République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : probabilité

Par

Abdallah Mettai

Titre :

Equations Différentielles Doublement Stochastiques Rétrogrades et Application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Khalfallah Nabil	UMKB	Président
Dr.	Gatt Rafika	UMKB	Encadreur
Dr.	Mansouri Badereddine	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce humble travail À

mon pére

ma belle mère

mes frères lazhar, fouad,fayez,mahamed

mes soeurs ratiba et aya

ma fiancée

Mes chèrs ayoube ,basset, hamza, walidet aissa

Mes amis anwar,raafat,mohamad.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier **Allah**

le tous puissant, qui m'a donné la patience et l'effort pour réaliser ce mémoire

En second lieu, je tiens a remercier mon encadreur **"Dr. Gatt Rafika"**

pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail,

Et je remercie également aux membres du Jury **"Dr.Khalfallah Nabil"**

et **"Dr.Mansouri Badereddine"** qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Les Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades **4**

1.1 Intégrale stochastique 4

1.2 Présentation du problème 6

1.3 Notations 8

1.4 Existence et unicité de la solution 11

1.4.1 Le cas Lipschitzien 11

1.4.2 Le résultat de Pardoux–Peng 14

2 Equations différentielles doublement stochastiques rétrogrades **21**

2.1 Définitions et notations 21

2.2 Existence et unicité 23

2.3 Régularité de la solution de l'EDSR 31

3 Lien entre la solution de l'EDSR et l'EDPS **34**

Bibliographie **36**

Annexe B : Abréviations et Notations **38**

Introduction

Les Equations Diffèrentielles Stochastiques Rétrogrades (en abrégé EDSR's) sont apparues en 1973 sous la forme linéaire avec les travaux de .J.M. Bismut [1] comme équations associées aux processus adjoints au contrôle stochastique :

$$Y_t = \xi + \int_t^T a_s Y_s d_s - \int_t^T Z_s dW_s \quad t \in [0, T]$$

La théorie générale des EDSR's a débutée en 1990 avec Pardoux et Peng qui ont été les premiers à considérer dans [3] des EDSR's non linéaires, c'est à dire les équations de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \qquad\qquad 0 \leq t \leq T$$

où le coefficient. de dérive (en anglais drift) f est une fonction non linéaire et lipschitzienne en (y, z) uniformément en s. Depuis lors, les EDSR's n'ont cessé d'attirer les chercheurs et d'avoir d'innombrables applications en théorie des Equations aux Dérivées Partielles (en abrégé EDP's) (voir [2]), en mathématiques financières (voir El Karoui et al. [7]), en controle stochastique et en théorie des jeux (voir Hamadène et Lepeltier [5], [6]). Cependant, il faut noter que souvent les résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été obtenus sous la condition de Lipschitz uniforme sur le drift f.

Malheureusement, dans de nombreuses applications, la condition de Lipschitz n'est pas vérifiée. Par exemple, en finance, dans le problème de valorisation de l'option d'achat formalisé par l'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T [r_s Y_s + Z_s \theta_s] \, d_s - \int_t^T Z_s dW_s \quad t \in [0, T]$$

Pardoux et Peng ont étendu la portée de leur étude. introduisaut en 1994 dans [31], ce qu'on appelle aujourd'hui les Equations Différentielles Doublement Stochastiques Rétrogrades (EDDSR's en abrégé). En fait, qu'est ce que les EDDSR's ? Pourquoi s'y intéresse t-ou ?

Les EDDSR's sont des équations différentielles stochastiques où interviennent deux intégrales stochastiques, l'une progressive et l 'autre rétrograde. Plus précisément, ce sont des équations de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) dBs - \int_t^T Z_s dW_s \ , \qquad 0 \leq t \leq T.$$

où :

- $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ sont deux mouvements browniens standards mutuellement indépendants définis sur un espace de probabilité complet (Ω, F, P).

- ξ est une variable aléatoire $\sigma\{W_r, 0 \leq r \leq T\} \vee \mathcal{N}$ -mesurable, dite valeur finale ou terminale, où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des parties P-négligeables de F.

- f et g sont des processus mesurables appelés coefficients de l'EDDSR et vérifiant des conditions d'intégrabilitè que nous préciserons plus tard.

- Les intégrales stochastiques par rapport à W et B sont. respectivement des intégrales stochastiques de Itô progressive et rétrograde.

- Le temps final $T > 0$ peut être déterministe ou aléatoire (temps d'arrêt).

- Y et Z sont. les inconnues .

Ce mémoire se compose de trois chapitres ,et qui a pour but essentiel EDDSR (Equations Différentielles Ddoublement Stochastiques Rétrogrades) ,

Dans le premier chapitre,en résumé,le grande ligne concernant, les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions

Dans le second chapitre on montre que, si les deux générateurs f et g de l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde (EDDSR) satisfaisons certaine condition la solution est unique.

Et dans le dernier chapitre on donne le lien entre les EDDSR et un système d'équations différentielles partielles stochastiques.

Chapitre 1

Les Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

1.1 Intégrale stochastique

formule d'Itô

Théorème 1.1.1 *Soit* $(X)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

et f *une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) = \int_0^t f^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s$$

tel que :

$$\left\langle X, X\right\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f^{'}(X_s)dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s)b_s d_s + \int_0^t f^{'}(X_s)\sigma_s dB_s$$

De même si $(t,x) \to f(t,x)$ est une fonction deux fois continûment différentiables en x et une fois différentiable en t, ces dérivées continues en (t,x) ; $(f \in C^{1,2})$, on a :

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t f_s'(s,X_s)ds + \int_0^t f_x'(s,X_s)dX_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)d\langle X,X\rangle_s \\ &= f(0,X_0) + \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}d\langle X,X\rangle_s \end{aligned}$$

Introduisons maintenant des théorèmes qui vont jouer un rôle important dans les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Représentation des martingales browniennes :

Théorème 1.1.2 *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle d'un movement brownien, tel que pour tout $t \in [0,T]$; $E[M_t^2] \prec \infty$. Alors il existe un unique processus adapté tel que*

$$P.p.s \forall t \in [0,T], M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW$$

De plus $E\left[\int_0^T M_t^2 ds\right] \prec \infty$, c'est-à-dire $Z \in \mathcal{L}^2([0,T])$.

Lemme de Gronwall

Lemme 1.1.1 *Soit ϕ $L^1[a;b]$ une fonction qui satisfait*

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^b \phi(s)\, ds \qquad \forall t \in [a,b]$$

où $f \in L^1[a;b]$ et β une constante positive. Alors on

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^b f(s)\, e^{\beta(t-s)} ds$$

En particulier, si la fonction f est une constante égale à α on :

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-a)} ds, \qquad \forall a \leq t \leq b$$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Théorème 1.1.3 *Pour tout $p > 0$; il existe des constantes positives c_p et C_p telles que pour toute martingales locale continue $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et tout $T > 0$,on ait :*

$$c_p E\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|\right]^p \leq C_p E\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]$$

1.2 Présentation du problème

Depuis l'article de J.M .Bismut Formellement, les EDSR sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale. cité en référence [13] ,la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a connu un grand développement, surtout ces dernières années, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines.

