

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

SAADI Alima

Titre :

Les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication

Membres du Comité d'Examen :

Prof.	MOKHTARI Zouhir	UMKB	Président
Prof.	MENACER Tidjani	UMKB	Encadreur
Dr.	BOUZIANE Nadjette	UMKB	Examineur

Juin 2021

DÉDICACE

♡À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifié
pour me voir réussir.♡

♡À qui je dois ce qui je suis ; à toi mon cher père "**Saadi Mabrouk**".♡

♡Je te dédie ce diplôme **papa** car c'est à toi le dois et grâce à toi que je l'ai obtenu.♡

Tu as été tout le temps à mes cotés pour me
soutenir et m'encourager .

Je suis très reconnaissante pour tout l'amour et le soin que tu m'a apporté
tout au long de ma vie.

♡Que ce travail soit l'expression de ma sincère gratitude,
et mon profond amour.♡

♡À ma chère maman pour toute sa tendresse, amour et affection.♡

Tu as toujours été pour moi la meilleure maman et le meilleur exemple.

Que dieu te protège et t'accord longue vie.

♡À mes chères soeurs et mes chers frères.♡

♡À toute la famille <<**Saadi**>> et toutes mes amies.♡

À toute personne qui occupe une place dans mon coeur.

♡Saadi Alima♡

REMERCIEMENTS

♡Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** pour la santé, la volonté et la patience qu'il m'a donné pour accomplir ce modeste travail.♡

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents pour le soutien inconditionnel et les sacrifices qu'ils ont faits pour que je termine mes études.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur **Professeur."MENACER**

Tidjani" pour

ses précieux conseils, son grand soutien scientifique et moral, et pour tous les efforts et les encouragements qu'il m'a apportés durant toute la période du travail.

Mon sincère remerciement aux membre de jury :

Prof."MOKHTARI Zouhir" et **Dr."BOUZIANE Nadjette"**

qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.

Enfin, je tiens à remercier tous les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Notions de base sur les systèmes chaotiques	3
1.1 Les systèmes dynamiques	3
1.2 Espaces des phases	4
1.3 Flot	4
1.4 Orbite	5
1.5 Points d'équilibre	5
1.6 Attracteur	5
1.6.1 Attracteurs réguliers	6
1.6.2 Attracteurs étranges	6
1.7 Notion de stabilité	7
1.8 Bifurcation	10

1.8.1	Bifurcation nœud-col	10
1.8.2	Bifurcation transcritique	12
1.8.3	Bifurcation fourche	12
1.8.4	Bifurcation Hopf	14
1.9	Le chaos	14
1.9.1	Les caractéristiques essentielles d'un système chaotique	14
1.9.2	Routes vers le chaos	16
2	Synchronisation des systèmes chaotiques	18
2.1	Introduction	18
2.2	Définition de la synchronisation	19
2.2.1	Définition générale	19
2.2.2	Définition mathématique de la synchronisation	19
2.3	Classes de synchronisation	20
2.3.1	Synchronisation par couplage unidirectionnel	21
2.3.2	Synchronisation par couplage bidirectionnel	21
2.4	Types de synchronisation	21
2.4.1	Synchronisation identique	21
2.4.2	Synchronisation généralisée	28
3	Applications	31
3.1	Introduction	31
3.2	Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora	32
3.2.1	Le cas où le signal transmetteur est x :	32
3.2.2	Le cas où le signal transmetteur est y :	34
3.2.3	Le cas où le signal transmetteur est z :	36

3.3 Synchronisation généralisée entre le système de Lü et celui de Chen par la méthode du système auxiliaire approché	37
Conclusion	40
Bibliographie	41
Annexe A : Programme en matlab pour synchroniser deux systèmes de Lü par la méthode de Carroll et Pecora (le signal transmetteur est x).	43
Annexe B : Abréviations et Notations	46

Table des figures

1.1	Attracteur étrange de Lorenz.	7
1.2	Diagramme de bifurcation noeud-col.	11
1.3	Diagramme de bifurcation transcritique.	12
1.4	Diagramme de bifurcation fourche.	13
1.5	Diagramme de bifurcation hopf.	14
3.1	Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur x.	34
3.2	Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur y.	35
3.3	La synchronisation entre le système de Lü et celui de Chen est réalisée avec les paramètres $k=25$, $a=35$, $b=3$ et $c=28$	39

Liste des tableaux

1.1	Signe de l'exposant de Lyapunov et ses significations.	16
-----	--	----

Introduction

La théorie du chaos s'intéresse aux phénomènes qui semblent irréguliers et aléatoires mais qui sont régis par des lois déterministes. Henri Poincaré (1854-1912) a été le premier à observer ce phénomène lors d'études consacrées à la stabilité du système solaire. Après cela, de nombreux chercheurs se sont vivement intéressés à la théorie du chaos, ainsi qu'aux méthodes pour la contrôler. Un phénomène chaotique est défini comme un phénomène qui a généralement un comportement particulier et imprévisible d'un système dynamique déterministe non linéaire. La théorie du chaos se trouve être utile dans de nombreux domaines tels que le génie biomédical [3], les systèmes financiers [7] et même la biologie [15].

Le chaos présente un certain nombre de caractéristiques, notamment la sensibilité aux conditions initiales et l'imprévisibilité, ce qui rend les systèmes chaotiques très intéressants pour le cryptage des données.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche actif lié au développement de la télécommunication, il a connu des améliorations très remarquables au début du XXème siècle.[5]

La synchronisation a été introduite en 1990 par Pecora et Carroll [11] [12], une technologie qui, en raison de deux systèmes chaotiques identiques (émetteur et récepteur), consiste à forcer la trajectoire du récepteur à suivre la trajectoire de l'émetteur. Dans

la littérature scientifique, plusieurs méthodes de synchronisation ont été proposées, et elles sont basées sur le principe maître-esclave et permettent de réduire l'erreur entre les trajectoires de l'émetteur et du récepteur.

L'objectif de notre mémoire est l'étude des systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication, pour cela, l'étude a été divisée en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre nous introduisons brièvement des notions de la théorie des systèmes dynamiques chaotiques, en commençant par la présentation mathématique des systèmes dynamiques, les points d'équilibre, les attracteurs, la notion de stabilité, en passant par la théorie de bifurcation et finissant par la théorie du chaos.

- Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la théorie de la synchronisation, dans lequel nous présenterons une définition mathématique de la synchronisation, puis nous introduisons deux types de synchronisation ; synchronisation identique et synchronisation généralisée en expliquant certaines méthodes de chaque type.

- Le troisième chapitre présente une application de la méthode de Carroll et Pecora sur le système de Lü, et la méthode du système auxiliaire approché sur le système de Lü et celui de Chen.

Enfin, on termine ce mémoire par une conclusion générale suivie d'une bibliographie.

Chapitre 1

Notions de base sur les systèmes chaotiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la présentation des quelques notions générales sur les systèmes dynamiques pour mieux appréhender ce qui le chaos.

1.1 Les systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 [13] *Un système dynamique est tout système qui se développe au court du temps, consacré à l'étude des fluctuations d'état d'un phénomène ou d'un objet quelconque. Ce développement peut être décrite par un ensemble limité d'équations pouvant prendre plusieurs formes mathématiques : équations différentielles, équations au récurrence.*

► Dans le cas où le temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, \mu), \quad X \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Avec :

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état , $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres.

$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω .

► Dans le cas discret le système dynamique est présenté par une application itérative :

$$X_{k+1} = f(X_k, u), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

– On dit que le système (1.1) est **non autonome** si le temps est exprimé explicitement dans la fonction f . Dans le cas contraire on dit que le système(1.1) est **autonome**.

Remarque 1.1.1 *Dans ce mémoire on s'intéresse aux systèmes dynamiques continus.*

Théorème 1.1.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit le problème de cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in I. \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si f est continue sur $I \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d et est localement lipschitzienne en y alors le problème de Cauchy admet une solution unique sur I . (pour la preuve de ce théorème, voir [14]).

