_t \end{cases}$$

D'aprés l'unicité de la limite, $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$, donc X_t présente une solution de 1.2.

3. Pour l'unicité, on suppose que X_t et Y_t sont deux solutions de 1.2, tel que $X_0 = Y_0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|X_t - Y_t|^2\right) &\leqslant 2\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s) ds\right|^2 ds\right) + 2\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) dB_s\right|^2\right) \\ &\leqslant k \int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s - Y_s|^2\right) ds \end{aligned}$$

et d'aprés l'inégalité de Gronwall,

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left(|X_t - Y_t|^2\right) \leqslant 0 \exp(kt) = 0 \Longrightarrow X_t = Y_t, \mathbb{P}.p.s.$$

□

1.3.2 Théorème de comparaison

Cette théorème permet de comparer presque sûrement deux EDS uni-dimensionnelles.

Théorème 1.3.3. *On considère les deux EDS suivantes*:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$$
$$X_t^{'} = X_0^{'} + \int_0^t b^{'}\left(X_s^{'}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_s^{'}\right) dB_s$$

Telle que B est un mouvement Brownien réel, $b, b^{'}$ et σ sont trois fonctions lipschitziennes [10]. Supposons que $b(x) \leqslant b^{'}(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et $X_0 \leqslant X_0^{'}$, alors $X_t \leqslant X_t^{'}$.

Après avoir révisé les concepts et notations de base liés aux intégrales stochastiques et équations différentielles stochastiques, le chapitre suivant vise à montrer l'existence et l'unicité de solution des EDSRs Lipschitziennes.

10. Les fonctions lipschitziennes dans $\mathbb{R}$ sont croissance linéaire $\Longrightarrow$ la téorème d'Ito est vérifiée.

Chapitre 2

EDSR à coefficients Lipschitziens

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coeffcients sont Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec un générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable. Pour ce faire nous nous référons, dans ce qui suit, à [1], [3], [9] et [10].

2.1 Présentation du problème.

Considérons, sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une variable aléatoire $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T)$ et un processus Y qui est adapté par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$.

On voudrait résoudre l'équation diffrentielle suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0, T], \qquad Y_T = \xi.$$

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. L'unique solution de cette EDS est $Y_t = \xi$, qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation-disons dans $\mathbb{L}^2-$ adapté est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathscr{F}_t)$.

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingales Browniennes permet de construire un unique processus Z de carré intégrable et adapté, tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathscr{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s$$

Si on prend $t = T$, alors

$$\begin{aligned} Y_T &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T Z_s dB_s \\ &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned}$$

et donc,

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s$$

A partir de notre simple exemple, on a remarqué l'apparence d'une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, c-à-d :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, B un mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace, et $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration naturelle.

On note :

- $S^2(\mathbb{R}^m) = \{$l'espace vectoriel formé par les processus Y progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^m$, tel que : $\|Y\|_{S^2}^2 := \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t|^2\right) < \infty\}$.
- $S_c^2(\mathbb{R}^m)$ le sous espace formé par les processus continus.
- $H^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right) = \{$l'espace formé par les processus Z progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{m\times d}$, tel que : $\|Z\|_{H^2}^2 := \mathbb{E}\left(\int\limits_0^T \|Z_t\|^2\right) < \infty$ $\}$, où pour $z \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $\|z\|^2 = tr\left(zz^t\right)$.

On note, aussi, $\mathscr{B}^2$ l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^m) \times H^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, muni de la norme :

$$\|(Y,Z)\|_{\mathscr{B}^2}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right).$$

Les espaces S^2, S_c^2, H^2, $\mathscr{B}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.

On considère l'équation difirentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \\ \quad Y_T = \xi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

et sous forme d'intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.1}$$

où :

- f est une fonction aléatoire de $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ vers $\mathbb{R}^m$, telle que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ le processus $(f(t, y_t, z_t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ soit progressivement mesurable. Elle s'appelle le générateur de 2.1.

- ξ est une variable aléatoire de carré intégrable, $\mathscr{F}_T-$mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Il s'appelle la condition terminale.

Définition 2.2.1.
Une solution de 2.1 est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :

1) *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$.*

2) $\int_0^T \left(|f(t,Y_t,Z_t)| + |Z_t|^2\right) dt < \infty . \mathbb{P} - p.s.$

3) *Pour* $0 \leqslant t \leqslant T$ *on a :* $Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dB_s . \mathbb{P} - p.s.$

Remarque 2.2.1.
Comme les intégrales de l'équation précédente sont bien définies, Le processus Y est un semi martingale continue.

En effet, on a $Y_t = M_t + A_t$ tel que :

$$\begin{cases} A_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds \Rightarrow \langle \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds, \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds \rangle = 0 < \infty. \\ M_t = -\int_t^T Z_s dB_s \text{ est un intégrale d'Ito} \Rightarrow M_t \text{ est un martingale locale.} \end{cases}$$

donc Y est un semi martingale et continue, car $Y \in S_c^2(\mathbb{R}^m)$.

