

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

MAAFI Mounira

Titre :

Quelques Propriétés Homologiques des Variétés Différentielles

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BELLAGOUN Abdelghani	UMKB	Encadreur
Dr. LAADJAL Baya	UMKB	Président
Dr. DAKHIA Ghania	UMKB	Examineur

juin 2021

DÉDICACE

- À mes chers parents, qui ont veillé sur moi avec tant d’amour et tendresse.
- À mes chers frères : Khalil, Lahssen, Rachid, Hicham, et chères soeurs, Nada, Meriem, Sara, Rawan, Soujoud.
- À mes amies : Asma, Chaima , Sabrina, Hasna, Roumisa, Saada, Hadjer, Amira, Marwa, Nariman, Manar, Rania, Saida.
- À tous mes Camarades et Enseignants du Département de Mathématiques Biskra.
- À tous mes collègues qui ont été toujours là à mes côtés.

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu le tout puissant et méricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mr Abdelghani Bellagoun de ses précieux conseils et son aide durant toute la période de travail .Je voudrais également lui témoigner ma gratitude pour sa patience et son soutien afin de mener mon travail à bon terme.

Mes remerciements s'étendent particulièrement aux membres de jury () et(). Mes vifs remerciements vont également à mes enseignants Rezki Brahim, Menacer Tidjani, Hfeyad Mokhtar, Yahia Djabrane, Brahim Brahimi et tout autres enseignants qui a participé à ma formation.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à ma chère famille, qui m'a toujours soutenue et encouragée tout au long de mon cursus d'étude ,à toute personne qui à participé de près ou de loin dans l'exécution de mon modeste travail.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	4
Liste des figures	6
Liste des tableaux	7
Introduction	1
1 Espaces Topologiques et Variétés Différentielles	3
1.1 Espaces topologiques	3
1.1.1 Homotopie	4
1.2 Variétés Différentielles	7
1.3 Classification des Variétés	10
2 Homologie et Cohomologie	13
2.1 Complexes de Chaînes et de Cochaînes	13
2.2 Suites exactes de complexes	17
2.3 Formules des coefficients universels	22
3 Exemples d'Homologie	31
3.0.1 Homologie simpliciale	31

3.0.2	Simplexe, complexe simplicial	31
3.0.3	Homologie simpliciale	32
3.0.4	Calcul de l'homologie de quelques complexes simpliciaux	33
3.0.5	Homologie du disque	36
3.0.6	Homologie de la sphère	37
3.1	Homologie du tore	39
3.1.1	Calcul des groupes d'homologie	39
	Conclusion	41
	References	42
	Annexe B : Notations	43

Table des figures

1.1	chemins Homotopes	5
1.2	Ruban de Moebuis	5
1.3	Tore	6
1.4	Fibre de Seifert	9
2.1	Types de simplexes	14
2.2	Exemple de plan projectif	20
2.3	Complexe simplicial	22
3.1	Triangularisation de disque	37
3.2	Triangularisation du tore	39

Liste des tableaux

Introduction

En mathématiques, l'homologie est d'une manière générale, une association entre une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets mathématiques tels que des espaces topologiques. A l'origine les groupes d'homologie ont été définis dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique [1].

La motivation initiale pour définir les groupes d'homologie était de voir que deux formes peuvent être distinguées en examinant leurs trous. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est solide et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un trou bidimensionnel alors que le cercle renferme un trou unidimensionnel. L'homologie était à l'origine une méthode mathématique rigoureuse pour définir et classer les trous dans une variété. En gros, un cycle est une sous-variété fermée, une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une classe d'homologie (qui représente un trou) est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un trou, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle.

Il existe de nombreuses théories d'homologie. Un type particulier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées et cela lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique,

à l'instar des espaces topologiques. La plupart des groupes d'homologie ou des modules peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective abstraite, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée.

Chapitre 1

Espaces Topologiques et Variétés

Différentielles

1.1 Espaces topologiques

Pour en connaître davantage sur ce paragraphe. On pourra consulter [3]
une topologie sur un ensemble X est la donnée de sous-ensembles de X , composé d'ouverts, qui vérifient :

Définition 1.1.1 – *l'intersection de deux ouverts est un ouvert,*

- une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
- l'ensemble vide et l'espace X tout entier sont des ouverts.

Un espace topologique est dit connexe lorsqu'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non triviaux. Il est dit séparé lorsque pour tous éléments distincts x et y , il existe deux ouverts disjoints U et V tels que :

$$x \in U \text{ et } y \in V.$$

Définition 1.1.2 *Un recouvrement d'ouverts U de l'espace topologique X est un sous-ensemble d'ouverts dont la réunion vaut X . Il est dit localement fini lorsque chaque point*

de X possède un voisinage contenu seulement dans un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement U . On dit aussi qu'un recouvrement V raffine le recouvrement U lorsque tout élément de V est contenu dans un élément de U .

Définition 1.1.3 Un espace topologique est dit compact lorsqu'il est séparé et que tout recouvrement d'ouverts possède un sous-recouvrement fini. Il est dit paracompact lorsque tout recouvrement d'ouverts possède un raffinement localement finis.

Définition 1.1.4 Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est une application pour laquelle la préimage de tout ouvert est un ouvert. C'est un homéomorphisme lorsqu'elle est bijective continue et d'inverse continu.

Définition 1.1.5 Deux applications continues $f_0 : X \longrightarrow Y$ et $f_1 : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'elles sont reliées par une homotopie : c'est-à-dire par une application continue $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ telle que :

$$F|_{X \times \{0\}} = f \quad \text{et} \quad F|_{X \times \{1\}} = f_1 \quad (1.1)$$

1.1.1 Homotopie

Définition 1.1.6 Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que :

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x, 1) = g(x). \quad (1.2)$$

On dit alors que H est une homotopie de f à g . [2]

Définition 1.1.7 (Equivalence d'homotopie) [1] On dit que les espaces X et Y sont homotopiquement équivalents, ou ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues : $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telle que la composée $f \circ g$ est homotope

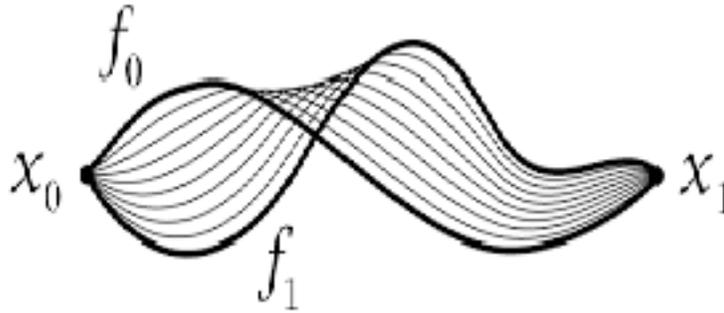


FIG. 1.1 – chemins Homotopes

à Id_x et la composée $g \circ f$ est homotope à Id_y . On dit alors que les applications f et g sont des équivalences d'homotopie. De manière informelle, une équivalence d'homotopie est donc « une application continue qui est inversible à homotopie près ». D'où un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie. Mais l'équivalence d'homotopie est une notion beaucoup plus générale. Elle autorise notamment à « écraser par déformations » certaines parties de X ou Y . Par exemple, deux espaces contractiles (\mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q) ont le même type d'homotopie. Et si X se rétracte par déformation sur $Y \subset X$ alors X et Y ont le même type d'homotopie. On en déduit par exemple qu'un tore et une bande de Möbius ont le même type d'homotopie : en effet, ils se rétractent tous les deux par déformation sur leur axe, qui est un cercle.



FIG. 1.2 – Ruban de Moebius

Définition 1.1.8 On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence

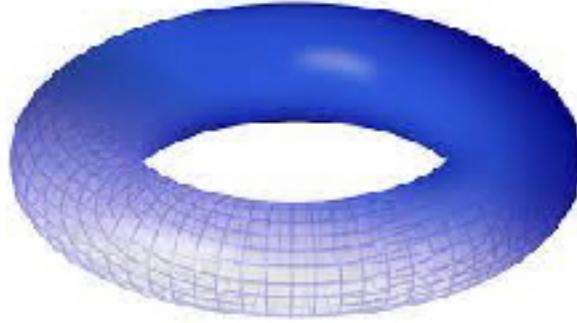


FIG. 1.3 – Tore

d'homotopie lorsqu'il existe une application continue $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes à l'identité (de X et de Y respectivement). Dans ce cas les espaces topologiques X et Y sont dits homotopiquement équivalents, ou de même type d'homotopie. Un espace topologique est dit contractile lorsqu'il est homotopiquement équivalent à un singleton.[5]

Définition 1.1.9 On dit qu'un sous-ensemble Y de X est un rétract par déformation de X lorsqu'il existe une homotopie $F : X[0, 1] \longrightarrow X$ telle que : $f_0 = Id_X$ et $Im(f_1) \subset Y$ avec

$$(f_1)_Y = Id_Y. \tag{1.3}$$

où $f_0 = F|_{X \times \{0\}}$. et $f_1 = F|_{X \times \{1\}}$. [4]

Soit X un espace topologique paracompact. Alors tout recouvrement d'ouverts U de X possède une partition de l'unité subordonnée $\{f_v; v \in V\}$, c'est-à-dire telle que :

Théorème 1.1.1 – Le recouvrement V est un raffinement localement fini de U .

