République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Ouamane Manel

Titre

Principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal partiellement observable

Membres du Comité d'Examen :

Dr. HAFAYED Mokhtar, *Université de Biskra*, ________ **Président**

Dr. LAKHDARI-Imad Eddine, *Université de Biskra*, ________ **Encadreur**

Dr. KORICHI Fatiha, *Université de Biskra*, ________ **Examinateur**

2021

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À la source de la patience, Ma chère Mère.

À la source de ma force, Mon chèr père que dieu ait pitie de lui .

À mon cher mari Abed Elmoumene pour tout l'encouragement,le respect et l'amour que tu m'as offert,

ainsi que mon fils Ahmed qui me donnent chaque jour la force d'avancer.

À mes soeurs :Amina ,Yasmine ,Souad et Razane.

À mon seul frère :Ali et sa femme Roumaissa.

À mes belles soeurs :Sihem,Ikram,Mariem,Salima.

À mes neveux :Mayar et Mayassine.

À mes chères amies :Ilhem et Linda,Nada..

À tous ceux qui étaient à côtés de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

Ouamane Manel

Remerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **Lakhdari Imad-Eddine,** professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, ses conseils, sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques.

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficiles.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse a étudier un problème de contrôle stochastique où le système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx^v(t) = b(t, x^v(t), v(t))\, dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))\, dW(t) \\ \qquad\qquad + \alpha(t, x^v(t), v(t))\, d\widetilde{W}(t), \quad t \in [0, T], \\ x^v(0) = x_0, \end{cases}$$

où $W(\cdot)$ est un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\widetilde{W}(\cdot)$ désigne un processus stochastique en fonction de la variable de contrôle $v(\cdot)$. Les fonctions $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma, \alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d}$ sont des fonctions déterministes.

Le coût fonctionnel à minimiser sur la classe des contrôles admissibles est également sous la forme

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))\, dt + \psi(x^v(T)) \right],$$

où $l : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes, et $\mathbb{E}^v$dénote une espérance sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}^v)$.

Un processus de contrôle qui résout ce problème est appelé optimal. En pratique, les contrôleurs ne peuvent généralement pas être en mesure d'observer toutes les informations, mais celles partielles avec du bruit. Cela fait que les problèmes de contrôle optimal partiellement observés reçoivent une attention particulière. Le contrôle optimal stochastique des diffusions partiellement observées a été étudié par de nombreux auteurs, voir par exemple [1, 3, 5].

Le but de ce travail est d'établir un principe de maximum stochastique pour le problème de contrôle partiellement observable ou le domaine de contrôle est supposé convexe.

Nous présentons notre travail comme suit :

► Le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier le principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal pariellement observable.

► Le deuxième chapitre contient l'essentielle de ce travail, nous prouvons les conditions nécessaires pour notre problème de contrôle. Plus précisément, nous utilisons le théorème de Girsanov ainsi que la technique variationnelle standard pour transformer notre problème de contrôle optimal en problème complètement observable.

► Dans le dernier chapitre, nous appliquons notre resultat obtenu en chapitre 2 au problème de contrôle linéaire-quadratique.

Chapitre §.1
Rappel sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles en théorie du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement brownien, l'intégrale stochastique, processus d'itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastique (EDSs).

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Tribu ou σ-Algebre) *Soit E un ensemble quelconque, on appelle tribu de parties de E, tout sous ensembles $\mathcal{A}$ de E telle que :*

1. $E \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.2 (Variable aléatoire) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec :*

Ω *: est un ensemble fondamental.*

$\mathcal{F}$: *est une tribu définie sur Ω.*

$\mathbb{P}$: *est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*

L'application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est appelée une variable aléatoire si elle est mesurable par rapport à* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *i.e :* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribus telle que pour* $s \leq t$, *on a :* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Remarque 1.1.1 *Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.4 (Processus stochastique) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T.

1. Si T est un ensemble dénombrable totalement ordonnée comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ alors X est un processus stochastique à temps discret.
2. Si $T = \mathbb{R}_+$ alors X est un processus stochastique à temps continu.
3. Pour $t \in T$ fixé : $w \in \Omega \to X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
4. Pour $w \in \Omega$ fixé : la fonction $t \in T \to X_t(w)$ est est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.5 (Indistinguabilité) *On dit que* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *sont indistinguables si leurs trajectoires sont les même* $\mathbb{P} - p.s$, *c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \ ; \forall\ t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.1.6 (Modification des processus) *On dira que* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *est une version (ou une modification) de* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1;\ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *Si* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *sont indistinguables alors ils sont modification l'un de l'autre mais la réciproque est en générale fausse.*

Définition 1.1.7 (Équivalence de deux processus stochastiques) *On dit que*

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont équivalents si $X = Y$, i.e pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}).$$

Définition 1.1.8 (Processus adapté) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.9 (Processus progressivement mesurable) *On dit que $X(t)$ est progressivement mesurable âr rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si l'application*

$X : (w, t) \to X_t(w)$ de $\Omega \times [0, s]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0, s])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.10 (Processus càdlàg) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.11 (Processus càglàd) *Un processus est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs réelles, B est un mouvement brownien standard si :*

1. $B_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$
2. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ independante de $\mathcal{F}_s$.
3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t - s)$.

Proposition 1.2.1 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique telle que toutes ses trajectoires sont continues et $B_0 = 0$, Alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

1. Le processus B est un mouvement brownien standard.
2. Le processus B est un processus gaussien avec :

$$\begin{cases} \text{Esperance } m(t) = 0, \\ \text{Covariance } \Gamma(s,t) = \min\{s,t\}. \end{cases}$$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

1.3 Intégrale stochastique (Intégrale d'Itô)

Définition 1.3.1 (Intégrale stochastique) *L'intégrale stochastique est un intégrale de la forme :*

$$\int_a^b X_s(w)dB_s(w),$$

où a et $b \in \mathbb{R}_+$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB.

