République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Saci Linda

Titre :

Sur le contrôle optimal stochastique

Membres du jurés :

Dr.	Tamer Lazher	U.Biskra	Président
Dr.	Tabet Moufida	U.Biskra	Encadreur
Dr.	Chala Adel	U.Biskra	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

A *mes très chers parents*

qui veillent sans cesse sur moi avec leurs prières et leurs recommandations.

Que Dieu le tout puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie.

A mon trés chèr frère : Amine.

A mes trés chères soeurs : Sabrina, Dounia, Khadija, Ikram.

A mes trés chéres cousins et cousines : Ramzi, Khalida, Nourhane, Nisrine.

A tout ma famille, source d'espoir et de motivation.

A *mes trés chéres amies : O.Manel, M.Souhaila, M.Wiem, Z.Houda, B.Ilham, R.Sara, A.Nour, G.khadija, S.Zanib, K.rania, B.Aya.*

je dédie cet événement marquant de ma vie à la mémoire de mon oncle décédé *Mohamed*

Linda

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné la foi, le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier mon encadrante **Dr. Tabet Moufida** pour son aide précieuse ainsi que les ses précieux conseils et directives qui m'ont permis d'accomplir ce travail de recherche.

Mes vifs remerciements sont également adressés aux membres du jury **Dr. Chala Adel** et **Dr. Tamer Lazher** qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Ainsi je remercie tous les enseignants de la faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie du département de mathématique.

Enfin un merci pariculier à tous mes camarades sans exception.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, notre objectif est d'obtenir les conditions des conditions nécessaires d'optimalités sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin où le domaine de contrôle est supposé convexe et les coeffcients sont contrôlés.

Le système de notre problème est gouverné par l'équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) &= b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t) \\ X(0) &= x, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}$ est un condition initiale, et $B(.) = (B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ statisfaisant aux conditions habituelles, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle de $B(.)$.

Ce problème consiste à minimiser sur un ensemble des contrôles la fonction de coût donnée par la formule suivante :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\right],$$

ce résultat de principe du maximum a été introduit en 1982 par "A. Bensousan [1]".

Ce travail s'articulera autour de trois chapitres.

- ► **Le premier** est un chapitre introductif permettant d'introduire les outils essentiels pour le reste des chapitres. Nous allons donner quelques rappels de calculs stochastiques essentielles (processus stochastique, martingale, mouvement brownien, résultats importants relatifs au calcul d'Itô, et quelques inégalités, ...etc.) permettant de mieux comprendre notre problème.

- **Le deuxième** chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles stochastiques, tout d'abord, nous allons présenter la défnition d'une EDS, puis, énoncer le théorème d'Itô qui nous assurons l'existence et l'unicité d'une solution, ensiute nous allons donner une démonstration détaillée de ce théorème en utilisant la méthode itérative de Picard.

- **Le dernier** chapitre présente le corps principal de ce mémoire, nous allons établir des conditions nécessaires d'optimalité sous forme principe du maximum stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentiélles stochastiques, nous commençons par la formulation du problème, puis nous énonçons le théorème principe du maximum, ensuite la preuve de ce théorème en appliquant des perturbations fortes et quelques estimations sur le processus d'état.

Chapitre 1

Intoduction générale

1.1 Notion de processus

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit* $\mathbb{T}$ *un ensemble* $(\mathbb{T} = [0, T]\,,$ *ou* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+)$. *On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par* $\mathbb{T}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ *; pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *soit* X_t *une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *On peut noter qu'un processus stochastique comme une fonction qui à* $\omega \in \Omega$ *associe une fonction de* $[0, T]$ *dans* $\mathbb{R}$, $t \to X_t(\omega)$, *appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t, w) \longrightarrow X_t(w)$ *de* $R_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.3 *Soient* X *et* Y *deux processus. On dit que :*

– X *est modification de* Y *si, pour tout* $t \geq 0$, *les variables* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P}-p.s.$

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

– *X et Y sont indistinguable si, $\mathbb{P}-p.s.$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c-à-d*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion demodification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoire continues à droite ou à gauche alors X et Y sont indistinguables.*

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.4 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire : telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$.*

Définition 1.1.5 *On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue à droite si*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Définition 1.1.6 *La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique X. Mais $\mathcal{G}_0$ ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables $(\mathcal{N})$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.*

Définition 1.1.7 *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.8 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, w) \to X_s(w)$ de $([0, t] \times \Omega)$ dans $\mathbb{R}^d$est mesurable par rapport à $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

1.2 Martingale

Définition 1.2.1 *(**Martingale, sous martingale, sur martingale**) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale, sous martingale ou sur martingale si :*

– *Pour tout $t \geq 0$, X_t est mesurable.*

– *Pour tout $t \leq 0$, X_t est intégrable i.e. $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$.*

– *Pour tout $0 \leq s \leq t$:*

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}\left[X_t/F_s\right] & = & X_s \quad \mathbb{P}-p.s. \text{ (si martingale).} \\ \mathbb{E}\left[X_t/F_s\right] & \geq & X_s \quad \mathbb{P}-p.s. \text{ (si sous-martingale).} \\ \mathbb{E}\left[X_t/F_s\right] & \leq & X_s \quad \mathbb{P}-p.s. \text{ (si sur-martingale).} \end{array}$$

1.3 Mouvement brownien

Définition 1.3.1 *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique B à valeurs reélles telque :*

– *$\mathbb{P}-p.s.$ $t \to B_t$ est continue,*

– *pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u,\ u \leq s\}$ et de lois gaussienne centrée de variance $t - s$;*

– *$B_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$*

Remarque 1.3.1 *On dit que B est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-MB si B est un processus continue, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(e^{iu(B_t - B_s)}/\mathcal{F}_s)) = \exp\left\{-u^{2(t-s)}/2\right\}$.*

Remarque 1.3.2 *Un mouvement brownien est un processus gaussien, d'esperence nulle et sa covariance $cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.*

Définition 1.3.2 *On appelle MB standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $B = (B^1, ..., B^d)$ où les B^i sont des MB reéls indépendants.*

1.4 Calcul d'Itô

1.4.1 Intégrale stochastique

On cherche maintenant à définir la v.a. :

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

quand $\{\theta_s,\ s \geq 0\}$ est un processus stochastique, on note $\left\{\mathcal{F}_t^B,\ t \geq 0\right\}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien B.