– Pour tout ouvert v de V , la fonction $f_v : X \longrightarrow [0, 1]$ est continue à support dans v .

– La somme $\sum_{v \in V} f_v$ est constante égale à 1.

De plus, si U est localement fini, on peut choisir $V = U$.

Exemple 1.1.1 1) *L'espace vectoriel \mathbb{R}^n ou plus généralement tout sous-ensemble convexe ou étoilé est contractile.*

2) *La sphère s^{n-1} a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

1.2 Variétés Différentielles

Définition 1.2.1 *Une variété différentielle de dimension n est un espace topologique séparé M recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes. Une carte est la donnée d'un ouvert U de M , d'un ouvert V de \mathbb{R}^n et d'un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que lorsque deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) se rencontrent, l'application de changement de cartes $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ soit un C^k -difféomorphisme. La variété M est aussi appelée surface lorsque $n = 2$ et courbe lisse lorsque $n = 1$. La réunion des cartes est appelée atlas. Deux atlas sont dits compatibles lorsque leur réunion est un atlas.*

Contre exemple

1) La réunion de deux copies de R^2 où l'on identifie les points de $R^2 \setminus \{0\}$ n'est pas une variété parce-qu'elle n'est pas séparée.

2) La droite n'est pas une variété. En fait toute variété est paracompacte.

Exemple 1.2.1

1) Les premiers exemples de variétés différentielles sont R^n , la sphère $S^n := \{x \in R^{n+1}, \|x\| = 1\}$ et le tore $T^n := C_R x C_r$ rotation du cercle de rayon r autour du cercle de rayon R .

2) Les espaces projectifs.

L'espace projectif réel RP^n , aussi noté $P(R^{n+1})$ ou P_R^n , est l'ensemble des droites vectorielles de R^{n+1} . C'est le quotient $(R^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \forall \lambda \in R^*)$. L'espace projectif complexe CP^n , aussi noté $P(\mathbb{C}^{n+1})$ ou $P_{\mathbb{C}}^n$, est l'ensemble des droites vectorielles

de \mathbb{C}^{n+1} . C'est le quotient $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*)$. Ce sont des variétés différentielles compactes connexes de dimension n et $2n$ respectivement. Les groupes linéaires $GL_n(\mathbb{C}), GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{R}), SU_n, U_n, SO_n, O_n$. etc.... sont des variétés différentielles. Mieux encore, ce sont des groupes de Lie.[2]

4) Les Espaces Lenticulaires

Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Le groupe $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$ agit sur la sphère unité $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par restriction de l'action :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/P\mathbb{Z} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\bar{k}, (Z_1, Z_2)) &\longmapsto (\exp(\frac{2i\pi k}{p})z_1, \exp(\frac{2i\pi qk}{p})z_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Le quotient de S^3 par cette action est noté $L(p, q)$ et appelé espace lenticulaire de dimension 3. C'est une variété compacte de dimension trois.

5) Les autres quotients de la sphère par des groupes finis agissant sans point fixe, comme la sphère de Poincaré, sont des variétés compactes de dimension 3.

6) Les suspensions de difféomorphismes

Soit M une variété et $\varphi : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme. Le groupe \mathbb{Z} agit sur $M \times \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (M \times \mathbb{R}) &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (k, (x, t)) &\longmapsto (\varphi^k(x), t + k). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le quotient de $M \times \mathbb{R}$ par cette action fournit une variété V de dimension $n + 1$ appelée suspension du difféomorphisme φ . La projection $(x, t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto t \text{ mod } \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ passe au quotient en une submersion $\pi : V \longrightarrow S^1$ dont les fibres sont difféomorphes à M .

7) Les Fibrés de Seifert

Dans le cas de la rotation φ d'angle rationnel q/p , où p et q sont des entiers premiers entre eux, sur le disque $\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |x| < 1\}$ de dimension deux, la suspension de φ

fournit une variété de dimension trois partitionnée par des cercles. De plus, la suspension de $\varphi|_{\Delta^*=\Delta\setminus\{0\}}$ fournit un ouvert V^* de V diffeomorphe à $\Delta^* \times S^1$. Un fibré de Seifert est une variété de dimension trois compacte, partitionnée par des cercles, obtenue en recollant de telles suspensions le long d'ouverts de V^* saturés par des cercles.

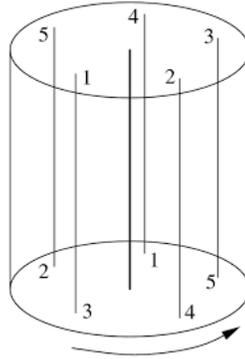


FIG. 1.4 – Fibre de Seifert

Définition 1.2.2 Une variété différentielle est dite orientable lorsqu'elle possède un atlas dont toutes les applications de changements de cartes ont une différentielle qui préserve l'orientation de \mathbb{R}^n .

Exemple 1.2.2

- 1) L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est orientable si et seulement si n est impair.
- 2) La suspension de $id :]0, 1[\longrightarrow]0, 1[$ est orientable, c'est un cylindre. La suspension de $-id :]0, 1[\longrightarrow]0, 1[$ n'est pas orientable, c'est le ruban de Moebius.

Proposition 1.2.1 Une variété différentielle de dimension n est orientable si et seulement si elle possède une forme différentielle de degré n qui ne s'annule pas.

Définition 1.2.3 [8] Une application $f : M \longrightarrow N$ entre variétés différentielles est dite différentiable lorsque pour toutes cartes $\varphi : U \longrightarrow V$ de M et $\Psi : U' \longrightarrow V'$ de N , la composée $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable entre ouverts de \mathbb{R}^n . On dit que f est un diffeomorphisme lorsque f est bijective et f et f^{-1} sont différentiables. Etant deux variétés

connexes orientées M et N de dimension n , on peut former une nouvelle variété de dimension n connexe et orientée, que l'on note $M \# N$ et qu'on appelle somme connexe de M et N , en procédant de la façon suivante : On choisit des plongements $i_M : D^n \rightarrow M$ et $i_N : D^n \rightarrow N$, où D^n est le disque unité ouvert de \mathbb{R}^n et i_M (respectivement i_N) préserve (respectivement renverse) l'orientation.

- 2) On recolle $M \setminus \{i_M(0)\}$ et $N \setminus \{i_N(0)\}$ le long de $i_M(D^n \setminus \{0\})$ et $i_N(D^n \setminus \{0\})$ à l'aide de l'application de recollement qui identifie en coordonnées polaires $i_M(r, \theta)$ à $i_N(1-r, \theta)$ pour tout $0 < r < 1$ et tout $\theta \in S^{n-1}$. Les orientations de $M \setminus \{i_M(0)\}$ et $N \setminus \{i_N(0)\}$ et se prolongent en une orientation de $M \# N$ puisque l'application de recollement $(i_N \circ i_M^{-1})|_{i_M(D^n \setminus \{0\})}$ préserve l'orientation.

Attention :

- 1) La variété $M \# N$ ne dépend pas des choix de i_M et i_N à difféomorphisme près, ce qui repose sur un théorème de Palais selon lequel tous les plongements du disque sont isotopes.
- 2) Par contre $M \# N$ dépend du choix des orientations de M et N . Par exemple $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ et $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ ne sont pas homéomorphes.
- 3) Si M ou N n'est pas orientable, l'opération de somme connexe reste bien définie, on ne suppose alors pas que i_M ou i_N préserve ou renverse l'orientation.

Définition 1.2.4 Une variété différentielle à bord M de dimension n est définie comme une variété différentielle, mais en étant localement modelée sur des ouverts du demi-espace : $\{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$. Le bord de M est l'ensemble des points envoyés sur l'hyperplan $\{x_n = 0\}$, il hérite d'une structure de variété différentielle de dimension $n - 1$. Pour plus d'information voir [7]

1.3 Classification des Variétés

Listage des variétés à homéomorphisme ou difféomorphisme près [3].

Théorème 1.3.1 1) *Toute variété compacte connexe de dimension un est difféomorphe au cercle S^1 .*

2) *Toute variété compacte connexe et orientable de dimension deux est difféomorphe à S^2 ou à une somme connexe $T^2 \# T^2 \dots \# T^2$ de tores, c'est-à-dire à une somme connexe $S^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$. De plus, deux telles surfaces sont difféomorphes entre elles si et seulement si le nombre de tores dans la somme connexe est le même (c'est le genre de la surface).*

3) *Toute variété compacte connexe et non orientable de dimension deux est difféomorphe à une somme connexe de plans projectifs $\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$. De plus deux telles surfaces sont difféomorphes si et seulement si le nombre de plans projectifs dans la somme connexe est le même.*

En dimension supérieure à trois, il devient difficile de montrer que deux variétés sont homéomorphes.