1.2 Espaces des phases

L'espace des phases est un espace mathématique multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps. Le chemin parcouru par le système est appelé "trajectoire".[5]

1.3 Flot

Considérons le système :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, \mu), \quad X \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Soit $X(t, X_0)$, $X_0 \in D$ une solution de (1.3) avec condition initiale $X(0) = X_0$. On appelle flot du système (1.3) l'application $\varphi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi_t(X_0) = X(t, X_0).$$

$\varphi_t(X_0)$ possède les propriétés suivantes :

- $\varphi_t(X_0)$ est de classe C^r , ($r \in \mathbb{N}$).
- $\varphi_0(X_0) = X_0$.
- $\varphi_{t+s}(X_0) = \varphi_t(\varphi_s(X_0))$. [13]

1.4 Orbite

Définition 1.4.1 [5] On appelle orbite d'un point X l'image de la trajectoire issue de X c'est à dire le sous ensemble $\gamma(X)$ de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(X) = \varphi_t(X), t \in G.$$

1.5 Points d'équilibre

Définition 1.5.1 [10] Un point d'équilibre (ou point singulier, ou point stationnaire, ou point critique) du système (1.3) est un point X_0 de l'espace des phases vérifiant l'équation : $f(X_0) = 0$.

Remarque 1.5.1 Par un changement de variable $Y = X - X_0$, On peut ramener le point X_0 à l'origine (0).

1.6 Attracteur

Définition 1.6.1 [13] Un attracteur est un ensemble ou une région de l'espace de phases vers laquelle tendent les trajectoires d'un système dynamique.

Mathématiquement, on dit que l'ensemble A est un attracteur si :

1. A est un ensemble compact, fermé et invariant par le flot φ_t (c-à-d $\varphi_t(A) = A, \forall t$).
2. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $\varphi_t(X_0) = X(t, X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$.
3. $\bigcap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.
4. Il existe une orbite dense dans A .

Il existe deux types d'attracteurs : attracteurs **réguliers** et attracteurs **étranges** (chaotiques).

1.6.1 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, ils sont de trois types :

- **L'attracteur ponctuelle** (ou point fixe) : Il s'agit là du cas le plus simple d'attracteur ; tel que le système évolue vers un état de repos (point).
- **L'attracteur cyclique** (ou cycle limite) : c'est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle les trajectoires sont dirigés.
- **L'attracteur torique** : représente le mouvement et le résultat de deux oscillations indépendantes dont les trajectoires s'enroulent autour d'un tore.

1.6.2 Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension est fractale n'est pas entière (ce qui justifie l'adjectif étrange). Ils se caractérisent par **la sensibilité aux conditions initiales** et leur **volume nul** dans l'espace des phases.[6]

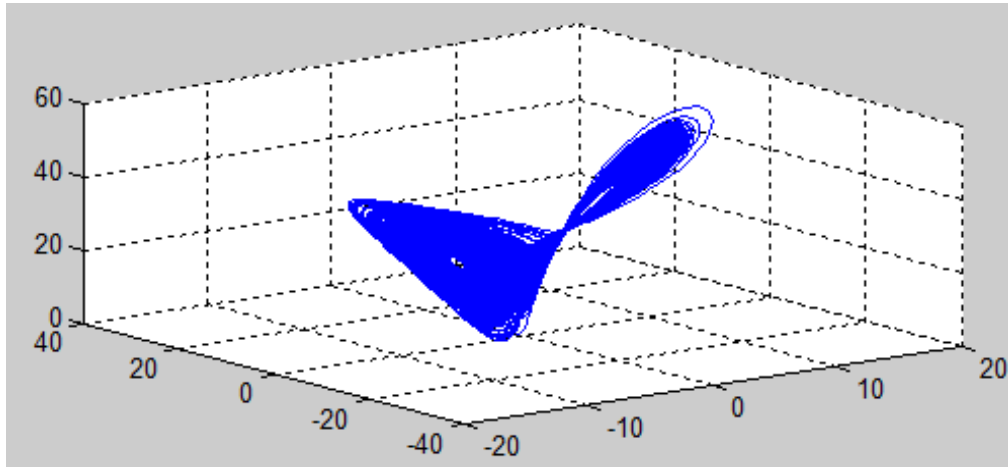


FIG. 1.1 – Attracteur étrange de Lorenz.

1.7 Notion de stabilité

La stabilité est l'un des aspects les plus essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques.

Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est l'une des méthodes fondamentales pour la stabilité des systèmes dynamiques.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t), \quad X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Avec f est une fonction non linéaire.

Définition 1.7.1 [10] *Le point d'équilibre X^* du système (1.4) est :*

1- Stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \epsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.5)$$

2- Asymptotiquement stable si X^* est stable et si :

$$\exists \delta > 0 : \|X(0) - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

3- Exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \alpha \|X(0) - X^*\| \exp(-\beta t), \forall t > t_0.$$

4- Instable si l'équation (1.5) n'est pas satisfaite.

Linéarisation des systèmes dynamiques

Soit le système dynamique non linéaire :

$$\dot{X} = f(X), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (1.6)$$

Soit X_0 un point d'équilibre de ce système, et supposons qu'une petite perturbation $\epsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe.

Si on applique le développement de Taylor de f au voisinage du point X_0 on obtient :

$$\dot{\epsilon}(t) + \dot{X}_0 = f(\epsilon(t) + X_0) \simeq f(X_0) + Jf(X_0)\epsilon(t), \quad (1.7)$$

avec : $Jf(X_0)$ est la matrice jacobienne de f définie par :

$$Jf(X_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{X=X_0} \quad (1.8)$$

comme $f(X_0) = X_0$, alors l'équation (1.7) redevient :

$$\dot{\epsilon}(t) = Jf(X_0).\epsilon(t). \quad (1.9)$$

Cette écriture (1.9) veut dire que le système (1.6) est linéarisé.[5]

Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

Cette méthode est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre X_0 du système (1.6). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_k de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Alors la stabilité de X_0 s'exprime comme suit :

Théorème 1.7.1 *Si on note $(\lambda_k)_{k=1\dots n}$ les valeurs propres de $Jf(X_0)$ alors :*

- ▶ $\exists k \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \Rightarrow$ Le point d'équilibre X_0 est **instable**.
- ▶ $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \Rightarrow$ Le point d'équilibre X_0 est **exponentiellement stable**.

Remarque 1.7.1 *Cette méthode ne permet d'étudier la stabilité que partiellement.*

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Cette méthode est résumée dans le théorème suivant :

Théorème 1.7.2 *Soit X_0 un point d'équilibre du système (1.6) et $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (appelée **fonction de Lyapunov**) de classe C^1 définie sur un voisinage de X_0 tel que :*

1. $V(X_0) = 0$ et $V(X) > V(X_0)$ si $X \neq X_0$.
2. $\dot{V}(X) \leq 0, \forall X \neq X_0$.

Alors X_0 est **stable**.

3. Si de plus $\dot{V}(X) < 0, \forall X \neq X_0$. Alors X_0 est **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov.[5]

Exemple 1.7.1 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2. \\ \dot{y} = -y + 3x^2y. \end{cases}$$

Le système a le point d'équilibre $O(0, 0)$. Considérons la fonction :

$$V(x, y, z) = 3x^2 + y^2.$$

On a $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 6x(-x - xy^2) + 2y(-y + 3x^2y) \\ &= -6x^2 - 2y^2. \end{aligned}$$

Donc $\frac{dV}{dt} < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$. Alors l'origine est asymptotiquement stable.

1.8 Bifurcation

Définition 1.8.1 *Une bifurcation est un changement radical du comportement du système étudié, ce qui concerne les points d'équilibre, un changement de stabilité lors de la variation d'un paramètre est une bifurcation.*

Nous présentons ici les quatre bifurcations de codimension un (noeud-col, transcritique, fourche et Hopf) : [13]

1.8.1 Bifurcation noeud-col

La bifurcation noeud-col est caractérisée par l'existence de deux points d'équilibre simultanément (un stable et un instable), sa forme normal est l'équation :

$$\dot{x} = r - x^2. \tag{1.10}$$

Cherchons les points fixes : on a $f(x, r) = r - x^2 = 0$. Alors on obtient 3 cas :

► Si $r < 0$, l'équation $f(x, r) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

► Si $r > 0$, on a $f(x, r) = r - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{0\pm} = \pm\sqrt{r}$. Alors (1.10) admet deux points fixes : $\{\sqrt{r}, -\sqrt{r}\}$.

