République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Meriem chamlal

Titre :

Résolution des équations différentielles non linéaires par la méthode de transformation différentielle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Berbiche Mohamed**	UMKB	Président
Dr.	**Laiadi Abdelkader**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Soukeur Abdessalam**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

De tout mon coeur je dédie ce modeste travail.

*A ma chère mère **"Khadjidja"**, la lumière qui nous*

a guidés vers le chemin de savoir.

*A mon cher père **"Amor"**, pour leur sacrifice.*

et Mon marie : **Houssem.**

A mes cheres soeurs : **WAhiba, Zahiya,.Karima, Sabrina, Loubna**

A mes chers frères : **Lazher, Nabil, Malik,Moured**

et leurs filles les plus proche de mon coeur **Asma, Sirine, Rimas, Roya,**

et leurs enfants **Aymen, Iyed, Ishek, Moatez, Yaser**

A les parents mon marie : **Taher, Hafsa**.

A toute ma famille **"Chamlal"**.

A toute la famille de mon marie "**Menadi**".

A mes très chers amis : **Sara, Karima, Wafa, Ghania,**

Fatma zohra.

REMERCIEMENTS

AU NOM DE ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX.

♡♡♡ Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de faire ce travail humble. ♡♡♡

♡♡♡ Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur, Docteur **Laiadi Abdelkader**, pour ces astuces et conseils qui m'ont été très utiles lors de la préparation de ma thèse. Comme je remercie aussi **mon marie** et ma **grande famille** pour leurs soutiens et pour leurs aide dans la préparation de ce mémoire et pour leurs encouragements. ♡♡♡

♡♡♡ Mes remerciements aux professeurs du Département de Mathématiques de l'Université Mohamed Khider, Biskra. ♡♡♡

Sans oublier de remercier le nombre de jurés qui ont accepté le verdict pour cet acte.

Merci à tous.

MERIEM...

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle important en mathématiques et plus particulièrement en dynamique de population, en engineering, en physique mathématique, en électronique, en électrodynamique, en biomathématique..... Les résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaire (EDO) ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Plusieurs auteurs ont travaillé sur les équations différentielles et leur différente applications, on cite à titre d'exemple les auteurs : Euler, Cauchy, James H Liu et al [[1]], Jean-Pierre Demailly [[2]], Jacques Hadamard [[3]],.... Notre intention est de présenter certains types d'équations différentielles non linéaires dans des espaces de Banach, on s'intéressera en particulier aux équations différentielles linéaires et non linéaires, ce qui est l'une des intentions de l'analyse fonctionnelle linéaire et non linéaire.

Décrivons maintenant l'organisation de ce mémoire :

Dans **le premier chapitre** nous avons collecté certains préliminaires, définitions, théorèmes sur les équations différentielles ordinaires et ses caractéristiques et comment l'appliquer à la résolution d'équations différentielles non linéaires. De plus, on presente des exemples sur ces équations non linéaires et autres résultats auxiliaires utilisé dans ce mémoire.

Dans **le deuxième chapitre** nous avons présenté la méthode de transformation differentielle et ses propriétées principales. On applique cette méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires et non linéaires. Nous presentons quelques exemples qui montre l'éfficace de cette méthode.

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Les équations différentielles sont l'outil principal permettant de modéliser un mouvement. En effet, une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées. Or les lois de la physique sur le mouvement donnent l'accélération (i.e. la dérivée seconde de la position) d'un objet, d'une particule,... en fonction des forces qui agissent dessus. Ces forces sont souvent fonctions de la vitesse de l'objet (forces de frottement) et/ou de sa position (tension d'un ressort, champs magnétique, répartition de charges...).

1.2 Généralités

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, y) \longrightarrow f(t, y)$$

une application. Une équation différentielle (vectorielle) du premier ordre, est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

on utilisera souvent la notation : $y' = f(t,y)$ ou encoure.$\dot{y} = f(t,y)$. Le lecteure peut s'il le désire utiliser d'autres notations ainsi que d'autres variables comme par exemple $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ou $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, etc, nous les utiliserons en cas de besoin dans d'autres chapitres [[4]].

Définition 1.2.1 *Soient* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,y) \longmapsto f(t,y)$ *une application définie sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point et une fonction* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto y(t)$*. On dit que* y *est une solution, sur* I*, de l'équation différentielle* $y' = f(t,y)$ *si :*

(i) $\forall t \in I,\ (t, y(t)) \in \Omega$

(ii) y est dérivable sur I et $\forall t \in I,\ y'(t) = f(t, y(t))$

Définition 1.2.2 (Fonction de classe C^1) *soit* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ *et* $\varphi : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* φ *appartient à la classe* C^1 *si :*

1. φ est strictement croissante.
2. $\varphi(0) = 0$.

Définition 1.2.3 (Fonction de classe C^∞) *soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* φ *appartient à la classe* C^∞ *si :*

1. φ est strictement croissante.
2. $\varphi(0) = 0$.
3. $\lim \varphi(r) = +\infty$ quand $r \longrightarrow +\infty$.

Définition 1.2.4 (Equation différentielle autonome) *On appelle équation différentielle autonome une équation de la forme* $y' = g(y)$*. La variable* x *n'intervient pas dans l'équation.*

Définition 1.2.5 (Fonction lipschitzienne) *On dit que f est Lipschitzienne sur une partie $I \subset \mathbb{R}$ si $\exists k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$*

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq k \mid x - y \mid$$

Exemple 1.2.1 $f(x) = x^2$ *est lipschitzienne sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *:comme précédemment, on prend* $k = b - a$.

Proposition 1.2.1 ***1.****f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f continue*

2.f dérivable sur I et f' bornée $\Longrightarrow$ f lipschitzienne

preuve. 1. Soit $x_0 \in I$.On a alors $\forall x \in I, \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq k \mid x - x_0 \mid$. Donc,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq \lim_{x \longrightarrow x_0} k \mid x - x_0 \mid = 0$$

Donc, par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Par le théorème des accroissements finis, $\forall (x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y, \exists \varepsilon \in]x, y[$ tel que

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Donc

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid f'(\epsilon) \mid \mid x - y \mid \leq k \mid x - y \mid$$

■

Théorème 1.2.1 (Cauchy_lipschitz) *Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors (E) admet une unique solution (J, y) où J est un* intervalle ouvert de I contenant t_0 et $y : J \longrightarrow U$ de classe C^1.

Application : $(E)\begin{cases} y' = \sin(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ où $f(t, y) = \sin(y)$ est lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence d'une solution unique $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

• $y_1(t) = 0$ est une solution de $y' = \sin(y)$.Commr $0 < 1$, le principe de séparation des solutions nous donne que $y(t) > 0$

• $y_2(t) = \pi$ aussi solution de $y' = \sin(y)$. Comme $1 < \pi$, le principe de séparation des solutions nous donne que $y(t) < \pi$. Nous avons alors une indication sur la solution : $0 < y(t) < \pi, \forall t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.2 (Régularité) [[5]] *Si f est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur un intervalle I alors la solution $y(t)$ si elle existe est de classe C^{k+1} sur I .Par l'absurde, supposons que f est de classe C^k sur I et que y n'est pas de classe C^k. Donc il existe $l < k$ tel que y est de classe C^l mais pas de classe C^{l+1}.*

La fonction $f(t, y)$ est une composée des deux fonctions f et y et donc est de classe C^l ; en effet $f \in C^l$ car $C^k \subset C^l$. La focntion $\frac{d^l}{dt} f(t, y)$ est donc continue. Or, $\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} y(t) = \frac{d^l}{dt^l} f(t, y)$ car $y' = f(t, y)$. On déduit que y est de classe C^{l+1}. Contradiction avec l'hypothèse du départ. Donc y est de classe C^{k+1}.