Dans le cas déterministe, il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initiale par inversion du temps, c'est comme dans le cas, par exemple, d'une équation différentielle ordinaire. Dans le cas stochastique, les choses sont fondamentalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui restent adaptés par rapport à une filtration donnée. En effet, en inversant simplement le temps, on perd la propriété de non anticipation de la solution c'est pour cela qu'on a introduit les EDSR.

Pour comprendre bien qu'est ce que une EDSR il faut formuler d'une façon correcte la notion de solution adaptée à une EDSR.

Dans ce paragraphe, on va donner, en résumé, un petit aperçu sur les EDSR, le théorème d'existence et d'unicité de la solution.

Soient $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à F_T . On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t) \quad , \quad t \in [0, T] \quad \text{avec} \ , \quad Y_T = \xi,$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation – disons dans L^2 – adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi|F_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi|F_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s$$

Un calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s \qquad i.e. \quad -dY_t = -Z_t dW_t, \quad \text{avec}, \quad Y_T = \xi,$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité,on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \qquad \text{avec}, \quad Y_T = \xi,$$

1.3 Notations

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité complet et W un MB d–dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB W.

On travaillera avec deux espaces de processus :

– on notera tout d'abord $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y , progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\| Y \|_{S^2}^2 := E[\sup_{0\leq t\leq T} | Y_t |^2] < \infty$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

– et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\| Z \|_{M^2}^2 = E[\int_0^T \| Z \|^2 \, dt] < \infty$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\| Z \|^2 =$ trace(zz*). $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach S_c^2 $(\mathbb{R}^k)$ $\times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous nous donnons une application aléatoire

f définie sur $[0, T] \times\Omega \times\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à F_T et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T \ , \quad Y_T = \xi$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (1.1)$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR 1.1.

Définition 1.3.1 *Une solution de l'EDSR 1.1 est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k \times d}$;

2. $P-p.s.$ $\int_t^T \{| f(r, Y_r, Z_r) | + \| Z \|^2\} dr < \infty$;

3. $P-p.s.$,on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0 \leq t \leq T$$

Remarque 1.3.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation 1.1 étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à S^2

Proposition 1.3.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$*et une constante positive* λ *tels que*

$$\forall (t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \mid f(t,y,z)\mid\leq f_t+\lambda(\mid y\mid+\parallel Z\parallel).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR 1.1 telle que* $Z\in M^2$*alors* Y*appartient à* S_c^2.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait queY_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t\in[0,T]$,

$$Y_t=Y_0-\int_0^t f(r,Y_r,Z_r)dr+\int_0^t Z_r dW_r$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$\mid Y_t\mid\leq\mid Y_0\mid+\int_0^T(f_r+\lambda\parallel Z_r\parallel)dr+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|+\lambda\int_0^t\mid Y_r\mid dr.$$

on pose

$$\varsigma=\mid Y_0\mid+\int_0^T(f_r+\lambda\parallel Z_r\parallel)dr+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{\mathcal{F}_t\}_{\ 0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; ils'en suit que ς est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu – cf. remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\leq\varsigma e^{\lambda t}$ qui montre que Y appartient à S^2. ∎

Le résultat est encore valable lorsque $\parallel f.\parallel_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 1.3.1 *Soient* $Y\in S^2(\mathbb{R}^k)$*et* $Z\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$*.Alors* $\left\{\int_0^t Ys{\cdot}ZsdWs, t\in[0,T]\right\}$*est unemartingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités BDG donnent

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_r.Z_r dW_r \ \mid\right] \leq CE[(\int_0^T \mid Y_r \mid^2 \| Z_r \|^2 dr)^{1/2}]$$
$$\leq CE[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid (\int_0^T \| Z_r \|^2 dr)^{1/2}]$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_r.Z_r dW_r \ \mid\right] \leq C'(E[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid^2] + E[\int_0^T \| Z_r \|^2 dr)^{1/2}]).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

1.4 Existence et unicité de la solution

1.4.1 Le cas Lipschitzien

Considérons les hypothèses (**L**) suivantes :

1. $\xi \in L^2(\mathcal{F}_t)$ ie, ξ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable et $E(\mid \xi \mid^2) < \infty$.

2. Condition de lipschitz en (Y, Z) ; $\exists$ une constante λ telle que :

$P - p.s$ pour tout $Y, Y' \in \mathbb{R}^k$, $Z, Z' \in \mathbb{R}^{k\times d}$.

$$\mid \ f(t,y,z) - f(t,y',z') \mid \leq \lambda(\mid (y-y') \mid + \mid z - z' \mid).$$

3. $\mathrm{E}\int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds < \infty$.

La solution $(Y, Z) \in S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

l'espace des processus prévisibles, menu de la norme.

$$\| Y \|^2 := E[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid^2] < \infty$$

$$\| Z \|^2 = E[\int_0^T \| Z \|^2 \, dt] < \infty$$

Qu'il devient un espace de Hilbert ;quand $(Y, Z) \in S_c^2 \left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$;telle que $Y \in S_c \left(\mathbb{R}^k\right)$processus continu et

$$\| Y \|_{S_c}^2 := E[\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t |^2] < \infty$$

$$\| Z \|_{M^2}^2 = E[\int_0^T \| Z \|^2 \, dt] < \infty$$

Maintenant on démontre quelques estimations où il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de l'EDSR par rapport aux données qui sont la variable aléatoire ξ et $\{f(t, 0, 0) \; 0 \leq t \leq T\}$

Proposition 1.4.1 *Soient (ξ, f)vérifiés **(L)** et (Y, Z) La solution de EDSR 1.1 telle que $Z \in M^2$, alors il existe une constante C telle que :*

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t |^2] + E[\int_0^T \| Z_r \|^2 \, dr)^{1/2}] \leq C \; E\left[| \xi |^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \, ds)^{1/2}\right]$$

Preuve. On applique la formule d'Itô à $e^{Bt} \left|Y_t\right|^2$:

$$\begin{aligned} de^{Bt} \left|Y_t\right|^2 &= Be^{Bt} \left|Y_t\right|^2 dt + 2e^{Bt} \left|Y_t\right| dY_t + \left\langle e^{Bt} \left|Y_t\right| \right\rangle dt. \\ &= Be^{Bt} \left|Y_t\right|^2 dt + 2e^{Bt} \left|Y_t\right| \left(-f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t\right) + e^{Bt} \| Z_t \|^2 \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{Bt} \left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{Bs} \| Z_s \|^2 \, ds &\leq e^{BT} \left|\xi^2\right| + \int_t^T e^{Bs} \left(-BY_s^2 + 2 \left|Y_s\right| f(s, Y_s, Z_s)\right) ds \\ &\quad -2 \int_t^T e^{Bs} Y_s Z_s dW_s. \end{aligned}$$

ona :

$$2Y f(t, Y, Z) \leq 2 \mid Y \mid\mid f(t, 0, 0) \mid + 2\lambda \mid Y \mid^2 + 2\lambda \mid Y \mid\mid\mid Z \mid\mid.$$

et $2ab \leq \xi a^2 + b \div \xi$ pour $\xi = 1, 2$.

$$2Yf(t,Y,Z) \leq (1+2\lambda+2\lambda^2) \mid Y \mid + \mid f(t,0,0) \mid^2 + \frac{\parallel Z \parallel^2}{2}.$$

pour $B = 1+2\lambda+2\lambda^2$

$$e^{Bt}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{Bs} \parallel Z_s \parallel^2 ds \leq e^{BT}\left|\xi^2\right| + \int_t^T e^{Bs}\left|f(s,0,0)\right|^2 ds - 2\int_t^T e^{Bs} Y_s Z_s dW_s$$