Définition 1.3.2 (Bon processus) *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un "bon processus" s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

l'integrale stochastique est vérifier les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux "bon processus" on donc

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \int_0^t (\alpha X_s(w) + \beta Y_s(w))dB_s(w) = \alpha \int_0^t X_s(w)dB_s(w) + \beta \int_0^t Y_s(w)dB_s(w).$$

2. **Centrage :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s(w)dB_s(w)\right] = 0.$$

3. **Appartenance à** $\mathbb{L}^2$: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (X_s(w)dB_s(w))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(w)ds\right]$$

Définition 1.3.3 (Processus d'Itô) *: Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé processus d'Itô s'il est de la forme :*
$$X_t = x + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s,$$

où b_s est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tq :
$$\int_0^t |b(s)|\, ds < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s, \quad \forall t \geq 0.$$

σ est un "bon processus local". $x = X_0 \in \mathbb{R}$.

On écrit généralement le processus d'Itô par la forme différentielle stochastique :
$$\begin{cases} dX_t = b(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

le processus $b(t)$ s'appelle la derivé (drift) du processus X et $\sigma(t)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

1.4 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.4.1 (Equation differentielle stochastique) *Une équation différentielle stochastique **(EDS)** est une équation de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} . \tag{1.1}$$

où $\{B_t,\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien.*

Définition 1.4.2 (Solution d'EDS) *Soit* $d, m \in \mathbb{N}, et$

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}.$$

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $B_s,\ s \leq t$ et par X_0, complétée par les ensembles négligeables $\mathcal{N}$.

Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appellé une solution forte de (1.1) si :

1. $X_0 = x$,
2. $\int_0^t \{|b(X(s))^2| + |\sigma(X(s))^2|\}\, ds < \infty.$
3. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,\ t \in [0, \infty),\ \mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.4.3 (Solution forte unique d'EDS) ***:*** *On dit que l'équation admet une solution forte unique, si pour chaque deux solutions fortes* X_t *et* Y_t *on a :*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0,$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\} = 1.$$

Théoreme 1.4.1 (Existence) *On suppose que :*

1. b et σ deux fonctions continues.

2. il existe une constante $K > 0$.telle que, pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

   i) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$.

   ii) $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1 - |x|^2)$.

3. La condition initiale X_0 est indépendante de et est de carrée intégrable.

alors il existe une solution unique de à trajectoires continues pour $t \leq T$. de plus cette solution vérife

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < \infty.$$

Chapitre §.2
Principe du maximum stochastique

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

2.1 Hypothèses et formulation du problème

Dans ce chapitre, nous désignons :

- $\mathbb{R}^n$: l'espace euclidien à n dimensions.

- $\mathbb{R}^{n\times d}$: la collection de matrices $n \times d$.

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités filtré complet sur lequel sont définis deux mouvements browniens unidimensionnels standard indépendants $W(\cdot)$ et $Y(\cdot)$.

- Soit $\mathcal{F}_t^W$ et $\mathcal{F}_t^Y$ la filtration naturelle P-complétée générée par $W(\cdot)$ et $Y(\cdot)$, respectivement.

- Soit $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^Y \vee \mathcal{F}_t^W$ et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

- On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $|\cdot|$) le produit scalaire (resp. norme).

- $\mathbb{E}$ désigne l'esperance sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

De plus, pour $r < s$,

– $L^2(r, s; \mathbb{R}^n)$ est l'espace de fonction déterministe $\eta(t)$ a valeur dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\int_r^s |\eta(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

– $L^2(\mathcal{F}_t;\mathbb{R}^n)$ est l'espace de variable aléatoire $\varphi, \mathcal{F}_t$-mesurable a valeur dans $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\mathbb{E}\left|\varphi\right|^2 < +\infty.$$

– $L^2_{\mathcal{F}}(r,s;\mathbb{R}^n)$ est l'espace de processus $\psi(\cdot)$, $\mathcal{F}_t$-adaptés a valeur dans $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\mathbb{E}\int_r^s \left|\psi(t)\right|^2 dt < +\infty.$$

– $\mathbb{L}^2\left(\mathcal{F};\mathbb{R}^d\right)$ est l'espace de Hilbert avec le produit intérieur

$$(x,y)_2 = \mathbb{E}\left[x.y\right], x,y \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F};\mathbb{R}^d\right) \text{ et la norme } \|x\|_2 = \sqrt{(x,x)_2}.$$

Maintenant, nous introduissons notre modèle comme suit.

(**i**) Un contrôle admissible ν est un processus $\mathcal{F}^Y_t$-adapté avec des valeurs dans un sous-ensemble convexe non vide U de $\mathbb{R}^k$ satisfait $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left|v_t\right|^m < \infty, m = 2,3,\cdots$. L'ensemble des variables de contrôle admissibles est noté par U_{ad}.

(**ii**) Pour un contrôle donné $v(\cdot) \in U_{ad}$, nous considérons la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dx^v(t) = b\left(t,x^v(t),v(t)\right)dt + \sigma\left(t,x^v(t),v(t)\right)dW(t) \\ \qquad\qquad + \alpha\left(t,x^v(t),v(t)\right)d\widetilde{W}(t), \quad t\in[0,T], \\ x^v(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$\alpha : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

sont des fonctions déterministes.

(**iii**) Supposons que l'état $x^v(\cdot)$ n'est pas complètement observable, il est partiellement observable à travers le processus $Y(\cdot)$, qui est régi par l'équation suivante

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x^v(t), v(t))dt + d\widetilde{W}(t), \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^r$, et $\widetilde{W}(\cdot)$ est un processus dépendant du contrôle $v(\cdot)$.

Le coût fonctionnel est donné par

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \psi(x^v(T)) \right], \tag{2.3}$$

où $\mathbb{E}^v$ dénote l'esperance sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}^v)$ et

$$l : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}, \;\; \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Tout au long de ce travail, voici les hypothèses sur lesquelles nous allons travailler.