Proposition 2.2.1.
Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ positif appartenant à $H^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ et une constante positive λ tels que $\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$:

$$|f(t,y,z)| \leqslant f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de 2.1 telle que $Z \in H^2$, alors $Y \in S_c^2$.

Démonstration.
On a

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t Z_s dB_s$$

$$|Y_t| \leqslant |Y_0| + \int_0^t |f(s,Y_s,Z_s)|\,ds + \left|\int_0^t Z_s dB_s\right|$$

$$|Y_t| \leqslant |Y_0| + \int_0^t f_s + \lambda \|Z_s\| ds + \lambda \int_0^t |Y_s| ds + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|$$
$$|Y_t| \leqslant \varsigma + \lambda \int_0^t |Y_s| ds$$

De plus, $\varsigma = |Y_0| + \int_0^t f_s + \lambda \|Z_s\| ds + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|$, est une variable aléatoire de carré intégrable. En effet, Y_0 est déterministe [1], donc il appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F})$, $\{f_s\}_{0\leq s\leq T} \in H^2$, $Z \in H^2$. Et d'aprés Doob, $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|$ est aussi de carré intégrable [2].

Comme Y est un processus continu et $|Y_t| \leqslant \varsigma + \lambda \int_0^t |Y_s| ds$, et d'aprés le lemme de Gronwall

$$|Y_t| \leqslant \varsigma \exp(\lambda t) \Rightarrow \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t|^2 \leqslant \varsigma^2 \exp(2\lambda T) \Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t|^2 \right) < \infty$$

donc, $Y \in S_c^2$. □

Lemme 2.2.1.
Soient $Y \in S_c^2$ et $Z \in H^2$, alors le processus $\left(\int_0^t Y_s Z_s dB_s \right)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale uniformément intégrable.

1. Car $Y_0 = \mathbb{E}(\xi)$.
2. $\mathbb{E}\left(\left| \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| \right|^2 \right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\left| \int_0^T Z_s dB_s \right|^2 \right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds \right) < \infty$.

2.3 Résultat de Pardoux-Peng.

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à Pardoux et Peng, c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les $EDSRs$ dans le cas où le générateur est non-linéaire.
On travaille sous les hypothèses suivantes :
$\star$ Il existe une constante $\lambda > 0$; telle que $\mathbb{P}-$p.s.

H1 : *Condition de Lipschitz en* (y,z) : $\forall\ t, y, y', z, z'$

$$\left|f(t,y,z) - f(t,y',z')\right| \leqslant \lambda\left(\left|y-y'\right| + \left\|z-z'\right\|\right)$$

H2 : *Condition d'intégrabilité* :

$$\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2\,dt\right) < \infty.$$

2.3.1 Cas simple

Dans ce cas, on prend la générateure f indépendante de y et de z. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans H^2, et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.1.
Soit $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathscr{F}_T)$ *et* $(F_t)_{0\leq t\leq T} \in H^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$.

L'équation 2.2 possède une unique solution (Y,Z) *telle que* $Z \in H^2$.

Démonstration.

<u>Pour l'éxistence</u>. On suppose que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z \in H^2$.

Si on prend l'ésperance conditionnelle sachant $\mathscr{F}_t$, on obtient :

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t/\mathscr{F}_t) = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s/\mathscr{F}_t)$$

Comme $\int_0^T Z_s dB_s$ est une martingale, alors $\mathbb{E}(\int_t^T Z_s dB_s) = 0$, et donc

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_s ds/\mathscr{F}_t)$$

On définit alors Y à l'aide de la formule précédente. Il reste à trouver Z.
Comme le processus $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable, alors le processus $\int_0^t F_s ds$ est $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$-adapté [3]. Donc,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_s ds/\mathscr{F}_t) - \int_0^t F_s ds \\ &= M_t - \int_0^t F_s ds \end{aligned}$$

Et puisque M_t est une martingale, alors, d'aprés le théorème de représentation des martingales browniennes, on construit un processus $Z \in H^2$ tel que :

$$Y_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds$$

Maintenant, on vérifie que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR.

$$Y_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds \text{ et } Y_T = \xi$$

3. D'après le théorème de Fubini.

alors,

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - M_0 - \int_0^T Z_s dB_s + \int_0^T F_s ds$$
$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

<u>Pour l'unicité</u>. On suppose que (Y,Z) et (Y',Z') soient deux solutions de l'équation 2.2 tel que $Y_T = Y'_T$. Soit : $y = Y - Y'$, $z = Z - Z' \Longrightarrow dy_t = -z_t dB_t$.
Si on applique la formule d'Itô pour $g(y_t) = |y_t|^2$, on obtient

$$\begin{aligned} d\left(|y_t|^2\right) &= 2|y_t| dy_t + d\langle y\rangle_t \\ &= 2|y_t| dy_t + \|z_t\|^2 dt \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale, et comme $y_T = 0$ alors :

$$-|y_t|^2 = 2\int_t^T |y_s| dy_s + \int_t^T \|z_s\|^2 ds = -2\int_t^T |y_s| z_s dB_s + \int_t^T \|z_s\|^2 ds$$

