

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la
VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Angar Miloud

Titre :

Approximation numérique des équations différentielles
stochastiques

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Yakhlef Samia	UMKB	Président
Pr. Chighoub Farid	UMKB	Encadreur
Dr. Romeili Nacira	UMKB	Examinatrice

Septembre 2020

Didicace

je dédie ce simple travail

Mes chers parents que dieu lui accorde une longue vie

A toutes mes soeurs etmes frères

A toute ma précieuse famille

A mes cheres amis

A toute la promotin de mathématique

Angar Miloud

.

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et la patience d'arrivé *finir mon mémoire*.

Je tiens tout particulièrement à remercier Pr. CHIGHOUB FARID qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury les docteurs YEKHLEF SAMIA et ROMEILI NACIRA qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail. Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Généralités sur les processus stochastique	4
1.1 Généralités et notations	4
1.2 Mouvement brownien et Martingale	6
1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô	8
1.3.1 L'intégrale de Wiener	9
1.3.2 L'intégrale stochastique ou intégrale d'Itô	10
2 Équations différentielles stochastiques	13
2.1 Équations différentielles stochastiques	13
2.1.1 Existence et unicité de l'équation différentielle stochastique	15
2.1.2 Exemples d'équations différentielle stochastiques	17
2.2 Équation différentielles stochastique avec retard (Delai)	21
2.2.1 Existence et unicité de solution des équations différentielles stochastiques avec retard	22

2.2.2 Exemples d' équations différentielles stochastique avec retard .	26
3 Méthodes numériques pour les EDS	31
3.1 Méthode d'Euler Maruyama pour les EDS	34
3.2 Méthode de Milstein pour les EDS	35
3.3 Méthodes numériques pour les EDSD	36
3.4 Méthode d' Euler Maruyama pour les EDSD	40
Conclusion	43
Bibliographie	44
Annexe B : Abréviations et Notations	45

Introduction

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème a posé problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement brownien. A partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS. Et donc prend la forme suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1)$$

ou b et σ sont des fonctions données, et W est un mouvement brownien.

De manière similaire aux équations différentielles ordinaires où la résolution numérique passe par une discrétisation du temps et un schéma d'approximation concernant l'intervalle de temps élémentaire sur lequel l'intégration est faite, il est nécessaire de procéder de manière similaire avec les équations différentielles stochastiques, à quelques différences près. Toutefois, la simulation de l'EDS requiert la discrétisation du temps et donc la détermination de la loi du processus X aux instants de discrétisation. Pour certains processus par exemple le mouvement brownien standard, il va faut le approcher par des processus discrets qui convergent vers les processus que l'on souhaite simuler, on parlera alors de discrétisation approximative.

L'objectif de ce mémoire est de présenter les deux différents schémas de discrétisation usuellement employés ainsi que leurs efficience en terme de rapidité de convergence. Prenons le cas d'un processus défini par l'équations différentielle stochastique (EDS) suivante où W est un mouvement brownien standart. Le calcul d'Itô permet de voir l'équation (1) comme une formulation symbolique de :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad (2)$$

Les développements d'Itô et de Taylor de l'équation (2) nous permet de disposer d'une version approximative. Cette approximation est d'autant plus précise que le développement intervient à un ordre élevé.

Généralement nous allons présenter dans ce travail trois chapitres.

Le **premier** est un chapitre introductif permettant d introduire les outils essentiels pour le reste des chapitres. On donne un rappel de calcul stochastique en énumérant tous les outils mathématiques (processus stochastique, martingale, mouvement brownien, intégrale stochastique,...).

Dans le **deuxième** chapitre nous étudions les équations différentielles stochastiques dans le cas où les coufficients de drift b et de diffusion σ sont Lipchitziens en x .

Tout d'abord, nous présentons la définition d'une EDS et la définition du solution d'une EDS, puis énoncer le théorème d'Itô qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution, ensuite nous donner une présentation des équations différentielles stochastiques avec retard (delai) EDSD.

Dans le **dernier** chapitre on donne le schéma le plus simple pour la discritisation des EDS ensuite des EDSD. C'est celui d'Euler, Ce schéma est une généralisation naturelle aux EDS des schémas d'Euler utilisés pour les équations différentielles ordinaires. La simulation d'un schéma d'Euler est extrmêmement simple puisqu'il suffit de simuler la variable gaussienne $W_h - W_0 = W_h$.

Ensuite, le plus simple schéma d'ordre 2. S'appelle le schéma de Milshtein. Il permet de faire converger à une vitesse supérieure dans les espaces L_p mais est difficile à simuler quand la dimension est plus grande que 1 et converge en loi à la même vitesse que le schéma d'Euler.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastique

1.1 Généralités et notations

Dans ce chapitre introductif, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique. Nous nous limitons au strict nécessaire pour les chapitres suivants. Notons que, pour représenter un phénomène aléatoire dépendant du temps, le modèle mathématique est donné par

- 1) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- 2) Une fonction $X : (\mathbb{R}_+ \otimes \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ avec $(t, w) \mapsto X(t, w)$.

Pour chaque t fixé, l'état du système est une variable aléatoire c'est à dire $w \mapsto X(t, w)$ est mesurable. Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \mapsto X(t, w)$ est appelée une trajectoire.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) Soit T un ensemble d'indices (par exemple $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}$), on appelle processus défini sur T à valeur dans (E, \mathcal{E}) , une famille $(X(t))_{t \in T}$ d'application mesurable de $(T \otimes \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ dans (E, \mathcal{E}) , pour tout

$t \in T$, $X(t)$ est une variable aléatoire.

Définition 1.1.2 (Modification d'un processus) on dit que deux processus $(X(t))_{t \in T}$ et $(Y(t))_{t \in T}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont modifications l'un de l'autre si $\forall t \in T, X(t) = Y(t), \mathbb{P}$ -p.s. C'est équivalent à dire : $\forall t \in T, \exists N_t, \mathbb{P}(N_t) = 0$ et $\forall w \notin N_t, X(t, w) = Y(t, w)$.

Définition 1.1.3 (Processus indistinguables) Deux processus $(X(t))_{t \in T}$ et $(Y(t))_{t \in T}$ sont indistinguables si $\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \in T) = 1$.

C'est équivalent à dire : $\exists N, \mathbb{P}(N) = 0, \forall w \notin N, X(t, w) = Y(t, w), \forall t \in T$.

Remarque 1.1.1 Il est clair que si $(X(t))_{t \in T}$ et $(Y(t))_{t \in T}$ sont indistinguables alors ils sont modifications l'un de l'autre. La réciproque est généralement fausse.

Définition 1.1.4 (processus mesurable) Un processus $(X(t))_{t \in T}$ est mesurable si l'application $(t, w) \rightarrow X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans \mathbb{R}^d est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.5 (Filtration) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Un espace probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} au sens où, $\forall s \leq t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelée filtration de (Ω, \mathcal{F}) . On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.6 (Processus adapté) Un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si, pour tout t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Si $N \subset \mathcal{F}_0$, et si X est adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.

Définition 1.1.7 (Processus progressivement mesurable) On dit qu'un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable si l'application

$$X(., .) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}(0, t) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{E}),$$

$$(s, w) \longmapsto X(s, w),$$

est $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(0, t) \otimes \mathcal{F})$ – mesurable.

Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.8 (Temps d'arrêt) Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On dit que τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ – temps d'arrêt si, pour tout t , $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à τ , la tribu définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq T\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

Proposition 1.1.1 Soit τ est un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable, le processus arrêté X^τ défini par $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$ est progressivement mesurable.

1.2 Mouvement brownien et Martingale

Définition 1.2.1 (Mouvement brownien standard) On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique W à valeurs réelles tel que

- 1) \mathbb{P} – p.s. $t \rightarrow W_t(w)$ est continue.
- 2) pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de la variance $t - s$.
- 3) $W_0 = 0$, \mathbb{P} – p.s.

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t .

