République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Hadjer Zeribi

Titre :

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour des systèmes FBSDE et applications

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	HAFAYED MOKHTAR	UMKB	Président
Dr.	GHOUL ABDELHAK	UMKB	Encadreur
Dr.	BEROUIS NASSIMA	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dedicace

Ce travail est dédié

A ceux qui m'ont appris le respect et le sens du devoir

Ceux qui ne cessent de se sacrifier pour mon bien être

Ceux qui m'ont protégés

A mes chèrs parents Mohammed et Aicha

A mes enfants :Anas,Meriam ;Alae

A mes freres,A mes soeurs

A toute ma famille

A moi hadjer

REMERCIEMENTS

Remerciements........Remerciements.......Remerciements

D'abord nous remercions **DIEU** en aide pour que nous puissions aboutir à la réussite.

Tout le respect et les mots de remerciment à mon encadreur **Dr.GHOUL Abdelhak,**pour son soutien,son aide,ses conseils,et ses dirétives du début jusqu'à la fin de ce travail.

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique **Dr.Imad Eddine Lakhdari**,et les enseignant qui ont participés à notre formation,et tous les enseignants du département de mathématiques del'université Mohamed Kheider.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail,**Pr.HAFAYED MOKHTAR** et **Dr.BEROUIS NASSIMA**

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

merci à tous.

Table des matières

Introduction

On considére un problème de contrôle stochastique,où le domaine de contrôle est convexe et le système est régi par une équation différentielle stochastique progréssive et rétrograd (EDSPRs) de type

$$\begin{cases} dx_t = b\,(t, x_t, v_t)\,dt + \sigma\,(t, x_t, v_t)\,dW_t, & x_0 = x \\ dy_t = -f\,(t, x_t, y_t, z_t, v_t)\,dt + z_t\;dW_t, & y_T = \varphi\,(x_T) \end{cases}$$

où b, σ, f,et φ sont des fonctions données,$W = (W_t)_{t\;\geq 0}$ est un mouvement brownien standard définit sur un éspace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\,, P\right)$ satisfaisant aux conditions usuelles.la variable de contrôle $v = (v_t)$ est un processus progréssivement mesurable avec des valeurs dans un sous-ensemble fermé convexe de $\mathbb{R}^k$.

l'objectif du problème de contrôle est de choisir v de manière à minimiser une fonction,avec des valeurs initiales et terminales du type :

$$J\,(v) = \mathbb{E}\left[g\,(x_T) + h\,(y_0) + \int_0^T l\,(t, x_t, y_t, z_t, v_t)\,d_t\right]$$

où g, h,et l sont des fonctions données.

un processus de contrôl qui résout ce problème est appelé optimal.

Notre objectif dans ce mémoire est de dériver les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme du principe maximum de Pontryagin. Ces résultats sont donnés lorsque la condition terminale de l'équation dépend de l'état terminal de l'équation directe, et le critère à minimiser est sous la forme générale, avec les coûts initiaux et terminaux.

L'idée principale est d'introduire trois processus adjoints pour établir les conditions suffisantes

d'optimalité. Ceci est une construction d'une nouvelle méthode pour ce genre de problème.
Puisque le domaine de contrôle est convexe, la manière classique d'atteindre notre objectif est d'utiliser la méthode de la perturbation convexe. Plus précisément, si u est un contrôle optimal et v est arbitraire, alors nous définissons un contrôle perturbé comme suit :

$$u^{\theta} = u + \theta\,(v - u)$$

Nous dérivons l'équation variationnelle de l'équation d'état, et la variationnelle inégalité du fait que

$$0 \leq J\left(u^{\theta}\right) - J\left(u\right)$$

Les conditions d'optimalité sont alors données sous une forme faible. De plus, sous ad-hypothèses conditionnelles, nous donnons les résultats sous la forme d'un maximum stochastique global principe.
Le cas particulier, où la condition terminale $y_T = \xi$ est un aléatoire mesurable vecteur, est étudié et nous prouvons que dans ce cas un principe maximum stochastique est dérivé avec seulement deux processus adjoints.
Enfin, nous donnons une application sur un marché financier. Nous étudions le cash-flow (des flux de trésorerie) problème de valorisation et nous prouvons que le système de cet exemple est naturellement régi par un EDSPR contrôlé.
Ce mémoire est organisé de la manière suivante :
Dans le premier chapitre nous donnons des rappelles sur le calcule stochastique et des notions de base, dans la deuxième nous formulons le problème et donnez les différentes hypothèses utilisées tout au long du mémoire puis nous introduisons les équations adjoints et nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalité, puis nous reformulons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme d'un principe de maximum Enfin, dans la dernière chapitre, nous appliquons notre version du principe du maximum stochastique au modèle financier d'un problème de valorisation des flux de trésorerie.