Cas étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_i telles que θ_i est $\mathcal{F}_t$-mesurable de carré intégrables $\theta_t = \theta_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s),$$

on définit

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right),$$

on obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

Cas général

Si θ est un bon processus, il existe $\{\theta_s, s \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s^n - \theta_s\right)^2 ds\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que :

$$\mathbb{E}\left[\left|I_t(\theta^n) - I_t(\theta)\right|^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on pose

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s.$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left[I_t(\theta)\right] = 0,$$

et

$$Var\left[I_t(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

Propriétés de lintégrale stochastique

- $\int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
- $\int_0^t \theta_s dB_s$ est continue $p.s.$
- $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.
- $\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = 0,$ et $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$
- Propriétés disométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

- $\int_0^t \theta_s dB_s$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
- La variation quadratique de lintégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

– La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s,\ \int_0^v \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge v} \theta_s \phi_s ds.$$

1.4.2 Processus d'Itô

Ce sont des processus écrite sous la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds < \infty$ $p.s.$

On peut l'écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) &= b(t)dt + \sigma(t)dB(t) \\ X_0 &= x, \end{cases}$$

où le cofficient b est la dérivée du processus, σ et son cofficient de diffusion.

1.4.3 Formule d'Itô

Théorème 1.4.1 *(**Première formule d'Itô**)*

Supposons f de classe C^2 alors :

$$f(X(t)) = f(x) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)ds.$$

Si f est à dériveés, le processus

$$f(X(t)) - \int_0^t f'(X(s))b(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)ds$$

est une martingale

Cette formule s'écrite sous forme différentielle :

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))d\left\langle X\right\rangle_t .$$

Théorème 1.4.2 ***(Deuxième formule d'Itô)***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1par rapport à t et de classe C^2 par rapport à X, ona :

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{df}{dt}(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{df}{dx}(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(s, X(s))\sigma^2(s)ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df(t, X(t)) = \frac{df}{dt}(t, X(t))dt + \frac{df}{dx}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X(t))d\langle X\rangle_t.$$

Théorème 1.4.3 ***(Troisième formule d'Itô)***

Soient X et Y deux processus d'Itô , et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées ona :

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = f(x, y) &+ \int_0^t \frac{df}{dx}(X_s, Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{df}{dy}(X_s, Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(X_s, Y_s)d\langle X\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dy^2}(X_s, Y_s)d\langle Y\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dxdy}(X_s, Y_s)d\langle X, Y\rangle_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 ***(Formule d'intégration par parties)***

Avec les mêmes notation que dans le théorème (1.4.3) ona :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

et la formule d'intédration par parties s'écrite :

$$d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

1.5 Quelques inégalités utilisables

Théorème 1.5.1 ***(Inégalités maximales)***

Soit X une martingale (ou une sous-martingale positive) continue à droite. Alors

1. $\forall p \geq 1, \forall a > 0, a^p \mathbb{P}(\sup_t |X_t| \geq a) \leq \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$.
2. $\forall p \geq 1, \mathbb{E}\left[\sup_t |X_t|^p\right] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$ *où* $q = \frac{p}{p-1}$.

Théorème 1.5.2 ***(Inégalité de doob)***

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une martingale continue à droite, alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |M_s|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right]. \tag{1.1}$$

Proposition 1.5.1 ***(Inégalité de cauchy-schwarz)***

Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complex. Alors pour tous vecteurs X et Y de E,

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Lemme 1.5.1 ***(fatou)***

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$, alors il existe une suite de variables aléatoires positives telque :

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \inf X_n\right] \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mathbb{E}\left[X_n\right].$$

Proposition 1.5.2 ***(Inégalité de tchebychev)***

Soit X une variable aléatoire d'espérence μ et de variance β^2 finie, pour tout réel stricte-

ment positif ε *on a :*

$$\mathbb{P}(X - \mu > \varepsilon) \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}.$$

Chapitre 2

Équation Differentielle stochastique

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire.
Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme suivante :

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t).$$

Ces équations décrivent en générale l'évolution dans le temps d'un système physique, par example X_t peut être la position et le mouvement d'un satellite à l'instant t. L'équation décrivant l'évolution du satellite ne peut pas être déterministe à cause des nombreux paramètres inconnus. On ajoute donc un terme de bruit (aléatoire) de la forme $\sigma(X_t)dB_t$ où B_t est un mouvement brownien et $\sigma(.)$ représente l'intensité du bruit dépendant de l'état du système physique à l'instant t. On arrive donc à une équation différentille stochastique (abréviation : E.D.S.) de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 &= x, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou comme suit :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s,$$

telle que

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

et

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

où T est un réel strictement positive.

L'inconnu est le processus (X_t),les cofficients b et σ sont appelles respectivement la dérivé (drift) du processus, et son cofficient de diffusion.