Pour $t=0$ on a l'espérance :

$$E\int_0^T e^{Bs} \parallel Z_r \parallel^2 ds)^{1/2} \leq 2E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + \int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right].$$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{Bt} \mid Y_t \mid^2\right] \leq E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + \int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right] + E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_t^T e^{Bs} \mid Y_s \mid \parallel Z_s \parallel dW_s\right]$$

D'après l'inégalité BDG, $\exists C$ telle que ;

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{Bt} \mid Y_t \mid^2\right] &\leq E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + \int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right] + CE\left[\int_t^T e^{Bs} \mid Y_s \mid^2 \parallel Z_s \parallel^2 dW_s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + \int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right] + \frac{1}{2}E\left[e^{Bt}\left|Y_t\right|\right] \\
&+\frac{C^2}{2}E\int_0^T e^{Bs} \parallel Z_s \parallel^2 ds \\
&\leq 2E\left[e^{Bt}\left|\xi^2\right|\right] + \int_0^T e^{Bs}\left|f(s,0,0)\right|^2 ds + C^2 E\int_0^T e^{Bs} \parallel Z_s \parallel^2 ds
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
E\left[\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{Bt} \mid Y_t \mid^2\right] + \int_0^T e^{Bs} \parallel Z_s \parallel^2\right] &\leq 2E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + 2\int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right] \\
&+C^2 2E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + 2\int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right]
\end{aligned}$$

$$\|Y,Z\|_{s_c^2} \leq 2(1+C^2)E\left[e^{BT}\left|\xi^2\right| + 2\int_0^T \left|f(s,0,0)\right|^2 ds)^2\right]$$

■

1.4.2 Le résultat de Pardoux–Peng

nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant , En 1990, E.Pardoux et S.Peng dans leur célébre article [PP90] ont démontré l'existence et l'unicité des solutions des l'$EDSR$ avec les conditions (L)

Cas où $f(t,y,z) = F(t)$ **ne dépend ni de** y **ni de** z.

On considère l'équation :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \tag{1.2}$$

$$\xi \in L^2(\mathcal{F}_T) \text{ et } F \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right) \qquad (E\int_t^T \mid F \mid^2 ds < \infty)$$

Lemme 1.4.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *l'EDSR* 1.2 *posséde une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$

Preuve. a) L'existence :

Supposons que la solution existe telle que $Z \in M^2$on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_T$.

$$Y_t = E(Y_t \setminus \mathcal{F}_T) = E\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \setminus \mathcal{F}_T\right] \qquad 0 \leq t \leq T$$

puisque $\int_t^T Z_s dW_s$ est une martigale on a

$$Y_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \setminus \mathcal{F}_T\right] - E\left[\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s \setminus \mathcal{F}_T\right]$$

$$Y_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds \setminus \mathcal{F}_T\right] - \int_0^t F_s ds$$

On pose :

$$M_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds \setminus \mathcal{F}_T\right] = Y_t + \int_0^t F_s ds$$

M_t est une martingale carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales il existe un pro-cessus prévizible Z carré intégrable ($Z \in M^2$) telle que :

$$M_t = E\left[M_t\right] + \int_0^t Z_s dW_s, \qquad t \in [0, T]$$

Donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = E\left[M_0\right] + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds$$

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = Y_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds$$

On vérifiant que (Y, Z) est une solution de l'$EDSR$ 1.2, comme $Y_T = \xi$.

$$Y_t - Y_T = Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left[M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds\right]$$

$$Y_t - \xi = \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

b)L'unicité :

Supposons que (Y_1, Z_1) et (Y_2, Z_2) sont deux solutions.

Soient $\hat{Y} = Y_1 - Y_2$, $\check{Z} = Z_1 - Z_2$ alors :

$$\hat{Y}_t = \int_0^T \check{Z} dW_s, \qquad t \in [0, T]$$

Nous allons prouvés que $\hat{Y} = \check{Z} = 0 \quad dt \times dP - p.s$

En effet :premièrement écrivons ;

$$\hat{Y}_t = \int_0^T \check{Z} dW_s - \int_0^t \check{Z} dW_s, \qquad t \in [0,T]$$

On applique l'inégalité martingale de Doob, on trouve :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|M_T|^p\right]$$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\hat{Y}_t\right|^2\right] \leq 4E\left[|Y_t|^2\right]$$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\hat{Y}_t\right|^2\right] \leq 2\int_0^T \check{Z}_s d_s \leq \infty \tag{1.3}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $f(Y_t) = \left|\hat{Y}_t\right|^2$ de t à T et on note que :

$$\hat{Y}_T = \xi - \xi = 0$$

on a :

$$0 = \left|\hat{Y}_t\right|^2 + 2\int_t^T \hat{Y}_s d\hat{Y}_s + \int_0^T \left|\check{Z}_s\right|^2 d_s$$

Où

$$\hat{Y}_s d\hat{Y}_s = -\hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s.$$

Donc :

$$\left|\hat{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left|\check{Z}_s\right|^2 d_s = 2\int_t^T \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s \tag{1.4}$$

Soit $N_t = \int_t^T \hat{Y}_s \check{Z}_s dW_s$ alors pour tout $t \geq 0$ le processus a variation quadratique ;

$$\langle N \rangle_t = \int_t^T \left|\hat{Y}_s \check{Z}_s\right|^2 d_s, \qquad t \in [0,T]$$

On utilisant l'estimation 1.3 et l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\langle M,N\rangle_t| \leq \sqrt{\langle M\rangle_t}\sqrt{\langle N\rangle_t}\ , \qquad t \geq 0$$

Donc :

$$\begin{aligned}|\langle N\rangle_t| = |\langle N,N\rangle_T| &= E\left[\int_0^T \left|\hat{Y}_s\check{Z}_s\right|^2 d_s\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq E\left[\left|\hat{Y}_s\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\int_0^T \left|\hat{Y}_s\check{Z}_s\right|^2 d_s\right]^{\frac{1}{2}} \leq \infty\end{aligned}$$

On peut montrer que la martingale locale $N_t = \{N\}_t$ est une martingale uniformément intégrable. On prenant l'espérance dans 1.4 et appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient que :

$$E\left|\hat{Y}_s\right|^2 + \frac{1}{2}E\int_0^T \left|\check{Z}_s\right|^2 d_s = 0$$

ceci démontre que $\hat{Y} = 0$ et $\check{Z} = 0$ donc l'unicité. ■

Cas où $\mathbf{f(t,y,z)}$ dépend de y et de z.

Théorème 1.4.1 *On considère l'EDSR (ξ, f) suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{1.5}$$

*avec l'hypothèse **(L)** , l'EDSR 1.5 admet une solution unique (Y,Z) dans $B^2 = S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.*

Preuve. On utilise l'argument de point fixe dans l'espace de Banach $B^2 = S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Soit Ψ une application telle que

$$\begin{aligned} \Psi : B^2 &\mapsto B^2. \\ (U,V) &\rightarrow \Psi(U,V) = (Y,Z) \end{aligned}$$

Où $(Y,Z) \in B^2$ est une solution de l'EDSR (ξ, f) :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad t \in [0,T]$$

On pose :

$$\begin{aligned} F_s &= f(s, U_s, V_s) \in M^2(\mathbb{R}^k) \\ |F_s| &\leq |f(s, U_s, V_s) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)| \\ &\leq |f(s,0,0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\| \end{aligned}$$

Et ces trois derniers processus sont carré intégrables donc F_s est carré integrable.