D'aprés le lemme 2.2.1, $\int_0^t |y_s| z_s dB_s$ est une martingale[4], alors :

$$\mathbb{E}\left(|y_t|^2 + \int_t^T \|z_s\|^2 ds\right) = -2\mathbb{E}\left(\int_t^T |y_s| z_s dB_s\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}\left(|y_t|^2\right) = 0 \\ \mathbb{E}\left(\int_t^T \|z_s\|^2 ds\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_t = 0,\ \mathbb{P}-p.s. \\ z_t = 0,\ \mathbb{P}-p.s. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = Y',\ \mathbb{P}-p.s. \\ Z = Z',\ \mathbb{P}-p.s. \end{cases}$$

□

4. On pose $y'_s = |y_s| \in S_c^2$

2.3.2 Cas générale

Théorème 2.3.1. ***(Pardoux-Peng 1990)***

*Sous les hypothèses **H1** et **H2**, l'équation 2.1 possède une unique solution* (Y,Z)*, telle que* $Z \in H^2$.

Démonstration.
On utilise la méthode de point fixe, c-à-d : on construit une application Φ de $\mathscr{B}^2$ dans lui même, de sorte que $(Y,Z) \in \mathscr{B}^2$ est une solution de l'équation 2.1 si et seulement si c'est un point fixe de Φ.

Pour tout $(U,V) \in \mathscr{B}^2$, on définit $\Phi(U,V) = (Y,Z) \in \mathscr{B}^2$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{2.3}$$

$\star$ Premièrement, on montre que l'application Φ de $\mathscr{B}^2$ dans lui-même est bien définie.
En posant $F_s = f(s,U_s,V_s)$, ce processus appartient à H^2 puisque,

$$\left|f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s)\right| \leqslant \lambda\left(\left|U_s - U'_s\right| + \left\|V_s - V'_s\right\|\right)$$

pour $U'_s = V'_s = 0$,

$$|F_s| = |f(s,U_s,V_s)| \leqslant |f(s,0,0)| + \lambda\,|U_s| + \lambda\left\|V'_s\right\|$$

avec f , U_s et V_s sont des processus de carré intégrable.

D'aprés le lemme 2.3.1, l'équation 2.3 possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in H^2$. Et d'aprés la proposition 2.2.1, le processus $Y \in S^2_c$. Donc $(Y,Z) \in \mathscr{B}^2$.

$\star$ Deuxièment, on montre que l'application Φ est contractante.
Soient (U,V) et (U',V') deux élements de $\mathscr{B}^2$, où $\Phi(U,V) = (Y,Z)$ et $\Phi(U',V') = (Y',Z')$.
On pose $y = Y - Y'$, $z = Z - Z' \Longrightarrow dy_t = \left(f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t)\right)dt - z_t dB_t$

On applique, ensuite, la formule d'Itô à $\exp(\alpha t)|y_t|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right) &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t)|y_t|\,dy_t + \exp(\alpha t)d\langle y\rangle_t \\ &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t)|y_t|\left(f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t)\right)dt \\ &\quad - 2\exp(\alpha t)|y_t|z_t dB_t + \exp(\alpha t)\|z_t\|^2 dt \end{aligned}$$

On passe maintenant à l'intégrale.

$$\exp(\alpha T)|y_T|^2 - \exp(\alpha t)|y_t|^2 = \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds +$$
$$\int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|\left(f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s)\right)ds - \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|z_s dB_s$$

alors,

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds = -\int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds +$$
$$\int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|\left(f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s)\right)ds + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|z_s dB_s$$

Comme f est $\lambda-$ lipshtizienne,

$$\begin{aligned} \exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leqslant &-\int_t^T \exp(\alpha s)\alpha|y_s|^2 ds \\ &+ \int_t^T \exp(\alpha s)(2\lambda|y_s||u_s| + 2\lambda|y_s|\|v_s\|)ds \\ &+ \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|z_s dB_s \end{aligned}$$

$\forall\varepsilon > 0$, en appliquant l'inégalité de Yong $2ab \leqslant \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, pour $a = \lambda|y_s|$ et

$b = (|u_s| + \|v_s\|)$,

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leqslant -\int_t^T \exp(\alpha s)\alpha|y_s|^2 ds + \int_t^T \exp(\alpha s)\left[\frac{\lambda^2|y_s|^2}{\varepsilon} + \varepsilon(|u_s| + \|v_s\|)^2\right] ds + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s$$

alors,

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leqslant \int_t^T \exp(\alpha s)\left[\frac{\lambda^2}{\varepsilon} - \alpha\right]|y_s|^2 ds + 2\varepsilon\int_t^T \exp(\alpha s)\left(|u_s|^2 + \|v_s\|^2\right) ds + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s$$