Hypothèse (**A1**) Les coefficients $b, \sigma, \alpha, l : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables dans toutes les variables. De plus, $b(\cdot, v), \sigma(\cdot, v), \alpha(\cdot, v), l(\cdot, v) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R})$ pour tous $v \in U$.

Plus précisément, désignant $\rho(x) = b(x, v), \sigma(x, v), \alpha(x, v), l(x, v), \psi(x)$, la fonction $\rho(\cdot)$ satisfait les propriétés suivantes :

1. tous les dérivés $\partial_x \rho$ pour $\rho = b, \sigma, \alpha, l, \psi$, sont bornées et Lipschitz continues, avec des constantes de Lipschitz indépendantes de $v \in U$;

2. les fonctions b, σ, α et l sont continuellement différentiables par rapport à la variable de contrôle v, et tous leurs dérivés $\partial_v b, \partial_v \sigma, \partial_v \alpha$ et $\partial_v l$ sont continues et borneés.

3. h est continuellement différenciable en x et continue dans v, ses dérivés et h sont tous uniformément délimités.

Pour toute $v(\cdot) \in U_{ad}$, et d'après l'hypothèse (**A1**) l'équation (2.1) admet une solution unique $\mathcal{F}_t$- adaptée (voir le travail de Lakhdari et al. [5]). Maintenant nous définissons $d\mathbb{P}^v = Z^v(t)d\mathbb{P}$ avec

$$Z^v(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s, x^v(s), v(s))dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s, x^v(s), v(s))|^2\, ds\right\},$$

et $Z(\cdot)$ est la solution unique $\mathcal{F}_t^Y$-adaptée de l'EDS linéaire suivante

$$\begin{cases} dZ^v(t) = Z^v(t)h\left(t, x^v(t), v(t)\right)dY(t), \\ Z^v(0) = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Par la formule d'Itô, on peut prouver que $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|Z_t^v\right|^m < \infty$, $m = 2, 3, \cdots$. Par conséquent, par le théorème de Girsanov et l'hypothèse (**A1**), $\mathbb{P}^v$ est une nouvelle mesure de probabilité et $(W(\cdot), \widetilde{W}(\cdot))$ est un mouvement brownien standard bidimensionnel défini sur le nouvel espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}^v)$.

Notre problème de contrôle optimal partiellement observé est de minimiser le coût fonctionnel (2.3) pour toute $v(\cdot) \in U_{ad}$ l'equation (2.1) et (2.2) sont satisfaites, i.e., trouver $u(\cdot) \in U_{ad}$ satisfaisant

$$J(u(\cdot)) = \inf_{v(\cdot)\in U_{ad}} J\left(v\left(\cdot\right)\right). \tag{2.5}$$

Clairement, le coût fonctionnel (2.3) peut être réécrit comme

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T Z^v(t)l(t, x^v(t), v(t))dt + Z^v(T)\psi(x^v(T))\right]. \tag{2.6}$$

De plus le problème d'origine (2.5) équivalent à minimiser (2.6) pour toute $v(\cdot) \in U_{ad}$ l'équation (2.1) et (2.4) sont satisfaites. Notre but est de trouver la condition nécessaire du contrôle optimal partiellement observé $u(\cdot)$ sous forme de principe du maximum stochastique.

2.2 Principe du maximum stochastique

Dans cette section, en appliquant le théorème de Girsanov avec une technique variationnelle convexe standard, nous développons le principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle partiellement observable pour les équations différentielles stochastiques.

Soit $u(\cdot)$ un contrôle optimal et soit x la trajectoire optimale correspondante. Pour toute $\varepsilon \in (0,1)$ et $v(\cdot) \in U_{ad}$, nous prenons le contrôle variationnel $v^\varepsilon(\cdot) = u(\cdot) + \varepsilon v(\cdot)$. La condition de convexité du domaine de contrôle garantit que $v^\varepsilon(\cdot)$ est aussi dans U_{ad}. Avec une notation évidente, nous désignons par $x^\varepsilon(\cdot), x(\cdot), Z^\varepsilon(\cdot), Z(\cdot)$ les trajectoires d'état de (2.1) et (2.4) correspond à $v^\varepsilon(\cdot)$ et $u(\cdot)$.

Nous présentons maintenant les SDEs suivantes

$$\begin{cases} dx_1(t) = \{b_x\,(t, x(t), u(t))\, x_1(t) + b_v(t, x(t), u(t))v(t)\} \\ \qquad\qquad + \{\sigma_x(t, x(t), u(t))x_1(t) + \sigma_v(t, x(t), u(t))v(t)\ dW(t) \\ \qquad + \{\alpha_x(t, x(t), u(t))x_1(t) + \alpha_v(t, x(t), u(t))v(t)\ d\widetilde{W}\,(t) \\ \quad x_1(0) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

et

$$\begin{cases} dZ_1(t) = \{Z_1(t)h(t, x(t), u(t)) + Z(t)h_x(t, x(t), u(t))x_1(t) \\ \qquad\qquad + \ Z(t)h_v(t, x(t), u(t))v(t)\}\, dY(t), \\ Z_1(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sous l'hypothèse (**A1**), il est facile de dire que les SDEs (2.7) et (2.8) admettre des solutions adaptées uniques $x_1\,(\cdot)$ et $Z_1\,(\cdot)$, respectivement.