Chapitre 1

le calcul stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastique

Définition 1.1 (processus stochastique) *Soit $T \subset \mathbb{R}$,toute famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelée un processus stochastique tel que t est souvent interprété comme le temps.*

Définition 1.2 (processus a trajectoire continue) *Le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$est dit à trajectoire continues si pour tout $w \in \Omega$,la fonction $t \longmapsto X_t(w)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Définition 1.3 (càdlàg et càglàd) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite,pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continue à droite et pourvues de limites à gauche. Un processus est dit càglàd (continu à gauche,pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continue à gauche et pourvues de limites à droite.*

Définition 1.4 (filtration) *Une filtration est une famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$de sous -tribu de $\mathcal{F}$,c'est à dire*

$$\forall 0 \leq s \leq t < \infty, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

et nous appelons$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P\right)$est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.5 (la mesurabilité) *un processus X est dit mesurable si l'application sui-*

vante,

$$([0,+\infty[\times\Omega, B([0,+\infty[)\otimes\mathcal{F}_t)\to\left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

$$(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)\ \text{ est mesurable}$$

Définition 1.6 (processus adapté) *On dit $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$est $\mathcal{F}$-adapté si pour tout $t\geq 0$,la variable aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1 *Un processus est toujourd adapté à sa filtration naturelle.*

Définition 1.7 (processus progressivement mesurable) *On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ si $\forall t\geq 0$,$\forall A\in B(\mathbb{R})$,*

$$\{(s,w)\,/\,0\leq s\leq t; X_s(w)\in A\}\in B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

c'est à dire que l'application sur

$$([0,t]\times\Omega, B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t):(s,\omega)\longmapsto X_s(\omega)\ \text{ est mesurable.}$$

Définition 1.8 (processus de markov) *Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P\right)$ une base stochastique et $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique.*
Le processus X est un processus de markov si X est adapté et si pour tout $s,t\geq 0$ et $B\in B(\mathbb{R})$ on a :

$$P(X_{s+t}\in B/\mathcal{F}_s)=P(X_{s+t}\in B/\sigma(X_s))\,p.s.$$

Définition 1.9 (temp d'arrêt) *une variable aléatoire $T:\Omega\to\{\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si,*

$$\forall n\in\mathbb{N},\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$$

ou bien,de maniére équivalente,si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Définition 1.10 (martingale) *un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ réel,adapté et intégrable,$(X_t)_{t\geq 0}$ est une :*

1 *martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) = X_S$.*

2 *sous martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) \geq X_S$.*

3 *sur martingale si $\forall s \leq t : E\left(X_t \diagup \mathcal{F}_s\right) \leq X_S$.*

Définition 1.11 (martingale locale) *un processus M est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,le processus arrêté M^{T_n} soit une martingale nulle en 0.*

Définition 1.12 (variation totale et variation quadratique) *la variation infinitésimale d'ordre p d'un pracessus X_t défini sur $[0, T]$ associeé à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$est définie par*

$$V_T^p\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p\left(\Pi_n\right)$ a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre,convergence L^p) lorsque

$$\Pi_n = \left\|\Pi_n\right\|_\infty = \max_{i\leq n}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \to 0$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t sur $[0, T]$.En particulier,

1. *Si $p = 1$,la limite s'appelle la variation totale de $X_t$sur $[0, T]$.*

   - *pour tout T,V_T^1 est fini ,on dit que X est à variation finie.*

   - *pour tout T,V_T^1 est borné,on dit que X est à variation finie.*

2. *Si $p = 2$,la limite s'appelle la variation quadratique de $X_t$sur $[0, T]$ et notée $< X >_T$.*

Théorème 1.1 (variation bornée) *un processus X_t est un processus à variation bornée sur $[0,T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire,c'est à dire que*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \text{ presque sûrement.}$$

Remarque 1.2 *Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement,alors elle vaut*

$$V_T^1 := \sup_{\Pi \in P} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|$$

presque sûrement.

où P est l'ensemble des subdivision possibles de $[0,T]$ réciprocequement,si ce supemum est fini,le processus admet une variation totale.

La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueure de ses trajectoires.

1.2 Le mouvement brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,et un processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace.

On appelle $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien avec $B_0 = 0$ si :

• $(B_t)_{t\geq 0}$ est continue.

•(Accroissements indépendants) :Pour tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ les variable $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

•(Accroissements stationnaires) :Pour $0 \leq s \leq t$,$B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne,centrée de variance $(t-s)$.