On dit qu'un mouvement brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.2.1 On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{F_t\}_{t \geq 0}$, vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(\exp(iu(W_t - W_s)) | \mathcal{F}_s) = \exp\{-u^2(t-s)/2\}.$$

Proposition 1.2.1 Soit W un MB standard

- 1) pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$, est un MB indépendant de $\{W_u, u \leq s\}$.
- 2) $-W$ est aussi un MB.
- 3) pour tout $c > 0$, $\{cW_{t/c^2}\}_{t \geq 0}$ est un MB.
- 4) le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

Définition 1.2.2 Un processus X à valeurs réelles est une sur-martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si

- 1) pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.
- 2) pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.
- 3) pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

X est une sous-martingale lorsque $-X$ est une sur-martingale, X est une martingale si X est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

Théorème 1.2.1 Si W est un MB, alors $\{W_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ et $\{\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)\}_{t \geq 0}$ sont des martingale

Théorème 1.2.2 (Théorème d'arrêt) Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ \mathbb{P} -p.s.

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ , $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Théorème 1.2.3 *Soit X une $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale, alors X possède une modification càdlàg, i.e. dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent des limites à gauche.*

Définition 1.2.3 (Martingale locale) *Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ \mathbb{P} -p.s, et pour tout n , $X^{\tau_n} \mathbf{1}_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Théorème 1.2.4 *Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu $\langle X, X \rangle$, nul en 0, tel que $X^2 - \langle X, X \rangle$ soit une martingale locale.*

Proposition 1.2.2 *Soit X une martingale locale continue. Il y a équivalence entre*

- 1) $X_0 \in L^2$ et $E[\langle X, X \rangle_\infty] < \infty$,
- 2) X est une martingale bornée dans L^2 .

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Dans cette section, T est un réel positif, on cherche à définir l'intégrale

$$I(\theta) = \int_0^T \theta(s) dW(s), \quad (1.1)$$

où $(\theta(t))_{t \geq 0}$ est un certain processus et $(W(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. Le problème de donner un sens à l'élément différentiel $dW(s)$ puisque la fonction $s \rightarrow W(s)$ n'est pas dérivable.

1.3.1 L'intégrale de Wiener

On note

$$L^2([0, T], \mathbb{R}) = \left\{ \theta : [0, T] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que, } \int_0^T |\theta(s)|^2 ds < \infty \right\}.$$

L'intégrale de Wiener est une intégrale du type (1.1) avec θ une fonction déterminisme, c'est à dire ne dépendant pas de w .

Si θ^n est une fonction en escalier déterminisme de la forme

$$\theta^n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i(t) \mathbf{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]},$$

où, $p_n \in \mathbb{N}$, les α_i sont réels et $\{t_i^{(n)}\}$ une suite croissante de $[0, T]$. On définit intégrale de Wiener par

$$I(\theta^n) = \int_0^T \theta^n(s) dW(s) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Par le caractère gaussienne du mouvement Brownien et l'indépendance de ses accroissements, la variable aléatoire $I(\theta^n)$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} \text{Var}(I(\theta^n)) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \text{Var}(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i), \\ &= \int_0^T (\theta^n(s))^2 ds. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 On remarque que $\theta \mapsto I(\theta)$ est une fonction linéaire, de plus, si f et g sont deux fonction en escalier, on a $\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_0^T f(s)g(s) ds$. On parle

alors de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener.

Soit maintenant $\theta \in L^2([0, T], \mathbb{R})$. Il existe donc une suite de fonction en escalier $\{\theta^n, n \geq 0\}$ qui converge dans $L^2([0, T], \mathbb{R})$ vers θ . D'après le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I(\theta^n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'espace $L^2([0, T], \mathbb{R})$ étant complet, cette suite converge vers une variable aléatoire gaussienne notée $I(\theta)$. On peut montrer que la limite ne dépend pas du choix de la suite $\{\theta^n, n \geq 0\}$. $I(\theta)$ s'appelle intégrale de Wiener de θ par rapport à $(W(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

1.3.2 L'intégrale stochastique ou intégrale d'Itô

On cherche maintenant à définir l'intégrale (1.1), la construction de $I(\theta)$ se fait par discrétisation comme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

Considérons tout d'abord les processus étagés du type

$$\theta^n(t) = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]}(t), \quad (1.2)$$

où $p_n \in \mathbb{N}$, $\{t_i^{(n)}\}$ une suite croissante de $[0, T]$, et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ pour tout $i = 0, \dots, p_n$. On définit $I(\theta^n)$ par

$$I(\theta^n) = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

On peut vérifier que $\mathbb{E}(I(\theta^n)) = 0$, et $Var(I(\theta^n)) = \mathbb{E} \int_0^T (\theta^n(s))^2 ds$.

Soit Υ l'espace des processus θ càdlàd (c'est à dire, continue à gauche limitée à droite), \mathcal{F}_t -adapté tel que

$$\|\theta\|^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right) < \infty.$$

On peut définir $I(\theta)$ pour tout $\theta \in \Upsilon$, on approche θ par un suite de processus étagés donnée par (1.2), la limite étant dans $L^2(\Omega, [0, T])$. L'intégrale $I(\theta)$ est alors $\lim I(\theta^n)$ avec

$$\mathbb{E}(I(\theta)) = 0,$$

et

$$\text{Var}(I(\theta)) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta^2(s) ds\right).$$

Définition 1.3.1 (processus d'Itô) On appelle processus d'Itô un processus $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs réelles tel que $\forall 0 \leq s \leq t$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s), \mathbb{P} - p.s.$$

où, $X(0)$ est \mathcal{F}_0 -mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^T |b(s)| ds < \infty \text{ et } \int_0^T \|\sigma(s)\|^2 ds < \infty, \text{ où } \|\sigma\| = \text{trace}(\sigma\sigma^*).$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.3.1 (Première formule d'Itô) Soit $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Alors

$$f(X(t)) = f(x(0)) + \int_0^t f_x(X(s)) dX(s) + 1/2 \int_0^t f_{xx}(X(s)) \sigma^2(s) ds.$$

Théorème 1.3.2 (Deuxième formule d'Itô) Soit $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t , de classe C^2

par rapport à x . On a

$$f(t, X(t)) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X(s))ds + \int_0^t f_x(s, X(s))dX(s) \\ + 1/2 \int_0^t f_{xx}(s, X(s))\sigma^2(s)ds.$$

Proposition 1.3.1 (Formule d' intégrale par parties) Soient $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y(t))_{0 \leq t \leq T}$ deux processus d' Itô, alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X, Y \rangle_t.$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

Le but de ce chapitre est de donner une introduction générale sur les équations différentielles stochastiques avec retards (EDSD). Ces équations ont des caractéristiques compliquées, on a commencer par discuter des propriétés des équation différentielles stochastiques (EDS), qui sont le cas particulier des EDSD. Une fois que le comportement des EDS est compris, il est plus facile de suivre les propriétés fondamentales des EDSD.

2.1 Équations différentielles stochastiques

Une équation mathématique qui comprend des fonctions et leurs dérivés s'appelle une équation différentielle. Dans les applications réelles, ces fonctions correspondent généralement aux quantités physique tandis que les dérivés représentent leurs taux de changement. Avec l'aide d' une équation différentielle, nous pouvons montrer une relation entre eux. Considérons comme exemple le modèle de croissance de la population. Supposons que $N(t)$ dénote la taille de la population au moment de t , $\alpha(t)$

est le taux de croissance relatif déterministe à l' autre t , $\frac{dN}{dt}$ est le taux de changement de la taille de la population et N_0 est la valeur initiale. Ensuite, l'équation différentielle correspondante est la suivante

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(t) N(t), \quad N(0) = N_0.$$

Cette équation signifie que le taux de changement de la population est égal à la multiplication du taux de croissance et de la population à cette époque. Cependant, généralement $\alpha(t)$ n'est pas connu complètement et il est soumis à certains effets environnementaux. Ainsi, il peut être écrit comme

$$\alpha(t) = r(t) + \beta \text{ le bruit},$$

où $r(t)$ est un terme déterministe, β est un nombre constant de valorisation et un bruit réel à la durée aléatoire (le comportement n'est pas tout à fait connu, seule la distraction de probabilité est connue. Ce terme de bruit est généralement considéré comme un bruit blanc qui est lié à un mouvement brownien $W(\cdot)$. Ensuite, l'équation peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (r(t) + \beta \times \text{le bruit}) N(t), \\ &= (r(t) + \beta W(t)) N(t). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$dN(t) = r(t) N(t) dt + \beta N(t) dW(t).$$

En raison de ce terme de bruit, nous appelons cette équation différentielle en tant qu'équation différentielle stochastique (EDS). En règle générale, les équations diffé-

rentielles incluent le caractère aléatoire dans les coefficients sont appelées EDS. En réalité, l'ajout de randomneur conduit à un modèle avec une forme plus réaliste.