Soient (U_1,V_1) et (U_2,V_2) deux éléments de B^2 ;

et $(Y_1, Z_1) = \Psi(U_1, V_1), (Y_2, Z_2) = \Psi(U_2, V_2)$:

Notons $\hat{y} = Y_1 - Y_2$, $\check{z} = Z_1 - Z_2$ et $\hat{y}_T = \xi - \xi = 0$, $\hat{u} = U_1 - U_2$ et $v = V_1 - V_2$:

$$d\hat{y}_t = -\left\{f(t, U_1, V_1) - f(t; U_2; V_2)\right\} dt + \check{z}_t dWt$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} |\hat{y}|^2$:

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t} |\hat{y}|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t} |\hat{y}|^2 dt + 2\alpha e^{\alpha t} |\hat{y}|\, d\hat{y}_t + \left\langle e^{\alpha t} |\hat{y}|^2 \right\rangle dt \\ &= \alpha e^{\alpha t} |\hat{y}|^2 dt + e^{\alpha t} \|\check{z}_t\|^2 dt \\ &+ 2\alpha e^{\alpha t} |\hat{y}| \left[\left\{f(t, U_1, V_1) - f(t; U_2; V_2)\right\} dt + \check{z}_t dWt\right]. \\ &= \alpha e^{\alpha t} |\hat{y}|^2 dt + 2\alpha e^{\alpha t} \check{z}_t dWt + e^{\alpha t} \|\check{z}_t\|^2 dt \\ &- 2\alpha e^{\alpha t} |\hat{y}| \left[-\left\{f(t, U_1, V_1) - f(t; U_2; V_2)\right\} dt\right] \end{aligned}$$

On intégrer entre t et T on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\|^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|\hat{y}_s\right|^2+2\left|\hat{y}_s\right|^2\left\{f(s,U_1,V_1)-f(s;U_2;V_2)\right\}\right) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\check{z}_s dWs \end{aligned}$$

Et comme$f$ est Lipschitz il vient :

$$\left|f(t,U_1,V_1)-f(t;U_2;V_2)\right| \leq k\left[\left|U_1-V_1\right|+\left|U_2-V_2\right|\right].$$

$$\begin{aligned} 2\left|\hat{y}_s\right|\left\{f(s,U_1,V_1)-f(s;U_2;V_2)\right\} &\leq 2\left|\hat{y}_s\right| k\left[\left|U_1-V_1\right|+\left|U_2-V_2\right|\right] \\ &\leq 2k\left|\hat{y}_s\right|\left|\hat{u}_s\right|+2k\left|\hat{y}_s\right|\left|v_s\right| \end{aligned}$$

On a $2ab \leq \varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$

Donc :

$$\begin{aligned} 2\left|\hat{y}_s\right|\left\{f(s,U_1,V_1)-f(s;U_2;V_2)\right\} &\leq \varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{u}_s\right|^2 \varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|v_s\right|^2 \\ &\leq 2\varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|v_s\right|^2 \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon=2$ on a :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\|^2 ds &\leq 4k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_s\right|^2 \\ &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|\hat{y}_s\right|^2+4k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_s\right|^2\right) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs. \\ &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left(\left[-\alpha+4k^2\right]\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right]\right) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs. \end{aligned}$$

On pose $\alpha=1+4k^2$

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\|^2 ds &\leq \int_t^T -e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds+\frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right] ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs. \\ e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\|^2 ds+\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds &\leq \frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right] ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs \end{aligned}$$

On prend l'espérance :

$$\begin{aligned} &E\left[e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right]+E\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\| ds\right]+E\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds\right] \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right] ds\right]-2E\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs\right]\end{aligned}$$

la martingale locale $\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\check{z}_s\right\| dWs\right]$ est une martingale nulle en 0 puisque $Y_1, Y_2 \in S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z_1, Z_2 \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Donc :

$$\begin{aligned} E\left[\left|\hat{y}_0\right|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\| ds\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds\right] &\leq \frac{1}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right] ds\right] \\ E\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|\check{z}_s\right\| ds\right]+E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right] &\leq \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\hat{u}_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left|v_s\right|^2 ds\right]\end{aligned}$$

$$\left\|\check{z}\right\|_\alpha^2+\left\|\hat{y}\right\|_\alpha^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\hat{u}\right\|_\alpha^2+\left\|v\right\|_\alpha^2.$$

Donc l'application Ψ est une contraction de B^2dans B^2 admet un point fixe (Y, Z) unique dite la solution unique de l'EDSR. ■

Chapitre 2

Equations différentielles doublement stochastiques rétrogrades

2.1 Définitions et notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités,$T > 0$ un temps fini.

$\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ deux processus de mouvement brownien standard et independants, avec des valeurs dans R^d et R^l définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, respectivement.

On considère les filtrations

$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$ et $\mathcal{F}_{t,T}^B = \sigma\{B_s - B_t; t \leq s \leq T\}$

complétes par les ensemble p-nulle.

Le σ-algebre

$$\mathcal{F}_t^W \triangleq \mathcal{F}_{t,T}^W \wedge \mathcal{F}_{t,T}^B$$

ou pour chaque processus $\{\eta_t\}$,

$$\mathcal{F}_{s,t}^{\eta} = \sigma \left\{ \eta_r - \eta_s ; s \leq r \leq t \right\} \vee N, \mathcal{F}_t^{\eta} = \mathcal{F}_{0,t}^{\eta}.$$

Notons que la collection$\{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ n'est ni croissante, ni décroissante, et il ne s'agit pas donc d'une filtration.

On défini les éspaces des processus suivants :

$M^2([0;T];\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus$\{\varphi_t; t \in [0, T]\}$ mesurables , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,tels que

1. $E \int_0^T |\varphi_t|^2 < \infty$.
2. φ_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable $\forall t \in [0, T]$.

$S^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus aléatoires continues $\{\varphi_t; t \in [0, T]\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;qui satisfait :

1. $E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t|^2 \right) < \infty$.
2. φ_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable $\forall t \in [0, T]$.

On considère les deux fonctions :

$$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{k \times l}$$

Qui sont mesurables pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$,et

$$f(., y, z) \in M^2 \left([0, T] ; \mathbb{R}^k \right)$$
$$g(., y, z) \in M^2 \left([0, T] ; \mathbb{R}^{k \times l} \right)$$

Hypothéses

On considère les hypothèses suivantes :

H.1 Il existe des contantes $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$; telque, pour tout $(w; t) \in \Omega \times$

$[0,T], (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l}$

$$\begin{aligned} |f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)|^2 &\leq c\left(|y_1-y_2|^2 + \|z_1-z_2\|^2\right) \\ \|g(t,y_1,z_1) - g(t,y_2,z_2)\|^2 &\leq c\,|y_1-y_2|^2 + \alpha\,\|z_1-z_2\|^2 \end{aligned}$$

H.2 Il existe c, tel que pour tous $(t;y;z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

$$gg^*(t;y;z) \leq zz^* + c\left(\|g(t,0,0)\|^2 + |y|^2\right)$$

H.3 $\left\{g_z'(t,x,y,z)\,\theta\theta^* g_z'(t,x,y,z)^* \leq \theta\theta^*, \forall t \in [0,T].x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^k,\ z,\theta \in \mathbb{R}^{k\times d}\right\}$

Etant donné $\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, P, \mathbb{R}^k\right)$,on cherche à resoudre l'équation différentielle doublement stochastique retrograde suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)dBs - \int_t^T Z_s dW_s\,, \qquad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1)$$

La variable aléatoire ξ est dite condition terminale et f est le générateur.