Proposition 1.1 *B est un mouvement brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré à trajectoires continues de fonction de covariance*

$$cov\left(B_s, B_t\right) = \min\left(s, t\right).$$

Proposition 1.2 *si B est un mouvement brownien alors :*

1. *$-B$ est aussi un mouvement brownien.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,$\left(\frac{1}{\alpha} \times B_{\alpha^2 t}\right)$ est un mouvement brownien.*
3. *pour tout $s > 0$,$W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement brownien independant de $\mathcal{F}_s$.*
4. *le processus défini par* $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_t = tB_{1/t} \end{cases}$ *est un mouvement brownien.*

Proposition 1.3 (propriétés de martingale) *soit B un mouvement brownien et pour tout $t \in [0, T]$,$\mathcal{F}_t$ est la tribu $\sigma(B_s, s \leq t)$ complétée.*

1. B est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,$\left(\exp\left(\lambda \times B_t - \lambda^2 \times \frac{t}{2}\right)\right)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.
3. $(B_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

Proposition 1.4 (Propriété de Markov) *La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) :pour tout s,le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par*

$$W_t = B_{t+s} - B_s,$$

est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Preuve. pour f borélienne bornée,et pour $u > t$,

$$E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u) \mid \sigma(B_t))$$

On fait apparaitre les accroissements et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$E(f(B_u) \mid \mathcal{F}_t) = E(f(B_u - B_t + B_t) \mid \mathcal{F}_t) = \Phi(u - t, B_t),$$

avec

$$\Phi(u - t, x) = E(f(B_u - B_t + x)) = E(f(y + x)),$$

où y a même loi que $B_u - B_t$,soit une loi $N(0, u-t)$ par les mêmes arguments,$E(f(B_u) \mid \sigma(B_t)) = \Phi(u-t, B_t)$.On a trés précisement

$$\Phi(s,x) = \frac{1}{\sqrt[1]{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-\frac{(y-x)^2}{2s}) dy,$$

une autre facon de décrire cette propriété est de dire que, pour $u > t$,conditionnellement à B_t, la v.a.B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u-t$.alors $E(1_{B_u} \leq x \mid \mathcal{F}_t) = E(1_{B_u} \leq x \mid \sigma(B_t)) = E(1_{B_u} \leq x \mid B_t)$,pour $u \leq t$. ■

1.3 calcul d'Itô

L'intégrale d'Itô est un des outils fondamentaux du calcul stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabélité filtré,et soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien standard.

1.3.1 intégrale stochastique

Définition 1.13 *on dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un processus s'il est $(\mathcal{F}_t)$-adapté,càglàd,et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$$

pour tout $t > 0$.

cas des processus étagés :

ce sont les processus de type

$$\theta_t^n = \sum_{t=0}^{n-1} \theta_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

où $n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$

pour tout $i = 0, ..., n$,on définit

$$\int_0^{\infty} \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

on sais que

$$E\left[\int_0^{\infty} \theta_s dB_s \right] = 0 \text{ et } var\left[\int_0^{\infty} \theta_s dB_s \right] = \int_0^{\infty} \theta_s^2 ds$$

alors

$$\int_0^{t} \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t} \right).$$

cas générale :

Soit l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus $\mathcal{F}_t$ adaptés càglàd et si θ est un bon processus,il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suit de processus étagés telle que quand $n \to +\infty$:

$$E\left[\int_0^{t} \left(\theta_s - \theta_s^n \right)^2 ds \right] \to 0$$

Ainsi,pour tout $t > 0$,Il existe une v.a.$I_t(\theta) = \int_0^{\infty} \theta_s dBs$ de carré intégrable telle que :

$$E\left(I_t(\theta) \right) = 0 \text{ et } var\left(I_t(\theta) \right) = \int_0^{\infty} \theta_s^2 ds.$$

Preuve. On va montrer que $E\left(I_t(\theta) \right) = 0$ on a :

$$I_t(\theta) = \int_0^{\infty} \theta_s dBs = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right),$$

$I_t(\theta)$ est gaussien,car (B_t) est un processus gaussien alors

$$E\left(I_t(\theta) \right) = E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i E\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

$$= 0$$

comme $E\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)=0$,car $\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)$ sont acroissement indépendants.

Pour montrer que $var\left(I_t\left(\theta\right)\right)=\int_0^{\infty}\theta_s^2 ds$.en effet,on a :

$$\begin{aligned}
var\left(I_t\left(\theta\right)\right) &= E\left(I_t^2\left(\theta\right)\right)-E\left(I_t\left(\theta\right)\right)^2 \\
&= E\left(I_t^2\left(\theta\right)\right) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\theta_i^2 E\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\theta_i^2 E\left(t_{i+1}-t_i\right) \\
&= \int_0^{\infty}\theta_s^2 ds.
\end{aligned}$$

■

1.3.2 Propriétés d'intégrale stochastique :

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. linéairété :
$$I_t\left(a_1\theta^1+a_2\theta^2\right)=a_1 I_t\left(\theta^1\right)+a_2 I_t\left(\theta^2\right).$$

2. propriété de martingale :
$$t\mapsto I_t\left(\theta\right)\ \text{ et } t\mapsto I_t\left(\theta\right)^2-\int_0^t\theta_s^2 ds,$$
sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues.