On prend $\alpha = \frac{\lambda^2}{\varepsilon}$, et on note $R_\varepsilon = 2\varepsilon\int_0^T \exp(\alpha s)\left(|u_s|^2 + \|v_s\|^2\right) ds$

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leqslant R_\varepsilon + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \exp(\alpha t)|y_t|^2 \leqslant R_\varepsilon + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s \\ \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leqslant R_\varepsilon + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s \end{cases}$$

D'aprés Lemme 2.2.1, $\int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s$ est un martingale [5]

5. On pose $y'_s = 2\exp(\alpha s)|y_s| \in S_c^2$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\,\|z_s\|^2\,ds\right] \leqslant \mathbb{E}[R_\varepsilon].$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Doob et de BDG on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)\,|y_t|^2\right]\right] &\leqslant \mathbb{E}(R_\varepsilon) + c\,\mathbb{E}\left[\left(\int_t^T \exp(2\alpha s)\,|y_s|^2\,\|z_s\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\exp(\alpha s)\,|y_s|^2\right) c^2 \int_t^T \exp(\alpha s)\,\|z_s\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Puis, comme $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)\,|y_t|^2\right]\right] \leqslant \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\exp(\alpha s)\,|y_s|^2\right)\right] + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\,\|z_s\|^2\,ds\right]$$

alors,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)\,|y_t|^2\right]\right] \leqslant \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\,\|z_s\|^2\,ds\right]$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)\,|y_t|^2\right]\right] \leqslant 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + c^2\mathbb{E}(R_\varepsilon)$$

et comme résultat, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)\,|y_t|^2\right] + \int_t^T \exp(\alpha s)\,\|z_s\|^2\,ds\right] \leqslant \left(3 + c^2\right)\mathbb{E}(R_\varepsilon)$$

D'après la définition de R_ε, et pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2\right]+\int_0^T\exp(\alpha s)\|z_s\|^2ds\right]\\
&\qquad\leqslant\quad \left(3+c^2\right)\mathbb{E}\left(2\varepsilon\int_0^T\exp(\alpha s)\left(|u_s|^2+\|v_s\|^2\right)ds\right)\\
&\qquad\leqslant\quad 2\varepsilon\left(3+c^2\right)\mathbb{E}\left(T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\exp(\alpha t)|u_t|^2+\int_0^T\exp\|v_s\|^2ds\right)\\
&\qquad\leqslant\quad 2\varepsilon\left(3+c^2\right)(T\vee 1)\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\exp(\alpha t)|u_t|^2+\int_0^T\exp\|v_s\|^2ds\right)
\end{aligned}$$

en prenant ε tel que : $2\varepsilon\left(3+c^2\right)(T\vee 1)=\dfrac{1}{4}$.

Donc, l'application Φ est contraction de $\mathscr{B}^2$ dans lui même si on le muni par la norme :

$$\|(U,V)\|_\alpha^2=\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\exp(\alpha t)|U_t|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)\|V_s\|^2ds\right)$$

qui est, en fait, un espace de Banach [6]. Donc, Φ possède une unique point fixe $(Y,Z)\in\mathscr{B}^2$, telle que : $\Phi(Y,Z)=(Y,Z)$. d'où le théorème est prouvé. $\square$

Dans ce chapitre, on a prouvé l'existence et l'unicité du solution de l'EDSR avec coefficients Lipschitziens. Dans ce qui suit, on va utiliser ce résultat pour montrer l'existence des solutions des EDSRs avec coefficients de croissance linéaire et continue unidimensionnels.

6. Car la norme $\|(U,V)\|_\alpha^2$ étant équivalente à la norme usuelle($\alpha=0$).

Chapitre 3

EDSR à coefficients de croissance linéaire et continue unidimensionnels

Le but de ce chapitre consiste à étudier l'existence de solution aux équations différentielles stochastiques rétrogrades unidimensionnelles dans le cas où le générateur de croissance linéaire et continue (c'est le travail de J.P .Lepeltier et S. Martin en 1997). Dans ce qui suit, on considère [1] et [4] comme références.

3.1 Notations et définitions

Tout au long de ce chapitre, on préserve les mêmes notations vues dans le chapitre précédent, sauf que la dimension m qui sera égale à 1, d'où l'appellation unidimensionnelle.

3.2 Résultat de J.P. Lepeltier et S. Martin.

On considère des EDSRs avec un générateur vérifiant les hypothèses suivantes :

▷ Pour t, ω fixés, $f(t,\omega,.,.)$ est continue dt⊗d$\mathbb{P}$ p.s.