1.3 Équations Différentielles Ordinaires d'ordre n

Définition 1.3.1 *On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une équation dont l'inconnue est une fonction ϕ et qui relie y à ses dérivées, i.e. une équation du type*

$$\phi(y^n,\ y^{n-1},\ y^{n-2}, ...y^{'},\ y) = f(t) \tag{1.2}$$

Ici, f est une fonction donnée, appelée second membre et le plus haut degré de dérivation dans l'équation (ici, n) est l'ordre de l'équation linéaire.

1.4 Équations résolubles

Nous allons étudier quelques équations dont les solutions s'obtiennent par intégration direct.

1.4.1 Équation à variables séparables :

C'est une équation de la forme

$$y' = \frac{f(t)}{g(y)} \tag{1.3}$$

ou sous forme symétrique $g(y)dy - f(t)dt = 0$. On a

$$\int g(y)dy - \int f(t)dt = 0$$

d'où $G(y) - F(t) =$ constante. (G et F étant des primitives de g et f respectivement).

Exemple 1.4.1 *Soit l'équation différentielle*

$$xydx + (1 + x^2)dy = 0$$

On a

$$(1 + x^2)dy = -xydx$$

D'où

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}dx$$

Donc

$$\ln \mid y \mid = -\frac{1}{2} \ln \mid (1 + x^2) \mid +C$$

Alors

$$y = \pm e^C \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et par conséquent

$$y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

1.4.2 Équation linéaire du premier ordre :

C'est une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{1.4}$$

avec a, b deux fonctions continues sur un intervalle. Cette équation est dite linéairec ; les fonctions y et y' sont de degré 1 et ne sont pas multipliées l'une par l'autre

(i) la solution générale de l'équation non-homogène (1.4) est la somme de la solution générale de l'équation homogène

$$y' + a(t)y = 0 \tag{1.5}$$

et d'une solution particulière de l'équation non-homogène (1.4).

(ii) L'équation homogène (1.5) est à variables séparées et sa solution générale est

$$y = Ce^{-\int a(t)dt}, \qquad C = \text{constante}$$

(iii) Poure déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène, on remplace la constante C par la fonction inconnue $C(t)$ et enfin substituer $y = C(t)e^{-\int a(t)dt}$ dans l'équation non-homogène pour trouver la fonction $C(t)$ (méthode de la variation de la constante). On obtient

$$C(t) = \int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + c.$$

par conséquent

$$y = e^{-\int a(t)dt}(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + c)$$

est la solution générale de l'équation non-homogène.(1.4)

(iv) Selon la méthode de Bernoulli, on pose

$$y = uv$$

où u et v sont deux fonctions inconnues (dont l'une peut être choisie de façon arbitraire). L'équation non-homogène (1.5) devient

$$u'v + u(v' + av) = b(t).$$

Notons que $v' + av = 0$ car v peut être choisie de façon arbitraire. Donc on prend pour la solution v, une solution particulière de $v' + av = 0$; par exemple $v = e^{-\int a(t)dt}$. Dès lors, $u'v = b(t)$, d'où $u = \int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + c$. Par conséquent

$$y = uv = e^{-\int a(t)dt}(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + c)$$

Exemple 1.4.2 *On considère l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1-t^2}y = \arcsin t + t.$$

On a

$$y' + \frac{t}{1-t^2}y = 0$$

d'où

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{t}{1-t^2}dt$$

donc

$$y = C\sqrt{1-t^2}, \quad C = constante$$

Posons $y = C(t)\sqrt{1-t^2}$ *et remplaçons danc l'équation proposée. On obtient*

$$C'(t) = \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

d'où

$$C(t) = (\frac{1}{2}\arcsin^2 t - \sqrt{1-t^2} + K), \quad C = constante$$

et par conséquent

$$y = (\frac{1}{2}\arcsin^2 t - \sqrt{1-t^2} + K)\sqrt{1-t^2}$$

1.4.3 Équation linéaire à coefficients constants :

C'est une équation de la forme

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b(t) \tag{1.6}$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Pour l'équation (1.6), l'équation homogène est

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \tag{1.7}$$

dont l'équation caractéristique est

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{1.8}$$

Rappelons que la solution générale de l'équation non-homogène (1.6) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (1.7) et d'une solution particulière de l'équation non-homogène (1.6). Nous Indiquons des méthodes diverses pour résoudre de l'équation non-homogène :

(i) On peut utiliser la méthode de la variation de la constante (vue précédemment), à condition que l'on connaisse la solution générale de l'équation homogène (1.7).

(ii) Lorsque le second membre $b(t)$ est la forme

$$b(t) = e^{\alpha t} P_m(t)$$

où $P_m(t)$ est un polynôme de degré m, alors on cherche la solution particulière de l'équation non-homogène (1.6) sous la forme

$$y(t) = t^s e^{\alpha t} Q_m(t)$$

où $Q_m(t)$ est un polynôme de degré m et

$$s = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique (1.8).} \\ \text{ordre de multiplicité de la racine } \alpha \text{ de l'équation caractéristique (1.8), sinon.} \end{cases}$$

Lorsque le second membre $b(t)$ est de la forme

$$b(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t),$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes, alors on cherche la solution particulière de l'équation non-homogène (1.6) sous la forme

$$y(t) = t^s e^{\alpha t}(R_m(t)\cos\beta t + T_m(t)\sin\beta t)$$

où $R_m(t)$ et $T_m(t)$ sont des polynômes de degré m égale au plus grand degré des polynômes P, Q et

$$s = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique (1.8).} \\ \text{ordre de multiplicité de la racine } \alpha + i\beta \text{ de l'équation caractéristique (1.8), sinon} \end{cases}$$

Exemple 1.4.3 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}$$

Solution homogène

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad (E.H)$$

On a l'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0 \implies r^2 = -1 \implies r = \pm i$$

Donc la solution homogène est

$$y_H = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

Solution particulière

$$y_p = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$$

Par la méthode de variation des constantes, on a

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ C_1'(t) \cos' t + C_2'(t) \sin' t = \frac{1}{\cos t} \end{cases},$$

Alors

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0, & (1) \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}, & (2) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} (1) \times \sin t \implies C_1'(t) \cos t \sin t + C_2'(t) \sin^2 t = 0, & (3) \\ (2) \times \cos t \implies C_1'(t) \sin t \cos t + C_2'(t) \cos^2 t = 1, & (4) \end{cases}$$

En combinant l'équation (3) avec (4), nous trouvons

$$\begin{cases} C_2'(t) = 1, \\ C_1'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t}, \end{cases}$$

En intégrant nous trouvons

$$\begin{cases} C_2(t) = t, \\ C_1(t) = \ln \mid \cos t \mid \end{cases}$$

Alors la solution particulière est

$$y_p = \ln \mid \cos t \mid \cos t + t \sin t,$$

Par conséquent, la solution de l'équation est

$$y_G = y_H + y_p = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \ln \mid \cos t \mid \cos t + t \sin t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

1.4.4 Équation linéaire à coefficients variables :

C'est une équation de la forme

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t) \tag{1.9}$$

Contrairement aux équations linéaires à coefficients variables, lorsque les coefficients sont variables il n'est en général plus possible d'exprimer les solutions en termes d'un nombre fini de fonctions élémentaires. Par ailleurs, la résolution de ces équations (1.9) peut sous certaines conditions, se faire à l'aide des séries entières convergentes. Prenons le cas des équations homogène d'ordre 2 (pour de plus détails voir par exemple [[4]]).