3. isométrie :pour tous bons processus φ,θ et tout $s,t\geq 0$,on a
$$E\left[I_s\left(\varphi\right)I_t\left(\theta\right)\right]=E\left[\int_0^{s\,\Lambda\,t}\theta_u\varphi_u du\right].$$

4. additivité :pour $0 \leq s \leq u \leq t$,

$$\int_0^t \theta_v dB_v = \int_s^u \theta_v dB_v + \int_u^t \theta_v dB_v.$$

5. la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$< I_t(\theta) >= \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

1.3.3 Processus d'Itô

Définition 1.14 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabélité filtré,et soit* B *un* $(\mathcal{F}_t)$ *mouvement brownien On appelle processus d'Itô tout processus* $(X_t, t \geq 0)$ *tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds.$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable,H un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty \text{ p.s},$$

et$V$ un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t |V_s| \, ds < \infty p.s.$$

Le coefficient V s'appelle la dérivée (ou le drift) et H son coefficient de diffusion.

étant donné un processus d'Itô X,on peut définir un processus continu adapté croissant

$$< X >_t = \int_0^t H_s^2 ds, t \geq 0.$$

Remarque 1.3 *un processus d'Itô* X *est continu adapté.En particulier si* H *est adapté tel* *que* $\forall t, \int\limits_0^t H_s^2 ds < \infty$ *p.s,alors*

$$\int_0^t X_s H_s dB_s,$$

est bien défini.

Proposition 1.5 *soient*

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s. \end{cases}$$

alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_S^{'} ds.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.3.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2 *soit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

un processus d'Itô,et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbb{C}^2$*.alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + 1/2 \int_0^t f''(X_s) d < X >_S,$$

où

$$\int_0^t f^{'}(X_s) dX_s := \int_0^t f^{'}(X_s) V_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s) H_s dB_s.$$

plus généralement,si $f : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathbb{C}^{1,2}$ (continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x) alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + 1/2 \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d < X >_s .$$

1.4 Equation différentielle stochastique (EDS)

Définition 1.15 *On se donne :*

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\delta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

X *:une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien,c'est à dire adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

on dit qu'un processus stochastique $X(.)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô ;*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \delta(t, X_t)\, dB_t \\ \qquad X(0) = X_0 \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq T$ si :

1. $X(.)$ est progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}(.)$.
2. $b(t, X_t) \in L^1_n(0, T)\, ; \delta(t, X_t) \in L^2_{n*m}(0, T)$.
3. $X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \delta(s, X_s)\, dB_s$ P-p.s pour $0 \leq t \leq T$.

1.4.1 Existence et unicité

On considére l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \delta(t, X_t)\, dB_t \qquad (*)$$

où $b, \delta \in [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonction déterministes mesurables.

Théorème 1.3 (existence et unicité) *Soient* b *et* δ *deux fonctions continues,on suppose que'il existe une constante* κ *telle que, pour tout* $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

a) condition de lipschitz en espace,uniforme en temps

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\delta(t,x)-\delta(t,y)|\leq\kappa|x-y|.$$

b) croissance linéaire

$$|b(t,x)|+|\delta(t,x)|\leq\kappa(1+|x|).$$

c) $E|Z^2|<\infty.$

Alors pour tout $t\geq 0$ l'équation $(*)$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0,t]$.

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

2.1 Formulation du problème

soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un éspace de probabilité équipé d'une filtration satisfaisant aux conditions usuelles,sur l'aquelle un d-dimentielle mouvement brownien $W = (W_t)_{t\geq 0}$est définit.On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$est le P-augmentation de la filtration naturelle du W.

Définition 2.1 *soit T un nombre réel strictement positif fixe et U un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^k$.*

un contrôle admissible v est un processus progressivement mesurable par apport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et avec des valeurs en U telles que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|v_t\right|^2 < \infty$$

on note $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôle admissible pour tous $v \in \mathcal{U}$,nous considérons le EDSPR suivant :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, v_t\right) dW_t, & x_0 = x \\ dy_t = -f\left(t, x_t, y_t, z_t, v_t\right) dt + z_t\, dW_t, & y_T = \varphi\left(x_T\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned} b &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}), \\ f &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

nous définissons le critère à minimiser,avec les coûts initiaux et finaux,comme suit :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(x_T) + h(y_0) + \int_0^T l(t, x_t, y_t, z_t, v_t)\, dt\right], \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \\ l &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

le problème du contrôle est de minimiser la fonctionnelle J sur $\mathcal{U}$.un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est appelé optimal s'il résout :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v) \tag{2.3}$$

Notre objectif dans ce mémoire est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un principe maximum stochastique. supposons que :

$$\begin{aligned} &b, \sigma, f, g, h, l, \varphi \text{ sont continuellement différentiables parrapport à } (x, y, z, v), \\ &\text{ils sont bornés par } C(1 + |x| + |y| + |z| + |v|) \\ &\text{et leurs dérivées parrapport à } (x, y, z, v) \text{ sontcontinuesetbornées.} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sous les hypothèses (2.4), pour chaque $v \in \mathcal{U}$, (2.1) a une solution unique et le fonctionnelle J est bien définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

2.1.1 Résultats préliminaires

Puisque le domaine de contrôle U est convexe, une manière classique pour traiter un tel problème, il faut utiliser la méthode de la perturbation convexe. Plus précisément,soit u un contrôle optimal et (x_t, y_t, z_t) la trajectoire optimale associée, nous définissons un contrôle perturbé comme suit :

$$u_t^\theta = u_t + \theta\left(v_t - u_t\right) \tag{2.5}$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit et v est un élément quelconque de $\mathcal{U}$.