▷ Croissance linéaire : Il existe $k > 0$, telle que :

$$\forall (t,\omega,y,z) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad |f(t,\omega,y,z)| \leqslant k(1+|y|+|z|).$$

Lemme 3.2.1. ***(Barlow, Perkins)***
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue à croissance linéaire :

$$\exists k > 0, telle\ que : \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ |f(x)| \leqslant k(1+|x|).$$

Alors la suite des fonctions : $f_n(x) = \inf\limits_{y \in \mathbb{Q}^n} (f(y) + n|x-y|)$, définie pour $n \geq k$, satisfait :

1. *La croissance linéaire :$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |f_n(x)| \leqslant k(1+|x|)$.*

2. *La monotonie en n : la suite f_n est croissante.*

3. *La condition de Lipschitz :$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant n(|x-y|)$.*

4. *La convergence forte : si $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$, alors $f_n(x_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$.*

Théorème 3.2.1. ***(Théorème de comparaison)***
Soient (Y,Z) et (Y',Z') les solutions des EDSR associées aux paramètres (f,ξ) et (f',ξ').

Si $\xi \leqslant \xi'$ $\mathbb{P}$-p.s, et $\forall t \leqslant T : f(t,Y,Z) \leqslant f(t,Y',Z')$, alors $Y \leqslant Y'$.$\mathbb{P}$ p.s.

Théorème 3.2.2. ***(J.P. Lepeltier, S. Martin)***
Sous les hypothèses précédentes (ci-dessus), l'équation

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \tag{3.1}$$

admet une solution minimal (Y,Z) dans le sens où si (Y',Z') est une autre solution de cette équation, alors $Y \leqslant Y'$ $\mathbb{P}$ p.s.

Démonstration.
On considère pour t et ω fixés une suite f_n associée à f par Lemme 3.2.1. De plus, on pose $h(t,\omega,y,z) = k(1+|y|+|z|)$ et $h'(t,\omega,y,z) = k(1+|y|+|z|)$. Alors f_n, h et h' sont des fonctions Lipschitziennes. D'où, par le résultat classique de Pardoux et Peng, les EDSRs suivantes

$$\begin{cases} Y_t^n &= \xi + \int_t^T f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dB_s. \\ U_t &= \xi + \int_t^T h(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T V_s dB_s. \\ U_t' &= \xi + \int_t^T h'(s,U_s',V_s')ds - \int_t^T V_s' dB_s. \end{cases} \tag{3.2}$$

possèdent chacune une unique solution.
D'après les propriétés 1. et 3. de la suite f_n :

$$-k(1+|y|+|z|) \leqslant f_n(s,y,z) \leqslant f_{n+1}(s,y,z) \leqslant k(1+|y|+|z|)$$

Donc, par le théorème 3.2.1 on a$\forall n \geqslant k :$ $U' \leqslant Y^n \leqslant Y^{n+1} \leqslant U$.

La preuve sera divisée en trois étapes.

Etape 1
Il existe une constante A qui dépend de k, T et $\mathbb{E}(\xi^2)$ telle que :

$$\forall n \geqslant k : \left\|Y^n\right\| \leqslant A, \left\|Z^n\right\| \leqslant A, \|U\| \leqslant A, \|V\| \leqslant A$$

En effet, on applique la formule d'Itô à $|Y_t|^2$,

$$\begin{aligned} |Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds &= |\xi|^2 - 2\int_t^T |Y_s| f(s,Y_s,Z_s)ds + 2\int_t^T |Y_s| Z_s dB_s \\ &\leqslant |\xi|^2 + 2\int_t^T k\left(|Y_s| + |Y_s|^2 + |Y_s||Z_s|\right)ds + 2\int_t^T |Y_s| Z_s dB_s \end{aligned}$$

On applique l'inégalité $2ab \leqslant \epsilon a^2 + \dfrac{b^2}{\epsilon}$ pour $a = |Z_s|$, $b = k\,|Y_s|$ et $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Et aussi pour $a' = k$, $b' = |Y_s|$ et $\epsilon = 1$.

$$|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2\,ds \leqslant |\xi|^2 + \int_t^T k^2 + |Y_s|^2 + 2k\,|Y_s|^2 + 2k^2\,|Y_s|^2 + \frac{|Z_s|^2}{2} ds + 2\int_t^T |Y_s|\,Z_s dB_s$$

$$|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\,ds \leqslant |\xi|^2 + \int_t^T \left(1+2k+2k^2\right)|Y_s|^2\,ds + \int_t^T k^2 ds + 2\int_t^T |Y_s|\,Z_s dB_s$$

On pose $\alpha = \mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_t^T k^2 ds\right]$ et $\beta = \left(1+2k+2k^2\right)$, alors

$$|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\,ds \leqslant \alpha + \beta\int_t^T |Y_s|^2\,ds + 2\int_t^T |Y_s|\,Z_s dB_s \tag{3.3}$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\,ds\right] \leqslant \alpha + \beta\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s|^2\,ds\right]$$

et alors,

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] & \leqslant \alpha + \beta\int_t^T \mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right] ds \\ \mathbb{E}\left[\int_t^T |Z_s|^2\,ds\right] & \leqslant 2\alpha + 2\beta\int_t^T \mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right] ds \end{cases}$$