Étudions leur stabilité :

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f'(x_{0+}) = -2\sqrt{r} < 0. \\ f'(x_{0-}) = 2\sqrt{r} > 0. \end{cases}$$

Selon le signe de $f'(x_0)$, on voit que :

$$\begin{cases} x_{0+} = +\sqrt{r} \text{ est stable.} \\ x_{0-} = -\sqrt{r} \text{ est instable.} \end{cases}$$

► Si $r = 0$ les deux points fixes fusionnent en un point fixe $x = 0$ qu'est semi stable.

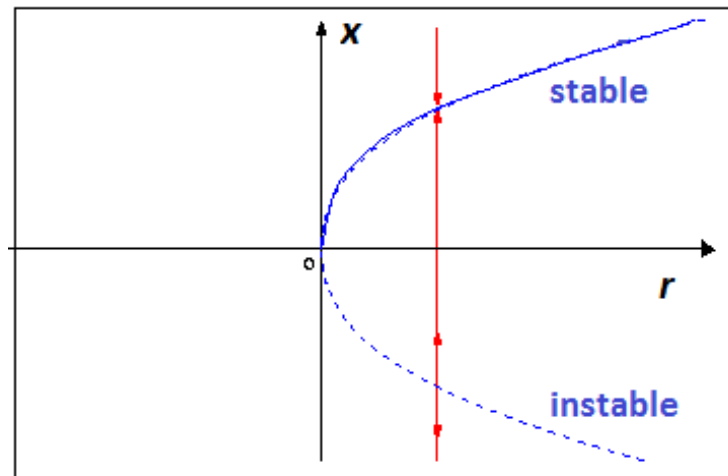


FIG. 1.2 – Diagramme de bifurcation noeud-col.

1.8.2 Bifurcation transcritique

C'est un fourchette local dans lequel, pour faire varier le paramètre, il y a un échange de stabilité des points d'équilibre. Sa forme normal est :

$$\dot{x} = rx - x^2. \quad (1.11)$$

On a $f(x, r) = x(r - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = r$. Alors (1.11) admet 2 points fixes.

$$f'(x) = r - 2x = \begin{cases} r \text{ si } x = 0. \\ -r \text{ si } x = r. \end{cases}$$

Et par suite :

- ▶ Si $r < 0$ le point fixe $x = 0$ est stable , mais $x = r$ est instable.
- ▶ Si $r > 0$ le point fixe $x = 0$ est instable , mais $x = r$ est stable.
- ▶ Si $r = 0$ le seul point fixe $x = 0$ est semi stable (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

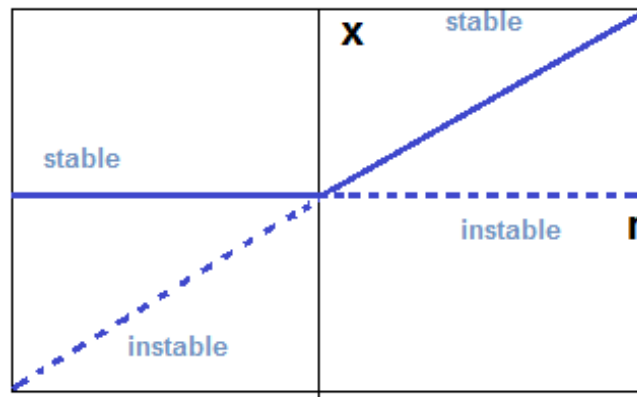


FIG. 1.3 – Diagramme de bifurcation transcritique.

1.8.3 Bifurcation fourche

La stabilité d'un point d'équilibre change au profit de la naissance d'une paire de points d'équilibre.

La forme normale d'une bifurcation fourche **super-critique** est :

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (1.12)$$

et pour la **sous-critique** est :

$$\dot{x} = rx + x^3.$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche super-critique on a :

$$f(x, r) = x(r - x^2) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{r} \text{ ou } x = -\sqrt{r}\}.$$

- Si $r < 0$ un seul point fixe $x = 0$.
- Si $r > 0$ (1.12) admet trois points fixes $\{0, \sqrt{r}, -\sqrt{r}\}$.

Stabilité de ces points fixes :

$$f'(x) = r - 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = r . \\ f'(\pm\sqrt{r}) = -2r . \end{cases}$$

- Si $r < 0$ un seul point fixe $x = 0$ est stable.
- Si $r > 0$ le point fixe $x = 0$ est instable , mais $x = \pm\sqrt{r}$ sont stables.
- Si $r = 0$ un échange dans le nombre des points fixes dans la stabilité.

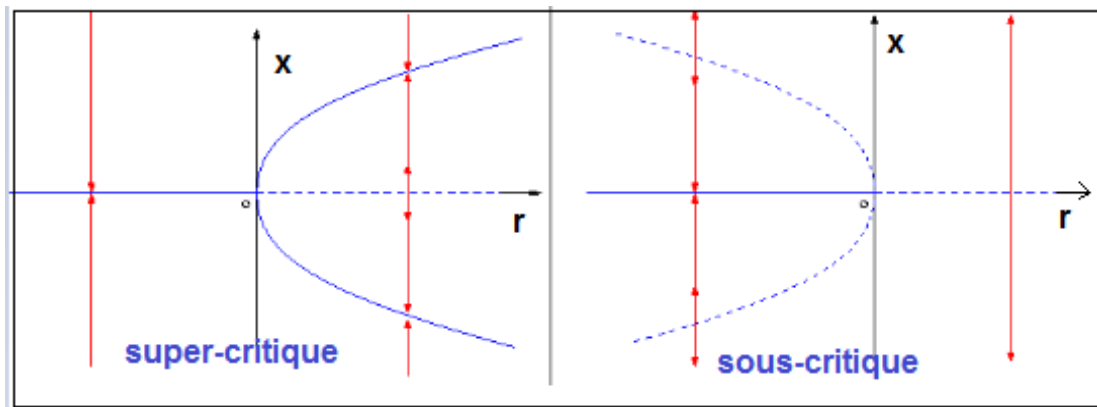


FIG. 1.4 – Diagramme de bifurcation fourche.

1.8.4 Bifurcation Hopf

La bifurcation de Hopf correspond à la transformation d'un point fixe en un cycle limite par variation d'un paramètre du système dynamique, avec un changement du type de stabilité de l'équilibre existant.

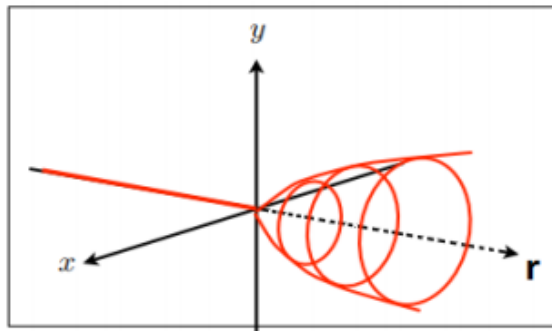


FIG. 1.5 – Diagramme de bifurcation hopf.

1.9 Le chaos

On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales que l'on ne peut prédire exactement dans quel état il va se trouver si l'on attend trop longtemps.

1.9.1 Les caractéristiques essentielles d'un système chaotique

Pour qu'un système soit classifié autant que chaotique il doit comporter les propriétés suivantes : [5] [9]

♠ **la non linéarité** : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

♠ **La sensibilité aux conditions initiales (effet de papillon)** : Mathématiquement on dit que $f : I \rightarrow I$ montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in I, \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in I : |x_0 - y_0| < \epsilon \Rightarrow |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \delta.$$

♠ **Le déterminisme** : La notion de déterminisme signifie la capacité de prédire le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent.