Le contrôle perturbé u^θ est admissible. On note $\left(x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta\right)$ la trajectoire du système associé à u^θ.

À partir de l'optimalité de u , l'inégalité variationnelle de l'hamiltonien sera dérivée du fait que ;

$$0 \leq J\left(u^\theta\right) - J\left(u\right), \tag{2.6}$$

pour cela, nous avons besoin des lemmes classiques suivants :

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses* (2.4) , *on a*

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2\right] = 0, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t\right|^2\right] = 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\int_0^T \left|z_t^\theta - z_t\right|^2 dt = 0, \tag{2.9}$$

Preuve. puisque b et σ sont Lipschitz par rapport à (x, v), on a

$$\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|x_s^\theta - x_s\right|^2 ds + C\theta^2\int_0^t \mathbb{E}\left|v_s - u_s\right|^2 ds,$$

en utilisant le lemme de Grönwall et la définition (2.1), nous obtenons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E} \left| x_t^\theta - x_t \right|^2 = 0.$$

L'application de l'inégalité Bürkholder – Davis – Gundy pour la partie martingale permet nous pour obtenir une convergence uniforme en t :

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left| x_t^\theta - x_t \right|^2 \right] = 0.$$

Cela prouve (2.7) ,Prouvons maintenant (2.8) et (2.9) .
En appliquant la formule d' Itô à $\left(y_t^\theta - y_t \right)^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| y_t^\theta - y_t \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T \left| z_t^\theta - z_t \right|^2 ds &= \mathbb{E} \left| \varphi \left(x_T^\theta \right) - \varphi \left(x_T \right) \right|^2 \\ &\quad + 2\mathbb{E} \int_t^T \left| \left(y_s^\theta - y_s \right) \left[f \left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta \right) - f \left(s, x_s, y_s, z_s, u_s \right) \right] \right| ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Par la formule de Young, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \left(y_s^\theta - y_s \right) \left[f \left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta \right) - f \left(s, x_s, y_s, z_s, u_s \right) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E} \left| y_s^\theta - y_s \right|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{E} \left| \left[f \left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta \right) - f \left(s, x_s, y_s, z_s, u_s \right) \right] \right|^2 \\ \leq\ & \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C\varepsilon}{2} \right) \mathbb{E} \left| y_s^\theta - y_s \right|^2 + \frac{C\varepsilon}{2} \mathbb{E} \left| z_s^\theta - z_s \right|^2 \\ & + \frac{C\varepsilon}{2} \mathbb{E} \left| x_s^\theta - x_s \right|^2 + \frac{C\varepsilon\theta}{2} \mathbb{E} \left| v_s - u_s \right|^2 . \end{aligned}$$

Ainsi, (2.10) devient

$$\mathbb{E} \left| y_t^\theta - y_t \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T \left| z_s^\theta - z_s \right|^2 ds \leq \left(C\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_t^T \mathbb{E} \left| y_s^\theta - y_s \right|^2 ds + C\varepsilon \int_t^T \mathbb{E} \left| z_s^\theta - z_s \right|^2 ds + \alpha_t^\theta, \tag{2.11}$$

où

$$\alpha_t^\theta = \mathbb{E} \left| x_T^\theta - x_T \right|^2 + C\varepsilon \left(\mathbb{E} \int_t^T \left| x_s^\theta - x_s \right|^2 ds + \theta^2 \mathbb{E} \int_t^T \left| v_s - u_s \right|^2 ds \right).$$

Par définition (2.1) et (2.7), on obtient

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \alpha_t^\theta = 0. \tag{2.12}$$

Choisissez $\varepsilon = \frac{1}{2C}$ Alors (2.11) devient

$$\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t\right|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \left|z_s^\theta - z_s\right|^2 ds \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\int_t^T \mathbb{E}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 ds + \alpha_t^\theta,$$

de l'inégalité ci-dessus, nous dérivons deux inégalités

$$\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t\right|^2 \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\int_t^T \mathbb{E}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 ds + \alpha_t^\theta \tag{2.13}$$

$$\mathbb{E}\int_t^T \left|z_s^\theta - z_s\right|^2 ds \leq (4C+1)\int_t^T \mathbb{E}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 ds + 2\alpha_t^\theta, \tag{2.14}$$

pour utilisé (2.7) ,(2.13), le lemme de Grönwall et le Bürkholder – Davis – Gundy inégalité, nous obtenons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t\right|^2 = 0.$$

Pour obtenir le résultat avec la norme sup (ie, (2.8), il suffit d'appliquer le Bürkholder–Inégalité de Davis – Gundy à la partie martingale dans la formule Itô. On a alors (2.8).Enfin, à partir de (2.8) et (2.12), nous obtenons (2.9) le lemme (2.1) est prouvé. ■