Nous notons que l'intégrale par rapport à $\{B_t\}$ est " l'intergrale d'Itô retrograde " et l'integrale par rapport à $\{W_t\}$ est " l'intergrale d'Itô progressive ".

2.2 Existence et unicité

L'objectif principal de cette section est de prouver :

Théorème 2.2.1 *Sous l'hypothèse* (**H.1**)*, l'eq 2.1 possède une unique solution, telles que :*

$$(Y,Z) \in S^2\left([0,T];\mathbb{R}^k\right) \times M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$$

Avant de prouver le théorème, nous établissons le même résultat dans le cas où f et g ne dépendent pas ni de Y et ni de Z. Etant donné $f\left([0,T]\,;\mathbb{R}^k\right)$ et $g\in([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times l})$ et $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T)$,considérons l'EDDSR :

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s)ds+\int_t^T g(s)dBs-\int_t^T Z_s dW_s\ , \qquad 0\leq t\leq T. \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1 *Il existe un unique couple*

$$(Y,Z)\in S^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^k\right)\times M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times d})$$

qui résoudre l'eq 2.2

Preuve. Unicité

Soit $\left(\bar{Y},\bar{Z}\right)$ la différence de deux solutions, alors

$$\bar{Y}_t+\int_t^T \bar{Z}_s dW_s=0, \qquad 0\leq t\leq T.$$

par l'orthogonalité on obtient que

$$E\left(\left|\bar{Y}_t\right|^2\right)+E\int_t^T T_r\left[\bar{Z}_s\bar{Z}_s^*\right]=0$$

et donc $\bar{Y}_t=0\ P-p.s$, $\bar{Z}_t=0\ dt.dP-p.s$ d'où l'unicité.

Existence : On défini la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq T}$ par

$$\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t^W\wedge\mathcal{F}_t^B$$

et soit

$$M_t=E^{\mathcal{G}_t}\left[\xi+\int_0^T f(s)\,ds+\int_0^T g(s)\,dB_s\right],0\leq t\leq T$$

une martingales de caré intégrable.

Par le théorème de représentation des martingale, il existe un processus $\{Z_t\}$; $(\mathcal{G}_t)$-progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$;tel que :

$$E\int_0^T |Z_t|^2\, dt < \infty$$

et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s \qquad\qquad 0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent

$$M_T = M_t + \int_t^T Z_s dW_s$$

En remplacement M_T et M_t, par leurs définition , alors on a, pour $t \in [0;T]$;

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dBs - \int_t^T Z_s dW_s$$

ou

$$Y_t \triangleq E^{\mathcal{G}_t}\left(\xi + \int_t^T f\,(s)\,ds + \int_t^T g\,(s)\,dB_s\right)$$

Il me reste à montrer que $\{Y_t\}$ et $\{Z_t\}$ sont $\mathcal{F}_t$-adaptés. Pour Y_t est évident puisque pour chaque t,

$$Y_t = E\left(\theta/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B\right)$$

Où θ est $\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^B$ mesurable. Puisque $\mathcal{F}_t^B$ est indépendante de $\mathcal{F}_t \vee\sigma\ (\theta)$; et

$$Y_t = E\left(\theta/\mathcal{F}_t\right)$$

Maintenant

$$\int_t^T Z_s dW_s = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)dBs - Y_t$$

Et le côté droit est $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$; mesurable. Ainsi, d'après le théorème de représentation des martingales d'Itô, $\{Z_s, t < s < T\}$ est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ adapté. Par conséquent Z_s est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable pour tout $t < s$; donc il est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable. ■

Lemme 2.2.1 *laisser* $\alpha \in S^2([0,T]\,;\mathbb{R}^k), \beta \in M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^k), \gamma \in M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times l}), \delta \in M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times d})$ *tels que*

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s + \int_0^t \delta_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

en suite

$$\begin{aligned} \left|\alpha_t\right|^2 &= \left|\alpha_0\right|^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s dB_s) \\ &+ 2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) - \int_0^t \left\|\gamma_s\right\|^2 ds + \int_0^t \left\|\delta_s\right\|^2 ds \end{aligned}$$

$$E\left|\alpha_t\right|^2 = E\left|\alpha_0\right|^2 + 2E\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds - E\int_0^t \left\|\gamma_s\right\|^2 ds + E\int_0^t \left\|\delta_s\right\|^2 ds$$

Plus généralement, si $\phi \in C^2(\mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_t) &= \phi(\alpha_0) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \beta_s) ds + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \gamma_s dB_s) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \delta_s dW_s) \\ &- \tfrac{1}{2}\int_0^t T_r \left[\phi''(\alpha_s), \gamma_s \gamma_s^\star\right] ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t T_r \left[\phi''(\alpha_s), \delta_s \delta_s^\star\right] ds \end{aligned}$$

Preuve. (de la théorème 2.3.1)

L'unicité.Soit$\{Y_t^1, Z_t^1\}$ et$\{Y_t^2, Z_t^2\}$ deux solutions. de l'EDDSR (**2.1**) On suppose que :

$$\bar{Y}_t = Y_t^1 - Y_t^2, \qquad \bar{Z}_t = Z_t^1 - Z_t^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Et par suite, on applique le l**emme (1.3.1)** a $\bar{Y}$, on trouve

$$\begin{aligned} E\left(\left|\bar{Y}_t\right|^2\right) + E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds &= 2E\int_t^T f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - \left(f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right), \bar{Y}_s\right) ds \\ &+ E\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right\|^2 ds \end{aligned}$$

D'aprés **(H.1)** et l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}\alpha^2 + \frac{1-\alpha}{2}b^2$$

$$\begin{aligned} E\left(\left|\bar{Y}_t\right|^2\right) + E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds & \leq c(\alpha)\, E\int_t^T \left|\bar{Y}_t\right|^2 ds + \tfrac{1-\alpha}{2} E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds \\ & +\alpha E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds \end{aligned}$$

avec $0 < \alpha < 1$ est la constante dans **(H.1)**. Par conséquent

$$E\left(\left|\bar{Y}_t\right|^2\right) + \frac{1-\alpha}{2} E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds \leq c(\alpha)\, E\int_0^T \left\|\bar{Y}_t\right\|^2 ds$$

par le lemme de **Gronwall**, il vient que $E\left(\left|\bar{Y}_t\right|^2\right) = 0,\ 0 \leq t \leq T$ et donc $E\int_0^T \left|\bar{Z}_s^2\right| = 0.$