2.2 Définitions et notations

Définition 2.2.1 *On s'intéressera à un espace de probabilité complet, dison* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et on se donne* B *un MB d-dimensionnel sur cet espace. On considère également une variable aléatoire* x*, de carré intégrable, et indépendante du MB* B*. On considère la filtration définie, pour tout* t *positive, par* $\mathcal{F}_t = \sigma\left\{\sigma\left\{x, B_s; s \le t\right\} \cup \mathcal{N}\right\}.$

Définition 2.2.2 *Un processus continu* X *est une solution forte de l'EDS(2.1) si* X *est progressivement mesurable, satisfaisant :*

- $\mathbb{P}-$*p.s.* $\int_0^t |b(s,X_s)|\, ds + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2\, ds < \infty, \forall t \in \mathbb{R}^+.$
- $\mathbb{P}-$*p.s. ona :* $X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s,\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$

Définition 2.2.3 *On dite que l'equation (2.1) admet une solution unique si pour deux solutions fortes* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ *ona :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| > 0\right) = 0.$$

2.3 Théorème d'éxistance et unicité

Théorème 2.3.1 *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0,T]$, x , $y \in \mathbb{R}^n$:*

1. *Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|\,. \tag{2.2}$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|). \tag{2.3}$$

3. $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$.

Alors l'EDS (2.1) posséde une unique solution X sur $[0,T]$ continue et adaptée à la filtration naturelle standard du Mouvement Brownien sous -jacent, qui de plus est bornée dans L^2 :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] < \infty.$$

2.4 Démonstration du théorème

Remarque 2.4.1 *Pour simplifier les calculs déjà nombreux, les démonstrations seront effectuées dans le cas $n = d = 1$.*

On commence par le lemma de gronwall.

Lemme 2.4.1 ***(Lemme de gronwall)***

Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0,$$

alors, ona a pour tout $t \in [0,T]$, $g(t) \leq a\exp(bt)$.

Proof.

En intérant la condition sur g sous l'intégrale : on écrit

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq a + b\int_0^t \left(a + b\int_0^s g(u)du\right) ds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} g(u)duds \\
&\leq a + abt + b^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} \left(a + b\int_0^u g(v)dv\right) duds \\
&\leq a + abt + ab^2 \int_{0\leq u\leq s\leq t} duds + b^3 \int_0^t\int_0^s\int_0^u g(v)dvduds \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} + b^3 \int_0^t\int_0^s\int_0^u g(v)dvduds \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\leq a + abt + a\frac{b^2t^2}{2} = a\frac{b^3t^3}{3!} + ... = a\exp(bt).
\end{aligned}$$

Enfin

$$g(t) \leq a\exp(bt).$$

■

Remarque 2.4.2 *Notons par $\mathcal{M}^2$ l'espace de Banach constitué des processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurables, telle que*

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 < \infty\right),$$

muni de la norme

$$\|X\| = E\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right)\right]^2.$$

Et $\mathcal{M}^2$ le sous espace de $\mathcal{M}^2$ formé des processus continus.

Proof.

On introduit Ψ définit par, pour $X \in \mathcal{M}_c^2$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Psi(X)_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

Le processus $\Psi(X)$ est bien définit et est continu si $X \in \mathcal{M}_c^2$.

Pour chaque étape, on a recours à l'estimation suivante :

Si X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_c^2$, telle que

$$\Psi(X)_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s,$$

et

$$\Psi(Y)_t = x + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dB_s.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&|\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2 \\
&= \left| x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s - x - \int_0^t b(s,Y_s)ds - \int_0^t \sigma(s,Y_s)dB_s \right|^2 \\
&= \left| \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s \right|^2.
\end{aligned}$$

On applique mainenant cette inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$

$$\begin{aligned}
&|\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2 \\
&\leq 2\left(\left| \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds \right|^2 + \left| \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2\left(\sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

En passant à l'espérence mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t(b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dB_s\right|^2\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégalité de doob (1.1) et l'isométrie des l'intégrales stochastiques, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|\,ds\right)^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right].
\end{aligned}$$

Ensuite d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right]\\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right].
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont lipschitz en espace, on obtient, pour tout $u\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right]\\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\,|X_s-Y_s|^2\,ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\,|X_s-Y_s|^2\,ds\right]\\
&\leq 2K^2\left(T\mathbb{E}\left[\int_0^u|X_s-Y_s|^2\,ds\right]+4\mathbb{E}\left[\int_0^u|X_s-Y_s|^2\,ds\right]\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right]\leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u|X_s-Y_s|^2\,ds\right].$$

On pose $A = 2K^2(T+4)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right] &\leq A\mathbb{E}\left[\int_0^u |X_s-Y_s|^2\,ds\right]\\ &\leq A\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s}|X_t-Y_t|^2\,ds\right].\end{aligned}$$

Donc l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(X)_t-\Psi(Y)_t|^2\right] \leq A\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s}|X_t-Y_t|^2\,ds\right]. \tag{2.4}$$

De plus on va montrer que la fonction $\Psi(X)\in\mathcal{M}_c^2$.

Dans ce cas , on note 0 le processus nul,

$$\Psi(0)_t = x+\int_0^t b(s,0)ds+\int_0^t \sigma(s,0)dB_s,$$

partant de :

$$|\Psi(X)_t|^2 = |\Psi(X)_t-\Psi(0)_t+\Psi(0)_t|^2.$$

On applique mainenant cett inégalité $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, alors

$$|\Psi(X)_t|^2 \leq 2\,|\Psi(0)_t|^2+2\,|\Psi(X)_t-\Psi(0)_t|^2.$$

On a premiérment, d'aprés l'inégalité (2.4) il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(X)_t-\Psi(0)_t|^2\right] &\leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq T}|X_t-0|^2\,ds\right]\\ &\leq 2K^2(T+4)\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-0|^2\,ds\right]\\ &\leq A\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]ds.\end{aligned}$$

On a deuxièment :

$$|\Psi(0)_t|^2 = \left| x + \int_0^t b(s,0)ds + \int_0^t \sigma(s,0)dB_s \right|^2.$$