Lemme 2.2 *Soit $\tilde{x}_t$ et $\tilde{y}_t$ respectivement , les solutions d'équations linéaires suivantes :*

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t = \left[b_x(t, x_t, u_t)\,\tilde{x}_t + b_v(t, x_t, u_t)(v_t - u_t)\right] dt \\ +\left[\sigma_x(t, x_t, u_t)\,\tilde{x}_t + \sigma_v(t, x_t, u_t)(v_t - u_t)\, dW_t\right], \\ x_0 = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} d\tilde{y}_t = -\left[f_x(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,\tilde{x}_t + f_y(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,\tilde{y}_t\right] dt \\ -\left[f_z(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,\tilde{z}_t\right] + f_v(t, x_t, y_t, z_t, u_t)(v_t - u_t)\, dt + \tilde{z}_t dW_t, \\ \tilde{y}_T = \varphi_x(x_T)\,\tilde{x}_T \end{cases} \tag{2.16}$$

puis

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left|\tilde{x}_t - \frac{x_t^\theta - x_t}{\theta}\right|^2 = 0, \tag{2.17}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left|\tilde{y}_t - \frac{y_t^\theta - y_t}{\theta}\right|^2 = 0, \tag{2.18}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\int_0^T \left|\tilde{z}_t - \frac{z_t^\theta - z_t}{\theta}\right|^2 dt = 0, \tag{2.19}$$

Preuve. Pour plus de simplicité, nous mettons

$$X_t = \tilde{x}_t - \frac{x_t^\theta - x_t}{\theta}, Y_t = \tilde{y}_t - \frac{y_t^\theta - y_t}{\theta}, Z_t = \tilde{z}_t - \frac{z_t^\theta - z_t}{\theta},$$

et

$$\Lambda_t^\theta = \left(t, x_t + \lambda\theta\left(\tilde{x}_t - X_t\right), y_t + \lambda\theta\left(\tilde{y}_t - Y_t\right), z_t + \lambda\theta\left(\tilde{z}_t - Z_t\right), u_t + \lambda\theta\left(v_t - u_t\right)\right)$$

on a

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t \int_0^1 b_x\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right) X_s d\lambda ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right) X_s d\lambda dW_s + \beta_t^\theta, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_t^\theta &= \int_0^t b_x\left(s, x_s, u_s\right) \tilde{x}_s ds + \int_0^t \sigma_x\left(s, x_s, u_s\right) \tilde{x}_s dW_s \\ &\quad + \int_0^t b_v\left(s, x_s, u_s\right)\left(v_s - u_s\right) ds + \int_0^t \sigma_v\left(s, x_s, u_s\right)\left(v_s - u_s\right) dW_s \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 b_x\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right) \tilde{x}_s d\lambda ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right) \tilde{x}_s d\lambda dW_s \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 b_v\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right)\left(v_s - u_s\right) d\lambda ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 \sigma_v\left(s, x_s + \lambda\theta\left(\tilde{x}_s - X_s\right), u_s + \lambda\theta\left(v_s - u_s\right)\right)\left(v_s - u_s\right) d\lambda dW_s \end{aligned}$$

Puisque les dérivées b_x et σ_x sont bornées, on a

$$\mathbb{E}\left|X_t\right|^2 = C\mathbb{E}\int_0^T \left|X_s\right|^2 ds + C\mathbb{E}\left|\beta_t^\theta\right|^2$$

Puisque $b_x, \sigma_x, b_v, \sigma_v$ sont continues et bornés, on a

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \beta_t^\theta = 0.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, nous obtenons (2.17) ,Prouvons maintenant (2.8) et(2.8) ;on a

$$dY_t = -\left(F_t^y Y_t + F_t^z Z_t - \gamma_t^\theta\right) dt + Z_t dW_t$$

où

$$F_t^y = \int_0^1 f_y\left(\Lambda_t^\theta\right) d\lambda, \qquad F_t^z = \int_0^1 f_z\left(\Lambda_t^\theta\right) d\lambda,$$

et γ_t^θ est donné par

$$\begin{aligned} \gamma_t^\theta \;\; = \;\; & \int_0^1 f_x\left(\Lambda_t^\theta\right) \tilde{x} d\lambda + \int_0^1 f_y\left(\Lambda_t^\theta\right) \tilde{y}_t d\lambda + \int_0^1 f_z\left(\Lambda_t^\theta\right) \tilde{z} d\lambda \\ & + \int_0^1 f_v\left(\Lambda_t^\theta\right)\left(v_t - u_t\right) d\lambda - \int_0^1 f_x\left(\Lambda_t^\theta\right) X_t d\lambda \\ & - f_x\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) \tilde{x}_t + f_y\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) \tilde{y}_t \\ & - f_z\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) \tilde{z}_t - f_v\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right)\left(v_t - u_t\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