2.1.1 Existence et unicité de l'équation différentielle stochastique

Après avoir discuté l'importance des EDS, nous sommes prêts à donner la définition de EDS par le théorème d'existence et unicité.

Définition 2.1.1 *Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ et $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))^T$, $t \geq 0$, un mouvement brownien m -dimensionnel sur cet espace de probabilité. L'EDS avec des coefficient f et g est de la forme*

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $T > 0$, x_0 est une variable aléatoire à n -dimensions et les coefficients sont sous la forme $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$.

Donnons quelques observations

- L'EDS peut être écrite de manière équivalente sous forme intégrale comme suit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) dW(s).$$

- Les termes dX et dW dans (2.1) sont appelés différentiels stochastiques; pour cette raison, nous appelons cette équation différentielle une équation différentielle stochastique.

- Un processus $X(\cdot)$, satisfaisant l'équation (2.1), est appelé une solution de l'EDS.

Maintenant, énonçons les conditions pour que la solution de l'équation (2.1) existe et les propriétés de cette solution.

Théorème 2.1.1 *Soit $T > 0$ un temps final donné et supposons que les coefficients $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, sont continues. De plus, il existe des nombres constants finis K et L tels que $\forall t \in [0, T]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, les termes de dérive et de diffusion satisfont*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| + \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq K \|x - y\|, \quad (2.2)$$

$$\|f(t, x)\| + \|g(t, x)\| \leq L(1 + \|x\|). \quad (2.3)$$

Supposons également que x_0 est une valeur dans \mathbb{R}^n telle que $\mathbb{E}(\|x_0\|^2) < \infty$.

Alors l'équation différentielle stochastique ci-dessus a une solution unique $X(\cdot)$ dans l'intervalle $[0, T]$. De plus, elle satisfait

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\|^2 \right) < \infty.$$

- La condition dans (2.2) signifie que f et g satisfont la condition de Lipschitz uniformément par rapport à la deuxième variable x , tandis que la condition dans (2.3) implique que f et g satisfont la condition de croissance linéaire.
- Supposons que X et \tilde{X} sont deux solutions de la même EDS avec des trajectoires continues. Puisque la solution est unique, elles satisfont

$$\mathbb{P} \left(X(t) = \tilde{X}(t), \forall t \in [0, T] \right) = 1.$$

- Si les coefficients f et g sont de la forme

$$f(t, x) := a(t) + b(t)x,$$

$$g(t, x) := c(t) + d(t)x,$$

alors nous disons que l' équation (2.1) définit une EDS linéaire.

- Si $a \equiv c \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq T$, alors l' EDS linéaire est dite homogène.

Maintenant, discutons quelques exemples pour mieux comprendre la stratégie de solution.

2.1.2 Exemples d'équations différentielle stochastiques

Considérons quelques exemples et les solution correspondantes pour clarifier la technique de solution.

Exemple 2.1.1 (*Mouvement brownien géométrique*) Supposons que $S(t)$ désigne le prix de l' action au temps $t \geq 0$ qui change aléatoirement. La dynamique du prix de l' action est donnée par. comme

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0,$$

le $\frac{dS}{S}$ représente la variation relative du prix, $\mu > 0$ est le terme de dérive, σ correspond au terme de diffusion (il peut être considéré comme de la volatilité) et $W(\cdot)$ est un mouvement brownien standard. Afin d' obtenir une solution unique, si la solution existe, nous avons besoin d' une valeur initial. Ainsi, supposons que $S(0) = s_0$ est le

prix initial donné de l' action. Alors nous avons en fait les égalités suivante :

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad t \geq 0, \\ S(0) &= s_0, \end{aligned}$$

où $f(t, x) = \mu x$ et $g(t, x) = \sigma x$ selon la définition générale de l' EDS. Avant de trouver la solution, vérifions les conditions d' existence et d' unicité, théorème d' existence et d' unicité :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| &= |\mu x - \mu y| + |\sigma x - \sigma y| \leq (|\mu| + |\sigma|) |x - y|, \\ |f(t, x)| + |g(t, x)| &= |x| (|\mu| + |\sigma|) \leq (1 + |x|) (|\mu| + |\sigma|). \end{aligned}$$

Par conséquent, cette EDS avec les donnée a une solution unique. Comme nous l' avans dit précédemment, nous allons utiliser la formule d' Itô pour trouver cette solution unique. Choisissons $F(x) = \ln x$ et appliquons la formule d' Itô :

$$F(S(t)) = F(S(0)) + \int_0^t F'(S(u)) dS(u) + \frac{1}{2} \int_0^t F''(S(u)) d\langle S(u), S(u) \rangle,$$

où F' et F'' sont les dérivées de la fonction F d' ordre un et deux, respectivement. Ceci implique :

$$\begin{aligned} \ln S(t) &= \ln S(0) + \int_0^t \frac{1}{S(u)} S(u) [\mu du + \sigma dW(u)] - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S^2(u)} \sigma^2 S^2(u) du \\ &= \ln S(0) + \int_0^t \mu du + \int_0^t \sigma dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 du \\ &= \ln S(0) + \mu t + \sigma W(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Par conséquent, le processus de solution est

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}.$$

Trouvons maintenant la valeur attendue de la solution :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(t)) &= \mathbb{E}\left(S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}\right) \\ &= S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}\left(e^{\sigma W(t)}\right) \\ &= S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= S(0) e^{\mu t}. \end{aligned}$$

De plus, la variance de la solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(S(t)) &= \text{Var}\left(S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}\right) \\ &= S^2(0) e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \text{Var}\left(e^{\sigma W(t)}\right) \\ &= S^2(0) e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \left[\mathbb{E}\left(e^{2\sigma W(t)}\right) - \left(\mathbb{E}\left(e^{\sigma W(t)}\right)\right)^2\right] \\ &= S^2(0) e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \left[e^{2\sigma^2 t} - e^{\sigma^2 t}\right] \\ &= S^2(0) e^{2\mu t} \left[e^{\sigma^2 t} - 1\right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *Comme S a une propriété markovienne, il est également possible d'écrire la solution comme suit*

$$S(t) = S(u) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-u) + \sigma(W(t) - W(u))}, t \geq u.$$

En raison de la même propriété, l'attente et la variance conditionnelles peuvent être écrites, respectivement, comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t) | \mathcal{F}_u) &= S(u) e^{\mu(t-u)}, t \geq u, \\ \text{Var}(S(t) | \mathcal{F}_u) &= S^2(u) e^{2\mu(t-u)} \left[e^{\sigma^2(t-u)} - 1 \right], t \geq u.\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 Prenons le terme de dérive dans l'exemple 2.1.1 comme zéro et le point de temps initial comme t_0 au lieu de 0. Alors l'équation devient

$$\begin{aligned}dS(t) &= \sigma S(t) dW(t), t \geq t_0, \\ S(t_0) &= s_0.\end{aligned}$$

En appliquant la remarque 2.1.1, on obtient la solution

$$S(t) = s_0 e^{\sigma(W(t)-W(t_0)) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)}.$$