Lemme 2.1. Sous l'hypothèse (**A1**), nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |x^\varepsilon(t) - x(t)|^2\right] = 0.$$

Preuve. À partir des estimations standards, nous obtenons en utilisant l'inégalité de

Burkholder-Davis-Gundy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|x^{\varepsilon}(s)-x(s)\right|^{2}\right] &\leq \mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|b(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-b(s,x(s),u(s))\right|^{2}ds\\ &\quad+\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\sigma(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-\sigma(s,x(s),u(s))\right|^{2}ds\\ &\quad+\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\alpha(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s))-\alpha(s,x(s),u(s))\right|^{2}ds.\end{aligned}$$

En appliquant la condition de Lipschitz sur les coefficients b,σ et α en x et v, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\varepsilon}(t)-x(t)\right|^{2}\right] &\leq C_{T}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left[\left|x^{\varepsilon}(s)-x(s)\right|^{2}\right]ds\\ &\quad+C_{T}\varepsilon^{2}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|v(s)\right|^{2}ds.\end{aligned}\tag{2.9}$$

De (2.9), nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\varepsilon}(t)-x(t)\right|^{2}\right]\leq C_{T}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\sup_{r\in[0,s]}\left|x^{\varepsilon}(r)-x(r)\right|^{2}ds+M_{T}\varepsilon^{2}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, le résultat suit immédiatement en laissant ε aller à zéro. □

Lemme 2.2. Sous l'hypothèse (**A1**), nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|\frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon}-x_{1}(t)\right|^{2}=0.\tag{2.10}$$

Preuve. Mettre

$$\Gamma^{\varepsilon}(t)=\frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon}-x_{1}(t),\quad t\in[0,T].$$

Nous utilisons les notations suivantes

$$
\begin{aligned}
x^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon\left(\Gamma^{\varepsilon}(s) + x_1(s)\right), \\
\widehat{x}^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon\left(\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}(s) + \widehat{x}_1(s)\right), \\
v^{\lambda,\varepsilon}(s) &= u(s) + \lambda\varepsilon v(s).
\end{aligned}
$$

D'après la formule de Taylor, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\varepsilon}(t) = {} & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[b(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),u(s))\right] ds \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\sigma(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - \sigma(s,x(s),u(s))\right] dW(s) \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\alpha(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - \alpha(s,x(s),u(s))\right] d\widetilde{W}(s) \\
& - \int_0^t \left\{b_x(s,x(s),u(s))x_1(s) + b_v(s,x(s),u(s))v(s)\right\} ds \\
& - \int_0^t \left\{\sigma_x(s,x(s),u(s))x_1(s) + \sigma_v(s,x(s),u(s))v(s)\right\} dW(s) \\
& - \int_0^t \left\{\alpha_x(s,x(s),u(s))x_1(s) + \alpha_v(s,x(s),u(s))v(s)\right\} d\widetilde{W}(s).
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous nous décomposons $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),u(s))\right) ds$ comme suit

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),u(s))\right) ds \\
& = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x^{\varepsilon}(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s))\right) ds \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s))\right) ds \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),u(s))\right) ds.
\end{aligned}
$$

En notant que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x^{\varepsilon}\left(s\right),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s))\right) ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left[b_x\left(s,x^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right),v^{\varepsilon}(s)\right)\left(\Gamma^{\varepsilon}(s)+x_1(s)\right)\right] d\lambda ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(b(s,x(s),v^{\varepsilon}(s)) - b(s,x(s),u(s))\right) ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left[b_v\left(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right)\right) v(s)\right] d\lambda ds.
\end{aligned}$$

De manière analogue, nous pouvons avoir une décomposition similaire pour σ et α. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\Gamma^{\varepsilon}(s)\right|^2\right] = C\left(t\right)\Bigg[&\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left|b_x\left(s,x^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right),v^{\varepsilon}(s)\right)\Gamma^{\varepsilon}\left(s\right)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left|\sigma_x\left(s,x^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right),v^{\varepsilon}(s)\right)\Gamma^{\varepsilon}\left(s\right)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left|\alpha_x\left(s,x^{\lambda,\varepsilon}\left(s\right),v^{\varepsilon}(s)\right)\Gamma^{\varepsilon}\left(s\right)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\kappa^{\varepsilon}(s)\right|^2\right]\Bigg],
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
\kappa^{\varepsilon}(t) = & \int_0^t \int_0^1 \left[b_x\left(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) - b_x\left(s, x(s), u(s)\right) \right] x_1(s) d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[b_v\left(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)\right) - b_v\left(s, x(s), u(s)\right) \right] v(s) d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\sigma_x\left(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) - \sigma_x\left(s, x(s), u(s)\right) \right] x_1(s) d\lambda dW(s) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\sigma_v\left(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)\right) - \sigma_v\left(s, x(s), u(s)\right) \right] v(s) d\lambda dW(s) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\alpha_x\left(s, x^{\lambda,\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) - \alpha_x\left(s, x(s), u(s)\right) \right] x_1(s) d\lambda d\widetilde{W}(s) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\alpha_v\left(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s)\right) - \alpha_v\left(s, x(s), u(s)\right) \right] v(s) d\lambda d\widetilde{W}(s).
\end{aligned}
$$

Puisque les dérivées des fonctions b, σ et α par rapport à (x, v) sont Lipschitz et continues en (x, v), on obtient

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,T]} \left| \kappa^{\varepsilon}(s) \right|^2 \right] = 0.
$$

De plus, les dérivées de b, σ et α par rapport à (x, v) sont bornées, on a $\forall t \in [0, T]$:

$$
\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left| \Gamma^{\varepsilon}(s) \right|^2 \right] \leq c(t) \left\{ \mathbb{E} \int_0^t \left| \Gamma^{\varepsilon}(s) \right|^2 ds + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left| \kappa^{\varepsilon}(s) \right|^2 \right] \right\}.
$$

Par le lemme de Gronwall, nous obtenons $\forall t \in [0, T]$

$$
\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left| \Gamma^{\varepsilon}(s) \right|^2 \right] \leq c(t) \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left| \kappa^{\varepsilon}(s) \right|^2 \right] \exp \left\{ \int_0^t c(s) ds \right\} \right\}.
$$

Enfin, mettre $t = T$ et laisser ε aller à zéro, ceci complète la démonstration.

Le lemme suivant joue un rôle important dans le calcul de l'inégalité variationnelle pour la fonctionnelle de coût (2.6) telle que (2.1) et (2.4) sont satisfaites.