♠ **L'imprévisibilité** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

♠ **L'irrégularité** : L'évolution d'un système dynamique est complexe, non périodique et non prédictible.

♠ **L'attracteur étrange** : Il est contenu dans un espace fini, son volume est nul, sa dimension est fractale et non entière, sa trajectoire est complexe.

♠ **Section de Poincaré** : Faire un section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple un plan de dimension trois. On passe alors d'un système dynamique à temps continue à un système dynamique à temps discrète tout en préservant les propriétés du système.

♠ **Exposants de Lyapunov** : Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique ou non. Donc deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par un taux Z_1 divergent après un temps : $\Delta t = t_2 - t_1$ vers Z_2 tel que :

$$|Z_2| \approx \exp(\lambda \cdot \Delta t) |Z_1|.$$

Considérons un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension n et prenons $t = 0$ une hyper sphère infiniment centré en X appartenant à l'attracteur ($X \in \mathbb{R}^n$) avec un rayon ϵ_0 . Au temps $t \gg 0$ cette hyper sphère se transforme en une hyper-ellipsoïde de n demi-axe.

$$\epsilon_i(t) \approx \epsilon_0 \exp(\lambda_i t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Les exposants de Lyapunov sont tels que :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}.$$

Etat	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov λ_i
Points d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique	-	non entière	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique	-	non entière	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TAB. 1.1 – Signe de l'exposant de Lyapunov et ses significations.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins un exposants de Lyapunov positif (voir le tableau(1.1)).

1.9.2 Routes vers le chaos

On obtient l'apparition du chaos en modifiant la valeur d'un paramètre, que ce soit de manière théorique ou expérimentale. On distingue trois scénarios théoriques d'évolution vers le chaos :

★L'intermittence vers le chaos

un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de controle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.[6]

★Le doublement de période

L'augmentation d'un paramètre provoque pour un système périodique, l'apparition d'un doublement de sa période. La période est ensuite multipliée par 2, 4, 8, 16... D'un doublement au suivant, l'augmentation du paramètre est de plus en plus faible, et à partir

d'une certaine valeur, le chaos apparaît. Lorsque la période devient infinie, les mouvements deviennent chaotiques. [9][5]

★La quasi périodicité

Ce dernier scénario fait intervenir pour un système périodique l'apparition d'une autre fréquence dont le rapport avec la première n'est pas rationnel, un nouveau changement de paramètre fait apparaître une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.[9]

Chapitre 2

Synchronisation des systèmes chaotiques

2.1 Introduction

La synchronisation existe depuis le 17^{ième} siècle, elle caractérise l'évolution de deux systèmes qui se comportent de la même façon, en même temps. Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été initialement proposés, avec le travail de Fujisaka et Yamada [4] qui utilisaient une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, Afraimovich et al [1], ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique, et ensuite Pecora et Carroll [11] [12] définissent la synchronisation chaotique appelée synchronisation identique, développée à base de circuits chaotiques couplés, avec l'un émetteur (maître) et l'autre récepteur (esclave).

Les domaines d'utilisation de la synchronisation sont vaste, en effet elle existe en diverses sciences, et particulièrement en télécommunication, dont elle est une clé importante pour une transmission réussie. L'utilisation des systèmes chaotiques dans la transmission sécurisée correspond à noyer le message codé dans un signal chaotique. A la réception l'opération inverse est effectuée à savoir l'extraction puis le décodage du message ainsi reçu.[8]

Le principe de ce chapitre est de donner la définition, types et méthodes de synchronisation.

2.2 Définition de la synchronisation

2.2.1 Définition générale

Définition 2.2.1 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** signifie ensemble, et **Chrono** signifie temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps. [6]*

Définition 2.2.2 (générale) *La synchronisation est un moyen de maintenir un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système se développe en suivant le comportement de l'autre système [10]. Ce concept repose sur le fait qu'un système chaotique est déterministe et possède un ou plusieurs exposants positifs de Lyapunov et qu'il est instable, si par n'importe quel moyen, deux systèmes puissent échanger de l'énergie, action que l'on nomme couplage, alors la synchronisation va éventuellement se produire [9]. Plus précisément, deux signaux chaotiques seront dits synchronisés s'ils sont asymptotiquement identiques lorsque t tend vers l'infini.*

2.2.2 Définition mathématique de la synchronisation

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, les deux chercheurs **Brown** et **Kocarev** ont pu fournir une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire cette définition, ils supposent qu'un système dynamique global de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, t), \quad \frac{dY}{dt} = f_2(Y, X, t). \quad (2.1)$$

Avec $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale donné par (2.1) avec la condition initiale $\omega_0 = [X_0, Y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour chaque sous-système on forme une trajectoire $\varphi_X(\omega_0)$ et $\varphi_Y(\omega_0)$ (où ω_0 représente une condition initiale donnée).

On désigne par \mathcal{X} l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par ζ l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés) $g_X : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_Y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, qui ne sont pas identiquement nulle, le premier \mathbb{R} représente le temps, nous disons que les fonctions g_X et g_Y sont des propriétés des sous-systèmes définis par (2.1) respectivement.

Afin de définir un état synchronisé, **Brown** et **Kocarev** exigent une fonction :

$h(g_X, g_Y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\|h\| = 0$ ou $h \rightarrow 0$, ($\|\cdot\|$ est toute norme). Nous disons que la fonction h , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes, Les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si $h(g_X, g_Y) = 0$. [10]

Définition 2.2.3 Brown et Kocarev : *Les sous-systèmes dans les équations (2.1) sont dits synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_X et g_Y s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_X, g_Y)\| = 0$. [10]*

Avec le choix de g_X et g_Y et h on peut déterminer le type de synchronisation, ça signifie qu'il existe des différents types de synchronisation qui sont englobés dans un même formalisme.

Théorème 2.2.1 [5] *Pour que le système maître et le système esclave soient synchronisés, une condition nécessaire et suffisante est que tous les exposants de Lyapunov du système esclave (appelés exposants de Lyapunov conditionnels) soient négatifs.*

2.3 Classes de synchronisation

Il existe deux classes de synchronisation suivant le sens dont l'énergie est échangée entre les deux systèmes chaotiques ; on distingue la synchronisation par couplage unidi-

rectionnel et la synchronisation par couplage bidirectionnel.

2.3.1 Synchronisation par couplage unidirectionnel

- **Le maître** : est un système indépendant.
- **L’esclave** : est un système qui est dépendant du système maître.

Lors d’une synchronisation par couplage unidirectionnel, le transfert de l’énergie d’un système à l’autre entre deux systèmes est réalisé à l’aide d’un élément fonctionnant dans un seul sens, donc on n’a qu’un seul système maître qu’est l’émetteur et un seul système esclave qu’est le récepteur, par exemple l’utilisation d’un circuit électrique suiveur.[9]

2.3.2 Synchronisation par couplage bidirectionnel

Dans le couplage bidirectionnel, l’énergie est transférée entre les systèmes dans les deux sens, c’est à dire chaque système peut jouer le rôle d’un système maître et un système esclave en même temps ; ceci peut être par exemple une simple résistance.[9]

2.4 Types de synchronisation

Dans la littérature, différents types de synchronisation ont été proposés à savoir la synchronisation identique, la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase...etc.