On applique mainenant cett inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, on a, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} |\Psi(0)_t|^2 &= 3\left[|x|^2 + \left| \int_0^t b(s,0)ds \right|^2 + \left| \int_0^t \sigma(s,0)dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 3\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t b(s,0)ds \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s,0)dB_s \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

En passant à l'espérence mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)_t|^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t b(s,0)ds \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s,0)dB_s \right| \right]^2. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Doob (1.1) et l'isométrie de l'intégrale stochastique, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)_t|^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t b(s,0)ds \right|^2 \right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s,0)dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_0^t |b(s,0)|\,ds \right)^2 \right] + 12\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\sigma(s,0)|^2\,ds \right) \right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |b(s,0)|\,ds \right)^2 \right] + 12\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s,0)|^2\,ds \right]. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)_t|^2 \right] \leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^T |b(s,0)|^2\,ds \right] + 12\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s,0)|^2\,ds \right].$$

Et utilisant l'inégalité de croissance linéaire (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)_t|^2\right]\\
&\le 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+3T\left[\int_0^T|b(s,0)|^2\,ds\right]+12\left[\int_0^T|\sigma(s,0)|^2\,ds\right]\\
&\le 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+3T\left[\int_0^T K^2\left(1+|0|\right)^2\,ds\right]+12\left[\int_0^T K^2\left(1+|0|\right)^2\,ds\right]\\
&=3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+T^2K^2+4K^2T\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)_t|^2\right] &\le 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+T^2K^2+4K^2T\right)\\
&<\infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(X)_t|^2\right] &\le A\int_0^u\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}|X_t|^2\right]ds+\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)_t|^2\right]\\
&<+\infty.
\end{aligned}$$

Ce qui assure que $\Psi(X)\in\mathcal{M}^2$, donc $\Psi(X)\in\mathcal{M}_c^2$ dès que le processus $X\in\mathcal{M}_c^2$.

Éxistance

On commence par prouver l'existence de la solution de notre EDS, on procéde comme pour les équation avec une méthode d'approximation de **Picard** comme dans le cas déterministe.

On définit alors par récurrence la suite de processus $(X^n)_{n\ge 0}$ de $\mathcal{M}_c^2$ par :

$$X^0=0,\ \text{et}\ X^{n+1}=\Psi(X^n),\ \text{pour}\ n\ge 1.$$

On voudrait montrer que la suite X^n converge vers une limite qui représente la solution de l'EDS (2.1). Pour cela, nous allons majorer $\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1}-X_t^n$ est uniformément convergente sur $[0,T]$.

Alors

$$\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2=\left|\Psi(X^n)_t-\Psi(X^{n-1})_t\right|^2.$$

D'aprés l'inégalité (2.4), on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]&=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi(X^n)_t-\Psi(X^{n-1})_t\right|^2\right]\\&\leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^T\sup_{0\leq t\leq s_1}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2ds_1\right].\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq A\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_1}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right]ds_1.$$

Et utilisé récurrence, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq A^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_{n-1}}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_n}\left|X_t^1\right|^2\right]ds_n...ds_3ds_2ds_1.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{A^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right].$$

Soit encore,notant R est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t^1|^2\right]$,

alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq R\frac{A^nT^n}{n!},$$

et ona

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(R\frac{(AT)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{R}\frac{(AT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

Et comme

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}=\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{R}\frac{(AT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

Il résulte de cette derniére inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{R}\sum_{n\geq 0}\frac{(AT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Ainsi, la série $\sum_n \sup_t\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s.$, et donc, $\mathbb{P}-p.s.$, X^n converge uniformément sur $[0,T]$vers un processus X.On déduit de l'uniforme convergence que X est continu par rapport à la variable t et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ -adapté. De plus $X\in\mathcal{M}_c^2$ puisque la convergence a lieu dans $\mathcal{M}^2$.On vérifie très facilement que X est solution de l'EDS (2.1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1}=\Psi(X^n)$.

En effet

$$\begin{aligned}X&=\lim_{n\to\infty}(X^{n+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\Psi(X^n)\\&=\Psi(\lim_{n\to\infty}X^n)\\&=\Psi(X).\end{aligned}$$

Unicité

Maintenant, on prouver l'unicité, Si X et Y deux solutions fortes de l'EDS (2.1) $(X,Y\in\mathcal{M}_c^2)$, alors $X=\Psi(X)$ et $Y=\Psi(Y)$.

D'après L'inégalité (2.4), pour tout $u\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|X_t-Y_t|^2\right]\leq A\int_0^u\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}|X_t-Y_t|^2\right]ds.$$

Par appliqué le lemme de Gronwall, avec $a = 0$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] \leq 0e^{AT} = 0.$$

Ainsi d'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{|X_t - Y_t| > \varepsilon\right\} &\leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right]}{\varepsilon^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Alors pour tout ensemble I dénombrable partout dense dans $[0, T]$, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t\in I}|X_t - Y_t| > \varepsilon\right\} \leq 0.$$

Enfin, comme les processus X et Y sont continue, on conclut que

$$0 \leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t\in I}|X_t - Y_t| > \varepsilon\right\} \leq 0,$$

c'est à dire que les processus X et Y sont indistinguables, i.e :

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]\right) = 1.$$

Pour montrer l'unicité au sens de la définition (2.2.3), nous devons montrer que toute solutions X de l'EDS(2.1) appartient à $\mathcal{M}_c^2$ c'est à dire, comme toute solution est continue par définition, appartient à $\mathcal{M}_c^2$.