Théorème 1.3.2 (G. Perelman) [1] *Toute variété compacte connexe et simplement connexe de dimension trois est difféomorphe à la sphère S^3 .*

Théorème 1.3.3 (Markov, 1958) [1] *Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si deux variétés sont homéomorphes entre elles. D'autres relations d'équivalences plus faibles sont donc étudiées. On peut chercher à lister les variétés à type d'homotopie près ou à cobordisme près.*

Théorème 1.3.4 1) *Deux espaces lenticulaires $L(p, q)$ et $L(p', q')$ ont même type d'homotopie si et seulement si $p = p'$ et*

$$\exists n \in \mathbb{Z}, qq' = \mp n^2 \text{ mod } p. \quad (1.6)$$

2) *Ces espaces sont difféomorphes si et seulement si $p = p'$ et $q = \mp q'^{\mp 1} \text{ mod } p$.*

Définition 1.3.1 Deux variétés compactes orientées M et N de dimension n sont dites cobordantes lorsqu'il existe une variété orientée W , compacte à bord de dimension $n + 1$, dont le bord ∂W est difféomorphe à la réunion disjointe $M \sqcup N$ en induisant l'orientation de M et l'orientation opposée de N . [9]

Exemple 1.3.1 L'anneau $\{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq |x| \leq 2\}$ est un cobordisme entre S^{n-1} et S^{n-1} .

Théorème 1.3.5 (R. Thom)

- 1) Toute variété compacte de dimension trois borde une variété de dimension quatre.
- 2) Toute variété compacte connexe et orientable de dimension quatre est cobordante à une somme connexe de S^4 et de copies de $\mathbb{C}P^2$ et $\overline{\mathbb{C}P^2}$. De plus deux telles variétés sont cobordantes si et seulement si le nombre de copies de $\mathbb{C}P^2$ moins le nombre de copies de $\overline{\mathbb{C}P^2}$ est le même.

S'il est très difficile de montrer que deux variétés sont homéomorphes entre elles, il est beaucoup plus facile de montrer qu'elles ne le sont pas. Par exemple, si elles n'ont pas le même nombre de composantes connexes. Le but de ce cours est de fournir des outils algébriques qui permettent de distinguer les variétés ou les espaces topologiques à homéomorphisme près, généralisant la notion de composante connexe. [2]

On va associer à toute variété M de dimension n des groupes abéliens $H_K(M)$ et $H^K(M)$, $0 \leq k \leq n$, groupes d'homologie et de cohomologie de M , de sorte que deux variétés homéomorphes aient des groupes isomorphes. Mieux, toute application C^0 entre deux variétés induit un morphisme entre leurs groupes d'homologie et de cohomologie, qui est un isomorphisme lorsque l'application est un homéomorphisme.

Chapitre 2

Homologie et Cohomologie

Ce paragraphe s'inspire du livre [10], que l'on pourra consulter, ainsi que [4], pour en connaître davantage.

2.1 Complexes de Chaînes et de Cochaînes

Définition 2.1.1 *Un complexe de chaînes est la donnée d'une suite :*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} \mathbb{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \quad (2.1)$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{C}_n est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau A , et ∂_n est un morphisme de groupes ou de A -modules tel que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Un complexe de cochaînes est la donnée d'une suite :

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{d_n} \mathbb{C}^n \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{C}^{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \quad (2.2)$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{C}^n est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau A , et d_n est un morphisme de groupes ou de A -modules tel que $d_{n+1} \circ d_n = 0$. L'opérateur ∂_n est appelé opérateur de bord et l'opérateur d_n opérateur de cobord. Lorsque

seul un nombre fini de groupes \mathbb{C}_n ou \mathbb{C}^n sont non triviaux, le complexe est dit borné.[4]

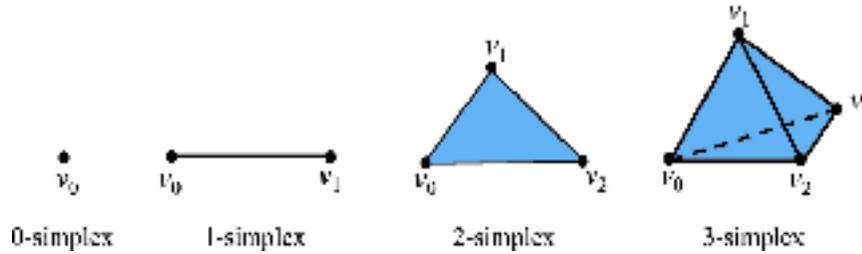


FIG. 2.1 – Types de simplexes

Exemple 2.1.1

- 1) Si $\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} \mathbb{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$ est un complexe de chaînes, alors en posant $\mathbb{C}^n = \text{Hom}(\mathbb{C}_n, \mathbb{Z})$ et $d^n = {}^t(\partial_{n+1})$, on obtient un complexe de cochaînes.
- 2) La suite suivante est un complexe de chaînes :

$$\cdots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots \tag{2.3}$$

Soit \mathbb{C} un complexe de chaînes (respectivement cochaînes). Les éléments de $\text{Ker}(\partial_n) =: \mathbb{Z}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\text{Ker}(d_n) =: \mathbb{Z}^n(\mathbb{C})$) sont appelés cycles (respectivement cocycles). Les éléments de $\text{Im}(\partial_{n+1}) = B_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\text{Im}(d_{n+1}) = B^n(\mathbb{C})$) sont appelés bords (respectivement cobords) et le quotient $H_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}_n(\mathbb{C}) / B_n(\mathbb{C})$ (respectivement $H^n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}^n(\mathbb{C}) / B^n(\mathbb{C})$) est appelé groupe d’homologie (respectivement de cohomologie) du complexe.[4]

Exemple 2.1.2 Dans l’exemple 2 précédent (de l’exemple 2.1.1), les groupes d’homologie sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\{0\}$ en alternance.

Attention : les groupes d’homologie du complexe et de cohomologie du complexe dual ne sont pas isomorphes en général, voir le §2.1.2. Dans ce qui suit, les définitions liées aux complexes de chaînes et à leurs groupes d’homologie se reformulent dans le cadre des complexes de cochaînes et de leurs groupes de cohomologie. On le laisse en exercice.

Définition 2.1.2 Une application de chaînes $f : \mathbb{C} \longrightarrow D$, aussi appelée morphisme de complexes, est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme de groupes ou de A -modules $f : \mathbb{C}_n \longrightarrow D_n$ tel que $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}$. c-à-d de sorte 2.1 que le diagramme suivant commute [3]

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & \mathbb{C}_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \mathbb{C}_n & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbb{C}_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots
 \end{array} \tag{2.4}$$

Une homotopie $h : \mathbb{C} \longrightarrow D$ entre deux applications de chaînes $f^1, f^2 : \mathbb{C} \longrightarrow D$ est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme de groupes $h_n : \mathbb{C}_n \longrightarrow D_{n+1}$ satisfaisant :

$$f_n^1 - f_n^2 = \partial_{n+1} \circ h_n \circ h_{n-1} \circ \partial_n. \tag{2.5}$$

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow D$ une application de chaînes entre complexes.[10] Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(\mathbb{Z}_n(\mathbb{C})) \subset \mathbb{Z}_n(D)$ et $f_n(B_n(\mathbb{C})) \subset B_n(D)$ de sorte qu'elle induit un morphisme :

$$f_n : H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n(D). \tag{2.6}$$

de plus deux applications homotopes induisent le même morphisme en homologie.[10]

Proof. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout cycle $c \in \mathbb{Z}_n(\mathbb{C})$, on a $\partial_n \circ f_n(c) = f_{n-1} \circ \partial_n(c) = f_{n-1}(0) = 0$, donc $f_n(c)$ est un cycle. Pour tout bord $b \in B_n(\mathbb{C})$, il existe $a \in \mathbb{C}_{n+1}$ tel que $b = \partial_{n+1}(a)$, donc $f_n(b) = f_n \circ \partial_{n+1}(a) = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}(a)$. de sorte que $f_n(b)$ est un bord. En particulier, si on note $n : \mathbb{Z}_n(D) \longrightarrow H_n D$ la surjection canonique, l'application $\pi_n \circ f_n$ passe au quotient en un morphisme $H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n(D)$ que l'on note encore f_n . Soient f^1 et f^2 deux applications de chaînes homotopes et h une homotopie entre f^1 et f^2 . Soit alors $[c] \in H_n(\mathbb{C})$ et $\acute{c} = c + \partial_{n+1}(c)$ un représentant quelconque de

cette classe d'homologie dans $\mathbb{Z}_n(c)$. Alors c est un cycle donc $h_{n+1} \circ \partial_n(c)$. En notant $\tilde{c} = h_n(c)$, on a $f_n^1(c) = f_n^2(c) + \partial_{n+1}(c)$ de sorte que $f^1([c]) = f^2([c])$. ■

Définition 2.1.3 On appelle caractéristique d'Euler d'un complexe borné C dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbb{k} la quantité [4] :

$$\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{k}}(C_n). \quad (2.7)$$

Soit \mathbb{C} un complexe de chaînes borné dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps \mathbb{k} . Alors :

$$\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n H_n(C). \quad (2.8)$$

de plus, les inégalités de Morse suivantes sont satisfaites :

$$\forall N \in \mathbb{Z}, \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{k}}(C_n) \geq \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{k}} H_n(C). \quad (2.9)$$

Soit $N \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème du rang, [10]

$$\sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_{\mathbb{k}}(C_n) = \sum_{n \leq N} (-1)^n (\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{Z}_n(C) + \dim_{\mathbb{k}} B_{n-1}(C)). \quad (2.10)$$

cette égalité se réécrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_{\mathbb{k}}(C_n) &= (-1)^N \dim_{\mathbb{k}} \mathbb{Z}_N(C) \\ &+ \sum_{n \leq N-1} (-1)^n (\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{Z}_n(C) - \dim_{\mathbb{k}} B_n(C)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou encore :

$$\sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_{\mathbb{k}}(C_n) = \sum_{n \leq N-1}^n (-1)^{N-n} (\dim_{\mathbb{k}} H_n - \dim_{\mathbb{k}} B_N(C)) \quad (2.12)$$

comme la quantité $\dim_{\mathbb{k}} B_N(C)$ est positive, on en déduit les inégalités 2.7 de Morse. D'autre part cette quantité s'annule lorsque N est assez grand, d'où le résultat.