Remarque 2.4.1 *Le travail abordé dans ce mémoire porte sur la synchronisation identique et la synchronisation généralisée.*

2.4.1 Synchronisation identique

La synchronisation identique (dite aussi la synchronisation complète) a été obtenue grâce aux effets des forces d’accouplement unidirectionnel des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonomes, mais également dans les

systèmes non autonomes, elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation généralisée.[10]

Définition 2.4.1 *Soient deux systèmes dynamiques identiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :*

$$\dot{X} = f(X, t). \quad (2.2)$$

$$\dot{Y} = g(X, Y, t). \quad (2.3)$$

On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t) - X(t)| = 0. \quad (2.4)$$

pour toutes conditions initiales $X(o)$, $Y(o)$, des deux systèmes.[10]

Remarque 2.4.2 *Cette définition est toujours valable si on applique la méthode de Carroll et de Pecora, il suffit de mettre la condition (2.4) sous la forme :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t) - X_2(t)| = 0. \quad (2.5)$$

[6]

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qui s'appelle "système erreur" et qui représente la perturbation existée entre le système émetteur et le système récepteur. Pour savoir si la perturbation tend vers le zéro exponentiellement ; on suppose que la petite perturbation entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = Y - X.$$

Cette dernière se développe par rapport au temps comme suit :

$$\frac{de}{dt} = g(X, Y) - f(X). \quad (2.6)$$

Donc on a obtenu un système dynamique, pour étudier sa stabilité il suffit de :

★ Linéariser le système (2.6) au voisinage de ses points d'équilibre, il est claire qu'il y a un seul point d'équilibre $X = Y$. Alors on obtient :

$$\frac{de}{dt} = J(X).e, \quad (2.7)$$

avec : $J(X) = \left[\frac{\partial g(X, Y)}{\partial y} \right]_{Y=X}$ représente la matrice jacobienne associée.

★ Utiliser la dixième méthode de Lyapunov, pour cela on choisit une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité.

★ Calculer les exposants de Lyapunov du système erreur pour garantir sa stabilité asymptotique.[10]

*Synchronisation par la méthode du contrôle continu

On considère les deux systèmes chaotiques présentés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X), \\ \dot{Y} = f(Y) + M_{n \times n}(Y - X). \end{cases} \quad (2.8)$$

Où : $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, f une fonction non linéaire et $M_{n \times n}$ une matrice carrée diagonale d'ordre n constituée des éléments constants de la force d'accouplement.

Puisque la fonction f est non linéaire, on peut réécrire le système (2.8) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X + \phi(X), \\ \dot{Y} = A.Y + \phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X). \end{cases}$$

Avec A une matrice constante et ϕ une fonction qui représente la partie non linéaire de chaque système.

La dynamique du système erreur est présentée par :

$$\dot{e} = A.e + \phi(Y) - \phi(X) + M_{n \times n}.e. \quad (2.9)$$

Alors d'après cette dernière équation (2.9) on peut étudier la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine.[10]

Le principe de la synchronisation identique

On considère les deux systèmes chaotiques identiques définis par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = A.X + \phi(X). \quad (2.10)$$

$$\dot{Y} = A.Y + \phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X). \quad (2.11)$$

Ces deux systèmes sont liés par un accouplement unidirectionnel, avec X et Y sont les variables des systèmes maître (2.10) et esclave(2.11) respectivement.

$$M_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

est une matrice diagonale, A une matrice carrée d'ordre n et ϕ une fonction continue non linéaire d'ordre n qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \rho \|X - Y\|. \quad (2.12)$$

ρ est la constante de Lipschitz, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.[10]

Donc on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 Soit E la matrice unitaire d'ordre $n \times n$ et $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Si $\max \{\lambda_i\}_{i=1}^n < 0$; alors le système émetteur (2.10) et le système récepteur (2.11) sont synchronisés dans le sens que le système erreur tend vers le zéro exponentiellement.[10]

Preuve. On considère le système erreur suivant :

$$e = Y - X.$$

La dynamique de ce dernier est représentée par :

$$\dot{e} = (A + M_{n \times n}).e + \phi(Y) - \phi(X).$$

Comme $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ sont les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Alors cette dernière est similaire ou bien semblable à la matrice diagonale :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

par la matrice orthogonale U tel que :

$$U^T \cdot \left[\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho.E \right] \cdot U = \Lambda$$

Soit $V(e)$ la fonction de Lyapunov du système erreur donnée par :

$$V(e) = \frac{1}{2} \|e\|^2,$$

Clairement, $V(e) > 0$. On va calculer maintenant $\dot{V}(e)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \frac{1}{2}(\dot{e}e + e\dot{e}) \\ &= \frac{1}{2} [(A + M_{n \times n}) \cdot e + \phi(x) - \phi(y)] \cdot e + e \cdot [(A + M_{n \times n}) \cdot e + \phi(x) - \phi(y)] \\ &= \frac{1}{2} [(A + M_{n \times n}) \cdot e \cdot e + e \cdot (A + M_{n \times n}) \cdot e + (\phi(x) - \phi(y)) \cdot e + e \cdot (\phi(x) - \phi(y))]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq e^T \left[\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho \cdot E \right] \cdot e \\ &\leq e^T \cdot U \cdot \Lambda \cdot U^T \cdot e = (U^T e) \Lambda (U^T e) \\ &\leq \max \{ \lambda_i \}_{i=1}^n (U^T e)^T (U^T e) \\ &\leq 0. \text{ pour tout } e \neq 0. \end{aligned}$$

Alors :

$$V(e) \rightarrow 0 \text{ quant } t \rightarrow \infty$$

ce qui implique que $e \rightarrow 0$ quant $t \rightarrow \infty$. [10] ■

*Synchronisation par la méthode de Carroll et Pecora

Cette méthode a été proposée par les deux chercheurs Pecora et Carroll en 1990 [11] [12], dans laquelle ils ont montré que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser sous certaines conditions. Cette méthode a l'avantage de représenter une solution de synchronisation simple et performante. Aussi elle permet à l'esclave (récepteur) de reproduire le plus fidèlement possible l'état du maître (émetteur), après un régime

transitoire. L'idée de cette méthode est de diviser le système initial en deux sous-systèmes. Cette opération peut être réalisée d'une manière arbitraire.[9]

Considérons un système dynamique autonome en temps continue de dimension n :

$$\dot{X} = f(X(t)). \quad (2.13)$$

Où : $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état.

On divise le système initial en deux sous-systèmes S_1 et S_2 de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque :

$$\begin{cases} S_1 : \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2) \\ S_2 : \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) \end{cases} \quad (2.14)$$

avec :

$$X_1 = [x_1, \dots, x_m]^T$$

$$X_2 = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T$$

$$F(X) = [F_1(X); F_2(X)]$$

On considère maintenant un autre sous-système \hat{S}_2 caractérisé par une dynamique identique F_2 , et un vecteur d'état \hat{X}_2 :

$$\hat{S}_2 : \dot{\hat{X}}_2 = F_2(X_1, \hat{X}_2). \quad (2.15)$$

Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour obtenir la synchronisation entre le système initial et le sous-système \hat{S}_2 , est que ce dernier soit stable, ceci est équivalent à ce que tous les exposants de Lyapunov soient **négatifs**. [9]

Une synchronisation parfaite est donc obtenue puisque les trajectoires sont asymptotique-

ment convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{X}_2(t) - X_2(t) \right\| = 0. \quad (2.16)$$

2.4.2 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation identique, dans le cas des systèmes chaotiques de **dimensions** et de **modèles différents**. Elle est manifestée par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. En comparaison avec la synchronisation identique, la synchronisation généralisée notée par **GS** (en anglais : Generalized Synchronization) peut donner une dynamique plus riche, car elle peut également envisager certains cas désynchronisés, en raison des disparités des paramètres, des déformations des canaux de transmission et autres. Par conséquent, les possibilités d'appliquer la **GS** peuvent être plus larges que la synchronisation identique.[5]

Pour définir la synchronisation généralisée (**GS**) pour un schéma de couplage unidirectionnel, on considère un système émetteur autonome avec les variables dynamiques x dans un espace de phase X , couplé à un système récepteur avec des variables dynamiques y dans l'espace d'état Y . Alors le système émetteur et récepteur sont donnés respectivement par :

$$\dot{x} = F(x(t)), \quad (2.17)$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)), \quad (2.18)$$

avec g une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.[6]

Définition 2.4.2 *Quand $g \neq 0$; s'il existe une transformation $\phi : X \rightarrow Y$ telles que toutes les trajectoires du système émetteur et du système récepteur, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \phi(x(t))\| = 0, \quad \forall x(0) \text{ et } y(0),$$

alors on dit que les deux systèmes chaotiques (2.17) et (2.18) sont synchronisés au sens généralisé par rapport la fonction ϕ . [6]

Remarque 2.4.3 Cette définition de synchronisation généralisée nécessite l'existence de la transformation ϕ uniquement pour les trajectoires sur l'attracteur. La transformation n'est pas exigée d'exister pour les trajectoires passagères. [6]

Pour détecter et étudier la stabilité de la synchronisation généralisée, plusieurs méthodes ont été proposées, citons parmi eux la méthode connue sous le nom de "Le système auxiliaire approché".