Pour cela, cosidérons le temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0, T], |X_t| > n\right\},$$

avec la convention $\inf \theta = +\infty$. Si $u \in [0,t]$, ona

$$|X_{u\wedge\tau_n}|^2 = \left| x + \int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds + \int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s \right|^2.$$

On applique maintenant cett inégalité : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, obtient, pour tout $0 \leq u \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
&|X_{u\wedge\tau_n}|^2 \\
&\leq 3\left[|x|^2 + \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds \right|^2 + \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s \right|^2 \right] \\
&\leq 3\left[|x|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds \right|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s \right|^2 \right].
\end{aligned}$$

En passant à l'espérence mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} |X_{u\wedge\tau_n}|^2 \right] \\
&\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds \right|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s \right|^2 \right].
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Doob (1.1) et l'isométrie de l'intégrale stochastique on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} |X_{u\wedge\tau_n}|^2 \right] \\
&\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds \right|^2 \right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} \left| \int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s \right|^2 \right] \\
&\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} \left(\int_0^{u\wedge\tau_n} |b(s,X_s)|\, ds \right)^2 \right] + 12\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} \int_0^{u\wedge\tau_n} |\sigma(s,X_s)|^2\, ds \right] \\
&\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |b(s,X_s)|\, ds \right)^2 \right] + 12\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} |\sigma(s,X_s)|^2\, ds \right].
\end{aligned}$$

Comme on a *p.s.*

$$\sup_{0\leq u\leq t} |X_{u\wedge\tau_n}| = \sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n}|b(s,X_s)|\,ds\right)^2+4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}|\sigma(s,X_s)|^2\,ds\right]\right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}|b(s,X_s)|^2\,ds\right]+4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}|\sigma(s,X_s)|^2\,ds\right]\right).\end{aligned}$$

Et utilisant la croissance linéaire de b et σ (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}K^2(1+|X_s|)^2ds\right]+4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}K^2\left(1+|X_s|\right)^2ds\right]\right).\end{aligned}$$

On applique maintenant cett inégalité $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ pour tout $0\leq u\leq t\leq T$, ona

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}2(1+|X_s|^2)ds\right]+4K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}2(1+|X_s|^2)ds\right]\right)\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t(1+|X_{s\wedge\tau_n}|^2)ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t(1+|X_{s\wedge\tau_n}|^2)ds\right]\right)\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t ds+\int_0^t|X_{s\wedge\tau_n}|^2\,ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t ds+\int_0^t|X_{s\wedge\tau_n}|^2\,ds\right]\right)\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+2T^2K^2+2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t|X_{s\wedge\tau_n}|^2\,ds\right]+8TK^2+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t|X_{s\wedge\tau_n}|^2\,ds\right]\right)\\&\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+2T^2K^2+8TK^2+\left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n}|X_u|^2\,ds\right]\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+2T^2K^2+8TK^2+\left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n}|X_u|^2\,ds\right]\right).$$

Donc par le lemme de Gronwall, à la fonction $t \to \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n} |X_u|^2\right]$ avec :

$$\begin{cases} a &= 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2T^2K^2 + 8TK^2\right), \\ b &= 3\left(2TK^2 + 8K^2\right), \end{cases}$$

on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2T^2K^2 + 8TK^2\right)\exp\left\{3\left(2TK^2 + 8K^2\right)T\right\}.$$

Et par le lemme de fatou donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] &\leq \lim_{n\to\infty}\inf \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \\ &\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2T^2K^2 + 8TK^2\right)\exp\left\{3\left(2TK^2 + 8K^2\right)T\right\} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ceci implique l'unicité des solution de l'EDS (2.1). ■

Chapitre 3

Principe du maximum

Dans ce chapitre, nous allons étudier le princimpe de maximum srtochastique dans le cas où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique où les coefficient sont outorisés à dépendre du processus de l'état et un control. Ce resultat est établit par Bensoussan [1] en 1982 où le domaine de contrôle est supposé convexe.

3.1 Formulation du problème

Soit $T > 0$ un horizon temporel fixé, $B(.) = (B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ statisfaisant aux conditions habituelles, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle de $B(.)$ augmentée par les ensembles $\mathbb{P}$-nulle de $\mathcal{F}$.

Définition 3.1.1 ***(un contrôle admissible*** *) Un contrôle admissible est un processus $u(.)$ $\mathcal{F}_t-$adapté de carré intégrable et a valeurs dans un borélien A de $\mathbb{R}$, c'est à dire $u(.) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$.*

Notation 3.1.1 *On note $\mathcal{U}_{ad}([0, T])$ l'ensemble de tous le contrôle admissibles c'est à* *dire :*

$$\mathcal{U}_{ad}\left([0,T]\right) = \left\{ u\left(.\right) : [0,T] \times \Omega \rightarrow A \ \textit{telle que} \ \mathbb{E} \int_0^T \left|u(t)\right|^2 dt \ < \infty \right\}.$$

Le système considérè dans ce chapitre est régi par l'équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) &= b(t,X(t),u(t))dt + \sigma(t,X(t),u(t))dB(t) \\ X(0) &= x, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ est un condition initiale donnée à la date $t = 0$ et les fonctions

$$b : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R},$$

sont données.

Le problème du contrôle optimal est de minimiser sur $\mathcal{U}_{ad}$ la fonction du coût J donnée par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t,X(t),u(t))dt + h(X(T))\right], \tag{3.2}$$

où

$$g : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

sont données.