2.2 Suites exactes de complexes

Définition 2.2.1 On appelle sous-complexe C' du complexe C la donnée, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'un sous-groupe C'_n de C_n telque : $\partial_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$. La suite induite [9]

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C'_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \quad (2.13)$$

est alors un complexe. Le complexe quotient C/C' est donné par :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}/C'_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n/C'_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}/C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \quad (2.14)$$

Définition 2.2.2 [6] Une suite courte de complexes $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ est dite exacte lorsque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, i_n est injectif, p_n est surjectif et :

$$\text{Ker}(p_n) = \text{Im}(i_n). \quad (2.15)$$

Exemple 2.2.1 Si C' est un sous-complexe de C et si $i : C' \longrightarrow C$ désigne l'inclusion $\pi : C \longrightarrow C/C'$ la projection, alors la suite courte de complexes $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/C' \longrightarrow 0$ est exacte. Un deuxième exemple important est fourni par la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 Soit C un complexe de chaînes dont les éléments sont des groupe abéliens (ou des A -modules) libres et soit $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow 0$ une suite

exacte courte de groupes abéliens (ou de A -modules).[9] Alors la suite courte de complexes suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow C \otimes G' \xrightarrow{Id \otimes i} C \otimes G \xrightarrow{Id \otimes p} C \otimes G'' \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Proof. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le groupe $C_n \otimes G''$ est engendré par les éléments de la forme $c \otimes g''$, où $c \in C_n$, $g'' \in G''$. Or il existe $g \in G$ tel que $p(g) = g''$, $Id \otimes p(c \otimes g) = c \otimes g''$. La dernière partie de la suite est donc exacte. De même l'image de $Id \otimes i$ est le sous-groupe de $C_n \otimes G$ engendré par les éléments de la forme $c \otimes g$, où $g \in Ker(p)$. Soit K_n ce sous-groupe. Alors, le morphisme $C_n \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G/K_n$ se factorise à travers $C_n \otimes G''$ par φ_n , où φ_n agit sur les tenseurs simples par $\varphi_n(c \otimes g'') = c \otimes g \text{ mod } (K_n)$, avec $g \in G$ tel que $p(g) = g''$. Cette application φ_n ne dépend pas du choix de g . On en déduit que $Ker(Id \otimes p) \subset K_n$. D'autre part $(Id \otimes p) \circ (Id \otimes i) = 0$, de sorte que : $Ker(Id \otimes p) = Im(Id \otimes i)$. Enfin si $x \in Ker(Id \otimes i)$, il s'écrit :

$$x = \sum a_k c_k \otimes g'. \quad (2.17)$$

Le sous-groupe C' de C engendré par les c_k est de type fini et libre donc isomorphe à un \mathbb{Z}^r , $r \in \mathbb{N}$. Or

$\mathbb{Z}^r \otimes G' \simeq (G')^r$ et en notant $\tilde{C} := Im(Id \otimes i)|_{C' \otimes G'}$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C' \otimes G' & \xrightarrow{Id \otimes i} & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G')^r & \xrightarrow{i^r} & G^r \end{array} \quad (2.18)$$

Comme i^r est injective, $(Id \otimes i)|_{C' \otimes G'}$ est injective et donc $x = 0$. Finalement, $Id \otimes i$ est injective et la suite est exacte. ■

Remarque 2.2.1 ce dernier point utilise que C est libre. Si on considère par exemple la

suite :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (2.19)$$

de groupes abéliens et le complexe C de chaînes $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Alors :

$$C \otimes \mathbb{Z} = C, \quad C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = C. \quad (2.20)$$

et en tensorisant, la multiplication par 2 devient l'application nulle et la projection $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ devient l'identité, donc la suite $C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ est exacte.

mais la suite

$$0 \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (2.21)$$

ne l'est pas, elle n'est pas exacte à gauche. En fait le défaut d'exactitude provient de la multiplication par 2, codée par la torsion $G'' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et de la torsion de C , en l'occurrence sa 2-torsion. On note :

$$\text{Tor}_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, C) = \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

ce défaut d'exactitude, de sorte que la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, C) \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (2.22)$$

devient exacte.[8]

Définition 2.2.3 L'homologie du complexe $C \otimes G$, où G est un groupe abélien (ou un A -module), est appelé homologie de C à coefficients dans G et notée $H_*(C, G)$.[2]

Exemple 2.2.2 Si C est le complexe $\dots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \dots$, alors les groupes d'homologie pairs sont donnés par $H_{2k}(C) = H_{2k}(C, \mathbb{Z}) = 0$ et les groupes d'homologie impairs par $H_{2k+1}(C) = H_{2k+1}(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. À coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on

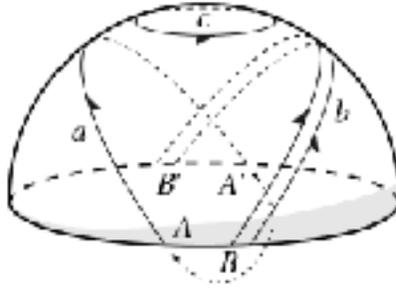


FIG. 2.2 – Exemple de plan projectif .

a $H_k(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ car le complexe $C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'écrit :

$$\dots \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \dots \quad (2.23)$$

On s'aperçoit en particulier que $H_*(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq H_*(C) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, voir le (Théorème 2.3.1).

Proposition 2.2.2 Soit $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes bornés d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbb{k} . Alors :

$$\chi(C) = \chi(C') + \chi(C''). \quad (2.24)$$

Proof. C'est une conséquence immédiate du théorème du rang,[7] puisque :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \dim_k(C_n) = \dim_k(C'_n) + \dim_k(C''_n). \quad (2.25)$$

■

Théorème 2.2.1 (Lemme du serpent) À toute suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ est associée une suite exacte longue en homologie :

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_n(C') \xrightarrow{i_n} H_n(C) \xrightarrow{p_n} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C') \longrightarrow \dots \quad (2.26)$$

où ∂_* est appelé morphisme de connexion.[3]

Proof. On commence par montrer que la suite est exacte au niveau de $H_n(C)$. Soit $[C] \in H_n(C)$ tel que $p_n([C]) = 0 = [p_n(c)]$. Par définition, il existe c'' tel que : $p_n(c) = \partial_{n+1}c''$. Comme p_{n+1} est surjective, il existe $\tilde{c} \in C_{n+1}$ tel que $c'' = p_{n+1}(\tilde{c})$, donc : $p_n(c) = \partial_{n+1}c'' = \partial_{n+1} \circ p_{n+1}\tilde{c} = p_n \circ \partial_{n+1}\tilde{c}$ et $p_n(c - \partial_{n+1}\tilde{c}) = 0$. Par suite, il existe un unique c' tel que $c - \partial_{n+1}\tilde{c} = i_n c'$. Alors, c' est un cycle puisque $i_{n-1}\partial_n c' = \partial_n i_n c' = \partial_n(c - \partial_{n+1}\tilde{c})$ et i_{n-1} est injective. Donc $c = i_n(c') \bmod B_n$, de sorte que $[c] = i_n([c'])$ et $\text{Ker}(p_n) \subset \text{Im}(i_n)$. L'égalité $\text{Ker}(p_n) = \text{Im}(i_n)$ provient alors du fait que $p_n \circ i_n = 0$. On définit à présent le morphisme de connexion ∂_* . Soit $[c''] \in H_n(C'')$. Il existe $c \in C_n$ tel que $p_n(c) = c''$. Alors, $p_{n-1}\partial_n c = \partial_n c'' = 0$, de sorte que $\partial_n c \in \text{Ker}(p_{n-1})$ et il existe un unique $c' \in C'_{n-1}$ tel que $\partial_n c = i(c')$. Cet élément c' est un cycle car $i_{n-2}\partial_{n-1}c' = \partial_{n-1}i_{n-1}c' = \partial_{n-1}\partial_n c' = 0$ et i_{n-2} est injective. On définit alors $\partial_*[c] = [c']$ et on vérifie que cette définition ne dépend pas des choix effectués. Un autre représentant de $[c'']$ s'écrit en effet : $c'' + \partial_{n+1}c''$. On a $c'' = p_{n+1}(\tilde{c})$ et $p_n(c + \partial_{n+1}\tilde{c}) = c'' + \partial_{n+1}c''$, de sorte que c se trouve remplacé par $c + \partial_{n+1}\tilde{c}$. D'autre part, un antécédent quelconque de c'' par p_n s'écrit $c + i_n c'$, de sorte que c est remplacé par $c + \partial_{n+1}\tilde{c} + i_n c'$. Alors c' se trouve remplacé par $c' + \partial c'$ qui est égal à c' modulo B_{n-1} , de sorte que $[c']$ est en effet indépendant des choix. Vérifions 2.17 à présent que la suite est exacte. Soit $[c'] \in H_n(C''')$ et $c \in C_n$ tel que $p_n(c) = c'$. Si $c \in Z_n(C)$, c-à-d si $[c''] \in \text{Im}(p_n)$, alors $\partial_n c = 0$ et donc le c' du paragraphe précédent est nul et $\partial_n c' = 0$. Ainsi $\text{Im}(p_n) \subset \text{Ker}(\partial_*)$. Maintenant, si $[c'] = 0$, $c' = \partial_n c'$ et $\partial_n c = i_{n-1}c' = \partial_n i_n c'$. Or on peut choisir $\tilde{c} = c - i_n c'$ plutôt que c , et alors : $\partial_n \tilde{c} = 0$ de sorte que $[c''] \in \text{Im}(p_n)$. Ainsi, $\text{Im}(p_n) = \text{Ker}(\partial_*)$. D'autre part, soit $[c'] \in \text{Im}(p_n)$. Par définition, $i_{n-1}c' = \partial_n c$ de sorte que $[i_{n-1}c'] = 0 = i_{n-1}[c']$ et donc $\text{Im}(p_n) \subset \text{Ker}(i_{n-1})$. Puis, si $[c'] \in \text{Ker}(i_{n-1})$, alors $i_{n-1}c' = \partial_n c$ et comme $\partial_n p_n c = p_{n-1}\partial_n c = p_{n-1}i_{n-1}c' = 0$, $p_n(c)$ est un cycle et par définition $\partial_*[p_n c] = [c']$, de sorte que $\text{Im}(\partial_*) = \text{Ker}(i_{n-1})$. ■