Prenons maintenant l'espérance conditionnelle des deux côtés pour trouver la moyenne conditionnelle de la solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t) | \mathcal{F}_{t_0}) &= \mathbb{E}\left(s_0 e^{\sigma(W(t)-W(t_0)) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)} | \mathcal{F}_{t_0}\right) \\ &= s_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)} \mathbb{E}\left(e^{\sigma(W(t)-W(t_0))} | S(t_0) = s_0\right) \\ &= s_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)} \\ &= s_0.\end{aligned}$$

De plus, la variance conditionnelle de la solution est obtenue comme suit

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(S(t) | \mathcal{F}_{t_0}) &= \text{Var}\left(s_0 e^{\sigma(W(t)-W(t_0)) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)} | \mathcal{F}_{t_0}\right) \\
 &= s_0^2 e^{-\sigma^2(t-t_0)} \text{Var}\left(e^{\sigma(W(t)-W(t_0))} | \mathcal{F}_{t_0}\right) \\
 &= s_0^2 e^{-\sigma^2(t-t_0)} \left[\mathbb{E}\left(e^{2\sigma(W(t)-W(t_0))} | S(t_0) = s_0\right) - \mathbb{E}^2\left(e^{\sigma(W(t)-W(t_0))} | S(t_0) = s_0\right)\right] \\
 &= s_0^2 e^{-\sigma^2(t-t_0)} \left[e^{2\sigma^2(t-t_0)} - e^{\sigma^2(t-t_0)}\right] \\
 &= s_0^2 \left[e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1\right].
 \end{aligned}$$

2.2 Équation différentielles stochastique avec retard (Delai)

Notons que, dans le secteur financier ; les traders veulent prévoir les mouvements du marché (puisque les paramètres du marché se comportent de manière aléatoire) et prédire les risques avant de faire leurs investissements. Ils utilisent donc les informations disponibles sur les marchés passés et font des inférences statistiques. Cependant, ces données historiques ne peuvent pas être utilisées dans les EDS qui est le modèle utilisé pour comprendre les mouvements futurs du marché. Nous appelons cette information passée un retard ou une mémoire et elle est généralement désignée par τ . Par l'introduction de ce terme de retard dans le modèle, nous obtenons un modèle plus réaliste et meilleur. Les équations avec ce terme supplémentaire sont appelées équations différentielles stochastiques à retard (EDSD). Considérons à nouveau le modèle de prix des actions de l'exemple 2.1.1. où le retard ne peut être ajouté que dans le terme de dérive, alors l'équation devient

$$dS(t) = f(t, S(t), S(t - \tau))dt + \sigma S(t)dW(t),$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ou bien, il peut n'affecter que le terme de diffusion et nous obtenons

$$dS(t) = \mu S(t)dt + g(t, S(t), S(t - \tau))dW(t),$$

où $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Il est également possible d'ajouter le retard dans les deux termes et notre EDS devient

$$dS(t) = f(t, S(t), S(t - \tau))dt + g(t, S(t), S(t - \tau))dW(t).$$

Dans ces trois cas, la nouvelle forme de l'équation définit une EDSD. Voyons maintenant la formulation générale de ce type d'équation.

2.2.1 Existence et unicité de solution des équations différentielles stochastiques avec retard

Dans cette section, nous donnons d'abord la formulation générale des équations différentielles stochastiques avec retard. Ensuite, nous discutons un théorème d'existence et d'unicité de solution des EDSD. Avant de donner ce théorème, nous introduisons quelques définitions pour comprendre clairement les conditions.

Définition 2.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles et $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))^T$, $t \geq 0$, un mouvement brownien standard à m dimensions sur cet espace de probabilité. Les équations différentielles stochastiques retardement (EDSD) avec un horizon temporel fixe $T > 0$ sont sous la forme*

$$\begin{cases} dX(t) = F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t), & t \in [0, T] \\ X(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.4)$$

où le retard τ est un nombre fini positif fixe et l'état initial $\varphi(t) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une variable aléatoire continue et \mathcal{F}_0 -mesurable telle que

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Les fonctions de dérive et de diffusion dans l'équation est donnée comme suit : $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $G : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, respectivement.

- $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^+ et $\|\cdot\|$ désigne la norme de matrice induite correspondante. $Z \in L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ signifie que $\mathbb{E}(|Z|^p) < \infty$. La norme L_p d'une variable aléatoire $Z \in L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sera notée par $\|Z\|_p := (\mathbb{E}(|Z|^p))^{\frac{1}{p}}$, où E est l'esperance par rapprt à la mesure de probabilité P .

Dans ce chapitre, nous limitons notre attention sur les EDSD à valeur réelle, c'est à dire que nous allons $n = m = 1$. Énonçons maintenant la définition des EDSD à valeur réelle.

Définition 2.2.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet dont la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles et $W(t)$, $t \geq 0$, être un mouvement brownien standard sur l'espace de probabilité donné. Alors le EDSD se présente sous la forme

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), X(t-\tau)) dt + g(t, X(t), X(t-\tau)) dW(t), & t \in [0, T] \\ X(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.5)$$

où le délai τ est un nombre fini positif fixe et $\varphi(t) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est l'état initial et il est supposé être une variable aléatoire continue et mesurable par rapors \mathcal{F}_0 telle que

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Les fonctions de dérive et de diffusion dans l'équation sont données par $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement.

Remarque 2.2.1 Si une solution $X(\cdot)$ à valeur réelle de l'EDSD existe, alors la forme intégrale de (2.5) peut être écrite comme suit

$$X(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, X(s), X(s-\tau)) ds + \int_0^t g(s, X(s), X(s-\tau)) dW(s).$$

Cette équation est une intégrale stochastique (à cause de la deuxième intégrale dans l'équation) qui est interprétée au sens d'Itô.

Maintenant, notre but est d'expliquer les conditions imposées sur la fonction initiale $\varphi(\cdot)$, le terme de dérive f et le terme de diffusion g pour garantir que la EDSD a une solution unique. Ces conditions sont rassemblées sous le théorème d'existence et d'unicité. Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité, considérons quelques concepts qui facilitent le suivi et la compréhension de ce théorème.

Définition 2.2.3 Si un processus stochastique $X(t) : [-\tau, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un processus mesurable, continu tel que $X(t)$ est $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté satisfaisant (2.5) presque sûrement, avec la condition initiale $X(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, alors elle est appelée solution forte pour l'équation (2.5).

Remarque 2.2.2 Deux processus, X et Y , sont dits indiscernables s'il existe un événement $A \subseteq \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ et que ces processus satisfont $X_t(w) = Y_t(w)$ pour tout $w \in A$ et tout $t \geq 0$. Cela signifie en fait qu'ils ont presque sûrement (c'est à dire avec une probabilité de un).

Définition 2.2.4 On dit que les fonctions f et g de l'équation (2.5) satisfont la condition de Lipschitz locale, s'il existe une constante positive K tel que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \vee |g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$ où $|x| \vee |y| = \max\{|x|, |y|\}$. Ces constantes K sont appelées les constantes de Lipschitz.

Définition 2.2.5 *S' il existe une constante positive K satisfaisant*

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \vee |g(t, x, y_1) - g(t, x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|,$$

pour tout y_1 et y_2 sont $\in \mathbb{R}$ et tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, alors les fonction f et g dans l'équation (2.5) sont dites satisfons la condition de Lipschitz faiblement ou localement.

Définition 2.2.6 *Les fonctions f et g de l'équation (2.5) satisfons la condition de croissance linéaire, s' il existe un constante positive L satisfaisant*

$$|f(t, x, y)|^2 \vee |g(t, x, y)|^2 \leq L (1 + |x|^2 + |y|^2)$$

pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le théorème d' existence et d' unicité pour les ESDS.