Un contrôle admissible qui résout ce problème est appelé contrôle optimal, on le note par $u^*(.)$, et par $x^*(.)$ la trajectoire correspondante c-à-d

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])} J(u).$$

Au cours de ce chapitre, on suppose que :

$$b \text{ est continuement différentiables en } x \text{ et } u,$$

$$\sigma \text{ est continuement différentiables en } x \text{ et } u,$$

$$g \text{ est continuement différentiables en } x \text{ et } u,$$

$$\text{les dérivées } b_x,\ b_u,\ \sigma_x,\ \sigma_u\ g_x,\ g_u \text{ sont lipschitzinnes et bornées.}$$

3.2 Princimpe de maximum

Dans la suite, nous énonçons les conditions nécessaires d'optimalité, sous l'hypothèse de la convexité du domaine du contrôle, on peut utiliser la méthode de perturbations convexes du contrôle optimal. On suppose que la fonction du coût J est dérivable au sens de Gâteaux, puis on perturbe le contrôle $u^*(.)$, da la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_\theta(t) &= u^*(t) + \theta(u(t) - u^*(t)) \\ &= \theta u(t) + (1-\theta) u^*(t), \end{aligned}$$

telque θ est plus petit, on note par $X^\theta(.)$ la trajectoire correspondante à cette perturbation. On note ici que $u^\theta(.)$ est un contrôle admissible. Le résultat des conditions nécessaires d'optimalité va porter sur la dérivation par rapport à θ de la fonction du coût perturbé $J(u^\theta(.))$ au point $\theta = 0$, pour ce but on a supposé que les cofficients son continûment différentiables.

Pour établir ces conditions, on introduit les définitions suivantes :

Définition 3.2.1 *Soit $u^*(t)$ un contrôle optimal et $X^*(t)$ la trajectoire optimale correspondante. L'équation adjointe est donnée par :*

$$\begin{cases} -dp(t) & = & \left[(b_x^*(t))\, p(t) + g_x^*(t)\right] dt + (\sigma_x^*(t))q(t)dt - q(t)dB(t) \\ p\,(T) & = & h_x^*(T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Définition 3.2.2 *On définie l'hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit :*

$$H(t, X(t), u(t), p(t), q(t)) = b(t, X(t), u(t))p(t) - q(t)\sigma(t, X(t), u(t)) + g(t, X(t), u(t)).$$

Théorème 3.2.1 ***(Princimpe de maximum)***

Soit $(u^*(t), X^*(t))$ une paire optimal. Alors il existe un paire de processus adjoint $(p^*(t), q^*(t))$ vérifie léquation (3.3) de telle sorte que, pour tout $u(t) \in A$ on a

$$\mathbb{E} \int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))\, (u(t) - u^*(t))\, dt \geq 0. \tag{3.4}$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoins les lemmes suivantes :

Lemme 3.2.1 *Pour tout $t \in [0,T]$ on a la convergance suivante :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} \left| \frac{X_\theta(t) - X^*(t)}{\theta} - Z(t) \right|^2 \right] \underset{\theta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \tag{3.5}$$

où vérifié l'éqation suivante :

$$\begin{cases} dZ(t) & = & (b_x(t)Z(t) + b_u(t)v(t))dt + (\sigma_x(t)Z(t) + \sigma_u(t)v(t)dB(t) \\ Z(0) & = & 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Proof. On note $y_\theta(t) = \dfrac{1}{\theta}(X_\theta(t) - X^*(t) - Z(t))$, ce implique que

$$X_\theta(t) = X^*(t) + \theta(Z(t) + y_\theta(t)),$$

et on note aussi que $v(t) = u(t) - u^*(t)$.

Alors on a $y_\theta(t)$ satisfait l'EDS suivante avec $y_\theta(0) = 0$:

$$dy_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\left(dX_\theta(t) - dX^*(t)\right) - dZ(t),$$

donc

$$\begin{aligned} dy_\theta(t) &= \frac{1}{\theta}\left[b(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - b^*(t)\right] dt - \left[b_x(t)Z(t) + b_u(t)v(t)\right] dt \\ &+\frac{1}{\theta}\left[\sigma(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - \sigma^*(t)\right] dB(t) - \left[\sigma_x(t)Z(t) - \sigma_u(t)v(t)\right] dB(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

on obtient par la formule du développement de Taylor d'ordre 1 avec reste intégral

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta}b(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - b^*(t) \\ &= \left(\int_0^1 \left[b_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t))(Z(t) + y_\theta(t))\right.\right. \\ &+b_u(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t))v(t))\, d\lambda, \end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta}\sigma(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - \sigma^*(t) \\ &= \left(\int_0^1 \left[\sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t))(Z(t) + y_\theta(t))\right.\right. \\ &+\sigma_u(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t))v(t))\, d\lambda. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous remplaçons (3.8).et (3.9) dans (3.7) on trouve :

$$
\begin{aligned}
y(T) &= \int_0^T \left(\int_0^1 b_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) y_\theta(t) d\lambda \right) dt \\
&+ \int_0^T \left(\int_0^1 \sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) y_\theta(t) d\lambda \right) dB(t) \\
& \int_0^T \rho_1^\theta(t) dt + \int_0^T \rho_2^\theta(t) dB(t),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\rho_1^\theta(t) &= \int_0^1 \left(b_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) - b_x^*(t)\right) Z(t) d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left(b_u(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) - b_u(t)\right) v(t) d\lambda,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\rho_2^\theta(t) &= \int_0^1 \left(\sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) - \sigma_x^*(t)\right) Z(t) d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left(\sigma_u(t, X^*(t) + \lambda\theta(Z(t) + y_\theta(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) - \sigma_u^*(t)\right) v(t) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Comme les dérivés b_x et σ_x sont bornnées,

$$
\begin{aligned}
|y_\theta(T)|^2 &\leq c \left[\left| \int_0^T y_\theta(s) ds \right|^2 + \left| \int_0^T y_\theta(s) dB(s) \right|^2 \right] \\
&+ c \left[\left| \int_0^T \rho_1^\theta(t) dt \right|^2 + \left| \int_0^T \rho_2^\theta(t) dB(t) \right|^2 \right],
\end{aligned}
$$

où $c \geq 0$. Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \left| \sup_{0 \leq t \leq T} y_\theta(t) \right|^2 &\leq c \left[\mathbb{E} \left(\int_0^T \sup_{0 \leq s \leq t} |y_\theta(s)|^2 dt \right) + \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^T y_\theta(s) dB(s) \right|^2 \right) \right] \\
&+ c \left[\mathbb{E} \int_0^T \left| \rho_1^\theta(t) \right|^2 dt + \mathbb{E} \left| \int_0^T \rho_2^\theta(t) dB(t) \right|^2 \right].
\end{aligned}
$$