Définition 2.2.4 Dans le cas de la suite exacte courte de changements de coefficients donnée par (la Proposition 2.2.1), le morphisme de connexion donné par (le Théorème 2.2.1) est

appelé *morphisme de Bockstein*.

2.3 Formules des coefficients universels

On a vu dans le cas du complexe $\dots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \dots$ que l'homologie $H_*(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ diffère de l'homologie $H_*(C) = H_*(C, \mathbb{Z})$ ou encore de l'homologie tensorisée par :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_*(C) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (2.27)$$

En fait, si C est un complexe de chaînes et G un groupe abélien (ou A -module), on a bien un morphisme de groupe canonique $\mu : H_*(C) \otimes G \longrightarrow H_*(C, G)$ défini sur les tenseurs simples par $\mu([C] \otimes G) = [C \otimes G]$.

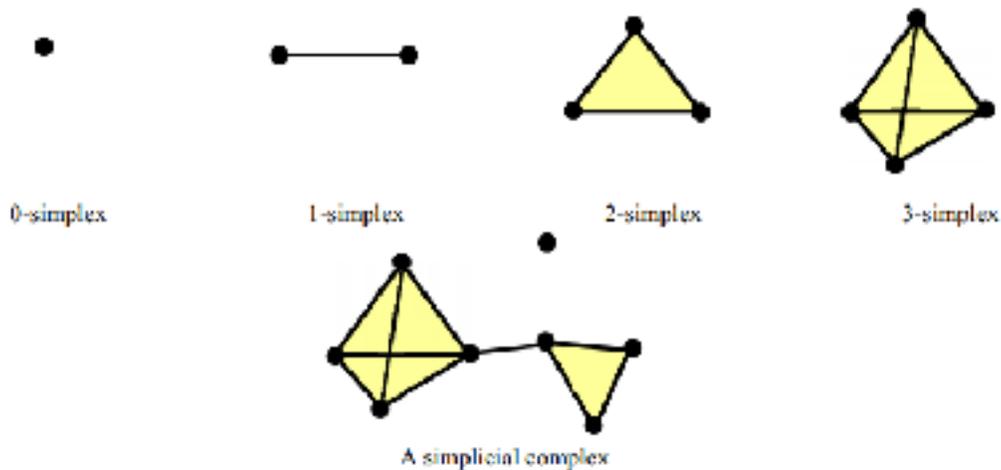


FIG. 2.3 – Complexe simplicial

Théorème 2.3.1 (Formule des coefficients universels en homologie) *Soit C un complexe de chaînes de groupes abéliens (ou A -modules) libres et soit G un groupe abélien (ou A -module). Alors on a la suite exacte scindée :*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_n(C, G) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, l'homologie à coefficients dans un groupe G contient l'homologie tensorisée mais aussi une partie qui provient de la torsion en degré un de moins.[1] On définit un complexe de chaînes Z en posant $Z_n = Z_n(C)$, le sous-groupe des cycles de degré n de C et en posant $\partial_n = 0$. De même, on définit le complexe B en posant $B_n = B_n(C)$. On obtient ainsi une suite exacte de complexes de chaînes de groupes libres $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$. Comme ces groupes sont libres, la suite est scindée, disons par $h : B \longrightarrow C$, et on déduit la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Z \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow 0. \quad (2.28)$$

On a alors par scindage $C \simeq Z \otimes B$ et donc :

$$C \otimes G \simeq (Z \otimes G) \otimes (B \otimes G). \quad (2.29)$$

(le Théorème 2.2.1) fournit la suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(B, G) \longrightarrow H_p(Z, G) \longrightarrow H_p(C, G) \longrightarrow H_p(B, G) \longrightarrow H_{p-1}(Z, G) \longrightarrow \cdots \quad (2.30)$$

Par définition :

$$H_{p+1}(B, G) \simeq Z_P(C) \otimes G. \quad (2.31)$$

Puisque $H_p(C)$ et $Z_p(C)$ sont libres, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow B_P(C) \longrightarrow Z_p(C) \longrightarrow H_p(C) \longrightarrow 0. \quad (2.32)$$

induit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(H_p(C), G) \longrightarrow B_P(C) \otimes G \longrightarrow Z_p(C) \otimes G \longrightarrow H_p(C) \otimes G \longrightarrow 0. \quad (2.33)$$

On vérifie alors que les morphismes $B_{p-1}(C) \otimes G \longrightarrow Z_{p-1}(C) \otimes G$ fournis par les morphismes de connexion de la suite longue sont bien les morphismes $I_{p-1} \otimes \text{Id}$, i_p :

$B_p \longrightarrow Z_p$ est l'inclusion naturelle. La suite exacte longue se réécrit alors :

$$0 \longrightarrow H_p(C) \otimes G \longrightarrow H_p(C, G) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G) \longrightarrow 0. \quad (2.34)$$

et on vérifie que le morphisme $H_p(C) \otimes G \longrightarrow H_p(C, G)$ est bien le morphisme défini précédemment. Le fait que cette suite exacte soit scindée provient du scindage h de la suite $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$, qui fournit :

$$h_p \otimes \text{Id} : B_{p-1}(C) \otimes G \longrightarrow C_p \otimes G. \quad (2.35)$$

En appliquant la définition du morphisme de connexion, on s'aperçoit que l'image $(h_p \otimes \text{Id})(\text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G))$ est incluse dans le noyau $\text{Ker}(\partial_p \otimes \text{Id})$. En composant par la projection $Z_n(C \otimes G) \longrightarrow H_p(C, G)$, on en déduit le $h_p \otimes \text{Id}$ de $\text{Tor}_1(H_{p-1}(C), G)$ dans $H_p(C, G)$ et ce dernier morphisme scinde la suite, puisque $(\partial \otimes \text{Id}) \circ (h_p \otimes \text{Id}) = \text{Id}$. Soit C le complexe $\dots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \dots$. Alors $H_{2p}(C) = 0$ et $H_{2p+1}(C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'autre part 2.26, $H_p(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La formule des coefficients universels s'écrit en degré pair :

$$0 \longrightarrow H_{2p} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_{2p}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{2p-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \quad (2.36)$$

soit $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Elle s'écrit en degré impair :

$$0 \longrightarrow H_{2p+1} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_{2p+1}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{2p}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \quad (2.37)$$

soit $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$. On va à présent comparer l'homologie d'un complexe de chaînes avec la cohomologie du complexe dual. Commençons par un analogue de (la Proposition 2.2.1)

Proposition 2.3.1 Soient $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte scindée

de complexes de chaînes de groupes abéliens (ou A -modules) et G un groupe abélien (ou A -module). Alors la suite court :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C'', G) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(C', G) \longrightarrow 0. \quad (2.38)$$

est exacte et scindée. [9]

Proof. Cette fois l'hypothèse scindée sert à obtenir l'exactitude à droite. Tout d'abord, p^* est injective. En effet, soit $\gamma'' \in \text{Hom}(C'', G)$ tel que $\gamma'' \circ p = 0$. Si $\gamma'' \neq 0$, il existe $c'' \in C''$ tel que $\gamma''(c'') \neq 0$. Par surjectivité de p , il existe alors $c \in C$ tel que $c'' = p(c)$. Choisissons un tel c . Alors, $\gamma''(c'') = \gamma'' \circ p(c) = 0$ et donc $\gamma'' = 0$. Soit à présent $\gamma \in \text{Hom}(C, G)$ tel que :

$$\gamma \circ i = 0. \quad (2.39)$$

Alors, γ passe au quotient en un morphisme $\gamma'' : C'' \longrightarrow G$ tel que $\gamma = \gamma'' \circ p$. La suite courte est donc exacte au milieu. Soit enfin $\gamma' \in \text{Hom}(C', G)$. On définit $\gamma \in \text{Hom}(C, G)$ en imposant que $\gamma|_{\text{Im}(h)} = 0$, où $h : C'' \longrightarrow C$ est un scindage et $i^* \circ \gamma = \gamma'$. Alors, $i^* \circ \gamma = \gamma'$ et la suite est également exacte en $\text{Hom}(C', G)$ et scindée. ce dernier point utilise le fait que la suite est scindée. Si $C = C' = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$. et $C'' = 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$. par exemple, la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{\times 2} C \rightarrow C'' \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

n'est pas scindée, Alors :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C', \mathbb{Z}). \quad (2.41)$$

est bien exacte, mais pas :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C', \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

On note $Ext^1(C'', \mathbb{Z})$ ou $Ext^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ce défaut de surjectivité de sorte que :

$$0 \rightarrow Hom(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow Hom(C, \mathbb{Z}) \rightarrow Hom(C', \mathbb{Z}) \rightarrow Ext^1(C'', \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

est exacte. ■

Remarque 2.3.1

1) On montre que $Ext^1(C'', G)$ ne dépend pas de la présentation $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$.