La méthode du système auxiliaire approché

L'idée de base de cette méthode est que si le même système émetteur $x(t)$ dirige deux systèmes récepteurs identiques $y(t)$ et $z(t)$ commençant par des conditions initiales différentes dans le bassin d'attraction, alors l'analyse de stabilité de la synchronisation dans l'espace $X \oplus Y$, qui peut avoir une forme très complexe $y(t) = \phi(x(t))$, peut être substituée par l'analyse de la stabilité $z(t) = y(t)$ dans l'espace $Z \oplus Y$, ce qui est assez simple.

Pour cela, on suppose le système auxiliaire suivant :

$$\dot{z} = G(z(t), g, x(t)). \quad (2.19)$$

Ce dernier est identique au système récepteur (2.18). Evidemment, tant que le système récepteur (2.18) et son auxiliaire (2.19) ont le même signal émetteur $x(t)$, alors les champs (domaines) vectoriels dans les espaces de phase du récepteur et des systèmes auxiliaires sont identiques, et donc les systèmes peuvent évoluer sur des attracteurs identiques.

En effet, Il est facile de montrer que la stabilité linéaire du collecteur $z(t) = y(t)$ est équivalente à la stabilité linéaire du collecteur des mouvements synchronisés dans $X \oplus Y$, qui est déterminé par $\phi(\cdot)$.

Les équations linéarisées qui dirigent l'évolution des quantités $\zeta_y(t) = y(t) - \phi(x(t))$ et $\zeta_z(t) = z(t) - \phi(x(t))$, sont :

$$\dot{\zeta}_y(t) = DG(\phi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_y(t). \quad (2.20)$$

$$\dot{\zeta}_z(t) = DG(\phi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_z(t). \quad (2.21)$$

avec :

$$DG(\omega, h_u(t)) = \frac{\partial G(\omega, h_u(t))}{\partial w}. \quad (2.22)$$

Tant que les équations linéarisées pour $\zeta_y(t)$ et $\zeta_z(t)$ sont identiques, alors les équations linéarisées pour $\zeta_z(t) - \zeta_y(t) = z(t) - y(t)$ ont la même matrice Jacobienne $DG(., g, x(t))$ que dans l'équation précédente. Donc, si le collecteur des mouvements synchronisés dans $X \oplus Z \oplus Y$ est linéairement stable pour $z(t) - y(t)$, alors il est linéairement stable pour $\zeta_y(t) = y(t) - \phi(x(t))$ et vice versa. On remarque que l'équation linéarisée pour $z(t) - y(t)$ est identique à l'équation qui définit les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système récepteur. Alors, lorsque le collecteur $z = y$ est linéairement stable, les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système émetteur, conditionnés sur la valeur du système récepteur $x(t)$, sont tous négatifs. [6]

Chapitre 3

Applications

3.1 Introduction

Les systèmes chaotiques ont plusieurs caractéristiques significatifs favorables à la sécurité des communications, telles que le déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales, l'aspect ressemblant à l'aléatoire, qui peuvent être associés à certaines propriétés conventionnelles de la cryptographie comme confusion/diffusion.

Ainsi, les chercheurs s'intéressaient à la possibilité d'utiliser des signaux chaotiques dans les systèmes de transmission de données, notamment pour transmettre de grandes quantités d'informations sécurisées. L'avantage d'utiliser des signaux chaotiques a deux caractéristiques du chaos :

Un signal chaotique est un signal de spectre large, donc il permet de transmettre des signaux très divers et différents, d'autre part, un signal chaotique est obtenu à partir d'un système déterministe, cela permet de le reconstruire en se mettant en place dans les mêmes conditions que celles qui ont aidé à le créer, récupérant ainsi l'information de départ.[2]

Dans ce chapitre, on se réfère aux : [6] , [10].

3.2 Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora

3.2.1 Le cas où le signal transmetteur est x :

Dans cette partie on va supposer que le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = cy_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce dernier va être décomposé en deux sous-systèmes par la substitution suivante :

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1). \\ X_2 &= (y_1, z_1). \end{aligned}$$

Le système émetteur dans ce cas est :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = cy_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Et le système récepteur va être donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = cy_2 - x_1z_2, \\ \dot{z}_2 = x_1y_2 - bz_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Soient les valeurs suivantes :

$$e_y = y_2 - y_1.$$

$$e_z = z_2 - z_1.$$

dans les systèmes (3.2),(3.3), on obtient le système erreur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= ce_y - x_1e_z. \\ \dot{e}_z &= x_1e_y - be_z. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On va choisir la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} (e_y^2 + e_z^2).$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_1 = ce_y^2 - be_z^2.$$

Pour que le système erreur (3.4) soit exponentiellement stable au voisinage de l'origine, il suffit que $\dot{V}_1 < 0$, donc on obtient :

$$e_y < \sqrt{\frac{b}{c}}e_z.$$

Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètre $(a, b, c) = (36, 3, 20)$, et pour les valeurs initiales $(x_1, y_1, z_1) = (-50, 1, 20)$, et $(y_2, z_2) = (-10; -20)$ on obtient :

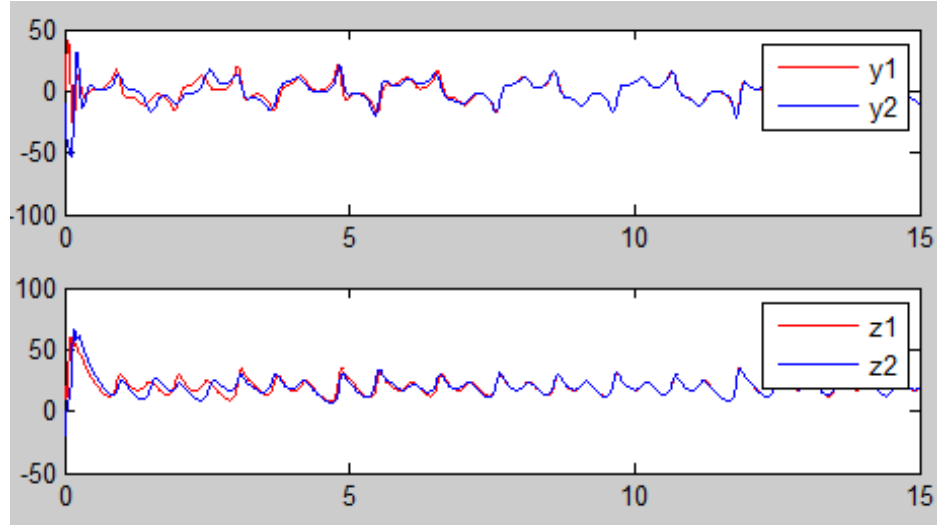


FIG. 3.1 – Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur x .

3.2.2 Le cas où le signal transmetteur est y :

Dans ce cas le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Et le système récepteur est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_1 - x_2), \\ \dot{z}_2 = x_2 y_1 - b z_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

La soustraction des deux systèmes (3.5),(3.6) nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -a e_x, \\ \dot{e}_z = y_1 e_x - b e_z. \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec : $e_x = x_2 - x_1$ et $e_z = z_2 - z_1$.