Lemme 2.3 sous l'hypothèse (**A1**), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left| \frac{Z^{\varepsilon}(t) - Z(t)}{\varepsilon} - Z_1(t) \right|^2 = 0. \tag{2.11}$$

Preuve. En utilisant la définition de $Z(\cdot)$ et $Z_1(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}
& Z(t) + \varepsilon Z_1(t) \\
& = 1 + \int_0^t Z(s) h(s, x(s), u(s)) dY(s) \\
& \quad + \varepsilon \int_0^t \left[Z_1(s) h(s, x(s), u(s)) + Z(s) h_x(s, x(s), u(s)) x_1(s) \right. \\
& \quad \left. + \, Z(s) h_v(s, x(s), u(s)) v(s) \right] dY(s) \\
& = 1 + \varepsilon \int_0^t Z_1(s) h(s, x(s), u(s)) dY(s) \\
& + \int_0^t Z(s) h(s, x(s) + \varepsilon x_1(s), u(s) + \varepsilon v(s) dY(s) \\
& \quad - \varepsilon \int_0^t Z(s) \left[A^{\varepsilon}(s) \right] dY(s),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A^{\varepsilon}(s) = & \int_0^1 \left[h_x(s, x(s) + \lambda \varepsilon x_1(s), u(s) + \lambda \varepsilon v(s)) - h_x(s, x(s), u(s)) \right] d\lambda x_1(s) \\
& + \int_0^1 \left[h_v(s, x(s) + \lambda \varepsilon x_1(s), u(s) + \lambda \varepsilon v(s)) - h_v(s, x(s), u(s)) \right] d\lambda v(s).
\end{aligned}$$

Ensuite nous avons

$$
\begin{aligned}
& Z^{\varepsilon}(t)-Z(t)-\varepsilon Z_1(t) \\
& =\int_0^t Z^{\varepsilon}(s)\, h\left(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) dY(s)-\varepsilon \int_0^t Z_1(s) h(s, x(s), u(s)) dY(s) \\
& \quad -\int_0^t Z(s) h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), u(s)+\varepsilon v(s)\right) dY(s)+\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right] dY(s) \\
& =\int_0^t\left(Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right) h\left(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) dY(s) \\
& \quad +\int_0^t\left(Z(s)+\varepsilon Z_1(s)\right)\left[h(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s))-h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), u(s)+\varepsilon v(s)\right)\right] dY(s) \\
& \quad +\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\, h(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), u(s)+\varepsilon v(s)) dY(s) \\
& \quad -\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\, h(s, x(s), u(s)) dY(s)+\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right] dY(s) \\
& =\int_0^t\left(Z^{\varepsilon}(s)-Z(s)-\varepsilon Z_1(s)\right) h\left(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right) dY(s) \\
& \quad +\int_0^t (Z(s)+\varepsilon Z_1(s))\left[\Lambda_1^{\varepsilon}(s)\right] dY(s)+\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\left[\Lambda_2^{\varepsilon}(s)\right] dY(s) \\
& \quad +\varepsilon \int_0^t Z(s)\left[A^{\varepsilon}(s)\right] dY(s),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
& \Lambda_1^{\varepsilon}(s)=h\left(s, x^{\varepsilon}(s), v^{\varepsilon}(s)\right)-h\left(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), u(s)+\varepsilon v(s)\right), \\
& \Lambda_2^{\varepsilon}(s)=h(s, x(s)+\varepsilon x_1(s), u(s)+\varepsilon v(s))-h(s, x(s), u(s)).
\end{aligned}
$$

Noter que

$$
\Lambda_1^{\varepsilon}(s)=\int_0^1\left[h_x(s, x(s)+\varepsilon x_1(s)+\lambda(x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)), v^{\varepsilon}(s))\right] d\lambda(x^{\varepsilon}(s)-x(s)-\varepsilon x_1(s)).
$$

D'après le lemme 2.2

$$
\mathbb{E} \int_0^t\left|(Z(s)+\varepsilon Z_1(s)) \Lambda_1^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds \leq C_{\varepsilon} \varepsilon^2, \tag{2.12}
$$

Par la suite C_ε désigne une constante non négative telle que $C_\varepsilon \to 0$ l'orsque $\varepsilon \to 0$. Alors il est facile de voir que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\varepsilon \int_0^t Z(s)A^\varepsilon(s)dY(s)\right]^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^2, \tag{2.13}$$

et

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\Lambda_2^\varepsilon(s)dY(s)\right]^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^2. \tag{2.14}$$

De (2.12), (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|(Z^\varepsilon(t) - Z(t)) - \varepsilon Z_1(t)\right|^2 \\
&\leq C\left[\int_0^t \mathbb{E}\left|(Z^\varepsilon(s) - Z(s)) - \varepsilon Z_1(s)\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^t \left|(Z(s) + \varepsilon Z_1(s))\Lambda_1^\varepsilon(s)\right|^2 ds\right. \\
&\quad \left. + \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left(\varepsilon \int_0^t Z(s)A^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2 + \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left(\varepsilon \int_0^t Z_1(s)\Lambda_2^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2\right] \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|Z^\varepsilon(s) - Z(s) - \varepsilon Z_1(s)\right|^2 ds + C_\varepsilon \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons le résultat souhaité. □

Lemme 2.4. Sous l'hypothèse **(A1)**, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\int_0^T &\left\{Z_1(t)\, l(t, x(t), u(t)) + Z(t)\, l_x(t, x(t), u(t))x_1(t)\right. \\
&\left. + Z(t)l_v(t, x(t), u(t))v(t)\right\} dt \\
&+ \mathbb{E}\left[Z_1(T)\,\psi(x(T))\right] + \mathbb{E}\left[Z(T)\,\psi_x(x(T))x_1(T)\right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. En utilisant les lemmes 2.2 et 2.3, le développement de Taylor, nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left[Z^\varepsilon(T)\,\psi(x^\varepsilon(T)) - Z(T)\,\psi(x(T))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z_1(T)\psi(x(T)) + Z(T)\psi_x(x(T))x_1(T)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\int_0^T\left\{Z^\varepsilon(t)l(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))-Z(t)l(t,x(t),u(t))\right\}dt\\
&=\mathbb{E}\int_0^T\left\{Z_1(t)l(t,x(t),u(t))+Z(t)l_x(t,x(t),u(t))x_1(t)\right.\\
&\left.+\ Z(t)l_v(t,x(t),u(t))v(t)\right\}dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, par l'optimalité de $u(\cdot)$, nous obtenons la conclusion souhaitée.