en appliquant la formule d' Itô a $\left(Y_t\right)^2$, on trouve que

$$\mathbb{E}\left|Y_t\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left|z_s\right|^2 ds = \mathbb{E}\left|Y_t\right|^2 + 2\mathbb{E}\int_t^T \left|Y_s\left(F_s^y Y_s + F_s^z Z_s - \gamma_s^\theta\right)\right| ds, \tag{2.21}$$

par la formule de Young, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|Y_s\left(F_s^y Y_s + F_s^z Z_s - \gamma_s^\theta\right)\right| &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|\left(F_s^y Y_s + F_s^z Z_s - \gamma_s^\theta\right)\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|F_s^y Y_s\right|^2 \\
&\quad + \frac{C\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|F_s^z Z_s\right|^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|\gamma_s^\theta\right|^2,
\end{aligned}$$

depuis F_t^y et F_t^z sont bornés, nous avons

$$\mathbb{E}\left|Y_s\left(F_s^y Y_s + F_s^z Z_s - \gamma_s^\theta\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C\varepsilon}{2}\right)\mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|Z_s\right|^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\mathbb{E}\left|\gamma_s^\theta\right|^2,$$

ainsi, nous pouvons réécrire (2.21) comme suit :

$$\mathbb{E}\left|Y_t\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left|z_s\right|^2 ds \leq \left(C\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\int_t^T \mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 ds + C\varepsilon\int_t^T \mathbb{E}\left|Z_s\right|^2 ds + \delta_t^\theta, \tag{2.22}$$

où

$$\delta_t^\theta = \mathbb{E}\left|Y_T\right|^2 + C\varepsilon\mathbb{E}\int_t^T \left|\gamma_s^\theta\right|^2 ds, \tag{2.23}$$

choisissez $\varepsilon = \frac{1}{2C}$; alors (2.22) devient

$$\mathbb{E}\left|Y_t\right|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \left|z_s\right|^2 ds \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\int_t^T \mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 ds + \delta_t^\theta,$$

de l'inégalité ci-dessus, nous déduisons deux inégalités

$$\mathbb{E}\left|Y_t\right|^2 \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\int_t^T \mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 ds + \delta_t^\theta \tag{2.24}$$

$$\mathbb{E}\int_t^T \left|z_s\right|^2 ds \leq (4C+1)\int_t^T \mathbb{E}\left|Y_s\right|^2 ds + 2\delta_t^\theta, \tag{2.25}$$

de (2.20) et de la continuité de f_x, f_y, f_z, f_v, on déduit que

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \gamma_t^\theta = 0. \tag{2.26}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|Y_T\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\tilde{y}_T - \frac{y_T^\theta - y_T}{\theta}\right|^2 = \mathbb{E}\left|\varphi_x\left(x_T\right)\tilde{x}_T - \frac{\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T\right)}{\theta}\right|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}\left|\varphi_x\left(x_T\right)\tilde{x}_T - \int_0^1 \varphi_x\left(x_T + \lambda\theta\left(\tilde{x}_T - X_T\right)\right)\tilde{x}_T d\lambda\right|^2 \\ &\quad + 2\mathbb{E}\int_0^1 \left|\varphi_x\left(x_T + \lambda\theta\left(\tilde{x}_T - X_T\right)\right)X_T\right|^2 d\lambda,\end{aligned}$$

puisque φ_x est continue et borné, on obtient de (2.17) que

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left|Y_T\right|^2 = 0, \tag{2.27}$$

par (2.23), (2.26) et (2.27), nous déduisons que

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0}\delta_t^\theta = 0, \tag{2.28}$$

en utilisant (2.24),(2.28) , le lemme de Grönwall et le Bürkholder – Davis – Gundy inégalité, nous obtenons (2.18) ,

enfin, (2.19) est dérivé de (2.18), (2.25) et (2.28). Lemme (2.2) est prouvé. ■

Lemme 2.3 *Soit u un contrôle optimal minimisant la fonctionnelle J sur $\mathcal{U}$, et soit (x_t, y_t, z_t) sa trajectoire associée. Alors pour tout $v \in \mathcal{U}$ on a*

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right)\tilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\left[h_y\left(y_0\right)\tilde{y}_0\right] + \mathbb{E}\int_0^T l_v\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right)\tilde{x}_t + l_y\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right)\tilde{y}_t + l_z\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right)\tilde{z}_t\right]dt\end{aligned} \tag{2.29}$$

Preuve. Nous utilisons la même notation que dans la preuve du lemme (2.2),de l'inégalité (2.6), nous avons