2) De même si $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, et si $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$.

est une présentation de C'' , alors il existe φ_0 et φ_1 tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & C' & \rightarrow & C & \rightarrow & C'' & \rightarrow & 0 \\ & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & Id \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & G & \rightarrow & H & \rightarrow & C'' & \rightarrow & 0. \end{array} \quad (2.44)$$

De plus, l'image de $\varphi_0 \in Hom(C', G)$ dans $Ext^1(C'', G)$ ne dépend pas des choix de φ_0 et φ_1 . Et que $Ext^1(C'', G)$ classe les classes d'isomorphismes d'extensions $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C'' \rightarrow 0$ de C'' par G .

Théorème 2.3.2 (Formule des coefficients universels en cohomologie) [3] Soient C un complexe de chaînes de groupes abéliens (ou A -modules) libres et G un groupe abélien (ou A -module). Alors on a la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow Ext^1(H_{p-1}(C), G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow Hom(H_p(C), G) \rightarrow 0. \quad (2.45)$$

On a noté ici $H^p(C, G)$ les groupes de cohomologie du complexe dual associé à C , c-à-d $H^p(Hom(C, G))$. Ainsi, même lorsque $G = \mathbb{Z}$, la cohomologie du complexe dual $Hom(C, \mathbb{Z})$ diffère en général du dual de l'homologie $Hom(H_p(C), \mathbb{Z})$.

Proof. On procède comme dans la démonstration du (Théorème 2.3.1). On part de la suite exacte courte $0 \rightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$, où $Z_n := Z_n(C)$, $B_n := B_{n-1}(C)$ et $\partial_n = 0$ pour

ces complexes Z et B . Comme C est libre, Z et B le sont également et cette suite est scindée. On applique alors (*la Proposition 2.3.1*) pour en déduire la suite exacte courte, scindée par h , de complexes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow \text{Hom}(Z, G) \rightarrow 0. \quad (2.46)$$

Puis on en déduit la suite exacte longue associée en cohomologie :

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(Z, G) \xrightarrow{d^*} H^p(B, G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow H^p(Z, G) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(B, G) \rightarrow \dots \quad (2.47)$$

où d^* désigne l'opérateur de connexion. Or les différentielles de Z et B sont triviales, donc :

$$H^p(Z, G) = \text{Hom}(Z_p, G). \quad (2.48)$$

et $H^p(B, G) = \text{Hom}(B_{p-1}, G)$. On vérifie alors (exercice) que d^* est le morphisme associé à la suite exacte :

$$0 \rightarrow B_p(C) \rightarrow Z_p(C) \rightarrow H_p(C) \rightarrow 0. \quad (2.49)$$

de laquelle on déduit la suite :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow \text{Hom}(Z_p(C), G) \xrightarrow{d^*} \text{Hom}(B_p(C), G) \rightarrow \text{Ext}^1(H_p(C), G) \rightarrow 0. \quad (2.50)$$

puisque $Z_p(C)$ et $B_p(C)$ sont libres. La suite exacte longue se réécrit donc :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(C), G) \rightarrow H^p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow 0. \quad (2.51)$$

Il reste à voir que cette suite est scindée, ce qui découle de la définition de d^* et du scindage

h de la suite :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow \text{Hom}(Z, G) \rightarrow 0. \quad (2.52)$$

En effet, soit $\gamma \in \text{Hom}(H_p(C), G)$. Alors $h(\gamma) \in \text{Hom}(C_p, G)$ et de plus, $h(\gamma)$ est un cocycle puisque $d^p(h(\gamma)) = h(\gamma) \circ \partial_{p+1} = 0$. Ainsi, par composition avec la projection $Z^p(C, G) \rightarrow H^p(C, G)$, h induit un morphisme $\text{Hom}(H_p(C), G) \rightarrow H^p(C, G)$ qui scinde la suite puisque $i^* \circ h = \text{Id}_{\text{Hom}(Z_p(C), G)}$. [2] ■

Exemple 2.3.1 Soit C le complexe $\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots$. Alors le complexe dual est donné par $\cdots \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \cdots$. On a :

$$H_{2p}(C) = 0, H_{2p+1} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H^{2p}(C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (2.53)$$

et

$$H^{2p+1} = 0. \quad (2.54)$$

La formule des coefficients universels se lit alors en pair :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{2p-1}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2p}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H^{2p}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

ce qui se réécrit :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0. \quad (2.56)$$

et en degré impair :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{2p}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2p+1}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_{2p+1}(C), \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

ce qui se réécrit :

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0. \quad (2.58)$$

Définition 2.3.1 Si C est un complexe de chaînes et G un groupe abélien, alors la cohomologie du complexe 2.45 $\text{Hom}(C, G)$ est appelée cohomologie de C à coefficients dans G et noté $H^*(C, G)$. [1]

Remarque 2.3.2 Si C est un complexe de chaînes de groupes libres, alors :

$$\text{Hom}(C, G) = \text{Hom}(C, \mathbb{Z}) \otimes G. \quad (2.59)$$

La démonstration (Théorème 2.3.2) utilise l'analogie (du Théorème 2.2.1) en cohomologie, à savoir.

Théorème 2.3.3 À toute suite exacte courte de complexes de cochaînes $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$, est associée une suite exacte longue en cohomologie :

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(C'') \xrightarrow{\delta^*} H^p(C) \rightarrow H^p(C') \rightarrow H^p(C'') \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(C') \rightarrow \dots \quad (2.60)$$

où δ^* est appelé morphisme de connexion. L'analogie du (Théorème 2.3.1) s'écrit alors.

Théorème 2.3.4 Soit C un complexe de cochaînes dont les éléments sont des groupes abéliens (ou A -modules) libres et soit G un groupe (ou A -module). [10] alors on a la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow H^p(C) \otimes G \rightarrow H^p(C \otimes G) \rightarrow \text{Tor}_1(H^{p+1}(C), G) \rightarrow 0. \quad (2.61)$$

1) Tout groupe G , $\mathbb{Z} \otimes G \simeq G \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, puis que :

$$\text{Tor}_1(\mathbb{Z}, G) = 0 = \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, G). \quad (2.62)$$

et que :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes G \simeq G/mG \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G). \quad (2.63)$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \simeq \text{Ker}\left(G \xrightarrow{\times m} G\right) \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G). \quad (2.64)$$

2) On remarque que si $d = p \text{ gcd}(m, n)$, alors :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}). \quad (2.65)$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq 0 \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}). \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &\simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Chapitre 3

Exemples d'Homologie

3.0.1 Homologie simpliciale

Afin de calculer l'homologie d'un contour, d'une surface, ou plus généralement d'une variété de dimension quelconque, on a l'idée de la trianguler c'est à dire de lui associer un polyèdre décomposé en n -faces chacune représentant un n -simplexe élémentaire. Par cette méthode, la sphère est vue comme un tétraèdre. On peut ainsi trouver des triangulations du tore et plus généralement de toute surface orientable ou non.

3.0.2 Simplexe, complexe simplicial

L'élément de base qui va permettre de calculer l'homologie (simpliciale) d'une variété est donc le simplexe. Cela va nous permettre de définir un complexe comme on le fait pour définir la cohomologie de De Rham. Ce complexe comme on le verra, à quelques ajustement près, est le complexe dual de celui obtenu pour la cohomologie de De Rham.

Définition 3.0.2 On appelle r -simplexe de R^n l'ensemble noté σ_r et défini par :

$$\sigma_r = \{x \in R^n / x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1\}$$

Les c_i désigne des coordonnées barycentriques. On abrège la notation d'un simplexe en notant

$r = (p_0, \dots, p_r)$ la définition s'avère insuffisante pour définir un complexe simplicial. On a besoin de la notion de simplexe orienté. Cela permettra, entre autre, la définition de bords orientés, si importante pour définir correctement la formule de Stock.

Définition 3.0.3 On appelle r -simplexe orienté associé au simplexe $r = (p_0, \dots, p_r)$, les classes d'équivalences obtenues en séparant les permutations paires de l'ensemble des sommets des permutations impaires.

L'opération d'orientation permet d'affecter d'un signe plus ou d'un signe moins le simplexe non orienté. Les complexes considérés maintenant sont tous orientés.