Enfin, l'inégalité de Gronwall donne :$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] \leqslant \alpha\exp\left(\beta(T-t)\right)$, donc

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T |Z_s|^2\,ds\right] \leqslant 2\alpha + 2\beta\int_t^T \alpha\exp\left(\beta(T-s)\right) ds$$

Revenant à l'inegalité 3.3 on en déduit que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant \alpha+\beta\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_t^T|Y_s|^2\,ds\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_t^T|Y_s|\,Z_s dB_s\right]$$
$$\leqslant \alpha+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^T|Y_s|^2\,ds\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_t^T|Y_s|\,Z_s dB_s\right]$$

D'aprés l'inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, et pour $t=0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_0^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant \alpha+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^T|Y_s|^2\,ds\right]+\mathbb{E}\left[2c\left(\int_0^T|Y_s|^2\,Z_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leqslant \alpha+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^T|Y_s|^2\,ds\right]+\mathbb{E}\left[2\left(\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2\,2c^2\int_0^T Z_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leqslant \alpha+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^T|Y_s|^2\,ds\right]+\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+2c^2\int_0^T Z_s^2 ds\right]$$

ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+\int_0^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant 2\alpha+\beta 2\alpha\int_0^T\exp\left(\beta(T-s)\right)ds+4c^2\mathbb{E}\left[\int_0^T Z_s^2 ds\right]$$
$$\leqslant 2\alpha+2\alpha\left(-1+\exp\beta T\right)+4c^2\mathbb{E}\left[\int_0^T Z_s^2 ds\right]$$

Or,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant 2\alpha\left(-1+\exp\beta T\right)\leqslant 2\alpha\exp\beta T$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+\int_0^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant 2\alpha+2\alpha\left(-1+\exp\beta T\right)+8c^2\alpha\exp\beta T$$
$$\leqslant\left(1+4c^2\right)2\alpha\exp\beta T$$
$$\leqslant 2\left(1+4c^2\right)\exp\beta T\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T k^2ds\right]$$

Enfin,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2+\int_0^T|Z_s|^2\,ds\right]\leqslant c'\mathbb{E}\left[|\xi|^2+k^2T\right]$$

Etape 2

(Y^n,Z^n) converge dans $H_1^2(0,T)\times H_d^2(0,T)$.

En effet, pour tout $t\in[0,T]$ la suite $\left(Y_t^n\right)_{n\geqslant k}$ est croissante et majorée par U, alors elle est convergente $\mathbb{P}$ p.s vers un processus que l'on notera Y_t.

De plus, on a $\mathbb{P}$ p.s. Pour tout $t\in[0,T]$ et pour tout $n\geqslant k$:

$$\left|Y_t^n\right|\leqslant\max\left(|U_t|,\left|U_t'\right|\right)\in H_1^2(0,T)$$

d'où par le théorème de convergence dominée, on obtient la convergence de Y^n vers Y dans $H_1^2(0,T)$. Ainsi $\left(Y_t^n\right)_{n\geqslant k}$ est une suite de Cauchy.

Il reste à démontrer que $(Z^n)_{n\geqslant k}$ converge dans $H_d^2(0,T)$. Pour cela, on applique la formule d'Itô à $\left|Y_t^m-Y_t^n\right|^2$,pour $n,m\geqslant k$.

$$\left|Y_T^m-Y_T^n\right|^2-\left|Y_t^m-Y_t^n\right|^2=2\int_t^T\left|Y_s^m-Y_s^n\right|\left[f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right]ds-$$
$$2\int_t^T\left|Y_s^m-Y_s^n\right|\left[Z_s^m-Z_s^n\right]dB_s+\int_t^T\left|Z_s^m-Z_s^n\right|^2ds$$

En particulier, pour $t=0$, on obtient,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|Y_0^m - Y_0^n\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_s^m - Z_s^n\right|^2 ds\right]
&= -2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_s^m - Y_s^n\right| \left[f_m(s,Y_s^m,Z_s^m) - f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right] ds\right] \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left|Y_s^m - Y_s^n\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \times \\
&\qquad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left[f_m(s,Y_s^m,Z_s^m) - f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