Exemple 1.4.4 *On considère l'équation différentielle*

$$ty'' + (1-t)y' - y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle t. Supposons qu'il existe une série entière, de *rayon de convergence* $r > 0$,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

qui soit la solution de cette équation et telle que : $y(0) = 1$. *En remplaçant les expressions*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \;\; y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

dans l'équation différentielle ci-dessus, on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

ou

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)((k+1)a_{k+1} - a_k) t^k = 0.$$

On déduit que la relation de récurence :

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'où, $a_1 = \frac{a_0}{1}$ *car* $a_0 = y(0) = 1$, $a_2 = \frac{a_1}{2!} = \frac{1}{2!}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3!}, \qquad , a_k = \frac{1}{k!}$.

On obtient une série $\sum \frac{t^k}{k!}$ convergente, de rayon de convergence $r = +\infty$. Par conséquent, la solution de l'équation est

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

1.5 Equations différentielles non linéaires

Définition 1.5.1 *un opérateur L est linéaire qui a les propriétés suivantes :*

1. $L(\phi + \psi) = L(\phi) + L(\psi)$
2. $L(k\phi) = kL(\phi)$

où ϕ et ψ sont des fonctions arbitraires et k est un scalaire.

Par exemple, $L = d^2/dx^2$ est un opérateur linéaire, mais $L = (d/dx)^2$ est un opérateur non linéaire.

Exemple : l'équation

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$$

est une équation non linéaire, qui a la solution générale de la fonction y définie par la fonction implicite suivante :

$$2y^2 \log cy - x^2 = 0$$

où c est une constante arbitraire.

1.5.1 Equations différentielles à variables séparables

Cas général

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E)\begin{cases} x' = f(t)g(x) \\ (t,x) \in A \times B \end{cases}$$

Où A et B sont deux intervalles ouvert de $\mathbb{R}$, f (respectivement g) est une fonction définie et de classe C^1 sur A (respectivement B) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(E) est une équation à variables séparables.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et $\forall (t_0, x_0) \in A \times B$ le problème de Cauchy :

$$(E_c)\begin{cases} x' = f(t)g(x) \\ (t,x) \in A \times B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une solution unique (I, φ)

Théorème 1.5.1 *On considère l'équation différentielle :*

$$(E_0)\begin{cases} F(t,x,x')=0 \\ (t,x,x')\in\Omega \end{cases}$$

Si

- F est de classe C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$
- $F(t_0,x_{0,}y_0)=0$ avec $(t_0,x_0,y_0)\in\Omega$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(t_0,x_0,y_0)\neq 0$

Alors

Il existe une solution $(I,\,x)$ avec I ouvert et $t_0\in I$ telle que : $\forall t\in I,\,(t,x(t),x'(t))\in\Omega$, $F(t,x(t),x'(t))=0$ et $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=y_0$.

1.5.2 Exemples d'équations différentielles non linéaires

Différentielles exactes

Type : $\begin{cases} P(x,y)+Q(x,y)y'=0 \\ (x,y)\in\Omega \ \text{ où } \Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

On suppose qu'il existe f de classe C^1 sur Ω telle que : $\frac{\partial f}{\partial x}=P$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$.

• Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $x\longmapsto y(x)$ définies implicitement par $f(x,y)=C$.

Equations homogènes

Type : $y'=f(\frac{y}{x})$ où f est continue pour $x\in]0,+\infty[$.

1. On cherche les solutions linéaires :$y=tx$ avec t solution de l'équation $f(t)=t$.

2. On cherche les solutions non-linéaires : pour t variant dans un intervalle où $f(t)\neq t$ on pose $y=tx$ puis on a :

$$\star\ \frac{dy}{dt} = x + t\frac{dx}{dt}$$
$$\star\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

De sorte que $t \longmapsto x(t)$ est alors solution de l'équation linéaire du premier ordre : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f(t)-t}x$.

Equation de Bernoulli

Type : $y' = a(x)y + b(x)y^n$, $n \in \mathbb{N}$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

• En tout point de $I \times \mathbb{R}$ il passe une solution unique.

• $y = 0$ est une solution de l'équation.

• Recherche des solutions qui ne s'annulent pas :

On pose :$u = \frac{1}{y^{n-1}}$, on se ramène alors à une équation linéaire du premier ordre.

Remarque 1.5.1 *Pour $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, le changement de variable $u = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ fonctionne encore, faire attention car dans le cas général il s'agit d'avoir $y > 0$.*

Equation de Riccati

Type : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I.

1. On cherche une solution particulière y_1

2. On pose $y = y_1 + z$, z est alors solution d'une équation de Bernoulli.

Equation de Clairaut

Type : $y = xy' + f(y')$ avec f de classe C^2 sur un intervalle I et $f''(x) \neq 0$ sur I.

La **solution générale** est constituée des fonctions affines : $y = tx + f(t)$ avec t constante.

Equation de Lagrange

Type : $y = xf(y') + g(y')$ avec f et g de classe C^1 sur un intervalle I et il n'existe pas d'intervalle $J \subset I$ tel que $f(t) = t$, $\forall t \in J$.

1. On détermine les fonctions affines qui sont des solutions de cette équation.

2. On cherche les solutions deux fois dérivables dont la dérivée seconde ne s'annule pas.

Chapitre 2

La méthode de transformation différentielle

2.1 Introduction

La méthode de transformation différentielle est une technique analytique semi-numérique qui formule la série de Taylor en un manière totalement différente. Avec cette technique, l'équation différentielle donnée et les conditions aux limites associées sont transformé en une équation de récurrence qui conduit finalement à la solution d'un système d'équations algébriques comme coefficients d'une solution en série de puissance. Cette méthode est utile pour obtenir des solutions exactes et approximatives des équations différentielles linéaires et non linéaires. La méthode est bien abordée dans[[6]], [[7]]. Les définitions de base de les transformations différentielles sont introduites comme suit :

Définition 2.1.1 *Soit $f(x)$ une fonction analytique dans un domaine D, soit $x = x_0$ un point quelconque du domaine D. La fonction $f(x)$ est représentée par une série de centre x_0. La transformation différentielle de $f(x)$ est donnée par [[8]] :*

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=x_0} \tag{2.1}$$

où $F(k)$ est la fonction transformée de la fonction originale $f(x)$.

La transformation inverse est définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F(k) \tag{2.2}$$

En injectant l'équation (2.1) dans (2.2), on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \tag{2.3}$$

D'après cette équation on remarque que le concept de la transformation différentielle est basé sur le développement de la série de Taylor de la fonction $f(x)$.

L'équation (2.3) peut être écrite comme suite si on limite le nombre de séries à N séries.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \tag{2.4}$$

Le nombre N est défini en fonction du critère de convergence de la solution.