Théorème 2.2.1 *Si les fonctions f et g dans l'équation (2.5) satisfons la condition Lipschitz et la condition de croissance linéaire, alors il existe une solution forte unique de l'équation (2.5) pour $t \geq -\tau$. De plus, la condition de croissance linéaire garantit que la solution satisfait*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{-\tau \leq t \leq T} |X(t)|^2 \right) < \infty, \quad \forall T > 0.$$

La preuve dépend de la technique standard des itération de Picard. Notons que, lorsque $t \in [0, \tau]$, $X(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$, qui est la trajectoire initiale donnée puisque

$-\tau \leq t - \tau \leq 0$. Par conséquent, l'EDSD (2.5) peut être écrite comme suit

$$dX(t) = f(t, X(t), \varphi(t - \tau)) dt + g(t, X(t), \varphi(t - \tau)) dW(t),$$

où la donnée initiale est $X(0) = \varphi(0)$. Notons que après avoir trouvé la solution $X(t)$ sur $[0, \tau]$ est trouvée, nous pouvons procéder à l'itération sur les autres intervalles $[i\tau, (i + 1)\tau]$ pour tous les paramètres suivants $i = 1, 2, \dots$ pour obtenir le processus de solution sur $[-\tau, \infty)$.

2.2.2 Exemples d'équations différentielles stochastique avec retard

La procédure pour trouver la solution basée encore sur la formule d'Itô, mais elle est un peu différente de celle utilisée dans les EDS en raison de l'effet de retard que nous insérons dans l'équation. Nous devons procéder étape par étape dans les intervalles avec une taille égale τ à partir du point initial à partir du point initial. Maintenant, examinons les exemples suivants pour comprendre la technique et voir la différence entre les deux.

Exemple 2.2.1 *Considérons un exemple de EDSD tel que le retard n'affecte que le terme de dérive et le terme de diffusion est un nombre réel constant β*

$$\begin{cases} dX(t) = X(t - \tau) dt + \beta dW(t), & t \geq 0, \\ X(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Supposons que $\varphi(t)$ soit une fonction continue pour $t \in [-\tau, 0]$, qui satisfait la condition du théorème 3.2. Nous vérifions d'abord les conditions nécessaires pour le théorème d'existence et d'unicité, puis nous résolvons cette EDSD avec une trajectoire initiale donnée. Notons que $f(t, x, y) = y$ et $g(t, x, y) = \beta$ sont des termes

de dérive et de diffusion, respectivement, selon la définition générale d' une EDSD.

Alors

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| = |y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

$$|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| = |\beta - \beta| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Les deux inégalités précédentes montrent que la condition locale de Lipschitz est satisfaite. De plus, la condition de croissance linéaire est également satisfaite pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ puisque

$$|f(t, x, y)|^2 = |y|^2 \leq 1 + |x|^2 + |y|^2,$$

$$|g(t, x, y)|^2 = |\beta|^2 \leq |\beta|^2 (1 + |x|^2 + |y|^2).$$

En conséquence, le EDSD donné dans l' exemple a une solution forte unique, et cette solution $X(\cdot)$ satisfaite

$$\mathbb{E} \left(\sup_{-\tau \leq t \leq T} |X(t)|^2 \right) < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Après avoir montré que la solution est unique, nous sommes prêts de résoudre l'équation par la formule Itô. Définissons $\varphi(t) =: \varphi_1(t)$.

Pour $t \in [0, \tau]$: $t - \tau \in [-\tau, 0]$, ce qui implique que $X(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau)$ et notre EDSD définit en fait le EDS suivant

$$dX(t) = \varphi_1(t - \tau) dt + \beta dW(t).$$

Par la formule d' Itô

$$\begin{aligned} X(t) &= \varphi_1(0) + \int_0^t \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 + \int_0^t \beta dW(u_1), \\ &= \varphi_1(0) + \int_0^t \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 + \beta W(t), \\ &=: \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Pour $t \in [\tau, 2\tau]$: $t - \tau \in [0, \tau]$. Donc, $X(t - \tau) = \varphi_2(t - \tau)$ et l' équation devient

$$dX(t) = \varphi_2(t - \tau) dt + \beta dW(t).$$

Par la formule d' Itô on a

$$\begin{aligned} X(t) &= \varphi_2(\tau) + \int_{\tau}^t \varphi_2(u_2 - \tau) du_2 + \int_{\tau}^t \beta dW(u_2), \\ &= \varphi_2(\tau) + \int_{\tau}^t \left[\varphi_1(0) + \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 + \beta W(u_2 - \tau) \right] du_2 + \int_{\tau}^t \beta dW(u_2), \\ &= \varphi_2(\tau) + \varphi_1(0)(t - \tau) + \int_{\tau}^t \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 du_2, \\ &\quad + \int_{\tau}^t \beta dW(u_2 - \tau) du_2 + \beta(W(t) - W(\tau)), \\ &=: \varphi_3(t). \end{aligned}$$

Pour $t \in [2\tau, 3\tau]$: $t - \tau \in [\tau, 2\tau]$. Ainsi, $X(t - \tau) = \varphi_3(t - \tau)$ et l' équation se transforme en

$$dX(t) = \varphi_3(t - \tau) dt + \beta dW(t).$$

En appliquant à nouveau la formule d' Itô

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \varphi_3(2\tau) + \int_{2\tau}^t \varphi_3(u_3 - \tau) du_3 + \int_{2\tau}^t \beta dW(u_3) \\
 &= \varphi_3(2\tau) + \int_{2\tau}^t \left[\varphi_2(\tau) + \varphi_1(0)(u_3 - 2\tau) + \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 du_2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \beta W(u_2 - \tau) du_2 + \beta(W(u_3 - \tau) - W(\tau)) \right] du_3 + \beta(W(t) - W(2\tau)) \\
 &= \varphi_3(2\tau) + \varphi_2(\tau)(t - 2\tau) + \int_{2\tau}^t \varphi_1(0)(u_3 - 2\tau) du_3 \\
 &\quad + \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 du_2 du_3 + \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \beta W(u_2 - \tau) du_2 du_3 \\
 &\quad + \int_{2\tau}^t \beta(W(u_3 - \tau) - W(\tau)) du_3 + \beta(W(t) - W(2\tau)) \\
 &=: \varphi_4(t).
 \end{aligned}$$

Nous pouvons répéter cette procédure sur les intervalles $[i\tau, (i+1)\tau]$, pour $i = 3, 4, \dots$ et construire la solution de manière récursive pour cette EDSD. Jusqu'à présent, nous avons calculé

$$X(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), t \in [-\tau, 0], \\ \varphi_2(t) = \varphi_1(0) + \int_0^t \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 + \beta W(t), t \in [0, \tau] \\ \varphi_3(t) = \varphi_2(\tau) + \varphi_1(0)(t - \tau) + \int_{\tau}^t \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 du_2 \\ \quad + \int_{\tau}^t \beta dW(u_2 - \tau) du_2 + \beta(W(t) - W(\tau)), t \in [\tau, 2\tau] \\ \varphi_4(t) = \varphi_3(2\tau) + \varphi_2(\tau)(t - 2\tau) + \int_{2\tau}^t \varphi_1(0)(u_3 - 2\tau) du_3 \\ \quad + \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \int_0^{u_2 - \tau} \varphi_1(u_1 - \tau) du_1 du_2 du_3 + \int_{2\tau}^t \int_{\tau}^{u_3 - \tau} \beta W(u_2 - \tau) du_2 du_3 \\ \quad + \int_{2\tau}^t \beta(W(u_3 - \tau) - W(\tau)) du_3 + \beta(W(t) - W(2\tau)), t \in [2\tau, 3\tau]. \end{cases} \quad (2.7)$$

La relation de récurrence de la solution $\varphi_n(t)$ pour $t \in [(n-2)\tau, (n-1)\tau]$ peut être écrite comme suit :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi_{n-1}((n-2)\tau) + \int_{(n-2)\tau}^t \varphi_{n-1}(s-\tau) ds + \beta(W(t) - W((n-2)\tau)), \\ \text{pour } n = 2, 3, \dots, \\ \varphi_1(t), n = 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Méthodes numériques pour les EDS

Rappelons la formulation pour EDS dans la section 3.1 qui est donnée par

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

Considérons une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ et définissons $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n) = W(\Delta t_{n+1})$ pour $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Ils représentent respectivement la taille de pas pour le temps et l'accroissement du mouvement brownien standard, respectivement.