Or la première propriété de la suite $(f_n)_{n\geqslant k}$ et, le fait que, (Y^n,Z^n) est bornée impliquent que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[f_m(s,Y_s^m,Z_s^m) - f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right]^2 ds\right]
&\leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)\right)^2 ds + \int_0^T \left(f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right)^2 ds\right] \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_0^T k^2\left(1+\left|Y_s^m\right| + \left|Z_s^m\right|\right)^2 ds + \int_0^T k^2\left(1+\left|Y_s^n\right| + \left|Z_s^n\right|\right)^2 ds\right] \\
&\leqslant k'
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|Y_0^m - Y_0^n\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_s^m - Z_s^n\right|^2 ds\right] &\leqslant 2\sqrt{k'}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left|Y_s^m - Y_s^n\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_s^m - Z_s^n\right|^2 ds\right] &\leqslant 2\sqrt{k'}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left|Y_s^m - Y_s^n\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \mathbb{E}\left[\left|Y_0^m - Y_0^n\right|^2\right] \\
&\leqslant 2\sqrt{k'}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|Y_s^m - Y_s^n\right|^2 ds\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

D'où, pour $n,m \geqslant k$

$$
\left\|Z_s^m - Z_s^n\right\|^2 \leqslant 2\sqrt{k'}\left\|Y_s^m - Y_s^n\right\|
$$

Donc $(Z^n)_{n\geqslant k}$ est une suite de Cauchy dans $H^2_d(0,T)$, alors il converge dans $H^2_d(0,T)$ vers une v.a Z appartient à $H^2_d(0,T)$.

Etape 3

Montrant que le processus limite est une solution de l'EDSR associée à (f,ξ).

Comme Y^n converge vers Y dans $H^2_1(0,T)$ et $\mathbb{P}-$p.s, alors $\sup\limits_{n\geqslant k}|Y^n|$ est intégrable $\mathbb{P}-$p.s. De plus $(Z^n)_{n\geqslant k}$ converge vers Z dans $H^2_d(0,T)$.

Supposons donc l'existence d'une sous suite tel que $(Z^n)_{n\geqslant k}$ converge vers Z $\mathbb{P}-$p.s [1], et $\sup\limits_{n\geqslant k}|Z^n|$ est intégrable $\mathbb{P}-$p.s. [2]

D'après la propriété 4. de la suite f_n, on en déduit que

$$f_n(s,Y^n_s,Z^n_s) \underset{n\to\infty}{\to} f(s,Y_s,Z_s).dt-p.s$$

D'autre part, comme

$$\left|f_n(s,Y^n_s,Z^n_s)\right| \leqslant k\left(1+\sup_{n\geqslant k}\left|Y^n_s\right|+\sup_{n\geqslant k}\left|Z^n_s\right|\right)\in \mathbb{L}^1([0,T],dt)$$

alors,

$$\int_t^T f_n(s,Y^n_s,Z^n_s)ds \underset{n\to\infty}{\to} \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds$$

D'aprés la continuité de l'intégrale stochastique, on obtient :

$$\sup_{t\leqslant T}\left|\int_t^T Z^n_s dB_s - \int_t^T Z_s dB_s\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

---

1. $Z^n \overset{H^2_d}{\to} Z \Rightarrow Z^n \overset{\mathbb{P}}{\to} Z \Rightarrow$il existe une sous suite tel que $Z^n \overset{p.s}{\to} Z$.
2. L'unicité n'est pas verifié, car on a parlé seulement d'une sous suite.

Finalement,

$$\left|Y_t^n - Y_t^m\right| \leqslant \int_t^T \left|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n) - f_m(s,Y_s^m,Z_s^m)\right| ds + \left|\int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s^m dB_s\right|$$

Pour $m \to \infty$, on obtient :

$$\sup_{t\leqslant T}\left|Y_t^n - Y_t\right| \leqslant \sup_{t\leqslant T}\int_t^T \left|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n) - f(s,Y_s,Z_s)\right| ds + \sup_{t\leqslant T}\left|\int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s dB_s\right|$$

alors,

$$\sup_{t\leqslant T}\left|Y_t^n - Y_t\right| \leqslant \int_0^T \left|f_n(s,Y_s^n,Z_s^n) - f(s,Y_s,Z_s)\right| ds + \sup_{t\leqslant T}\left|\int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s dB_s\right|$$

donc,

$$\sup_{t\leqslant T}\left|Y_t^n - Y_t\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Passant à la limite pour l'équation 3.2 lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

Ce qui assure que (Y,Z) est une solution de cette EDSR.

Pour finir, on considère $\left(Y',Z'\right)$ comme autre solution de l'EDSR 3.1.
Par le théorème 3.2.1, on a $\forall n \geqslant k$, $Y^n \leqslant Y'$.
On passe par la suite à la limite, on obtient : $Y \leqslant Y'$, ce qui montre que Y est une solution minimale. □

Remarque 3.2.1. *On peut approximer* f *par* $f_n(x) = \sup_{y\in\mathbb{Q}^n}(f(y) + n\,|x-y|)$, *et dans ce cas, la solutin* Y *est une solution maximale.*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'exposer deux résultats d'existence de la solution d'une EDSR.