2.1.1 Propriétés d'opérations de la transformation différentielle

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques et soit $F(k)$ et $G(k)$ les fonctions transformées des deux fonctions originales, les Propriétés d'opérations de la transformation différentielle sont donnée par le tableau (T1)

Fonction originale	**Fonction transformée (DTM)**
$f(x) = h(x) \pm g(x)$	$F(k) = H(k) \pm G(k)$
$f(x) = \beta g(x)$	$F(k) = \beta G(k)$
$f(x) = h(x) \cdot g(x)$	$F(k) = \sum_{r=0}^{k} H(r)G(k-r)$
$f(x) = [\frac{d^n g(x)}{dx^n}]$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ 1 \text{ si } k = n \end{cases}$
$f(x) = \exp(x)$	$F(k) = \frac{1}{k!}$
$f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$	$F(k) = (\frac{\omega^k}{k!}) \sin(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$
$f(x) = \cos(\omega x + \alpha)$	$F(k) = (\frac{\omega^k}{k!}) \cos(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$
$f(x) = \alpha h(x) \pm \beta g(x)$	$F(k) = \alpha H(k) \pm \beta G(k)$
$f(x) = h(\alpha x)$	$F(k) = \alpha^k H(k), \quad \alpha \in [0,1]$
$f(x) = h(\alpha_1 x) g(\alpha_2 x)$	$F(k) = \sum_{r=0}^{k} \alpha_1^r \alpha_2^{k-r} H(r)G(k-r), \quad k \geq 0$

TAB. 2.1 – Théorémes de base utilisés dans la DTM

Proposition 2.1.1 *(voir[[9]],[[10]],[[11]]). Si*

$$f(x) = \alpha h(x) \pm \beta g(x) \ \textit{et} \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Alors

$$F(k) = \alpha H(k) \pm \beta G(k)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!}[\frac{d^k}{dx^k}(\alpha h(x) \pm \beta g(x))]_{x=0} \\
&= \frac{1}{k!}[\alpha \frac{d^k}{dx^k} h(x) \pm \beta \frac{d^k}{dx^k} g(x))]_{x=0} \\
&= \frac{\alpha}{k!}[\frac{d^k}{dx^k} h(x)] \pm \frac{\beta}{k!}[\frac{d^k}{dx^k} g(x))]_{x=0} \\
&= \alpha H(k) \pm \beta G(k).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.2 *Si*

$$f(x) = [\frac{d^n g(x)}{dx^n}] \ n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!}[\frac{d^k}{dx^k}(\frac{d^n g(x)}{dx^n})]_{x=0} \\
&= \frac{1}{k!}[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}}]_{x=0} \\
&= \frac{(k+n)!}{(k+n)!} \frac{1}{k!}[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}}]_{x=0} \\
&= \frac{(k+n)!}{k!} \frac{1}{(k+n)!}[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}}]_{x=0} \\
&= \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.3 *Si*

$$f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

Alors

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} H(r)G(k-r)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x) \cdot g(x) \\
&= (\sum_{k=0}^{\infty} H(k)x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} G(k)x^k) \\
&= (H(0) + H(1)x + H(2)x^2 + \ldots)(G(0) + G(1)x + G(2)x^2 + \ldots) \\
&= H(0)G(0) + ((H(1)G(0) + G(1)H(0)x) + (H(2)G(0) + G(2)H(0) + H(1)G(1))x^2 + \ldots \\
&+ (H(0)G(k) + H(1)G(k-1) + \ldots + H(k-1)G(1) + H(k)G(0))x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{r=0}^{k} H(r)G(k-r)x^k}_{F(k)}
\end{aligned}$$

Donc

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} H(r)G(k-r)$$

■

Théorème 2.1.1 *Si* $f(x) = g_1(x)g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)g_n(x)$, *Alors*

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \ldots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G2(k_2-k_1)\ldots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1}). \tag{2.5}$$

Démonsration. En utilisant l'induction mathématique, l'énoncé est vrai pour $n = 2$ par la proposition (2.1.3). Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n = m$. Or, pour $n = m + 1$, on a

$$f(x) = (g_1(x)g_2(x)\ldots g_m(x))g_{m+1}(x)).$$

Soit $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)$, d'après la proposition (2.1.3) on obtient

$$F(k) = \sum_{k_m=0}^{k} G(k_m)G_{m+1}(k-k_m),$$

où $G(k_m)$ est la fonction transformée de $g(x)$. Puis

$$F(k) = \sum_{k_m=0}^{k}(\sum_{k_{m-1}=0}^{k_m}\sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}}\dots\sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G2(k_2-k_1)\dots G_m(k_m-k_{m-1}))G_{m+1}(k-k_m).$$

L'énoncé est vrai pour $n = m+1$, donc c'est vrai pour $n \geq 2$. ■

Proposition 2.1.4 *Si*

$$f(x) = x^n$$

Alors

$$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 \ \ si\ k \neq n \\ 1 \ \ si\ k = n \end{cases}$$

Démonstration. Soit $f(x)$ la fonction originale, alors la transformation différentielle de $f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k}\ |_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{d^k x^n}{dx^k}\ |_{x=0} \end{aligned}$$

De la règle de différenciation, nous avons

$$\frac{d^k x^n}{dx^k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Donc,

$$F(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}.$$

Si $n = k$,

$$F(k) = \frac{k(k-1)(k-2)\dots 1}{k!},$$

donc,

$$F(k) = 1.$$

Si $n \neq k$, et $x = 0$ on obtient

$$F(k) = 0.$$

Puis

$$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

■

Proposition 2.1.5 *Si*

$$f(x) = e^x$$

Alors

$$F(k) = \frac{1}{k!}.$$

Démonstration. Soit $f(x)$ la fonction originale, alors la transformation différentielle de $f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k} \mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{d^k e^x}{dx^k} \mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}e^x \mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

■

Cas particulière Si $f(x) = e^{\lambda x}$, alors $F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$, avec λ est constante.

Preuve. Soit $f(x)$ la fonction originale, alors la transformation différentielle de $f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k} \mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{d^k e^{\lambda x}}{dx^k} \mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\lambda^k e^{\lambda x} \mid_{x=0} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.6 *Si*

$$f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$$

Alors

$$F(k) = (\frac{\omega^k}{k!})\sin(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$$

Preuve. Soit $f(x)$ la fonction originale, alors la transformation différentielle de $f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k \sin(\omega x + \alpha)}{dx^k} \mid_{x=0} \\ &= (\frac{\omega^k}{k!})\sin(\frac{k\pi}{2} + \alpha). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.7 *Si*

$$f(x) = \cos(\omega x + \alpha)$$

Alors

$$F(k) = (\frac{\omega^k}{k!})\cos(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$$

Preuve. Soit $f(x)$ la fonction originale, alors la transformation différentielle de $f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k\cos(\omega x+\alpha)}{dx^k}\mid_{x=0} \\ &= (\frac{\omega^k}{k!})\cos(\frac{k\pi}{2}+\alpha). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.2 *Si*

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}, \qquad \textit{pour } k \geq 1.$$

Alors

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt,$$

Preuve. Prenons la transformation différentielle de $f(x)$

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k\int_0^x g(t)dt}{dx^k}\mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}g(x)}{dx^{k-1}}\mid_{x=0} \\ &= \frac{1}{k(k-1)!}\frac{d^{k-1}g(x)}{dx^{k-1}}\mid_{x=0} \\ &= \frac{G(k-1)}{k}. \end{aligned}$$

■

2.2 Transformation de Laplace :

Définition 2.2.1 *Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geq 0$, alors la transformation de Laplace de $f(x)$ noté $\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ est défini comme suit*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^n e^{-sx} f(x) dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On dit que la transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale impropre donnée converge. On remarque que $\mathcal{L}\{f(x)\}$ n'est pas un nombre mais une fonction de s , s étant une variable complexe. La transformée de Laplace pourrait donc exister pour certaines valeurs de la variable s et pas pour d'autres. Pour simplifier l'utilisation de cette définition, on peut considérer s comme une variable réelle.