En suite par linégalité de Burkholder-Davis-Gundy on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\sup_{0\leq t\leq T} y_\theta(t)\right|^2 &\leq c\left[\mathbb{E}\left(\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}|y_\theta(s)|^2 dt\right)+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^T |y_\theta(s)|^2 dt\right)\right]\\ &+c\left[\mathbb{E}\int_0^T \left|\rho_1^\theta(t)\right|^2 dt+\mathbb{E}\int_0^T \left|\rho_2^\theta(t)\right|^2 dt\right].\end{aligned}$$

Comme $b_x, b_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont continues etl'inégalité de Cauchy Schwarz, alors

$$\rho_1^\theta(t) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \rho_2^\theta(t) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

dans $\mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega\right)$.

Maintenant, nous appliquons le lemme de Gronwall on obtient que

$$\mathbb{E}\left|y_\theta(t)\right|^2 \leq C\exp(ct)\mathbb{E}\int_0^T \left|\rho^\theta(t)\right|^2 dt,$$

on a $\mathbb{E}\int_0^T \left|\rho^\theta(t)\right|^2 dt \to 0$ lorsque $\theta\to 0$, ce qui termine la preuve de (3.5). ■

Lemme 3.2.2 ***(résultat de dualité)*** *Soient $p^*(.)$ la solution de (3.3) et $Z(.)$ la solution de (3.6), respectivement, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[p^*(T)Z(T)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T p^*(t)\left[b_u(t)(u(t)-u^*(t))\right)dt\right]\\ &-\int_0^T Z(t)g_x^*(t)dt+\int_0^T q^*(t)\left[\sigma_u^*(t)(u(t)-u^*(t))\right]dt\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Proof. En appliquant la formule d'intégration par parties à $p^*(t)Z(t)$ on a

$$dp^*(t)Z(t) = p^*(t)dZ(t)+Z(t)dp^*(t)+d\left\langle p^*, Z\right\rangle_t.$$

Par l'intégration des deux membres de 0 à T on trouve

$$\begin{aligned}
p^*(T)Z(T) &= \textstyle\int_0^T p^*(t)dZ(t) + \int_0^T Z(t)dp^*(t) + \int_0^T d\left\langle p^*, Z\right\rangle_t \\
&= \textstyle\int_0^T p^*(t)[b_x(t)Z(t) + b_u(t)(u(t) - u^*(t)))dt \\
&\quad +(\sigma_x^*(t)Z(t) + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t)))dB(t)] \\
&\quad - \textstyle\int_0^T Z(t)\left[\left[\left(b_x^*(t)\right)p^*(t) + g_x^*(t)\right]dt + (\sigma_x^*(t))q^*(t)dt - q^*(t)dB(t)\right] \\
&\quad + \textstyle\int_0^T q^*(t)\left[\sigma_x^*(t)Z(t) + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right]dt,
\end{aligned}$$

nous pronons l'espérance, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[p^*(T)Z(T)\right] = \mathbb{E}\Bigg[&\int_0^T p^*(t)\left[(b_x(t)Z(t) + b_u(t)(u(t) - u^*(t)))dt\right] \\
&- \int_0^T Z(t)\left[\left[\left(b_x^*(t)\right)p^*(t) + g_x^*(t)\right]dt + \sigma_x^*(t))q^*(t)dt\right] \\
&+ \int_0^T q^*(t)\left[\sigma_x^*(t)Z(t) + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right]dt\Bigg] \\
= \mathbb{E}\Bigg[&\int_0^T p^*(t)\left[b_u(t)(u(t) - u^*(t)))dt\right] \\
&- \int_0^T Z(t)g_x^*(t)dt + \int_0^T q^*(t)\left[\sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right]dt\Bigg],
\end{aligned}$$

où $v(t) = u(t) - u^*(t)$. ■

Lemme 3.2.3 *La dérivée de Gâteaux de la fonction du coût est donneé par la formule suivante :*

$$\left.\frac{d}{d\theta}J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \mathbb{E}\int_0^T \left(g_x^*(t)Z(t) + g_u^*(t)v(t)\right)dt + \mathbb{E}\left[h_x(X(T))Z(T)\right]. \tag{3.11}$$

Proof. On a

$$\left.\frac{d}{d\theta}J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \lim_{\theta\to 0}\frac{J(u_\theta(.)) - J(u^*(.))}{\theta}.$$

En déduit que la valeur

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}(J(u_\theta(.)) - J(u^*(.))) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\theta}\left(g(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - g(t, X^*(t), u^*(t))\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta}\left(h(X_\theta(T)) - h^*(X(T))\right)\right] \\
&= I_1(\theta) + I_2(\theta).
\end{aligned}
$$

On obtient par la formule du dévlopement de Taylor dordre 1 avec reste intégral que

$$
\begin{aligned}
I_1(\theta) &= \mathbb{E}\left[\quad \int_0^T \tfrac{1}{\theta}\left[g(t, X_\theta(t), u_\theta(t)) - g(t, X^*(t), u^*(t))\right] dt \quad\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left(\int_0^1 g_x^*(t, X(t) + \lambda(X_\theta(t) - X^*(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t))\left(\frac{X_\theta(t) - X^*(t)}{\theta}\right) d\lambda\right) dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left(\int_0^1 g_u^*(t, X(t) + \lambda(X_\theta(t) - X(t)), u^*(t) + \lambda\theta v(t)) v(t) d\lambda\right) dt.
\end{aligned}
$$