Existence. On défini une suite récurssive $\{(Y_t^i; Z_t^i)\}_{i=0;1,\dots}$comme suit $Y_t^0 \equiv 0\,;\ Z_t^0 \equiv 0$:étant donné $\{(Y_t^i; Z_t^i)\}\,;\ \left\{(Y_t^{i+1}; Z_t^{i+1})\right\}$ l'unique solution de l'EDDSR suivante :

$$Y_t^{i+1} = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^i, Z_s^i)ds + \int_t^T g(s, Y_s^i, Z_s^i)dBs - \int_t^T Z_s^{i+1}dW_s$$

soient $\bar{Y}_t^{i+1} \triangleq Y_t^{i+1} - Y_t^i$ et $\bar{Z}_t^{i+1} \triangleq Z_t^{i+1} - Z_t^i$, $0 \leq t \leq T$ par un calcul on obtient :

$$\begin{aligned} E\left(\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right) + E\int_t^T \left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2 ds & = 2E\int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \left(f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \bar{Y}_s^{i+1}\right) ds \\ & +E\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ Par l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & E\left(\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right) e^{\beta t} + \beta E\int_t^T \left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2 e^{\beta s} ds + E\int_t^T \left\|\bar{Z}_t^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s} ds \\ & = 2E\int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \left(f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \bar{Y}_s^{i+1}\right) e^{\beta s} ds \\ & +E\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right\|^2 e^{\beta s} ds \end{aligned}$$

Il existe $c, \gamma > 0$; tels que

$$E\left(\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right)e^{\beta t} + (\beta-\gamma)\,E\int_t^T\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2 e^{\beta s}ds + E\int_t^T\left\|\bar{Z}_t^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s}ds$$
$$\leq E\int_t^T\left(c\left|\bar{Y}_t^{i}\right|^2 + \tfrac{1+\alpha}{2}\left\|\bar{Z}_t^{i}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds$$

Où $\beta = \gamma + \bar{c}$;et $\bar{c} = \frac{2c}{1+\alpha}$

$$E\left(\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right)e^{\beta t} + E\int_t^T\left(\bar{c}\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_t^{i+1}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds \leq \frac{1+\alpha}{2}E\int_t^T\left(c\left|\bar{Y}_t^{i}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_t^{i}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds$$

Et par suite

$$E\int_t^T\left(\bar{c}\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_t^{i+1}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds \leq \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^i E\int_t^T\left(c\left|\bar{Y}_t^{i}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_t^{i}\right\|^2\right)e^{\beta s}ds$$

Et comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1$; $\{(Y_t^i; Z_t^i)\}_i$ est une suite de Cauchy dans $M^2\left([0,T]\,; R^k\right) \times M^2\left([0,T]\,; R^{k\times d}\right)$: Et donc$\{(Y_t^i)\}_{i=0;1,\ldots}$est de Cauchy dans $\mathrm{S}^2\left([0;T]; R^k\right)$;et que

$$\{(Y_t; Z_t)\} = \lim_{i\to\infty}\left\{(Y_t^i; Z_t^i)\right\}$$

est la solution de l'équation2.1 $\blacksquare$

Théorème 2.2.2 *supposons en plus des conditions de théorème 1.1 que* ***(H.2)*** *est vérifié pou un certain $p > 2$ $\xi \in L^p(\Omega, f_T, P, \mathbb{R}^k)$ et*

$$E\int_0^T\left(|f(t,0,0)|^p\,ds + \|g(t,0,0)\|^p\right)dt < \infty$$

ensuite

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p + \left(\int_0^T\|Z_t\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right) < \infty$$

Preuve. Nous appliquons **Lemm 1.3** avec $\varphi(x) = |x|^p$,

$$\begin{aligned}|Y_t|^p \quad & +\tfrac{p}{2}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds + \tfrac{p}{2}(p-2)\int_t^T |Y_s|^{p-4} (Z_s Z_s^* Y_s, Y_s)\, ds \\ & = |\xi|^p + p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (f(s, Y_s, Z_s), Y_s)\, ds + p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, g(s, Y_s, Z_s)\, dB_s) \\ & +\tfrac{p}{2}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|g(s, Y_s, Z_s)\|^2 ds \\ & +\tfrac{p}{2}(p-2)\int_t^T |Y_s|^{p-4} (gg^*(s, Y_s, Z_s)\, Y_s, Y_s)\, ds - p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, Z_s dW_s)\end{aligned}$$

De plus ,nous ne savons pas a priori que les integrales stachastique ci-dessus ont une espéreance nulle, en faisant valoir comme dans la preuve de **lemme 2.1** dans **Pardoux et Peng**[7] ,nous obtenons que

$$\begin{aligned}E(|Y_t|^p) \quad & +\tfrac{p}{2}E\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds + \tfrac{p}{2}(p-2)E\int_t^T |Y_s|^{p-4} (Z_s Z_s^* Y_s, Y_s)\, ds \\ & \leq E(|\xi|^p) + pE\int_t^T |Y_s|^{p-2} (f(s, Y_s, Z_s), Y_s)\, ds + \tfrac{p}{2}E\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|g(s, Y_s, Z_s)\|^2 ds \\ & +\tfrac{p}{2}(p-2)E\int_t^T |Y_s|^{p-4} (gg^*(s, Y_s, Z_s)\, Y_s, Y_s)\, ds\end{aligned}$$

Notons que l'on peut conclure de **(H.1)** que pour tout $\alpha < \alpha' < 1$, il existe $c(\alpha')$ tel que

$$\|g(t, y, z)\|^2 \leq c(\alpha')\left(|y|^2 + \|g(t, 0, 0)\|^2\right) + \alpha' \|z\|^2$$

Des deux dernières inégalités,**(H.1)** et **(H.2)** ,et en utilisant les intégalités de **Holder** et de **Young** ,en déduit qu'il existe $\theta > 0$ et c tels que pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}E(|Y_t|^p) \quad & +\theta E\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds \\ & \leq E(|\xi|^p) + cE\int_t^T \left(|Y_t|^p + |f(s, 0, 0)|^p + \|g(s, 0, 0)\|^2\right) ds\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors, en utilisant le **lemm de Gronwall,**qu'en

$$sup_{0 \leq t \leq T} E(|Y_t|^p) + E\int_0^T |Y_t|^{p-2} \|Z_t\|^2 dt < \infty$$

Appliquant les mêmes inégalités que nous avons déjà utilisées à la preiére identité de cette preuve ,on déduite que,

$$\begin{aligned}|Y_t|^p &\leq |\xi|^p + c\int_t^T (|Y_t|^p) + |f(s,0,0)|^p + \|g(s,0,0)\|^2)ds \\ &+p\int_t^T |Y_s|^{p-2}(Y_s, g(s,Y_s,Z_s)\, dB_s) - p\int_t^T |Y_s|^{p-2}(Y_s, Z_s dW_s)\end{aligned}$$

D'où , de l'inégalité de **Burkholder-Davis-Gundy**,

$$\begin{aligned}E\left(sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p\right) &\leq E(|\xi|^p) + cE\int_t^T \left(|Y_t|^p + |f(t,0,0)|^p + \|g(t,0,0)\|^2\right) dt \\ &+cE\sqrt{\int_t^T |Y_t|^{2p-4}(gg^*(t,Y_t,Z_t)\,Y_t,Y_t)\,dt} \\ &+cE\sqrt{\int_t^T |Y_t|^{2p-4}(Z_t Z_t^* Y_t, Y_t)\,dt}\end{aligned}$$