Théorème 2.2.1 *Considérons deux fonctions f_1 et f_2 qui ont une transformation de Laplace (pour $s > \alpha$) et deux constantes a et b. Alors*

$$\mathcal{L}\{af_1(x) + bf_2(x)\} = a\mathcal{L}\{f_1(x)\} + b\mathcal{L}\{f_2(x)\} = a\mathcal{F}_1(s) + b\mathcal{F}_2(s)$$

Démonstration. Essentiellement, ce théorème nous dit que la transformation de Laplace est un opérateur linéaire, alors l'intégrale est aussi un opérateur linéaire. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af_1(x) + bf_2(x)\} &= \int_0^\infty (af_1 + bf_2) e^{-sx} dx \\ &= a \int_0^\infty f_1 e^{-sx} dx + b \int_0^\infty f_2 e^{-sx} dx \\ &= a\mathcal{F}_1(s) + b\mathcal{F}_2(s) \end{aligned}$$

Ce résultat est vrai si les intégrales convergent. ■

Théorème 2.2.2 *Si une fonction $f(x)$ est continue par morceaux pour $x \geq 0$ et si $f(x)$*

est d'ordre exponentielle α alors sa transformation de Laplace existe et peut être obtenue avec la définition intégrale (2.14). Donc sous les hypothèses de ce théorème, l'intégrale impropre suivante converge si $s > \alpha$.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \mathcal{F}(s)$$

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, il faut montrer la convergence de l'intégrale donnée. On peut séparer cette intégrale en 2 parties, où T est une constante positive

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \int_0^T f(x)e^{-sx}dx + \int_T^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

La première des deux intégrales à droite existe puisque la fonction $f(x)$, et par conséquent la fonction $f(x)e^{-sx}$, est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, T]$. Il ne reste qu'à montrer la convergence de

$$\int_T^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

Nous utiliserons le principe de comparaison pour les intégrales impropres :Si $\mid f(x) \mid < g(x)$ alors $\int_T^\infty g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_T^\infty f(x)dx$ converge. Comme $f(x)$ est d'ordre exponentielle α, on sait que

$$\mid f(x) \mid < Me^{\alpha x} \qquad \text{si } x > T \implies \mid f(x)e^{-sx} \mid = \mid f(x) \mid e^{-sx} \leq Me^{\alpha x}e^{-sx}$$

En intégrant de T à ∞, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty \mid f(x)e^{-sx} \mid dx &\leq M \int_T^\infty e^{\alpha x}e^{-sx}dx \\
&\leq M \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)x}dx \\
&\leq \left[M \frac{-e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha} \right]_T^\infty
\end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } s-\alpha > 0 \\ \text{diverge} & \text{si } s-\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Donc si $s-\alpha > 0$ (ou $s > \alpha$) et en se rappelant que M et T sont des constantes positives

$$\int_T^{\infty} \mid f(x)e^{-sx} \mid dx \leq M \frac{e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha}$$

On sait de plus que

$$\int_T^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \leq M \int_T^{\infty} \mid f(x)e^{-sx} \mid dx$$

On peut donc conclure que, sous les hypothèses du théorème,

$$\int_T^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \text{ et } \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \text{ convergent,}$$

et que la transformation de Laplace existe. ∎

Définition 2.2.2 (La transformation de Laplace inverse) *La transformation de Laplace inverse d'une fonction $\mathcal{F}(s)$ désigne l'unique fonction continue $f(x)$ sur l'intervalle $[0, \infty[$ qui satisfait*

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} \tag{2.7}$$

cette inverse est notée

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(x)$$

Si toutes les fonctions satisfaisant l'équation (2.7) sont des fonctions discontinues sur $[0, \infty[$, on en choisira une, pour $f(x)$, qui est continue par morceaux.

2.3 Approximation de Padé

Une approximation de Padé est le rapport de deux polynômes construits à partir des coefficients de l'expansion de la série de Taylor d'une fonction $y(x)$. L'approximation de

Padé $\left[\frac{L}{M}\right]$ d'une fonction $y(x)$ est donnée par

$$\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \tag{2.8}$$

où $P_L(x)$ est un polynôme de degré au plus L et $Q_M(x)$ est un polynôme de degré au plus M. La puissance des séries formelles

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \tag{2.9}$$

$$y(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}), \tag{2.10}$$

déterminer les coefficients de $P_L(x)$ et $Q_M(x)$ par l'équation.

Puisque nous pouvons clairement multiplier le numérateur et le dénominateur par une constante et laisser $\left[\frac{L}{M}\right]$ inchangé, nous imposons la condition de normalisation

$$Q_M(0) = 1.0. \tag{2.11}$$

Enfin, nous exigeons que $P_L(x)$ et $Q_M(x)$ n'ont pas de facteurs communs. Si nous écrivons le coefficient de $P_L(x)$ et $Q_M(x)$ comme

$$\begin{cases} P_L(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_L x^L, \\ Q_M(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_M x^M \end{cases} \tag{2.12}$$

puis, par (2.10) et (2.11), on peut multiplier (2.9) par $Q_M(x)$, Nous pouvons écrire (2.9) plus en détail comme

$$\begin{cases} a_{L+1} + a_L q_1 + \ldots + a_{L-M+1} + q_M = 0, \\ a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \ldots + a_{L-M+1} q_M = 0, \\ \vdots \\ a_{L+M} + a_{L-M-1} q_1 + \ldots + a_L q_M = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} a_0 = p_0, \\ a_{0+} a_0 q_1 = p_1, \\ a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 = p_2, \\ \vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \ldots + a_0 q_L = p_L \end{cases} \tag{2.14}$$

Pour résoudre ces équations, nous commençons par Eq. (2.13), qui est un ensemble d'équations linéaires pour tous les q's inconnus. Une fois Les q sont connus, alors Eq. (2.14) donne une formule explicite pour les p inconnus.

Si les équations (2.13) et (2.14) sont non singuliers, alors nous pouvons les résoudre directement et obtenir l'Eq. (2.15), où Eq. (2.15) est vrai, et si l'indice inférieur sur une somme dépasse le supérieur, la somme est remplacée par zéro[[12]] :

$$[\frac{L}{M}] = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \ddots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^{L} a_{j-M} x^j & \sum_{j=M}^{L} a_{j-M+1} x^j & \ddots & \sum_{j=0}^{L} a_j x^j \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \ddots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \ddots & 1 \end{bmatrix}}. \quad (2.15)$$

2.4 Applications

L'objectif principal de cette section est d'appliquer la méthode de transformation différentielle modifiée à un classe de type pantographe linéaire et non linéaire de DEs et VIDE avec des retards proportionnels. Nous présentons les exemples [[13]] suivants pour illustrer l'exactitude de la méthode présentée et comparez la nouvelle méthode avec le résultat précédent.