Définir l'hamiltonien $H:[0,T]\times\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned}
H(t,x,\mu,v,p,q,\bar{q},\bar{z}) &= l(t,x,\mu,v)+b(t,x,\mu,v)p+\sigma(t,x,\mu,v)q \\
&\quad+\alpha(t,x,\mu,v)\bar{q}+h\left(t,x,v\right)\bar{z}.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Maintenant, nous introduisons les équations adjointes impliquées dans le principe du maximum stochastique :

$$\begin{cases}
-dy(t)=l(t,x\left(t\right),u\left(t\right))dt-z\left(t\right)dW(t)-\bar{z}\left(t\right)d\widetilde{W}\left(t\right),\\
y(T)=\psi(x(T)),
\end{cases}\tag{2.17}$$

et

$$\begin{cases}
-dp\left(t\right)=\left\{b_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)p\left(t\right)+\sigma_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)q\left(t\right)\right.\\
\qquad\qquad+\alpha_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\overline{q}\left(t\right)+l_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\\
\qquad\qquad\left.+\ h_x\left(t,x(t),u(t)\right)\bar{z}(t)\right\}dt-q(t)dW(t)-\overline{q}(t)d\widetilde{W}(t),\\
p(T)=\psi_x(x\left(T\right)).
\end{cases}\tag{2.18}$$

On pose $\widetilde{Z}(t)=Z^{-1}(t)Z_1(t)$, en utilisant la formule d'Itô, on a

$$\begin{cases}
d\widetilde{Z}(t)=\left\{h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)+h_v(t,x(t),u(t))v(t)\right\}d\widetilde{W}(t),\\
\widetilde{Z}(0)=0,
\end{cases}\tag{2.19}$$

Ensuite, en appliquant la formule d'Itô à $p(t)\, x_1(t)$, $y(t)\, \widetilde{Z}(t)$ et en tenant l'esperance respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^u \left[p(T)\, x_1(T) \right] &= \mathbb{E}^u \int_0^T p(t)\, dx_1(t) + \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, dp(t) \\
&+ \mathbb{E}^u \int_0^T q(t) \left\{ \sigma_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) + \sigma_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt \\
&+ \mathbb{E}^u \int_0^T \overline{q}(t) \left\{ \alpha_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) + \alpha_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt. \\
&= I_1 + I_2 + I_3, \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}^u \int_0^T p(t)\, dx_1(t) \\
&= \mathbb{E}^u \int_0^T p(t) \left\{ b_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) + b_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt \\
&= \mathbb{E}^u \int_0^T p(t)\, b_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) dt + \mathbb{E}^u \int_0^T p(t)\, b_v(t, x(t), u(t)) v(t) dt
\end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, dp(t) \\
&= -\mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t) \left\{ b_x(t, x(t), u(t))\, p(t) + \sigma_x(t, x(t), u(t))\, q(t) \right. \\
&\left. + \alpha_x(t, x(t), u(t))\, \overline{q}(t) + l_x(t, x(t), u(t)) + h_x(t, x(t), u(t))\, \bar{z}(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Par un calcul simple, on déduit

$$\begin{aligned} I_2 = &-\mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, b_x(t, x(t), u(t))\, p(t)\, dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, \sigma_x(t, x(t), u(t))\, q(t) dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, \alpha_x(t, x(t), u(t))\, \overline{q}(t) dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, l_x(t, x(t), u(t))\, dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T x_1(t)\, h_x(t, x(t), u(t))\, \bar{z}(t) dt \end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3 = &\mathbb{E}^u \int_0^T q(t) \sigma_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) dt \\ &+ \mathbb{E}^u \int_0^T q(t) \left\{ \sigma_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt \\ &+ \mathbb{E}^u \int_0^T \overline{q}(t) \alpha_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) dt \\ &+ \mathbb{E}^u \int_0^T \overline{q}(t) \left\{ \alpha_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^u \left[y(T)\, \widetilde{Z}(T) \right] &= \mathbb{E}^u \int_0^T y(t)\, d\widetilde{Z}(t) + \mathbb{E}^u \int_0^T \widetilde{Z}(t)\, dy(t) \\ &+ \mathbb{E}^u \int_0^T \bar{z}(t) \left\{ h_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) + h_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt \quad (2.21) \\ &= J_1 + J_2 + I_3, \end{aligned}$$

où $J_1 = \mathbb{E}^u \int_0^T y(t)\, d\widetilde{Z}(t)$ est une martingale d'esperance égale à zero, et

$$\begin{aligned} J_2 &= \mathbb{E}^u \int_0^T \widetilde{Z}(t)\, dy(t) \\ &= -\mathbb{E}^u \int_0^T \widetilde{Z}(t)\, l(t, x(t), u(t)) dt. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons obtenir

$$J_3 = \mathbb{E}^u \int_0^T \bar{z}(t) \left\{ h_x(t, x(t), u(t)) x_1(t) + h_v(t, x(t), u(t)) v(t) \right\} dt$$

Enfin, en remplaçant (2.20) et (2.21) dans (2.15), on obtient

$$\mathbb{E}^u \left[H_v(t, x(t), u(t), p(t), q(t), \bar{q}(t), \overline{z}(t)) v(t) \right] \geq 0. \tag{2.22}$$

En utilisant la méthode similaire développée dans [4], notre résultat principal de ce travail est le théorème suivant. □

Théorème 2.5. Supposons que l'hypothèse **(A1)** soit vérifie et $u(\cdot)$ est un contrôle optimal. Alors,

$$\mathbb{E}^u \left[H_v(t, x(t), u(t), p(t), q(t), \bar{q}(t), \overline{z}(t)) (v(t) - u(t)) \mid \mathcal{F}_t^Y \right] \geq 0, \ \forall v \in U, \quad a.e., a.s.,$$

où la fonction hamiltonienne H est définie par (2.16).