Nous estimons le dernier terme comme suit :

$$\begin{aligned}E\sqrt{\int_0^T |Y_t|^{2p-4}(Z_t Z_t^* Y_t, Y_t)\,dt} &\leq E\left(Y_t^{\frac{p}{2}}\sqrt{\int_t^T |Y_t|^{2p-4}\|Z_t\|^2\,dt}\right) \\ &\leq \tfrac{1}{3}E\left(sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p\right) + \tfrac{1}{4}E\int_0^T |Y_t|^{p-2}\|Z_t\|^2\,dt\end{aligned}$$

L'avant-dernier terme de l'inégalité ci-dessus peut être traité de maniére analogue et nous déduisons que

$$E\left(sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p\right) < \infty$$

Maintenant nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T \|Z_t\|^2\,dt &= |\xi| - |Y_0|^2 + 2\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t), Y_t)\,dt + 2\int_0^T (Y_t, g(t,Y_t,Z_t), Y_t)\,dB_t \quad - \\ &+\int_0^T \|g(t,Y_t,Z_t)\|^2\,dt - 2\int_0^T (Y_t, Z_t dW_t)\end{aligned}$$

Donc pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}} &\leq (1+\delta)\left(\int_0^T \|g(t,Y_t,Z_t)\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} \\ &+c(\delta,p)\left[|\xi|^p + |Y_0|^p + \left|\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t),Y_t)\,dt\right|^{\frac{p}{2}}\right. \\ &\left.+\left|\int_0^T (Y_t, g(t,Y_t,Z_t),Y_t)\,dB_t\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\int_0^T (Y_t, Z_t dW_t)\right|^{\frac{p}{2}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^T \|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}} &\leq (1+\delta)\left(\int_0^T \|g(t,Y_t,Z_t)\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} \\ &+c(\delta,p)\,\alpha E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c'(\delta,p) \\ &+c(\delta,p)\,E\left[\left(\int_0^T |Y_t|\,\|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c(\delta,p)\,E\left[\left(\int_0^T |Y_t|^2 \|Z_t\|^2 dt\right)^{\frac{p}{4}}\right] \\ &\leq c(\delta,p)^2\,\alpha E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c'(\delta,p) \\ &+c(\delta,p)\,E\left\{\left(sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^{\frac{p}{2}}\right)\left[\left(\int_0^T \|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right)^{\frac{p}{4}}\right]\right\} \\ &\leq \left[(1+\delta)^2\alpha + (1+\delta)\right] E\left[\left(\int_0^T \|Z_t\| dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] + c''(\delta,p)\end{aligned}$$

La deuxième partie du résultat suit maintenant, si nous choisissons $\delta > 0$ assez petit tel que :

$$(1+\delta)^2\alpha + (1+\delta) < 1$$

(rappeler que $\alpha < 1$) ■

2.3 Régularité de la solution de l'EDSR

Définition et notations

Soit T un réel strictement positife.Notons par :

$C^k(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

$C^k_{l,b}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k dont les dérivées partielles d'orde inférieur ou égal à k sont bornées (et done la fontion elle-méme croit au plus linéairement à l'infini),et ensuite $C^k_p(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k qui, avec toute leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égale à k, croissent au plus comme une fonction polynominale en x à l'infini

On a $b \in C^k_{l,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $\sigma \in C^k_{l,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d})$ et pour tout t$\in [0,T]\,.x \in \mathbb{R}^d$,nous désignons par $\{X^{t,x}_s, t \leq s \leq T\}$ l'unique solutionde l'EDS suivente :

$$\begin{cases} d\ X^{t,x}_s & = b(X^{t,x}_s)ds + \sigma(X^{t,x}_s)dW_s, \qquad t \leq s \leq T \\ X^{t,x}_s & = x. \end{cases} \tag{2.3}$$

d'après des résultats connues les EDS,la solution $\left\{X^{t,x}_s, t \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ admet une version continue de classe C^2 $p.s$ (la fonction et ses dérivées étant $p.s$ continue par rapport à (t,s,x))

De plus,

$$sup_{0\leq s\leq T}(\left|X^{t,x}_s\right| + \left|\nabla X^{t,x}_s\right| + \left|D^2 X^{t,x}_s\right|) \in \cap_{p\geq 1} L^{p(\Omega)}$$

où $\nabla X^{t,x}_s$ désigne la matrice des dérivées de premier ordre de $X^{t,x}_s$ rapport à x,et $D^2 X^{t,x}_s$ la matrice des dérivées de second ordre

Maintenant ,on a utilise la notation suivantes

$$f(s,y,z) = f(s, X^{t,x}_s, y, z)$$
$$g(s,y,z) = g(s, X^{t,x}_s, y, z)$$

avec

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}^k$$
$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}^{k\times l}$$

On suposons que pour tout $s \in [0,T], (x,y,z) \to (f(s,x,y,z), g(s,x,y,z))$ est de classe C^3 et des dérivés bornées a $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

On suppose que **(H.1)**,**(H.2)** et **(H.3)** sont satisfaits :

soit $h \in C_p^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$,pour tout $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d$,soit $\{Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}\}, t \leq s \leq T$ la solution unique de l' EDDSR :

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} &= h(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr \\ &\quad + \int_s^T g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dB_r - \int_s^T Z_r^{t,x}dW_r \quad t \leq s \leq T \end{aligned} \tag{2.4}$$

Où $X_s^{t,x} = X_{s\vee t}^{t,x}, Y_s^{t,x} = Y_{s\vee t}^{t,x}$ et $Z_s^{t,x} = 0$, pour $s < t$

Théorème 2.3.1 $\left\{Y_s^{t,x}, (s,t) \in [0,T]^2, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ *admet une version de trajectoire appartiennent à* $C^{0,0,2}([0,T]^2 \times \mathbb{R}^d)$

Corollaire 2.3.1 *Il existe une version continue de champ aléatoire* $\left\{Y_s^{t,x}, t \in [0,T]^2, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ *tel que pour tout* $t \in [0,T], x \to Y_s^{t,x}$ *est de classe* C^2*p.s,est de dérivées continues p.s en* $(t.x)$

Proposition 2.3.1 *Le champ aléatoire* $\left\{Z_s^{t,x}, 0 \leq t \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ *a une version continue puisque sûrement, tels que*

$$Z_s^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} (\nabla X_s^{t.x})^{-1} \sigma(X_s^{t.x})$$

et en particulier

$$Z_s^{t,x} = \nabla Y_s^{t,x} \sigma(x)$$

Chapitre 3

Lien entre la solution de l'EDSR et l'EDPS

On donne maintenant la relation entre l'EDDSR et un système d'équation différentielles partielles stochastique retrogrades semi lineaire :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= h(x) + \int_t^T \left[\mathcal{L}u(s,x) + f(s,x,u(s,x),(\nabla u\sigma)(s,x))\right] ds \\ &+ \int_t^T g(s,x,u(s,x),(\nabla u\sigma)(s,x))dB_s \qquad\qquad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{L}u = \begin{pmatrix} Lu_1 \\ . \\ . \\ Lu_k \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Théorème 3.0.2 *Soient les fonctions f et g satisfaisont les hypothèses **(H.1)** ,**(H.2)** ; et h de classe C^2. soit $\left\{u(t,x); 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ un champ aléatoire tel que $u(t,x)$*

et $\mathcal{F}^B_{t,T}$ mesurable pour tout (t,x),u∈ $C^{0,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ p, s et u vérifier l'équation3.1
Alors $u(t,x) = Y^{t,x}_t$,où $\left\{\left(Y^{t,x}_t, Z^{t,x}_t\right);\quad t\leq s\leq T\right\}_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ est la solution unique de ***l'EDDSR2.1***