Définition 3.0.4 On appelle groupe des r -chaines, le groupe libre engendré par les r -simplexes issus d'un n -simplexe $\sigma_n = (p_0, \dots, p_n)$. On note $C_r(K)$ le groupe des r -chaines, quand r varie, l'ensemble de ces groupes forme le complexe simplicial noté K et c'est un complexe au sens de l'algèbre homologique comme on le verra.

Remarque 3.0.3 Un élément de $C_r(K)$ est noté $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$. La somme est prise sur tout les simplexes de taille r . Le coefficient c_i est un entier relatif, la structure de groupe est facile à mettre en évidence.

3.0.3 Homologie simpliciale

On considère donc le complexe $C.(K)$ associé aux simplexes :

$$\dots \rightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(K) \dots \xrightarrow{\partial_0} C_0(K) \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

Soit $r = (p_0, p_1, \dots, p_r)$, un r -simplexe orienté :

$$\partial_r \sigma_r = \sum_{i=1}^r (-1)^i (p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r). \quad (3.2)$$

Théorème 3.0.5 Le complexe simplicial défini précédemment est un complexe au sens de l'algèbre homologique : $\partial^2 = 0$

A partir du complexe précédemment on va pouvoir définir l'algèbre homologique. L'homologie va représenter le défaut pour un cycle de ne pas être le bord de quelque chose. Plus précisément on a :

Définition 3.0.5 *Un élément de $C_r(K)$ est un r -cycle si et seulement si $\partial_r c = 0$, On note $Z_r(K)$ l'ensemble des r -cycles.*

Définition 3.0.6 *Un élément de $C_r(K)$ est un r -bord si et seulement si il existe dans $C_{r+1}(K)$ un élément d tel que $c = \partial_{r+1} d$. On note $B_r(K) = \text{Im} \partial_{r+1}$ l'ensemble des r -bords et c'est un sous groupe de $C_r(K)$, on peut montrer en revenant à la définition qu'un r -bord est toujours un r -cycle : $B_r(K) \subset Z_r(K)$.*

Définition 3.0.7 *On dit que deux r -cycles sont équivalents si leur différence est un r -bord. On appelle r -ième groupe d'homologie le groupe quotient : $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$. [11] Le calcul direct de l'homologie d'une variété, à partir de complexes simpliciaux, s'avère vite ardu. On préfère utiliser des moyens déductifs à partir des opérations simples que l'on peut faire sur les espaces topologiques réunion, intersection, produit, on a recour souvent, directement au calcul de l'homologie singulière de la variété. Nous donnons ci-dessous dans des cas simples le calcul de l'homologie par les méthodes simpliciales.*

3.0.4 Calcul de l'homologie de quelques complexes simpliciaux

Nous calculons dans cette partie l'homologie de quelques ensembles simpliciaux triangulant des ensembles topologiques simples.

Homologie du cercle

Considérons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous :

$$K_1 = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_1)\}$$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simplicial représente la triangulation du cercle. Donnons les groupes de r -chaines associés :

$$C_0(K_1) = \{i \langle p_0 \rangle, j \langle p_1 \rangle, k \langle p_2 \rangle / (i, j, k \in \mathbb{Z})\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

$$C_1(K_1) = \{i \langle p_0, p_1 \rangle, j \langle p_1, p_2 \rangle, k \langle p_2, p_1 \rangle / (i, j, k \in \mathbb{Z})\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

On a donc le complexe de chaîne qui se réduit alors à :

$$0 \longrightarrow C_1(K_1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_1) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (3.5)$$

Déterminons maintenant les groupes de cycles et les groupes de bords qui permettront de calculer les groupes d'homologies :

Calcul du premier groupe d'homologie

$Z_1(K_1)$ représente le groupe des 1-cycles, c'est à dire les les 1-chaines pour lesquelles le bord de dimension 0 est nul ce qui s'écrit :

$$\partial_1 z = i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) = 0 \text{ ou encore, } \partial_1 z = (k - i)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 = 0.$$

comme p_0, p_1, p_2 forment des 0-cycles indépendants on en déduit que :

$$i = j = k. \text{ et finalement, } Z_1(K_1) \simeq \mathbb{Z}.$$

$B_1(K_1)$ représente le groupe des 1-bords, c'est à dire les les 1-chaines qui bordent un simplexe de dimension 2, or ici, un cycle ne borde jamais un simplexe de dimension 2, car le complexe triangule un cercle qui est un objet à une dimension donc : $B_1(K_1) \simeq 0$.

Comme on a aucun bord de dimension 1, on en déduit que le premier groupe d'homologie est :

$$H_1(K_1) = Z_1(K_1)/B_1(K_1) \simeq Z_1(K_1) \simeq \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Calcul de $H_0(K_1)$

Toute 0-chaine est un cycle donc : $Z_0(K_1) \simeq C_0(K_1)$

Calculons les bords : $B_0(K_1)$. On a :

$$B_0(K_1) = \{\partial_1 (l (p_0p_1) + m (p_1p_2) + n (p_0p_2)) \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.7)$$

$$B_0(K_1) = \{(n - l) p_0 + ((l - m) p_1 + (m - n) p_2) \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.8)$$

Mais

$$(n - l) + (l - m) + (m - n) = 0. \quad (3.9)$$

Donc $B_0(K_1)$ est le noyau de l'homomorphisme allant des 0 cycle dans l'ensemble des entiers relatifs défini par :

$$f (ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k.$$

Un résultat d'algèbre classique dit que $Z_0(K_1) / \ker f \simeq \text{Im } f$. Et comme l'image est \mathbb{Z} on déduit que :

$$H_0(K_1) = Z_0(K_1) / B_0(K_1) = \mathbb{Z}$$

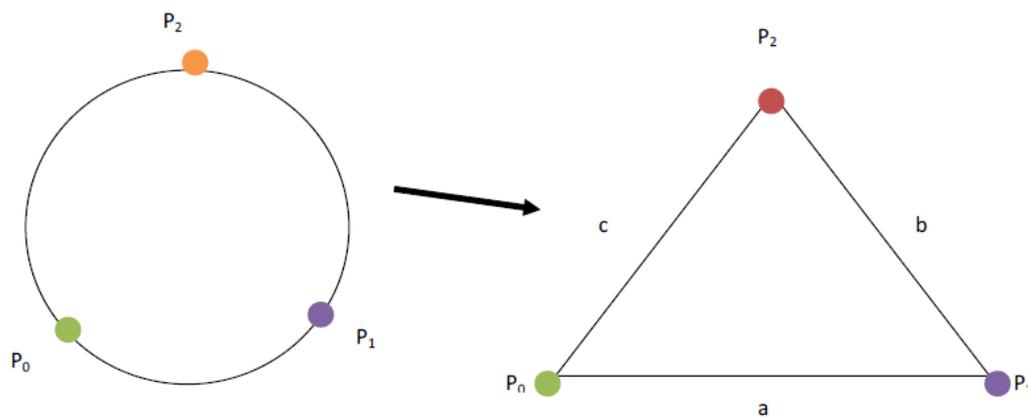


FIG. 3.1 – Triangularisation du cercle

3.0.5 Homologie du disque

Considérons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous :

$$K_2 = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_1), (p_0, p_2, p_1)\}$$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simpliciale représente la triangulation du disque. Donnons les groupes der-chaines associés :

$$C_0(K_2) = \{i(p_0) + j(p_1) + k(p_2) \mid (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (3.10)$$

$$C_1(K_2) = \{i(p_0, p_1) + j(p_1, p_2) + k(p_2, p_1) \mid (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

$$C_2(K_2) = \{i(p_0, p_1, p_2) \mid i \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

On a donc le complexe de chaîne un peu plus long :

$$0 \longrightarrow C_2(K_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_2) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (3.13)$$

Calcul des groupes d'homologie

Comme pour le cercle : $H_0(K_2) = \mathbb{Z}$.

De même comme pour le cercle, $Z_1(K_2) \simeq \mathbb{Z}$.

En revanche, contrairement à l'exemple précédent, ces cycles bordent le triangle plein, simplexe de dimension 2. Donc tous les cycles sont des bords de deux simplexe c'est à dire que $Z_1(K_2) \simeq B_1(K_2)$ (le premier groupe d'homologie est trivial). Remarque : on peut retrouver ce résultat par le calcul direct en dérivant $c = m(p_0, p_1, p_2)$, on a :

$$H_1(K_2) = 0.$$

Parmi les deux chaînes : $m(p_0, p_1, p_2)$, le seul 2- cycle est obtenu pour $m = 0$. comme on a pas de 3-simplexes ($B_3(K_2) = 0$), on en déduit que :

$$H_2(K_2) = 0.$$

Il est aisé de calculer de calculer l'homologie d'un point. On trouvera la même que ci-dessus pour le disque. On retrouve une propriété récurrente en topologie algébrique. Si R est un retract d'un ensemble A , son homologie tout comme son homotopie est inchangée. On dit quelles groupes d'homologies sont des invariants d'homotopie.