Nous savons que le mouvement brownien $W(\cdot)$ est un processus à temps continu qui satisfies les propriétés d'accroissement indépendant et stationnaire, de trajectoire continue. De plus $W(t)$ est normalement distribué avec une moyenne de 0 et une variance de t . En utilisant le théorème des limites centrales, on peut écrire

$$W_t - W_s = W_{t-s} \sim \sqrt{t-s} \mathcal{N}(0, 1), \quad 0 \leq s \leq t.$$

En utilisant cette idée, nous pouvons réécrire la fonction d'accroissement du mouvement brownien standard comme

$$\begin{aligned}\Delta W_{n+1} &= \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_{n+1}, \\ \Delta W_{n+1} &= \sqrt{\Delta t_{n+1}} Z_{n+1},\end{aligned}$$

pour une certaine variable aléatoire $Z_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On notera que la taille de pas est uniforme pour le temps h , signifie $h = T/N$ puis $t_n = nh$ avec $n = 0, 1, \dots, N$. De plus, l'incrément de temps et le mouvement brownien standard correspondent à $\Delta t_{n+1} = h$ et $\Delta W_{n+1} = W(h) = \sqrt{h} Z_{n+1}$ pour tous les $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ respectivement.

Supposon que \tilde{X}_n soit une approximation de la solution forte de l'équation (2.1), en utilisant une méthode stochastique à un pas avec une fonction d'incrémentatation ϕ

$$\begin{cases} \tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + \phi(\Delta t_{n+1}, \tilde{X}_n, \Delta W_{n+1}), & n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \\ \tilde{X}(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où la fonction $\phi(\Delta t, x, \Delta W)$ est continue dans les trois variables et satisfaite une condition de Lipschitz locale en x .

Nous utilisons également les notation suivant, $X(t_{n+1})$ désigne la valeur de la solution exacte de l'équation (2.1), au point t_{n+1} , \tilde{X}_{n+1} désigne l'approximation de la solution forte à l'aide de l'équation (3.1), $\tilde{X}(t_{n+1})$ représente la valeur localement approximative obtenue après une seule étape de l'équation (3.1), c'est à dire,

$$\tilde{X}(t_{n+1}) = X(t_n) + \phi(\Delta t_{n+1}, X(t_n), \Delta W_{n+1}).$$

Après ces notations, donnons quelques définitions.

Définition 3.0.7 *L'erreur locale de $\{\tilde{X}(t_n)\}$ entre deux instants consécutifs t_n et*

t_{n+1} pour tout $n = 1, 2, \dots, N$, définie par

$$\delta_n = X(t_n) - \tilde{X}(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Le schéma numérique $\tilde{X}(t_n)$ est dit local d'ordre α si

$$X(t_n) - \tilde{X}(t_n) = O(h^{\alpha+1}).$$

Définition 3.0.8 *L'erreur globale $\{\tilde{X}_n\}$ d'un point de départ t_0 au point final $t_N = T$ est définie par*

$$\epsilon_n = X(t_n) - \tilde{X}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

De même, le schéma numérique \tilde{X}_n est dit global d'ordre β si

$$X(t_n) - \tilde{X} = O(h^{\beta+1}).$$

Maintenant, nous pouvons considérer la manière de mesurer la précision d'une solution numérique de l'EDS. Les plus utilisées sont la convergence forte et la convergence faible.

Définition 3.0.9 *L'approximation discrétisée en temps \tilde{X} avec une taille de pas h converge fortement vers X au temps T si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\left| X(T) - \tilde{X}_N \right| \right) = 0.$$

On dit que \tilde{X} converge fortement vers X avec un ordre (global) p si on a

$$\mathbb{E} \left(\left| X(T) - \tilde{X}_N \right| \right) \leq Ch^p,$$

pour some $C > 0$ qui ne dépend pas de h .

Définition 3.0.10 *L'approximation \tilde{X} avec une taille de pas uniforme h converge faiblement vers X au temps T si la condition suivante est satisfaite pour toute fonction continuellement différentiable g*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \mathbb{E}(g(X(T))) - \mathbb{E}\left(g\left(\tilde{X}_N\right)\right) \right| = 0.$$

\tilde{X} converge faiblement vers X avec un ordre p signifie

$$\left| \mathbb{E}(g(X(T))) - \mathbb{E}\left(g\left(\tilde{X}_N\right)\right) \right| \leq Ch^p,$$

pour un certain nombre constant positif C indépendant de h .

Remarque 3.0.3 *La convergence forte mesure la moyenne de l'erreur des moyennes de la solution et de l'approximation avec une fonction g continuellement différentiable donnée.*

Après ces définitions, nous sommes prêt à introduire deux schémas numériques importants, qui sont, la méthode d' Euler Maruyama et la méthode de Milstein.

3.1 Méthode d'Euler Maruyama pour les EDS

Le schéma d' Euler Maruyama est le plus connue et le plus utile dans le calcul stochastique pour trouver une solution approximative à une EDS donnée. Considérons la forme générale des EDS donnée par l'équation (2.1) et la partition de l' intervalle de temps $[0, T]$, de la forme $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, où l'accroissement du temps et le mouvement Brownien sont $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$, respectivement. La fonction ϕ dans l' équation (3.1) pour la méthode d' Euler Ma-

ruyama est définie comme suit

$$\phi \left(\Delta t_{n+1}, \tilde{X}_n, \Delta W_{n+1} \right) = f \left(t_n, \tilde{X}_n \right) \Delta t_{n+1} + g \left(t_n, \tilde{X}_n \right) \Delta W_{n+1}, \quad (3.2)$$

pour tout $n = 0, 1, \dots, N - 1$ où $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}(0) = x_0$. Ensuite, en mettant en oeuvre cette fonction d'accroissement dans l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_{n+1}) &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta t_{n+1} + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta W_{n+1}, \\ &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta t_{n+1} + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \sqrt{\Delta t_{n+1}} Z_{n+1}, \end{aligned}$$

où Z_{n+1} est une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne 0 et de variance 1 pour tout $0 \leq n \leq N - 1$. Cette équation est connue comme une approximation discrétisée dans le temps de $X(t)$ en utilisant la méthode d'Euler Maruyama. Pour la taille de pas uniforme h sur cet intervalle donnée, l'équation peut être réécrite comme suit

$$\tilde{X}(t_{n+1}) = \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) h + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \sqrt{h} Z_{n+1}.$$

3.2 Méthode de Milstein pour les EDS

Maintenant, nous allons expliquer une autre méthode très connue pour trouver une solution approximative à l'EDS, à savoir la méthode de Milstein. Considérons à nouveau la même EDS et la même partition de l'intervalle de temps. La fonction ϕ dans l'équation (3.1) pour la méthode de Milstein est donnée par

$$\begin{aligned} \phi \left(\Delta t_{n+1}, \tilde{X}_n, \Delta W_{n+1} \right) &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta t_{n+1} + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta W_{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \left(\Delta W_{n+1}^2 - \Delta t_{n+1} \right), \end{aligned}$$

où $g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right)$ est la dérivée de g par rapport à \tilde{X} pour tout $n = 0, 1, \dots, N - 1$. De plus, on définit $\tilde{X}(0) = x_0$ comme valeur initiale. Alors l'équation (3.1) peut être réécrite en utilisant cette fonction d'accroissement comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_{n+1}) &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta t_{n+1} + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta W_{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) (\Delta W_{n+1}^2 - \Delta t_{n+1}), \end{aligned}$$

pour tout les $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Pour un maillage à pas uniforme hon l'intervale $[0, T]$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_{n+1}) &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) h + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \Delta W_{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) (\Delta W_{n+1}^2 - h), \\ &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) h + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \sqrt{h} Z_n \\ &\quad + \frac{1}{2} g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) (h Z_n^2 - h), \\ &= \tilde{X}(t_n) + f \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) h + g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) \sqrt{h} Z_n \\ &\quad + \frac{1}{2} g \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) g' \left(t_n, \tilde{X}(t_n) \right) h (Z_n^2 - 1). \end{aligned}$$

3.3 Méthodes numériques pour les EDSD

Nous allons considérer une EDSD générale par l'équation (2.5) sous la forme autonome pour simplifier, c'est à dire que les fonctions f et g ne dépendent pas explicitement de t

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t), X(t - \tau)) dt + g(X(t), X(t - \tau)) dW(t), t \in [0, T], \\ X(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Considérons une partition de l'intervalle $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, avec une taille de pas uniforme h alors $h = T/N$ et $t_n = nh$ où $n = 0, 1, \dots, N$. De plus, on définit un nombre entier positif N_τ tel que $N_\tau h = \tau$.