Dans cette partie, on choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} (e_x^2 + e_z^2).$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_2 = -(ae_x^2 + be_z^2) + y_1 e_x e_z.$$

Pour que les deux systèmes(3.5) et (3.6) soient synchronisés, il suffit que :

$$y_1 < \frac{ae_x^2 + be_z^2}{e_x e_z}.$$

Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètre $(a, b, c) = (36, 3, 20)$, et pour les valeurs initiales $(x_1, y_1, z_1) = (50, 35, 50)$, et $(x_2, z_2) = (-50; 29)$ on obtient :

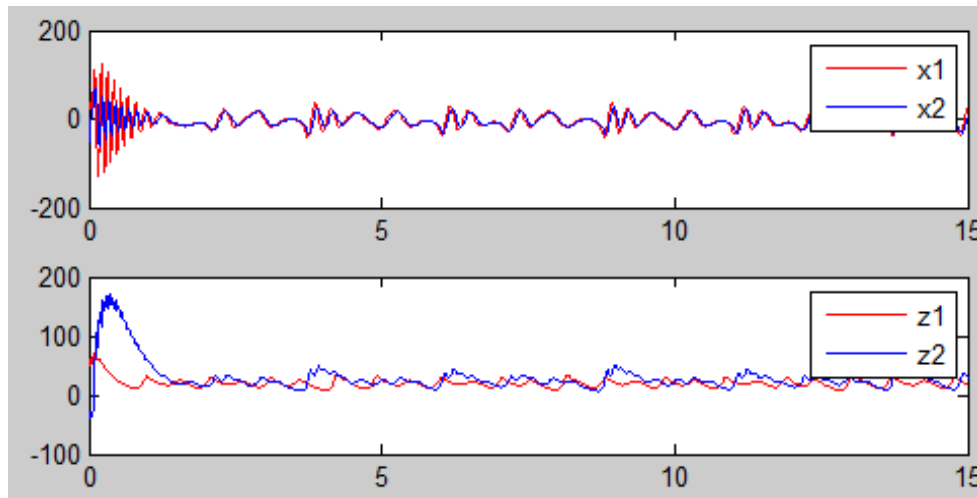


FIG. 3.2 – Synchronisation identique du système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur y .

3.2.3 Le cas où le signal transmetteur est z :

Dans ce cas le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = cy_1 - x_1z_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Et le système récepteur est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 = cy_2 - x_2z_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

La soustraction des équations (3.8),(3.9) nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x), \\ \dot{e}_y = ce_y - z_1e_x. \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec $e_x = x_2 - x_1$ et $e_y = y_2 - y_1$.

La fonction de Lyapunov est :

$$V_3 = \frac{1}{2} (e_x^2 + e_y^2).$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}_3 = -ae_x^2 + ce_y^2 + (a - z_1)e_xe_y.$$

Pour que les deux systèmes (3.8) et (3.9) soient synchronisés, il suffit que :

$$\dot{V}_3 < 0.$$

3.3 Synchronisation généralisée entre le système de Lü et celui de Chen par la méthode du système auxiliaire approché

Dans ce paragraphe on va prendre deux systèmes chaotiques différents couplés unidirectionnellement ; le premier est celui de Lü et le deuxième est celui de Chen, et on va détecter la synchronisation au moyen d'un système auxiliaire.

À cet effet, on va considérer le système émetteur de Lü suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = \beta y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 = -\delta z_1 + x_1 y_1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Où : $(\alpha, \beta, \delta) = (23, 20, 3)$, et on va supposer le système de Chen comme un système récepteur :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 = (c - a)x_2 + cy_2 - x_2 z_2 - k(y_2 - y_1), \\ \dot{z}_2 = -bz_2 + x_2 y_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Où : $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, k un entier qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel. Le système émetteur est couplé avec le système récepteur seulement par le scalaire $y_1(t)$.

Maintenant, on choisit le système auxiliaire, qui est identique au système récepteur (3.12) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = a(y_3 - x_3), \\ \dot{y}_3 = (c - a)x_3 + cy_3 - x_3 z_3 - k(y_3 - y_1), \\ \dot{z}_3 = -bz_3 + x_3 y_3. \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour $e_x = x_3 - x_2$, $e_y = y_3 - y_2$, $e_z = z_3 - z_2$, la soustraction des deux systèmes (3.12) et (3.13) nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x). \\ \dot{e}_y = (c - a)e_x + ce_y - z_3e_x - x_2e_z - key. \\ \dot{e}_z = -be_z + x_3e_y + y_2e_x. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c - k & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z_3e_x - x_2e_z \\ x_3e_y + y_2e_x \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Le système (3.15) peut être écrit sous forme matricielle comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z), \quad (3.16)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c - k & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

et

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_3e_x - x_2e_z \\ x_3e_y + y_2e_x \end{pmatrix},$$

est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, donc au voisinage de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système (3.16), nous utilisons les conditions de critère de Routh-Hurwitz. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :

$$P(x) = x^3 + (a + b - c + k)x^2 + (a(a - c) - a(c - k) + b(a - c + k))x + b(a(a - c) - a(c - k)).$$

Proposition 3.3.1 *Pour $a = 35$ et $b = 3$; si $k > \frac{111}{76}c + \frac{1}{76}\sqrt{1225c^2 + 16590c + 1165161} - \frac{2879}{76}$ alors la synchronisation, au sens généralisé, entre les systèmes (3.11) et (3.12) est achevée, pour les valeurs des paramètres des systèmes pris au dessus.*

Preuve. On note par $a_1 = a + b - c + k$ et $a_2 = a(a - c) - a(c - k) + b(a - c + k)$ et $a_3 = b(a(a - c) - a(c - k))$.

Il est clair que si $k > \frac{111}{76}c + \frac{1}{76}\sqrt{1225c^2 + 16590c + 1165161} - \frac{2879}{76}$, alors $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$ et aussi $a_1a_2 - a_3 > 0$. Et donc la synchronisation au sens généralisé entre les systèmes (3.11) et (3.12) est achevée. ■

Simulation numérique

Les systèmes couplés (3.11) et (3.12) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres $\alpha = 23$, $\beta = 20$ et $\delta = 3$, pour le système (3.11), $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$, pour le système (3.12). En sélectionnant le paramètre "feedback control" $k = 25$ qui satisfait $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $a_1a_2 - a_3 > 0$.

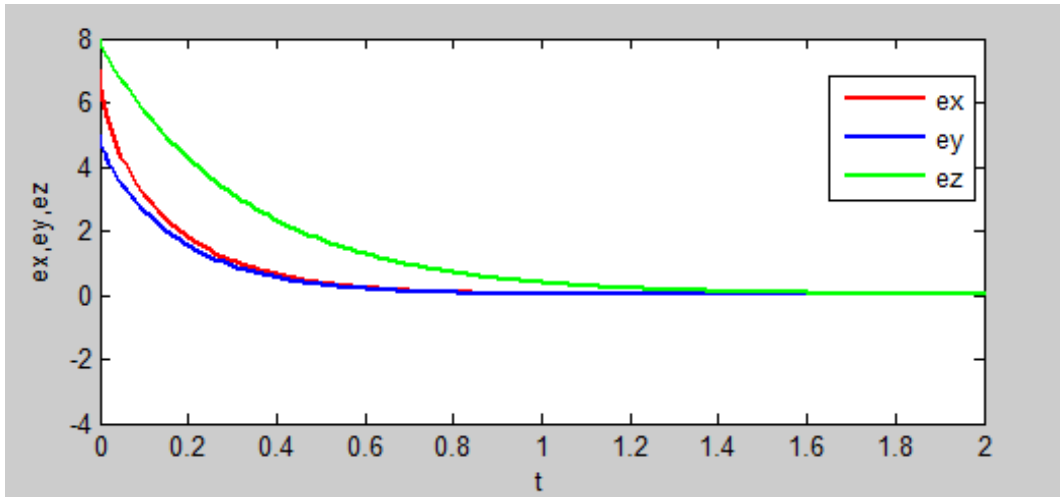


FIG. 3.3 – La synchronisation entre le système de Lü et celui de Chen, est réalisée avec les paramètres $k=25$, $a=35$, $b=3$ et $c=28$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une étude sur les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication, pour atteindre l'objectif de cet étude on a divisé notre thèse en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : points d'équilibre, les attracteurs et leurs différents types, la théorie de bifurcation, notions de stabilité, nous avons fini ce chapitre par la théorie de chaos et ses caractéristiques.
- Le deuxième chapitre est basé sur la théorie de la synchronisation où on a donné une définition mathématique de la synchronisation, ensuite on a présenté des différents types de synchronisation, on a été intéressé particulièrement à la synchronisation identique et la synchronisation généralisé, en expliquant quelques méthodes de chaque type.
- Le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode de Carroll et Pecora sur le système de Lü, et de la méthode du système auxiliaire approché sur le système de Lü et celui de Chen.