Exemple 2.4.1 *nous considérons l'équation de pantographe linéaire suivante :*

$$u'(t) = -u(t) + \frac{1}{10}u(\frac{t}{5}) - \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{5}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.16)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1. \tag{2.17}$$

En utilisant Table 1*, l'équation* (2.16) *se transforme en relations de récurrence suivantes :*

$$(k+1)U(k+1) = -U(k) + \frac{1}{10}(\frac{1}{5})^k U(k) - \frac{1}{10}\frac{(\frac{-1}{5})^k}{k!}, \tag{2.18}$$

et à partir de la condition initiale (2.17)*, on écrit*

$$U(0) = 1. \tag{2.19}$$

On utilise la condition Eq. (2.19)*, nous obtenons les résultats suivants :*

$$\begin{aligned} &U(1) = -1, \quad U(2) = \frac{1}{2!}, \quad U(3) = \frac{-1}{3!}, \\ &U(4) = \frac{1}{4!}, \quad U(5) = \frac{-1}{5!}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

Par conséquent, à partir de (2.2) *nous avons*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots. \tag{2.21}$$

Pour la solution d'approximation du troisième ordre

$$\widetilde{u}_3 = \sum_{k=0}^{3} U(k)t^k = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}. \tag{2.22}$$

L'application de la transformation de Laplace par rapport à t pour $u(t)$ donne

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4}. \tag{2.23}$$

Soit $s = 1/t$, on a

$$\mathcal{L}[u(t)] = t - t^2 + t^3 - t^4. \tag{2.24}$$

Pour $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $m+n \leq 4$, tous les approximations $[\frac{m}{n}](t)$-Padé de l'équation

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{t}{1+t}. \tag{2.25}$$

Dans cette étape, en écrivant $1/s$ au lieu de t dans l'Eq. (2.25) on obtient

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{1}{s+1}. \tag{2.26}$$

Enfin, en utilisant la transformation de Laplace inverse sur les approximations de Padé (2.26), on arrive à la solution améliorée qui correspond à la solution exacte $u(t) = e^{-t}$.

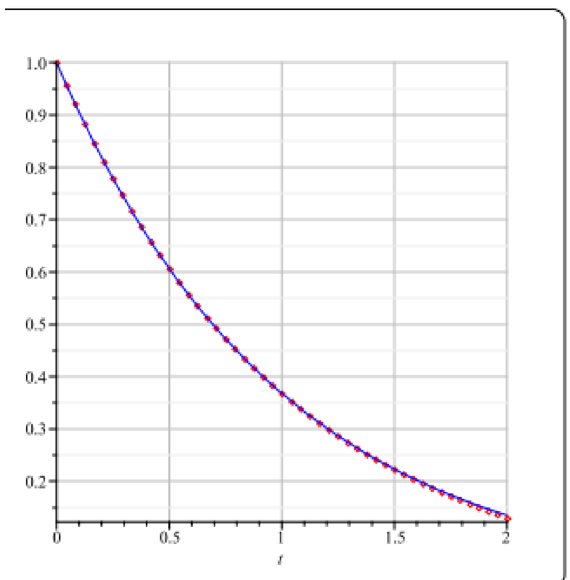

FIG. 2.1 – Comparaison de la solution exacte (bleu) et les solutions approximatives (rouge) de l'exemple 1

t	u_E	$u_{10,R}$	$u_{12,R}$	$n=10, e(u)$	$n=12, e(u)$
0.1	0.9048374181	0.9048374181	0.9048374181	$3.592657686 \times 10^{-11}$	$3.592657661 \times 10^{-12}$
0.3	0.7408182206	0.7408182206	0.7408182206	$1.923883628 \times 10^{-11}$	$1.928210586 \times 10^{-11}$
0.5	0.6065306598	0.6065306598	0.6065306598	$1.80099255 \times 10^{-11}$	$6.287137150 \times 10^{-12}$
0.7	0.4965853044	0.4965853039	0.4965853044	$4.49700608 \times 10^{-10}$	$1.676531197 \times 10^{-11}$
0.9	0.4065696671	0.4065696598	0.4065696671	$7.35104179 \times 10^{-9}$	$7.90460030 \times 10^{-11}$

TAB. 2.2 – Résultat numérique de l'exemple 1

Exemple 2.4.2 *nous considérons l'équation de pantographe linéaire suivante :*

$$u''(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) u(\frac{t}{2}), \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{2.27}$$

avec des conditions initiales

$$u(0) = 1, \qquad u'(0) = -1. \tag{2.28}$$

En utilisant Table1, l'équation (2.27) se transforme en la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)U(k+2) \\ &= 4 \sum_{r_2=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{r_2} \left(\frac{-1}{2}\right)^{r_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-r_1} \frac{1}{r_1!(r_2-r_1)!} \sin\left(\frac{(r_2-r_1)\pi}{2}\right) U(k-r_2), \end{aligned} \tag{2.29}$$

et à partir des conditions initiales (2.28), on écrit

$$U(0) = 1, \qquad U(1) = -1. \tag{2.30}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$U(2) = 0, \quad U(3) = \frac{1}{3}, \quad U(4) = \frac{-1}{6}, \quad U(5) = \frac{1}{30}, \ldots \tag{2.31}$$

Par conséquent, à partir de (2.2) nous avons

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k = 1 - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{6} + \frac{t^5}{30} - \dots. \tag{2.32}$$

Pour améliorer l'Eq. (2.27), l'approximation du troisième ordre

$$\widetilde{u}_3 = \sum_{k=0}^{3} U(k)t^k = 1 - t + \frac{t^3}{3}. \tag{2.33}$$

L'application de la transformation de Laplace par rapport à t pour $u(t)$ donne

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^4}. \tag{2.34}$$

Soit $s = 1/t$, o na

$$\mathcal{L}[u(t)] = t - t^2 + 2t^4. \tag{2.35}$$

Pour $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $m + n \leq 4$, tous les approximations $[\frac{m}{n}](t)$-Padé de l'équation

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{t + t^2}{1 + 2t + 2t^2}. \tag{2.36}$$

Dans cette étape, en écrivant $1/s$ au lieu de Eq. (2.36), on obtient

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{s + 1}{2 + 2s + s^2} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1}. \tag{2.37}$$

Enfin, en utilisant la transformation de Laplace inverse sur les approximations de Padé (2.37), on arrive à une solution améliorée qui correspond à la solution exacte $u(t) = e^{-t}\cos(t)$.

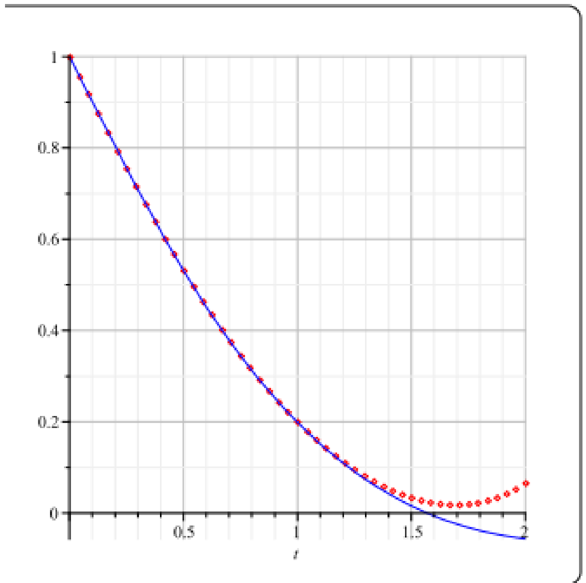

FIG. 2.2 – Comparaison de la solution exacte (bleu) et les solutions approximatives (rouge) de l'exemple 2

t	u_E	$u_{5,R}$	$u_{7,R}$	$n=5, e(u)$	$n=7, e(u)$
0	1	1	1	0	0
0.2	0.8024106473	0.8024106667	0.8024106464	1.936597×10^{-8}	$9.5149031 \times 10^{-10}$
0.4	0.6174056479	0.6174079999	0.6174053993	2.3520953×10^{-6}	$2.48539620 \times 10^{-7}$
0.6	0.4529537891	0.4529920000	0.4529475657	3.8210890×10^{-5}	$6.22339571 \times 10^{-6}$
0.8	0.3130505040	0.3133226667	0.3129897854	2.7216259×10^{-5}	$6.07186798 \times 10^{-5}$