Chapitre §.3
Application : Problème de contrôle linéaire quadratique

Chapitre 3

Application : Problème de contrôle linéaire quadratique

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre 2 et la théorie classique du filtrage pour étudier le problème de contrôle linéaire-quadratique pour un contrôle optimal partiellement observable. Le contrôle optimal est donné sous forme de feedback impliquant à la fois l'état du processus de résolution ainsi que de sa loi représentée par l'espérance via les solutions des équations différentielles ordinaires (EDOs).
Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\min \left\{ J\left(v\left(\cdot\right)\right),\ v \in U_{ad} \right\},\ J\left(v\left(\cdot\right)\right) = \mathbb{E}^{u}\left[\int_{0}^{T} L\left(t\right) v^{2}\left(t\right) dt + M_{T} x^{2}\left(T\right)\right], \tag{3.1}$$

sujet à

$$\begin{cases} dx\left(t\right) = \left\{ A\left(t\right) x\left(t\right) + B\left(t\right) \mathbb{E}\left[x\left(t\right)\right] + C\left(t\right) v\left(t\right) \right\} dt + D\left(t\right) dW\left(t\right), \\ x\left(0\right) = x_{0}, \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} dY(t) = G(t)\,dt + d\widetilde{W}(t) \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$b(t, x^v(t), v(t)) = A(t)\,x(t) + B(t)\,\mathbb{E}[x(t)] + C(t)\,v(t),$$
$$\sigma(t, x^v(t), v(t)) = D(t),$$
$$\alpha(t, x^v(t), v(t)) = 0,$$
$$h(t, x^v(t), v(t)) = G(t).$$

Ici $L(\cdot), A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont des fonctions continues bornées et $M_T \geq 0$. Alors pour tout $v \in U_{ad}$, l'équation (3.2) et (3.3) admet des solutions uniques respectivement. Soit $u(\cdot)$ un contrôle optimal du système (3.1), la trajectoire optimale correspondante notée $x(\cdot)$.

Suivant (2.18), l'équation adjointe correspondante prend la forme

$$\begin{cases} -dp(t) = \{A(t)\,p(t) + B(t)\,\mathbb{E}[p(t)]\}\,dt - q(t)\,dW(t) - \overline{q}(t)d\widetilde{W}(t), \\ p(T) = 2M_T x(T). \end{cases} \tag{3.4}$$

Évidemment, (3.4) admet une solution unique. Dans ce cas, la fonction hamiltonienne est définie comme suit

$$\begin{aligned} H(t, x, v, p, q, \bar{q}, \bar{z}) = {} & [A(t)\,x(t) + B(t)\,\mathbb{E}[x(t)] + C(t)\,v(t)]\,p(t) \\ & + D(t)\,q(t) + G(t)\,\bar{z} + L(t)\,v^2(t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si $u(\cdot)$ est optimal, et d'après le théorème 2.5 et (3.5) on a

$$u(t) = -\frac{1}{2}L^{-1}(t)\,C(t)\,\mathbb{E}\left[p(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]. \tag{3.6}$$

Ensuite, nous donnons une représentation plus explicite de $u(\cdot)$. Supposons que $\widehat{p}(t) = \mathbb{E}^u\left[p(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$, $\widehat{q}(t) = \mathbb{E}^u\left[q(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ et $\widehat{x}(t) = \mathbb{E}^u\left[x(t) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ sont les estimations de filtrage des processus adjoints $p(\cdot), q(\cdot)$ et la trajectoire optimale $x(\cdot)$ respectivement. À partir des théorèmes 8.1 dans [6], on obtient

$$\begin{cases} d\widehat{x}(t) = \left\{A(t)\widehat{x}(t) + B(t)\mathbb{E}[\widehat{x}(t)] - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\widehat{p}(t)\right\}dt \\ -d\widehat{p}(t) = \{A(t)\widehat{p}(t) + B(t)\mathbb{E}[\widehat{p}(t)]\}dt - \widehat{q}(t)\,d\widetilde{W}(t), \\ \widehat{x}(0) = x_0,\ \widehat{p}(T) = 2M_T\widehat{x}(T),\ \widehat{q}(t) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour résoudre le problème (3.7), mettre $\widehat{p}(t) = \varphi(t)\widehat{x}(t) + \psi(t)\mathbb{E}[\widehat{x}(t)]$, où $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ sont des fonctions différentielles déterministes qui seront précisées ci-dessous. Puis

$$\begin{aligned} &-\{A(t)\widehat{p}(t) + B(t)\mathbb{E}[\widehat{p}(t)]\} \\ &= \dot{\varphi}(t)\widehat{x}(t) + \dot{\psi}(t)\mathbb{E}[\widehat{x}(t)] \\ &+ \varphi(t)\left\{A(t)\widehat{x}(t) + B(t)\mathbb{E}[\widehat{x}(t)] - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\widehat{p}(t)\right\} \\ &+ \psi(t)\left\{(A(t) + B(t))\mathbb{E}[\widehat{x}(t)] - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\mathbb{E}[\widehat{p}(t)]\right\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En comparant les coefficients de $\widehat{x}(t)$ et $\mathbb{E}[\widehat{x}(t)]$ de l'équation ci-dessus respectivement, nous obtenons les EDOs suivants :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) + 2A(t)\varphi(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\varphi^2(t) = 0, \\ \varphi(T) = 2M_T, \end{cases} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) + 2(A(t) + B(t))\psi(t) + 2B(t)\varphi(t) \\ \qquad - L^{-1}(t)C^2(t)\varphi(t)\psi(t) - \frac{1}{2}L^{-1}(t)C^2(t)\psi^2(t) = 0, \\ \psi(T) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Notez que l'équation (3.9) est une équation différentielle de Bernoulli de la forme :

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^2,\ \varphi(T) = 2M_T \tag{3.11}$$

où $a(t) = -2A(t)$, $b(t) = \frac{1}{2}L^{-1}(t)\, C^2(t)$.