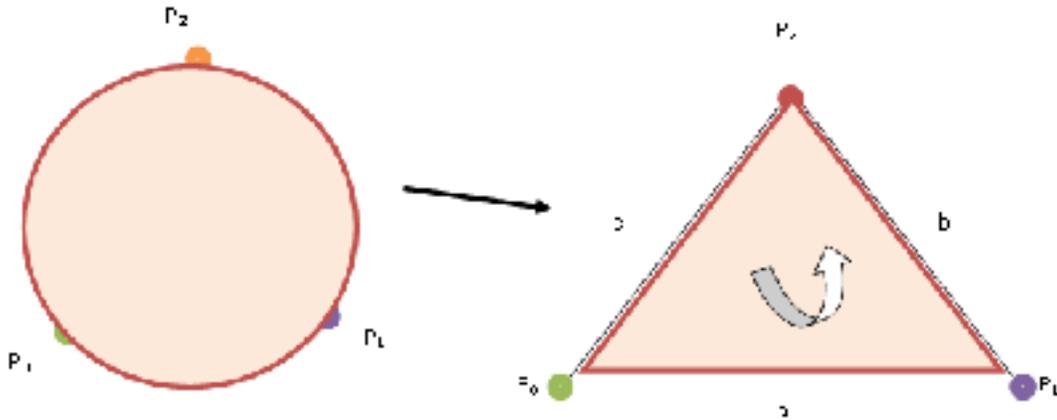


FIG. 3.1 – Triangularisation de disque

3.0.6 Homologie de la sphère

Considérons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous :

$$K_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3), (p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_3), (p_0, p_1, p_2), (p_0, p_1, p_3), (p_0, p_2, p_3)\}$$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simplicial représente la triangulation de la sphère. Donnons les groupes de r -chaines associés :

$$C_0(K_3) = \{i(p_0) + j(p_1) + k(p_2) + l(p_3) \mid (i, j, k, l \in \mathbb{Z})\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$C_1(K_3) = \{i(p_0, p_1) + j(p_0, p_2) + k(p_0, p_3) + l(p_1, p_2) + m(p_1, p_3) + n(p_2, p_3) \mid (i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z})\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$C_2(K_3) = \{i(p_0, p_1, p_2) + j(p_0, p_1, p_3) + k(p_0, p_2, p_3) + l(p_1, p_2, p_3) \mid (i, j, k, l \in \mathbb{Z})\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

On a donc le complexe de chaines :

$$0 \longrightarrow C_2(K_3) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_3) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_3) \longrightarrow 0 \quad (3.14)$$

Calcul des groupes d'homologie

On remarque sans problème que $Z_0(K_3) \simeq C_0(K_3)$. D'autre part, par un raisonnement identique au cas du cercle, on trouve : $H_0(K_3) \simeq \mathbb{Z}$.

Tout 1-cycle du tétraèdre borde un triangle donc : $H_1(K_3) \simeq 0$.

Pour trouver le deuxième groupe d'homologie, il suffit de chercher quand $\partial_2 z = 0$ on trouve alors : $Z_2(K_3) \simeq \mathbb{Z}$

et $H_2(K_3) \simeq \mathbb{Z}$.

On peut former des complexes simpliciaux plus compliqués comme celui du tore ou de la bouteille de Klein ou l'espace projectif RP^2 . Ces deux derniers sont non orientables ce qui fait apparaître un sous groupe de torsion dans le premier groupe d'homologie. Nous donnons pour terminer cette partie l'homologie simpliciale du tore et de la bouteille de Klein.

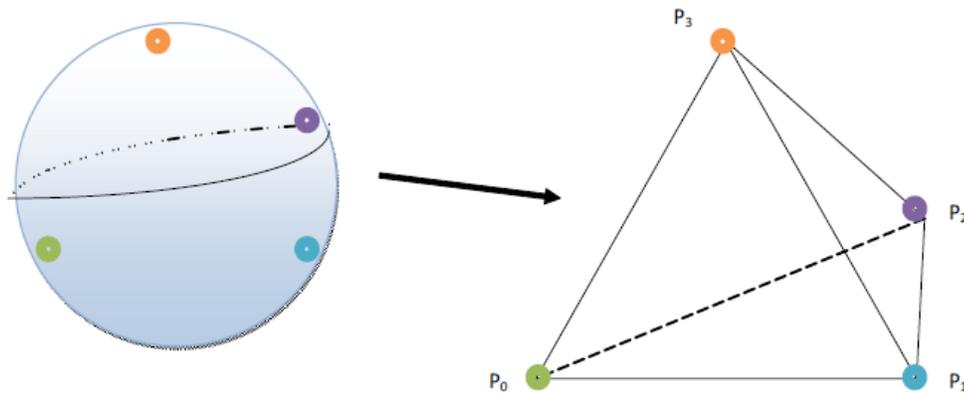


FIG. 3.3 – Triangularisation de la sphère

3.1 Homologie du tore

Le complexe simpliciale du tore s'obtient à partir de la figure suivante :

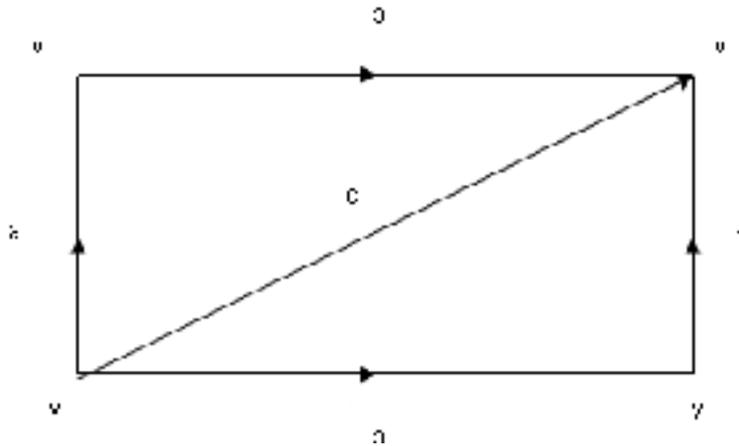


FIG. 3.2 – Triangularisation du tore

Le complexe simplicial est constitué d'un seul sommet v , de trois arêtes a, b, c et des deux triangles plein. On note U le triangle supérieur, L le triangle inférieur. On a toujours le complexe de chaînes :

$$0 \longrightarrow C_2(K_4) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_4) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_4) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

3.1.1 Calcul des groupes d'homologie

Le groupe $H_0(K_4)$ est donné par :

$$H_0(K_4) = \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \tag{3.15}$$

$$\ker \partial_0 = C_0(K_4) = i(v) \simeq \mathbb{Z} \tag{3.16}$$

Les bords sont donnés par l'image de ∂_1 et comme a, b, c sont des cycles, elle est réduite à 0. Finalement $H_0(K_4) \simeq \mathbb{Z}$

Le groupe $H_1(K_4)$ est donné par :

$$H_1(K_4) = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2 \quad (3.17)$$

Comme a, b, c sont des cycles, $\partial_1(la + mb + nc) = 0$, donc : $\ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Une base peut être donnée par $a, b, a + b - c$. Le dernier cycle est exactement l'image de ∂_2 , donc il subsiste dans le H_1 uniquement a, b ; $H_1(K_4) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Le groupe $H_2(K_4)$ est donné par : $H_2(K_4) = \ker \partial_2 / \text{Im } \partial_3$

On a : $\partial_2(iU + jL) = i\partial_2(U) + j\partial_2(L) = (i + j)(a + b - c) = 0$

Donc $i = -j$ et comme, $\text{Im } \partial_3 = 0$, $H_2(K_4) \simeq \mathbb{Z}$

Conclusion

Nous avons montré l'impact des résultats de la topologie sur la relation avec le concept algébrique des surfaces en particulier et variétés en générale. La *théorie homologique* nous permet de donner des informations détaillées sur des propriétés algébriques des groupes reliants *l'espace topologique X* , La notion des *chaines complexes* constitue une base pour l'étude des groupes homologiques, ainsi les *opérateurs cycles et bords* définissent l'homologie du complexe simplicial. Autres études qui reste un sujet ouvert est l'homologie des noeux ou la théorie des noeux joue un role important dans la topologie algébrique.

Bibliographie

- [1] René thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Commentarii Mathematici Helvetici* 28, 17-86 (1954), Strasbourg.
- [2] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, Corrected reprint. MR 666554 (83i :55001).
- [3] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol.139, Springer-Verlag, New York, 1997, Corrected third printing of the 1993 original. MR 1700700 (2000b :55001).
- [4] Pierre Guillot, *Topologie algébrique*, 12 décembre 2012 Hatcher.
- [5] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics Series (1999).
- [6] J. Munkres *Elementary differential Topology*. Princeton University Press, 1966
- [7] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, Variétés différentiables*. Mir, 1990.
- [8] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentiables*. EDP Sciences, 1996.
- [9] Henri Poincaré, *topologie algébrique Analysis Situs, mémoires 1895 -1904*,
- [10] D. Perrin, *Géométrie Algébrique, Une introduction*, *Savoirs Actuels*, InterEditions/CNRS Editions, Paris, 1995.
- [11] CNAM UE MVA 211 Ph. Durand *Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie*
Cours 4 : L'Homologie simpliciale

Annexe B : Notations

$\mathbb{R}P^n$:	Espace projectif.
C^k	:	Espace des fonction k continument différentiables.
GL_n	:	Groupes linéaires.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:	Groupe cyclique.
$M\sharp N$:	Somme connexe de deux variétés.
∂M	:	bord d'une variété.
$H_n(\mathbb{C})$:	Groupe d'homologie.
$Ext^1(C'', G)$:	Isomorphismes d'extensions.