Définissons l'incrément de temps et le mouvement brownien standard avec une taille de pas uniforme telle de pas h comme dans les EDS

$$\begin{aligned}\Delta t_{n+1} &= t_{n+1} - t_n = h, \\ \Delta W_{n+1} &= W(t_{n+1}) - W(t_n) = \Delta W(h) = \sqrt{h}Z_{n+1},\end{aligned}$$

pour une certaine variable aléatoire $Z_{n+1} \in \mathcal{N}(0, 1)$, où $0 \leq n \leq N - 1$. Supposons que \tilde{X}_n soit une approximation de la solution forte de l'équation (3.3), en utilisant une méthode stochastique explicite à un pas avec une fonction d'incrément ϕ

$$\begin{cases} \tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + \phi\left(h, \tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N}, \Delta W_{n+1}\right), 0 \leq n \leq N - 1, \\ \tilde{X}_{n-N\tau} = \varphi(t_n - \tau), 0 \leq n \leq N_\tau. \end{cases} \quad (3.4)$$

Par fois, nous supposons que pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la fonction d'incrément ϕ satisfait les conditions suivantes

$$\begin{cases} |\mathbb{E}(\phi(h, x, y, \Delta W_{n+1}) - \phi(h, x', y', \Delta W_{n+1}))| \leq C_1 h (|x - x'| + |y - y'|), \\ \mathbb{E}\left(|\phi(h, x, y, \Delta W_{n+1}) - \phi(h, x', y', \Delta W_{n+1})|^2\right) \leq C_2 h (|x - x'|^2 + |y - y'|^2), \end{cases} \quad (3.5)$$

où C_1 et C_2 sont des nombres constants positifs.

Les notations suivantes sont également utilisées

$X(t_{n+1})$ désigne la valeur de la solution exacte de l'équation (3.3) au point t_{n+1} , \tilde{X}_{n+1} désigne la valeur de la solution approchée à l'aide de l'équation (3.4) et $\tilde{X}(t_{n+1})$ désigne la valeur localement approximative obtenue après une seule étape

de l'équation (3.4) c'est à dire,

$$\tilde{X}_{n+1} = X(t_n) + \phi(h, X(t_n), X(t_n), X(t_{n-N_\tau}), \Delta W_{n+1}).$$

Nous allons donner quelques définitions qui sont liées à la manière de mesurer la précision d'une solution numérique approximative de EDS.

Définition 3.3.1 *L'erreur locale de $\{\tilde{X}(t_n)\}$ est la suite de variables aléatoires*

$$\delta_n = X(t_n) - \tilde{X}(t_n), n = 1, 2, \dots, N.$$

L'erreur locale mesure la différence entre l'approximation et la solution exacte sur un sous-intervalle de l'intégration.

Définition 3.3.2 *L'erreur globale de $\{\tilde{X}_n\}$ est la suite de variables aléatoires*

$$\epsilon_n = X(t_n) - \tilde{X}_n, n = 1, 2, \dots, N.$$

L'erreur globale mesure la différence entre l'approximation et la solution exacte sur tout le domaine d'intégration.

Définition 3.3.3 *Si la méthode explicite à un pas définie dans l'équation (3.4) satisfait aux conditions suivantes :-l'erreur globale est égale à la différence entre l'approximation et la solution exacte conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbb{E}(\delta_n)| &\leq Ch^{p_1} \text{ comme } h \rightarrow 0, \\ \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbb{E}(\delta_n)^2|^{\frac{1}{2}} &\leq Ch^{p_2} \text{ comme } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pour certaines constantes positives $p_2 \geq \frac{1}{2}, p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}$ et C qui ne dépend pas de

h mais peut dépendre de la condition initiale φ et T alors on dit qu'il est cohérent avec l'ordre p_1 au sens moyen et avec l'ordre p_2 au sens carré moyen.

Définition 3.3.4 *la méthode de l'équation (3.4) est convergente dans la moyenne avec l'ordre p_1 et dans le carré moyen avec l'ordre p_2 si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbb{E}(\epsilon_n)| &\leq Ch^{p_1} \text{ comme } h \rightarrow 0, \\ \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbb{E}(\epsilon_n)^2|^{\frac{1}{2}} &\leq Ch^{p_2} \text{ comme } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

encore une fois, la constante C est indépendante de h , mais peut dépendre de la fonction initiale φ et T .

Remarque 3.3.1 *Notons que la cohérence de la méthode concerne l'erreur locale alors que la convergence est liée à l'erreur globale.*

Théorème 3.3.1 *Supposons que les termes de dérive et de diffusion, à savoir les fonction f et g , remplissent la condition de Lipschitz local de Lipschitz et une condition de croissance linéaire. De plus, supposons que la fonction d'incrémentation φ dans l'équation (3.4) satisfait aux conditions de l'équation (3.5) l'équation (3.4) est cohérente avec l'ordre p_1 au sens moyen et l'ordre p_2 au sens carré moyen. Alors l'approximation dans l'équation (3.4) pour l'équation (3.3) est convergente dans L_2 avec l'ordre $p = p_2 - \frac{1}{2}$ ce qui signifie que la convergence se produit au sens du carré moyen et nous pouvons écrire*

$$\max_{1 \leq n \leq N} |\mathbb{E}(\epsilon_n)^2|^{\frac{1}{2}} \leq Ch^p \text{ comme } h \rightarrow 0,$$

Preuve. *La preuve détaillée peut être trouvée dans [2]. ■*

Maintenant, nous pouvons énoncer la méthode numérique la plus connue à savoir Euler Maruyama pour les ESDS pour trouver une solution approximative.

3.4 Méthode d' Euler Maruyama pour les ESD

Considérons une approximation avec une taille de pas uniforme h sur l' intervalle $[0, T]$, c' est à dire $h = T/N$ et $t_n = nh$ où $n = 0, 1, \dots, N$. De plus, définissons un nombre entier positif N_τ tel que $N_\tau h = \tau$. La fonction d' incrémentation ϕ dans l' équation (3.4) pour la méthode Euler Maruyama est définie comme suit

$$\phi\left(h, \tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}, \Delta W_{n+1}\right) = f\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) h + g\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) \Delta W_{n+1}, \quad (3.6)$$

pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Alors, l' équation (3.4) devient

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n+1} &= \tilde{X}_n + f\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) h + g\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) \Delta W_{n+1}, \\ &= f\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) h + g\left(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-N_\tau}\right) \sqrt{h} Z_{n+1}, \end{aligned}$$

pour tout $n - N_\tau \geq 0$, où Z_{n+1} correspond à une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne 0 et de variance 1, et pour tout indice $n - N_\tau \leq 0$ on définit $\tilde{X}_{n-N_\tau} := \Psi(t_n - \tau)$.

Théorème 3.4.1 *Supposons que les fonctions à coefficients f et g dans l' équation (3.3) satisfassent les conditions du théorème d' existence et d' unicité, à savoir les conditions de Lipschitz local et de croissance linéaire conditions de croissance linéaire. Alors le schéma d' Euler Maruyama est chérent avec l' ordre $p_1 = 2$ au sens carré moyen.*

Preuve. La preuve complète peut être trouvée dans [1]. ■

Lemme 3.4.1 *Si l'équation (3.3) a une solution forte unique, alors la fonction d'incrément ϕ dans l'équation (3.6) satisfait les conditions de l'équation (3.5).*

Supposons que nous ayons que nous ayons une solution forte unique, ce qui signifie que les fonctions de coefficient f et g satisfont les L locaux f et g satisfont les conditions locales de Lipschitz et de croissance linéaire. Montrons pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, il existe des nombres constants C_1 et C_2 pour que les conditions de l'équation (3.5) soient remplies.