Le premier résultat est établi par E. Pardoux et S. Peng en 1990 qui étudie l'existence et l'unicité dans le cas où le générateur f est Lipschitzien avec une condition terminale ξ, $\mathscr{F}_T-$mesurable et de carré intégrable. La preuve de ce résultat est basée sur le théorème de représentation des martingales Browniennes et le théorème de point fixe.

Le deuxième résultat étudie le problème de l'existence seulement des solutions pour l'EDSR dont le générateur f est de croissance linéaire et continue, et la condition terminale ξ, $\mathscr{F}_T-$mesurable et de carré intégrable. Ce résultat a été établi par Lepeltier. San Martin en 1997. L'idée de la preuve est d'approximer f par une suite $(f_n)_{n\geqslant k}$ d'applications Lipschitziennes, où le couple (f_n,ξ) possède le résultat de Pardoux-Peng, par conséquent, il existe un couple de processus (Y^n,Z^n) de limite et (Y,Z) qui est la solution de l'équation associée à (f,ξ).

Annexe A

Résultats utiles

Théorème A.1. ***(La convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires convergeant $p.s$ vers X.

Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| < Y$, alors X est intégrable et $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Théorème A.2. ***(Inégalité de Doob)***
Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale positive càd, alors pour tout : $p > 1$ et $T > 0$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} X_t\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[(X_T)^p\right].$$

Théorème A.3. ***(Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy)***
Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue $(X_t)_{t\geq 0}$ nul en 0 et pour tout $T > 0$:

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|\right)^p\right] \leqslant C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]$$

où C est une constante positive.

Théorème A.4. ***(Représentation des martingales browniennes)***
Soit $(M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ une $\mathbb{F}^B-$martingale de carré intégrable, il existe un unique processus adapté H tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty \text{ et } M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s, 0 \leqslant t \leqslant T$$

Lemme A.1. ***(Lemme de Gronwall)***
Soit $T \geq 0$ et g une fonction positive mesurable bornée telle que:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \quad \forall t \leq T$$

où a et b sont des constantes positives. Alors,

$$g(t) \leq ae^{bt}, \quad \forall t \leq T.$$

Si $a = 0$, on a $g = 0$.

Théorème A.5. ***(Théorème du point fixe)***
Soient (E, d) un espace métrique complet et '$\varphi : E \to E$ une application contractante, $i.e$:. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$ tel que :$\varphi(a) = a$.

Proposition A.1. ***(Inégalité de Young)***
Soient $a, b \geqslant 0$ et $1 < p, q < \infty$, telle que :$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors : $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Théorème A.6. ***(Fubini)***
Soient $\left(E, \mathscr{F}, \mu\right)$ et $(F, \mathscr{G}, \vartheta)$ deux espace mesurés $\sigma-$finis, et soit $\left(E \times F, \mathscr{F} \times \mathscr{G}, \mu \otimes \vartheta\right)$ l'espace mesurable produit muni de la mesure produit.

Si $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ est une application $\mathscr{F} \times \mathscr{G}-$mesurable, alors les applications :

$$x \mapsto \int_F f(x,y)d\vartheta(y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_E f(x,y)d\mu(x)$$

sont respectivement $\mathscr{F}-$mesurable ($\mathscr{G}-$mesurable).

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f(x,y)d\left(\mu\otimes\vartheta\right)(x\times y) &= \int_E \left(\int_F f(x,y)d\vartheta(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_F \left(\int_E f(x,y)d\mu(x)\right)d\vartheta(y)\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] A. Mokhtar Zahdi. Équations différentielles stochastiques rétrogrades (edsrs) et mathématiques financières. (2010). [cf. p. 21, 34]

[2] B. Oksendal. *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, (2013). [cf. p. 3]

[3] E. Pardoux et S. Peng. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. Dans *Stochastic partial differential equations and their applications*, 200–217. Springer (1992). [cf. p. 21]

[4] J. P. Lepeltier et J. San Martin. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient. *Statistics & Probability Letters* **32**(4), 425–430 (1997). [cf. p. 34]

[5] L. Boubaker. *Calcul Stochastique*. Notes de cours, Université de Biskra, (2020). [cf. p. 3]

[6] L. Jean-Claude. *Processus et intégrales stochastiques - Cours et exercices corrigés*. Ellipses, (2014). [cf. p. 3]

[7] M. Jeanblanc. Cours de calcul stochastique master 2if evry. *Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/-pages_perso/jeanblanc* (2006). [cf. p. 3]

[8] N. Bouleau. *Processus stochastiques et applications*. Hermann, (2000). [cf. p. 3]

[9] N. El Karoui, S. Peng et M. C. Quenez. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical finance* **7**(1), 1–71 (1997). [cf. p. 21]

[10] P. Briand. Equations différentielles stochastiques rétrograde, cours. *Mars* (2001). [cf. p. 21]

[11] S. Hamadène. *Backward Stochastic Differential Equations and Applications*. Laboratoire de Statistique et Processus, Université du Maine France. [cf. p. 3]