Preuve. Il suffit de montrer que $\{u(t,X^{t,x}_s),(\nabla u\sigma)(s,X^{t,x}_s);0\leq s\leq t\}$ est la solution de **l'EDDSR2.1**

soit $t=t_0<t_1<t_2<...<t_n=T$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\left[u(t_i,X^{t,x}_{t_i})-u(t_{i+1},X^{t,x}_{t_i+1})\right]\\
&=\sum_i\left[u(t_i,X^{t,x}_{t_i})-u(t_{i+1},X^{t,x}_{t_i+1})\right]+\sum_i\left[u(t_i,X^{t,x}_{t_i})-u(t_{i+1},X^{t,x}_{t_i+1})\right]\\
&=-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathcal{L}u(t_i,X^{t,x}_{t_i})ds-\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\nabla u\sigma)(t_i,X^{t,x}_{t_i})dW_s\\
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\mathcal{L}\left(u(t_i,X^{t,x}_{t_{i+1}})\right)+f(s,X^{t,x}_{t_{i+1}},u(s,X^{t,x}_{t_{i+1}}),(\nabla u\sigma)(s,X^{t,x}_{t_{i+1}}))\right]ds\\
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}g(s,X^{t,x}_{t_{i+1}},u(s,X^{t,x}_{t_{i+1}}),(\nabla u\sigma)(s,X^{t,x}_{t_{i+1}}))dB_s.
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé la formule d'Itô et l'équation satisfait par u.On obtient ensuite une unique de l'équation2.1 ■

Nous montrons maintenant l'inverse de **théorème 3.0.2**

Théorème 3.0.3 *Soient f,g et h satisfaisons les hypothéses **H1**, **H2** et **H3** Alors $\left\{u(t,x)\triangleq Y^{t,x}_t;0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^d\right\}$ est l'unique solution classique de systéme **l'EDPS** 3.1*

Preuve. On sait que

$$Y^{t,x}_{t+h}=Y^{t+h,X^{t,x}_{t+h}}_{t+h}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
u(t+h,x)-u(t,x) \quad &= u(t+h,x)-u(t+h,X_{t+h}^{t,x})+u(t+h,X_{t+h}^{t,x})-u(t,x)\\
&= -\int_t^{t+h}\mathcal{L}u(t+h,X_s^{t,x})ds-\int_t^{t+h}(\nabla u\sigma)(t_i,X_s^{t,x})dW_s\\
&-\int_t^{t+h}f(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})ds-\int_t^{t+h}g(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})dB_s\\
&+\int_t^{t+h}Z_s^{t,x}dW_s
\end{aligned}$$

On peut alos terminer la peuve exactement comme dans le $Th\acute{e}or\grave{e}me$3.2 de Pardoux Peng[4] ■

Bibliographie

[1] Bismut ,J-M, Conjugate convex functions in optimal stochastic control, J. Math. Anal. Appl. 44 : 384–404,(1973)

[2] B. L. Rozovskii and R. B. Sowers, eds. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte,NC, 1991), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 176, Springer, Berlin, 1992, pp. 200–217.

[3] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55–61.

[4] E.Pardaux , S.Peng,(1994), Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDE's, Probab Theory Related Fields., 98 : 209-227, 1994

[5] Hamadène, S. and Lepeltier, .J.P. Backward equations, stochastic control and zero-sum stochastic differential games. Stoch, Stoch, Reports, 54 : 221-231, 1995. [141 Harnadène, S. andl Lepeltier,

[6] Hamadène, S. and l Lepeltier, J.P. Zero-sum stochastic differential garnes and backward l équations. System Control Letters, 24 : 259-263, 1995.

[7] N. El Karoui, S. Peng, and M.-C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1–71.

[8] Yufeng,S.,&Kai, L. (2005) . Comparaison Theorems of Bakward Doubly stochastic Differential Equations and Applications (pp.100(3)-108).

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$EDSR$	:	$Equation\ diff\acute{e}rentielle\ stochastique\ r\acute{e}trograde.$
$EDDSR$	:	$Equation\ diff\acute{e}rentielle\ doublement\ stochastique\ r\acute{e}trograde.$
$P.p.s$	:	$La\ notation\ presque\ s\hat{u}rement\ pour\ la\ mesure\ de\ probabilit\acute{e}\ P$
$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	:	$Espace\ de\ probabilit\acute{e}.$
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, p)$	:	$Espace\ de\ probabilit\acute{e}\ fltr\acute{e}.$
L^2	:	$L\prime espace\ de\ Hilbert.$
$B(\mathbb{R}^d)$	:	$Latribu\ bor\acute{e}lienne\ sur\ \mathbb{R}^d:$
E	:	$L\prime esp\acute{e}rance\ par\ rapport\ \grave{a}\ la\ probabilit\acute{e}.$
$v.a$	:	$Variable\ al\acute{e}atoire.$
$(B, \Vert.\Vert_0)$	:	$Espace\ de\ Banach.$
$p.s$	:	$Presque\ s\hat{u}rement.$

Résumé

dans ce travail, nous étudions une classe d'Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR's) appelée Equations Différentielles Doublement Stochastiques et Rétrogrades (EDDSR's). Ces équations comportent deux types d'intégrales stochastiques, l'une progressive et l'autre rétrograde, d'où le doublement stochastique. Plus précisément, l'objectif visé dans ce travail est. la recherche d'existence et d'unicité de solutions de ces équations sous des conditions de Lipschitz. Pour ce faire, nous rappelons d'abord, au Chapitre 1, les définitions des intégrales stochastiques rétrogrades Dans le Chapitre 2 nous étudions l'existence et l'unicité de solutions au Chapitre 3,nous appliquons le résultat obtenu sur les EDDSR's

Abstract

in this work, we study a class of Backward Stochastic Differential Equations (BSDE) called Double Stochastic and Backward Differential Equations (BDSDE). These equations include two types of stochastic integrals, one progressive and the other retrograde, hence the stochastic doubling. More precisely, the objective aimed at in this work is. the search for existence and uniqueness of solutions of these equations under Lipschitz conditions. To do this, we first recall, in Chapter 1, the definitions of retrograde stochastic integrals In Chapter 2 we study the existence and uniqueness of solutions in Chapter 3, we apply the result obtained on the BDSDE's

ملخص

في هذا العمل ، ندرس فئة من المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية تسمى المعادلات التفاضلية مزدوجة العشوائية والمعادلات التفاضلية العكسية تتضمن هذه المعادلات نوعين من التكاملات العشوائية، أحدهما تقدمي والآخر تراجعي ، ومن ثم المضاعفة العشوائية. بتعبير أدق ، الهدف المنشود في هذا العمل هو. البحث عن وجود ووحدانية حلول هذه المعادلات في ظل شروط ليبشيتز. للقيام بذلك ، نتذكر أولاً ، في الفصل الأول ، تعريفات التكاملات العشوائية التراجعية إلى الوراء في الفصل 2 ندرس وجود الحلول وتفردها في الفصل 3 ، ونطبق ارتباطها مع المعادلات ذات المشتقات الجزئية العشوابية .