TAB. 2.3 – Résultat numérique de l'exemple 2

Exemple 2.4.3 *nous considérons l'équation de pantographe non linéaire suivante :*

$$u''(t) = u(t) - \frac{8}{t^2}u^2\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \le t \le 1, \tag{2.38}$$

avec des conditions initiales

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1. \tag{2.39}$$

Tout d'abord, on réécrit l'équation comme suit :

$$t^2u''(t) = t^2u(t) - 8u^2\left(\frac{t}{2}\right). \tag{2.40}$$

En utilisant le tableau.1, l'équation (2.38) se transforme en relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)U(k)(k-r+2) \\ &= \sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)U(k-r) - 8\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}U(r)U(k-r),\end{aligned} \tag{2.41}$$

et à partir des conditions initiales (2.39), on écrit

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = 1. \tag{2.42}$$

On utilise Eq. (2.42), nous trouvons les résultats suivants :

$$U(2) = -1, \quad U(3) = \frac{1}{2!}, \quad U(4) = \frac{-1}{3!}, \quad U(5) = \frac{1}{4!}, ...U(6) = \frac{-1}{5!}, \cdots \tag{2.43}$$

Par conséquent, à partir de (2.2) nous avons

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty}U(k)t^k = t - t^2 + \frac{t^3}{2!} - \frac{t^4}{3!} + \frac{t^5}{4!} - \frac{t^6}{5!} + \cdots. \tag{2.44}$$

Pour améliorer Eq. (2.38), l'approximation du troisième ordre

$$\widetilde{u}_3(t) = \sum_{k=0}^{3}U(k)t^k = t - t^2 + \frac{t^3}{2!}. \tag{2.45}$$

Application de la transformation de Laplace par rapport à t pour $u(t)$ donne

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^4}. \tag{2.46}$$

Soit $s = 1/t$, o na

$$\mathcal{L}[u(t)] = t^2 - 2t^3 + 3t^4. \tag{2.47}$$

Pour $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $m + n \leq 4$, tous les approximations $[\frac{m}{n}](t)$-Padé de l'équation

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{t^2}{1 + 2t + t^2}. \tag{2.48}$$

Dans cette étape, en écrivant $1/s$ au lieu de t dans l'équation.(2.48), on obtient

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{1}{1 + 2s + s^2} = \frac{1}{(s+1)^2}. \tag{2.49}$$

Enfin, en utilisant la transformée de Laplace inverse sur les approximations de Padé (2.49), on arrive à une solution améliorée qui correspond à la solution exacte $u(t) = te^{-t}$.

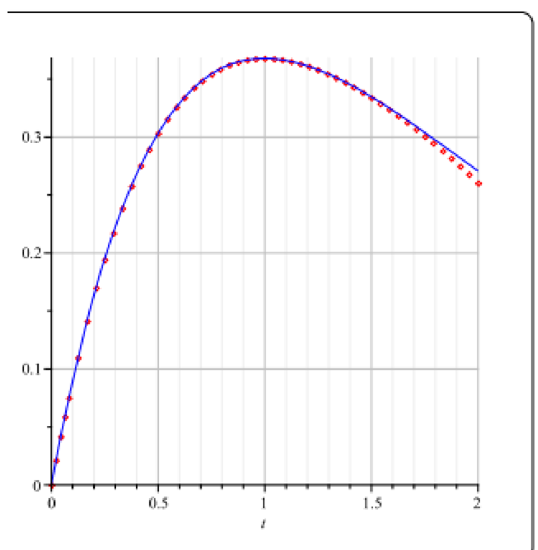

FIG. 2.3 – Comparaison de la solution exacte (bleu) et les solutions approximatives (rouge) de l'exemple 3

t	u_E	$u_{8,R}$	$u_{11,R}$	$n=8, e(u)$	$n=11, e(u)$
0.1	0.09048374180	0.09048374181	0.09048374181	$3.568128916 \times 10^{-12}$	$3.592657686 \times 10^{-12}$
0.3	0.2222454662	0.2222454658	0.2222454663	$4.6785714 \times 10^{-10}$	$4.528351013 \times 10^{-12}$
0.5	0.3032653298	0.3032652840	0.3032653298	$4.58254531 \times 10^{-8}$	$5.85598678 \times 10^{-11}$
0.7	0.3476097127	0.3476087846	0.3476097130	9.2816132×10^{-7}	$2.78563346 \times 10^{-10}$
0.9	0.3659126937	0.3659039660	0.3659127002	$8.72761061 \times 10^{-6}$	$6.64594981 \times 10^{-9}$

TAB. 2.4 – Résultat numérique de l'exemple 3

Exemple 2.4.4 *Comme quatrième exemple, nous considérons le pantographe non linéaire suivant équation :*

$$u'''(\frac{t}{2}) - 2u''(\frac{t}{2})u'(\frac{t}{2}) + \frac{1}{4}u(t) = \frac{1}{4}\cosh(\frac{t}{2}), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{2.50}$$

avec des conditions initiales

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 2, \quad u''(0) = 0. \tag{2.51}$$

En utilisant le tableau 1*, l'équation (2.50) se transforme en la récurrence suivante rapports :*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3)- \\ &2\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}(r+2)(r+1)(k-r+1)U(k-r+1) + \frac{1}{4}U(k) \\ &= \frac{1}{8}(\frac{(\frac{1}{2})^k + (\frac{-1}{2})^k}{k!}), \end{aligned} \tag{2.52}$$

et à partir des conditions initiales (2.51), on écrit

$$U(0) = 1, \quad U(1) = 2, \quad U(2) = 0. \tag{2.53}$$

En substituant l'éq.(2.53) dans l'équation (2.52) on obtient récursivement les résultats suivants :

$$U(3) = \frac{1}{3}, \quad U(4) = 0, \quad U(5) = \frac{1}{60}, \quad U(6) = 0, \quad \ldots . \tag{2.54}$$

Par conséquent, à partir de (2.2), nous avons

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k = 2t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{60} + \ldots . \tag{2.55}$$

Pour améliorer l'Eq. (2.50), nous implémentons le (LPDTM) pour l'approximation du troisième ordre solution

$$\widetilde{u}_3(t) = \sum_{k=0}^{3} U(k)t^k = 2t + \frac{t^3}{3}. \tag{2.56}$$

L'application de la transformation de Laplace par rapport à t pour $u(t)$ donne

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4}. \tag{2.57}$$

Soit $s = 1/t$, o na

$$\mathcal{L}[u(t)] = 2t^2 + 2t^4. \tag{2.58}$$

Pour $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $m+n \leq 6$, tous les approximations $[\frac{m}{n}](t)$-Padé de l'équation (2.58) donne

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{2t^2}{1-t^2}. \tag{2.59}$$

Dans cette étape, en écrivant $\frac{1}{s}$ au lieu de t dans l'équation (2.59) on obtient

$$\left[\frac{m}{n}\right](t) = \frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}. \tag{2.60}$$

Enfin, en utilisant la transformée de Laplace inverse sur les approximants de Padé (2.60), on arrive à une solution améliorée qui correspond à la solution exacte $y(t) = e^t - e^{-t}$.