Preuve. puisque $\mathbb{E}(W(t)) = 0$ et comme f satisfait la condition locale de Lipschitz

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbb{E} \left(\phi(h, x, y, \Delta W_{n+1}) - \phi(h, x', y', \Delta W_{n+1}) \right) \right| \\
 &= \left| \mathbb{E} \left(f(x, y) h + g(x, y) \Delta W_{n+1} - f(x', y') h - g(x', y') \Delta W_{n+1} \right) \right|, \\
 &\leq \left| \mathbb{E} \left(f(x, y) h - f(x', y') h \right) \right| + \left| \mathbb{E} \left(g(x, y) \Delta W_{n+1} - g(x', y') \Delta W_{n+1} \right) \right|, \\
 &\leq h \left| f(x, y) - f(x', y') \right| + \left| g(x, y) - g(x', y') \right| |\mathbb{E}(\Delta W_{n+1})|, \\
 &\leq h \left| f(x, y) - f(x', y') \right|, \\
 &\leq C_1 h \left(|x - x'| + |y - y'| \right),
 \end{aligned}$$

Comme $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left(\left| \phi(h, x, y, \Delta W_{n+1}) - \phi(h, x', y', \Delta W_{n+1}) \right|^2 \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left| f(x, y)h + g(x, y)\Delta W_{n+1} - f(x', y')h - g(x', y')\Delta W_{n+1} \right|^2 \right), \\
 &= \mathbb{E} \left(\left| (f(x, y) - f(x', y'))h + (g(x, y) - g(x', y'))\Delta W_{n+1} \right|^2 \right), \\
 &\leq \mathbb{E} \left(\left(\left| (f(x, y) - f(x', y'))h \right| + \left| (g(x, y) - g(x', y'))\Delta W_{n+1} \right| \right)^2 \right), \\
 &\leq \mathbb{E} \left(2h^2 \left| f(x, y) - f(x', y') \right|^2 + 2\Delta W_{n+1}^2 \left| g(x, y) - g(x', y') \right|^2 \right), \\
 &\leq 2h^2 \left| f(x, y) - f(x', y') \right|^2 + 2 \left| g(x, y) - g(x', y') \right|^2 \mathbb{E}(\Delta W_{n+1}^2), \\
 &\leq L_1 2h^2 \left(\left| x - x' \right| + \left| y - y' \right| \right)^2 + L_2 2h^2 \left(\left| x - x' \right| + \left| y - y' \right| \right)^2, \\
 &\leq L_1 2h^2 \left(2 \left| x - x' \right|^2 + 2 \left| y - y' \right|^2 \right) + L_2 2h^2 \left(2 \left| x - x' \right|^2 + 2 \left| y - y' \right|^2 \right), \\
 &\leq C_2 h \left(\left| x - x' \right|^2 + \left| y - y' \right|^2 \right).
 \end{aligned}$$

■

Remarque 3.4.1 *D'après le théorème 3.4.1 et le lemme 3.4.1, la méthode d'Euler et de Maruyama satisfait au théorème 3.3.1 avec un ordre de convergence $p = 1/2$ dans sens des carrés moyens et nous pouvons écrire*

$$\max_{1 \leq n \leq N} (\mathbb{E} |\epsilon_n|^2)^{1/2} \leq Ch^{1/2} \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Si l'équation [\(3.3\)](#) comporte un bruit additif (la fonction g ne dépend pas de X), la méthode d'Euler Maruyama est cohérente avec l'ordre $p_1 = 2$ dans la moyenne et l'ordre $p_2 = 3/2$ au sens du moyen carré. Dans ce cas, la méthode de converge avec l'ordre $p = 1$ dans le sens du moyen carré et nous obtenons

$$\max_{1 \leq n \leq N} (\mathbb{E} |\epsilon_n|) \leq Ch \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Conclusion

Cette étude nous permis de comprendre les méthodes de discrétisation des équations différentielles stochastiques, ces équations possèdent une unique solution forte. *En conclusion*, il est parfois difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations. Pour cet objectif, nous avons donné quelques rappels de base concernant de calcul stochastique, puis, nous avons abordé l'existence et l'unicité dans les équations différentielles stochastiques, puis, on étudie le schéma d'Euler et le schéma de Milstein.

Bibliographie

- [1] C. T. Baker and E. Buckwar, Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations, MCCM Numerical Analysis Technical Report, Manchester University, ISSN, 1360, pp. 17-25, 1999.
- [2] E. Buckwar, Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations, Journal of computational and applied mathematics, 125(1), pp. 297–307, 2000.
- [3] D. J. Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, SIAM review, 43(3), pp. 525–546, 2001.
- [4] B. Oksendal, Stochastic differential equations : an introduction with applications, Springer Science & Business Media, 2013.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
MB	Mouvement Brownien.
$\langle X, X \rangle_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
\exp	Exponentiel.
\limsup	Limite supérieur
b	Drift.
σ	Coefficient de diffusion.
\max, \min	maximum, minimum
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .
$s \wedge t$	$\min(s, t)$.
$i.i.d$	indépendantes identiquement distribuées
$\mathcal{B}(\cdot)$	Tribu Borélienne
$\frac{\partial}{\partial x}$	La dérivé partielle première par rapport à la variable x .
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	La dérivé partielle seconde par rapport à la variable x .
EDS	équation différentielle stochastique.
EDSD	équations différentielles des retarsd stochastiques

Résumé:

Dans ce mémoire, les équations différentielles stochastique et les équations différentielles stochastique avec délai (EDS et EDSD) sont traitées avec leurs définitions et leurs approches numériques. Les propriétés des SDE sont fournies pour rendre le concept facile à suivre pour les EDSD en raison de leur caractéristique compliquée. L'existence et les propriétés de résolution des EDSD sont discutées et quelques exemples sont fournis pour clarifier le concept de travail. Ces exemples sont obtenus à partir d'exemples de EDS en y ajoutant un terme de retard. Afin de les résoudre, l'itération est utilisée (l'intervalle de temps est divisé en morceaux avec une longueur du terme de retard). Nous concluons nos exemples en en donnant des solutions générales sous forme itérative et les valeurs attendues correspondantes. En donnant une étude comparative entre les exemples de SDDE et SDE.

Summary:

In this dissertation, stochastic differential equations and stochastic differential equations with delay (EDS and EDSD) are treated with their definitions and numerical approaches. The properties of SDEs are provided to make the concept easy to follow for EDSDs due to their complicated characteristic. The existence and resolving properties of EDSD are discussed and some examples are provided to clarify the working concept. These examples are obtained from examples of EDS by adding a delay term. In order to solve them, iteration is used (the time interval is divided into chunks with a length of the delay term). We conclude our examples by giving general solutions in iterative form and the corresponding expected values. By giving a comparative study between the examples of SDDE and SDE.

ملخص:

في هذه الرسالة ، يتم التعامل مع المعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات التفاضلية العشوائية مع التأخير (EDS و EDSD) بتعريفاتها وأساليبها العددية. يتم توفير خصائص SDEs لتسهيل متابعة المفهوم بالنسبة لـ EDSDs نظرًا لخصائصها المعقدة. تمت مناقشة وجود وحل خصائص EDSD وقدمت بعض الأمثلة لتوضيح مفهوم العمل. يتم الحصول على هذه الأمثلة من أمثلة EDS عن طريق إضافة مصطلح تأخير. من أجل حلها ، يتم استخدام التكرار (يتم تقسيم الفاصل الزمني إلى أجزاء بطول مدة التأخير). (نختتم أمثلةنا بإعطاء حلول عامة في شكل تكراري والقيم المتوقعة المقابلة. من خلال اعطاء دراسة مقارنة بين أمثلة SDDE و SDE.