Nos résultats prouvent que le chaos étudié par synchronisation assure la fiabilité de la transmission sécurisée, travaillant dans la pratique, ces résultats ouvrent la possibilité de développer ces méthodes dans le futur.

Bibliographie

- [1] Afraimovich, V. S., Verichev, N. N., & Rabinovich, M. I. (1986). Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 29(9), 747-751.
- [2] Ali-Pacha, A., Hadj-Said, N., M'hamed, A., & Belghoraf, A. (2009). Chaos Crypto-Système basé sur l'Attracteur de Hénon-Lozi, *chaos*, 5(6).
- [3] Bozóki, Z. (1997). Chaos theory and power spectrum analysis in computerized cardiocography. *European Journal of Obstetrics & Gynecology and Reproductive Biology*, 71(2), 163-168.
- [4] Fujisaka, H., & Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of theoretical physics*, 69(1), 32-47.
- [5] Gasri, Ahlem. (12/07/2018). Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Freres Mentouri Constantine-1.
- [6] Karaali, Djamila. (2007). Synchronisation des quelques systèmes chaotiques. Mémoire de magister, Université de Constantine.
- [7] Laskin, N. (2000). Fractional market dynamics. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 287(3-4), 482-492.
- [8] Malek, J. (1995). La Théorie du Chaos en Finance : une application économique. Mémoire de Licence, école de commerce Solvay, ULB.

- [9] Megherbi, Ouerdia. (2013). Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques. Mémoire de magister en Automatique, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.
- [10] Menacer, Tidjani. (26/05/2014). Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université-Constantine1.
- [11] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821-825.
- [12] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1993). Synchronizing nonautonomous chaotic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 40(10), 646-650.
- [13] Rezzag, Samia. (2016). Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Larbi Ben Míhidi- Oum El Bouaghi.
- [14] Rouvière, F. (2009). Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. Cassini, 3^{me} édition .
- [15] Vaidyanathan, S. (2015). Lotka-Volterra two-species mutualistic biology models and their ecological monitoring. *International Journal of PharmTech Research*, 8(7), 199-212.

Annexe A : Programme en matlab pour synchroniser deux systèmes de Lü par la méthode de Carroll et Pecora (le signal transmetteur est x).

```
% Synchronisation identique de système de Lü par la méthode de Carroll et Pecora.  
clear all  
close all  
% on fixe les paramètres du système  
a = 36; b = 3; c=20;  
% on fixe le pas de temps, le temps jusqu'auquel  
% on calcule, la condition initiale  
dt = 0.01; Tmax = 15;  
x(1) = -50; y(1) = 1; z(1) = 20;  
tps(1) = 0;  
k = 1;  
% itération  
for t=0 :dt :Tmax,  
k = k+1;
```

Annexe A : Programme en matlab pour synchroniser deux systèmes de Lü par la méthode de Carroll et Pecora (le signal transmetteur est x).

```
dx1=a*(y(k-1)-x(k-1));
dy1=c*y(k-1)-x(k-1)*z(k-1);
dz1=x(k-1)*y(k-1)-b*z(k-1);
x2=x(k-1)+dt*dx1/2;y2=y(k-1)+dt*dy1/2;z2=z(k-1)+dt*dz1/2;
dx2=a*(y2-x2);dy2=c*y2-x2*z2;dz2=x2*y2-b*z2;
x3=x(k-1)+dt*dx2/2;y3=y(k-1)+dt*dy2/2;z3=z(k-1)+dt*dz2/2;
dx3=a*(y3-x3);dy3=c*y3-x3*z3;dz3=x3*y3-b*z3;
x4=x(k-1)+dt*dx3;y4=y(k-1)+dt*dy3;z4=z(k-1)+dt*dz3;
dx4=a*(y4-x4);dy4=c*y4-x4*z4;dz4=x4*y4-b*z4;
x(k)=x(k-1)+dt*(dx1/6+dx2/3+dx3/3+dx4/6);
y(k)=y(k-1)+dt*(dy1/6+dy2/3+dy3/3+dy4/6);
z(k)=z(k-1)+dt*(dz1/6+dz2/3+dz3/3+dz4/6);
tps(k)=t;
end
% on fixe les parametres du systeme
% on fixe le pas de temps, le temps jusqu'auquel
% on calcule, la condition initiale
dt = 0.01;
Tmax=15;
m(1)=-10;
n(1)=-20;
tps(1)=0;
k=1;
% iteration
for t=0 :dt :Tmax,
k=k+1;
dx1=a*(m(k-1)-x(k-1));dm1=c*m(k-1)-x(k-1)*n(k-1);dn1=x(k-1)*m(k-1)-b*n(k-1);
```

```
x2=x(k-1)+dt*dx1/2;m2=y(k-1)+dt*dm1/2;n2=n(k-1)+dt*dn1/2;
dx2=a*(m2-x2);dm2=c*m2-x2*n2;dn2=x2*m2-b*n2;
x3=x(k-1)+dt*dx2/2;m3=m(k-1)+dt*dm2/2;n3=n(k-1)+dt*dn2/2;
dx3=a*(m3-x3);dm3=c*m3-x3*n3;dn3=x3*m3-b*n3;
x4=x(k-1)+dt*dx3;m4=m(k-1)+dt*dm3;n4=n(k-1)+dt*dn3;
dx4=a*(m4-x4);dm4=c*m4-x4*n4;dn4=x4*m4-b*n4;
x(k)=x(k-1)+dt*(dx1/6+dx2/3+dx3/3+dx4/6);
m(k)=m(k-1)+dt*(dm1/6+dm2/3+dm3/3+dm4/6);
n(k)=n(k-1)+dt*(dn1/6+dn2/3+dn3/3+dn4/6);
tps(k)=t;
end
% representation graphique
axis([0 15 -100 100])
subplot(2,1,1), plot(tps,y,'r',tps,m,'b')
legend('y1','y2')
subplot(2,1,2),plot(tps,z,'r',tps,n,'b')
legend('z1','z2')
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{R}^n	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.
\mathbb{R}^d	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ d fois.
\mathbb{N}	L'ensemble des nombres naturels.
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	Dérivée temporelle.
\forall	Pour tout.
\exists	Il existe.
\log	Fonction logarithme.
\exp	Fonction exponentielle.
\sin	Fonction sinus.
\in	Appartient.
\Rightarrow	Implique.
\lim	La limite.
$\ \cdot\ $	Norme sur \mathbb{R}^n .
J_f	La matrice jacobienne de f .
V	Fonction de Lyapunov.
$ \cdot $	Valeur absolue ou module.

Résumé :

Le travail abordé dans ce mémoire porte sur les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication. On a commencé par des généralités sur les définitions et les concepts des systèmes dynamiques et du chaos, ensuite on a présenté la théorie de la synchronisation. Enfin on a mentionné un exemple sur la synchronisation identique et un exemple sur la synchronisation généralisée.

Les mots clés: Systèmes dynamiques, chaos, synchronisation.

Abstract:

The work addressed in this thesis focuses on chaotic systems and their applications in communication security. We started with generalities on the definitions and concepts of dynamical systems and chaos, then we presented the theory of synchronization. Finally, we have mentioned an example on identical synchronization and an example on generalized synchronization.

The key words: Dynamic systems, chaos, synchronization.

المخلص:

يركز العمل الذي تم تناوله في هذه الرسالة على الأنظمة الفوضوية وتطبيقاتها في أمن الاتصالات. بدأنا بعموميات حول تعريفات ومفاهيم الأنظمة الديناميكية والفوضى ، ثم قدمنا نظرية التزامن. أخيراً، ذكرنا مثالاً على التزامن المتطابق ومثالاً على التزامن العام.

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الديناميكية ، الفوضى ، التزامن.