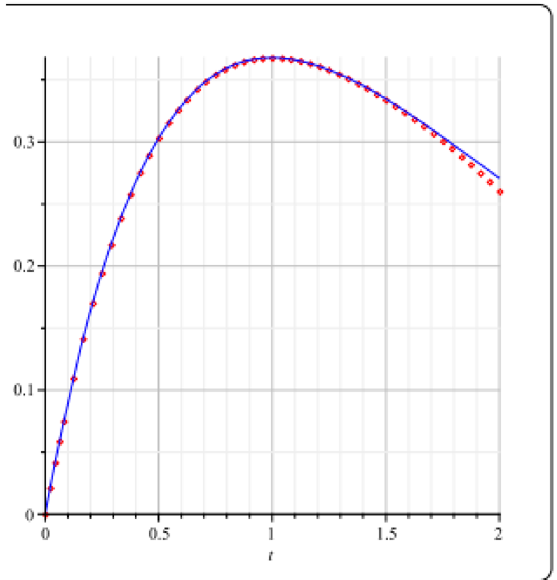

FIG. 2.4 – Comparaison de la solution exacte (bleu) et les solutions approximatives (rouge) de l'exemple 4

t	u_E	$u_{7,R}$	$u_{11,R}$	$n=7, e(u)$	$n=11, e(u)$
0.1	0.2003335	0.2003335	0.2003335	$3.964923968 \times 10^{-11}$	$3.965475164 \times 10^{-11}$
0.3	0.6090405873	0.6090405868	0.6090405869	$5.1527572 \times 10^{-10}$	$4.067048190 \times 10^{-10}$
0, 5	1.042190611	1.042190600	1.042190611	1.0808188×10^{-8}	$1.914523041 \times 10^{-11}$
0, 7	1.517167403	1.517167180	1.517167403	2.2275522×10^{-7}	$6.429500776 \times 10^{-10}$
0, 9	2.053033451	2.053031300	2.053033451	2.1506409×10^{-6}	$3.3635213 \times 10^{-10}$

TAB. 2.5 – Résultat numérique de l'exemple 4

De plus, comme le montrent les exemples, les résultats indiquent la fiabilité et l'efficacité de la méthode et montrer qu'elle nécessite moins d'efforts pour obtenir les résultats, et est une solution prometteuse

La méthode peut être étendue facilement avec quelques modifications aux équations différentielles de retard fractionnaire. C'est notre objectif pour les travaux futurs.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude de l'existence et parfois à l'unicité des solutions pour des équations différentielles non linéaires. On applique la méthode de la transformation différentielle pour résoudre de ces équations. Comme le montrent les exemples précédents, les résultats indiquent la fiabilité et l'efficacité de la méthode et montrer qu'elle nécessite moins d'efforts pour obtenir les résultats, et est une solution prometteuse.

Bibliographie

[1] Gaston M N'guerekata, James H Liu, Topics on stability and periodicity in abstract differential equations, World Scientific, 2008.

[2] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Collection Grenoble Sciences édités par EDP Sciences, France, 2006.

[3] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale University Press, New Haven, 1923.

[4] Ahmed Lesfari, Equations differentielles ordinaires et Equations aux dérivées partielles, Imprimé en France par CPI en mars 2015, DépÔt légale :avril 2015 N díimpression 127618.

[5] Walid OUKIL, Notes et exercices du cours d'Équations Différentielles, 19 Jul 2018.

[6] A. Arıkoğlu et I. Özkol, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, Appl. Math. Comput. 168, pp. 1145–1158, 2005.

[7] M.J. Jang, C.L. Chen et Y.C. Liu, Two-dimensional differential transform for partial differential equations, Appl. Math. Comput. 121, pp. 261–270, 2001.

[8] Y.M.Huang et M.L.Yang, Dynamic analysis of a rotating beam subjected torepeating axial and transverse forces for simulating a lathing process, International Journal of Mechanical Sciences, 51, pp. 256-268, 2009.

[9] G. Oturang et Y. Keskin, Reduced differential transform method for partial differential equations, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 10(6), pp. 741–749, 2009.

[10] Mohamed Gubara Sharaf Mohmoud, Reduced differential transform method for solving linear and nonlinear goursat problem, in SciRes, pp. 1049–1056, 2016.

[11] Sema Servi Y. Keskin et Galip Oturanc, Reduced differential transform method for solving klein gordon equations, Proceedings of the World Congress on Engineering, 1, 2011.

[12] G.A. Baker, Essentials of Pade Approximants, Academic Press, London, 1975.

[13] Seyyedeh Roodabeh Moosavi Noori et Nasir Taghizadeh, Modified differential transform method for solving linear and nonlinear pantograph type of differential and Volterra integro-differential equations with proportional delays, Advances in Difference Equations, pp. 1-25, 2020.

الملخص:

في هذه المذكرة, قدمنا بعض التعاريف والنظريات حول المعادلات التفاضلية العادية الخطية والغير الخطية بالإضافة إلى ذلك لقد ركزنا على طريقة التحويل التفاضلي. فكرة هذه الطريقة هي النظر في الحل في شكل سلسلة تايلورالتى تتقارب مع الحل الدقيق.

هذه الطريقة شبه تحليلية وتستخدم على نطاق واسع من قبل العديد من الباحثين لحل المعادلات التفاضلية الكلاسيكية، الخطية وغير الخطية، المتجانسة وغير المتجانسة. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن طريقة (DTM) دقيقة وفعالة وتتطلب جهدا أقل مقارنة بالطرق التحليلية والرقمية الأخرى

الكلمات المفتاحية:

طريقة التحويل التفاضلي، تحويل لابلاس، معادلات تفاضلية خطية وغير خطية، سلسلة تايلور.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques définitions et théorèmes sur les équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires. De plus, on est intéressé sur la méthode de la transformation différentielle. L'idée de cette méthode est de considérer la solution sous la forme d'une série de Taylor qui converge vers la solution exacte. Cette méthode est semi-analytique et largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la résolution des équations différentielles classiques, linéaires et non linéaires, homogènes et non homogènes. Les résultats obtenus montrent que la méthode (DTM) est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques.

Mots-clés :

Méthode de la transformation différentielle, transformation de Laplace, équations différentielles linéaires et non linéaires, série de Taylor.

Abstract:

In this memory, we have presented some definitions and theorems on linear and nonlinear ordinary differential equations. In addition, we are interested on the method of differential transformation.

The idea of this method is to consider the solution in the form of a Taylor series, which converges to the exact solution. This method is semi-analytical and widely used by many researchers for the resolution of classical differential equations, linear and non-linear, homogeneous and non-homogeneous. The results obtained show that the method (DTM) is precise, efficient and requires less effort compared to other analytical and numerical method.

Keywords:

Differential transformed method, Laplace transformation, linear and nonlinear differential equations, Taylor series.