Pour résoudre l'équation différentielle (3.11) on utilise la transformation $\dot{\xi}(t) = (1/(\phi(t)))$ on obtient

$$\dot{\xi}(t) + a(t)\xi(t) = b(t),\ \xi(T) = \frac{1}{2M_T}. \tag{3.12}$$

Maintenant, l'équation (3.12) est une équation différentielle linéaire de premier ordre. En appliquant la méthode des facteurs d'intégration, nous obtenons

$$\xi(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(s)\frac{C^2(s)}{2L(s)}ds + c\right],$$

où c est un canstant arbitraire, et $\mu(t)$ le facteur d'intégration donné par

$$\mu(t) = \exp \int -2A(t)dt. \tag{3.13}$$

Par un simple calcul, on a

$$\varphi(t) = \frac{\mu(t)}{\int \mu(s)\frac{C^2(s)}{2L(s)}ds + c}. \tag{3.14}$$

A titre d'illustration, nous considérons le cas simple où les fonctions $A(t) = -\frac{1}{t}$, $C(t) = 4t$, $L(t) = 2t$ avec $T = 1$, $M_t = \frac{1}{4} > 0$, puis équation (3.12) étant

$$\dot{\xi}(t) + \frac{2}{t}\xi(t) = 4t,$$

avec facteur d'intégration $\mu(t) = t^2$. Un simple calcul montre que

$$\xi(t) = t^2 + \frac{c}{t^2},\ \xi(1) = 2,$$

ce qui impliquait que $c = 1$. Puisque $\phi(t) = (1/(\xi(t)))$ on obtient

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{t^4 + 1},\ \varphi(1) = \frac{1}{2}.$$

Passons à une seconde équation (3.10). Notant cette équation (3.10) est une équation différentielle de Riccati de la forme :

$$\dot{\psi}\left(t\right) = \alpha_1(t)\psi^2\left(t\right) + \alpha_2(t)\psi\left(t\right) + \alpha_3(t),\ \psi\left(T\right) = 0, \tag{3.15}$$

où $\alpha_1(t) = \left[\frac{1}{2}L^{-1}\left(t\right)C^2\left(t\right)\right]$, $\alpha_2(t) = \left[L^{-1}\left(t\right)C^2\left(t\right)\varphi\left(t\right) - 2\left(A\left(t\right) + B\left(t\right)\right)\right]$ et $\alpha_3(t) = -2B\left(t\right)\varphi\left(t\right)$. en outre, $A\left(\cdot\right)$, $B\left(\cdot\right)$, $C\left(\cdot\right)$, $D\left(\cdot\right), G\left(\cdot\right)$, $L\left(\cdot\right)$ et $\varphi\left(\cdot\right)$ sont des fonctions continues bornées données.

La méthode illustrée dans l'équation précédente peut être utilisée après avoir trouvé une solution particulière qui nous permet de convertir l'équation précédente (3.15) dans l'équation différentielle de Bernoulli. Nous nous référons à Boyce et DiPrima [2] et les références qui y sont citées pour les développements récents des équations différentielles ordinaires.

Par conséquent, le contrôle optimal $u(\cdot) \in U_{ad}$ pour le problème (3.1) est donné dans la forme de feedback

$$u\left(t\right) = -\frac{1}{2}L^{-1}\left(t\right)C\left(t\right)\left[\varphi\left(t\right)\widehat{x}\left(t\right) + \psi\left(t\right)\mathbb{E}\left[\widehat{x}\left(t\right)\right]\right],$$

avec $\varphi\left(\cdot\right), \psi\left(\cdot\right)$ déterminé par (3.9) et (3.10) respectivement.

Conclusion

Dans ce mémoire, les conditions nécessaires d'optimalités pour les problèmes de contrôle partiellement observable ont été étudié. Plus précisément, nous utilisons le théorème de Girsanov ainsi que la technique variationnelle standard pour transformer notre problème de contrôle optimal en problème complètement observable. A titre d'application un problème de contrôle linéaire-quadratique partiellement observé est étudié où le domaine de contrôle est supposé être convexe.

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. : Principe maximum et approches de programmation dynamique du contrôle optimal des diffusions partiellement observées. Stoch. Int. J. Probab. Stoch. Traiter. 9 (3), 169 à 222 (1983)

[2] Boyce, W.E., DiPrima, R.C . : Equations différentielles élémentaires et problèmes de valeur bondaire, 7 e éd. Wiley, Hoboken (2001)

[3] Fleming, W.H . : Contrôle optimal des diffusions partiellement observables. SIAM J. Control. 6 (2), 194 à 214 (1968)

[4] Hafayed, M., Meherrem. S., Eren, Ş., Guçoglu, D.H . : Sur le problème de contrôle singulier optimal pour les équations différentielles générales de Mckean - Vlasov : conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes. Optim. Control App. Méthodes 39 (3), 1202-1219 (2018)

[5] Lakhdari, I.E., Miloudi, H., Hafayed, M. : Stochastic Maximum Principle for Partially Observed Optimal Control Problems of General McKean–Vlasov Differential Equations. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 1-23 (2020).

[6] Liptser, R.S., Shiryayev, A.N . : Statistiques du processus aléatoire. Springer, New York (1977)

[7] Wu, Z, Zhuang, Y . : Contrôle linéaire-quadratique stochastique partiellement incohérent dans le temps avec sauts aléatoires. Optim. Control Appl. Méthodes 39 (1), 230-247 (2018)