Par l'approximation (3.5)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} I_1(\theta) &= \mathbb{E}\int_0^T \left(g_x^*(t)Z(t) + g_u^*(t)v(t)\right) dt \\
\lim_{\theta\to 0} I_2(\theta) &= \mathbb{E}\left[h_x(X^*(T))Z(T)\right],
\end{aligned}
$$

alors

$$
\left.\frac{d}{d\theta}J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \mathbb{E}\int_0^T \left(g_x^*(t)Z(t) + g_u^*(t)v(t)\right) dt + \mathbb{E}\left[h_x(X^*(T))Z(T)\right].
$$

■

Corollaire 3.2.1 *La dérivée de Gateaux de la fonction du cout peut être expprimée en termes de l'hamiltonien de H de la façon suivante*

$$
\left.\frac{d}{d\theta}J(u_\theta(.))\right|_{\theta=0} = \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))\left(u(t) - u^*(t)\right) dt \geq 0.
$$

Proof. D'aprés le lemme (3.2.3) ona

$$\frac{d}{d\theta} J(u_\theta(.))\bigg|_{\theta=0} = \mathbb{E}\int_0^T \left(g_x^*(t)Z(t) + g_u^*(t)v(t)\right) dt + \mathbb{E}\left[h_x(X^*(T))Z(T)\right].$$

On sait que le processus adjoint $p(t)$ verifié une équation différentielle stochastique rétrograde EDSRs (3.3) avec une condition terminale $p(T) = h_x(X(T))$ c-à-d

$$\mathbb{E}\left[h_x(X^*(T))Z(T)\right] = \mathbb{E}\left[p^*(X^*(T))Z(T)\right],$$

et d'aprés le lemme (3.2.2) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h_x(X^*(T))Z(T)\right] = \mathbb{E}\Bigg[&\int_0^T p^*(t)\left[b_u(t)(u(t) - u^*(t)))dt\right] \\ &- \int_0^T Z(t)g_x^*(t)dt + \int_0^T q^*(t)\left[\sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right] dt\Bigg],\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{d}{d\theta} J(u_\theta(.))\bigg|_{\theta=0} = \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))\left(u(t) - u^*(t)\right) dt.$$

On a

$$J(u^*) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}([0,T])} J(u),$$

donc $J(u^*) \leq J(u_\theta)$ ceci implique que

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))\left(u(t) - u^*(t)\right) dt \geq 0.$$

■

Conclusion

En conclusion, dans ce modeste travail, nous avons étudié le principe du maximum stochastique de A.Bensoussan en (1982), pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques. Pour ce faire, nous avons présenté d'abord introduction générale présentant les notions de base. D'autre part nous avons étudié des équations différentielles stochastiques. Enfin nous énonçons les conditions nécessaires d'optimalité.

Bibliographie

[1] A. BENSOUSSAN (1982), Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972, Springer-Varlag.

[2] Jean blanc,M.simon, T. (2005) : ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE.

[3] P.Briand, Mars 2001. Equations Différentielles stochastiques Rétrogrades.

[4] Jean blanc,M. (Septembre 2006) Cours de Calcul stochastique. Master 2IF Evry.

[5] Le Gall, j.-F.(2013). Mouvement brownien, martingale et calcul stochastique. springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[6] N.berglund, Janvier 2014. Martingales et calcul stochastique

[7] Nadine Gullotin-P, novembre 2009. INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Ω	l'ensemble de résultat possible.
$\mathcal{F}$	Tribu sur Ω.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel enclidien de dimension d.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	La tribu boriliènne sur $\mathbb{R}^d$.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace probabilité filtrè.
$\mathbb{E}[X]$	Espérence mathématique ou moyenne du v.a X.
$Var[X]$	Variance du v.a X.
Cov	Fonction de covariance.
$s \wedge t$	$\min(s, t)$.
$p.s$	Presque Surement.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque Surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
MB	Mouvement brownien.
$\mathcal{M}^2$	Espace de Banach.
$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$	Ensemble des matrices réelles $d \times n$.

$\langle X \rangle_t$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
$\mathcal{N}$	Ensemble des négligeable N.
C^1	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
EDS	Équations différentielle stochastique.
v.a	Variable aléatoire.
i.e	C'est-à-dire.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème de contrôle stochastique optimal, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques. Notre objectif principal dans ce travail est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme du principe maximum dans le cas ou les coefficients sont contrôlés et le domaine contrôle est convex. Ce résultat a été prouvé par A. Bensousan.

Mots clés: Equations différentielles stochastiques, contrôle optimal, processus stochastique, principe du maximum.

Abstract

In this research, we study optimal stochastic control problem for systems governed by stochastic differential equations. Our main objective in this research is to establish the necessary conditions of optimality in the form of the maximum principle diffusion in which the coefficients is controlled and the control domain is convex. This results have been proved by A. Bensousan.

Key words: Stochastic differentiel equations, optimal control, stochastic process, maximum principle.

الملخص

في هذا العمل، ندرس مشكلة التحكم العشوائية المثلى للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية. هدفنا الرئيسي في هذا العمل هو إنشاء الشروط الأزمة للأمثل في شكل مبدأ الحد الأقصى في حالة التحكم في المعاملات ومجال التحكم محدب وقد تم إثبات هذه النتيجة من طرف أ.بنسوسن.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية، التحكم الأمثل، العملية العشوائية، المبدأ الأقصى.