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\int_0^1 g_x(t, x_t + \lambda\theta\left(\tilde{x}_t - X_t\right))\tilde{x}_t d\lambda + \mathbb{E}\int_0^1 h_y\left(y_t + \lambda\theta\left(y_t - \tilde{y}_t\right)\right)\tilde{y}_t d\lambda \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 \left[l_x\left(\Lambda_t^\theta\right)\tilde{x}_t + l_y\left(\Lambda_t^\theta\right)\tilde{y}_t + l_z\left(\Lambda_t^\theta\right)\tilde{z}_t + l_v\left(\Lambda_t^\theta\right)\left(v_t - u_t\right)\right]d\lambda dt - \rho_t^\theta\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\rho_t^\theta &= \mathbb{E}\int_0^1 g_x(t,x_t+\lambda\theta\left(\tilde{x}_t-X_t\right))X_t d\lambda+\mathbb{E}\int_0^1 h_y\left(y_t+\lambda\theta\left(y_t-\tilde{y}_t\right)\right)Y_t d\lambda \\ &+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\left[l_x\left(\Lambda_t^\theta\right)X_t+l_y\left(\Lambda_t^\theta\right)Y_t+l_z\left(\Lambda_t^\theta\right)Z_t\right]d\lambda dt,\end{aligned}$$

puisque les dérivées g_x, h_y, l_x, l_y, l_zet l_v sont continues et bornées, en déduire d'après (2.17),(2.18) et (2.19) que

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0}\rho_t^\theta=0,$$

en laissant θ tend vers 0 dans l'inégalité ci-dessus, la preuve est complétée. ∎

2.1.2 Équations adjointes et conditions nécessaires d'optimalité

Introduire les trois équations différentielles stochastiques suivantes, appelées équations adjointes :

$$\begin{aligned}dp_t &= -\left[l_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)+b_x\left(t,x_t,u_t\right)p_t+\sigma_x\left(t,x_t,u_t\right)P_t\right]dt \\ &\quad -f_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t dt+P_t dW_t, \\ p_T &= g_x\left(x_T\right),\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}dq_t &= \left[l_y\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)+f_y\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\right]dt \\ &\quad +\left[l_z\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)+f_z\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\right]dW_t, \\ q_0 &= h_y\left(y_0\right),\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} dk_t &= -\left[b_x\left(t,x_t,u_t\right)k_t+\sigma_x\left(t,x_t,u_t\right)K_t\right]dt+K_t dW_t, \\ k_t &= -\varphi_x\left(x_T\right)q_T, \end{aligned} \tag{2.32}$$

Les processus p , q et k (appelés processus adjoints) sont progressivement mesurables par rapport à la filtration$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et nous avons

$$\begin{aligned} (p,P) &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];R^n\right)\times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];R^{n\times d\times}\right), \\ q &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];R^m\right), \\ (k,K) &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];R^n\right)\times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];R^{n\times d\times}\right). \end{aligned}$$

Puisque $p_T=g_x\left(x_T\right)$ et $q_0=h_y\left(y_0\right)$, l'inégalité (2.29) devient

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[p_T\tilde{x}_T\right]+\mathbb{E}\left[q_0\tilde{y}_0\right]+\mathbb{E}\int_0^T l_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)dt \\ & +\mathbb{E}\int_0^T\left[l_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{x}_t+l_y\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{y}_t+l_z\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{z}_t\right]dt. \end{aligned} \tag{2.33}$$

En appliquant la formule d' Itô a $\left(p_t\tilde{x}_t\right),\left(q_t\tilde{y}_t\right)$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[p_T\tilde{x}_T\right] &= -\mathbb{E}\int_0^T\left[l_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{x}_t+f_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\tilde{x}_t\right]dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T\left[b_v\left(t,x_t,u_t\right)p_t+\sigma_v\left(t,x_t,u_t\right)P_t\right]\left(v_t-u_t\right)dt \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[q_0\tilde{y}_0\right] &= \mathbb{E}\left[q_T\tilde{y}_T\right]-\mathbb{E}\int_0^T\left[l_y\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{y}_t+l_z\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\tilde{z}_t\right]dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T\left[f_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\tilde{x}_t+f_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\left(v_t-u_t\right)\right]dt, \end{aligned} \tag{2.35}$$

alors (2.33) devient

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \mathbb{E}\left[q_T \tilde{y}_T\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[\left(b_v\left(t,x_t,u_t\right)p_t + \sigma_v\left(t,x_t,u_t\right)P_t\right)\left(v_t-u_t\right)\right]dt \\ & +\mathbb{E}\int_0^T \left[f_x\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\tilde{x}_t + f_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)q_t\left(v_t-u_t\right)\right]dt \\ & +\mathbb{E}\int_0^T l_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)dt \end{aligned} \tag{2.36}$$

On remarque que $q_T\tilde{y}_T = -k_T\tilde{x}_T$,puis en appliquant la formule Itô à $(k_t\tilde{x}_t)$, on avoir que

$$\mathbb{E}\left[q_T\tilde{y}_T\right] = -\mathbb{E}\left[k_T\tilde{x}_T\right] = -\mathbb{E}\int_0^T \left[b_v\left(t,x_t,u_t\right)k_t + \sigma_v\left(t,x_t,u_t\right)K_t\right]\left(v_t-u_t\right)dt,$$

ainsi (2.36) devient

$$0 \leq \mathbb{E}\int_0^T H_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(u_t-v_t\right)dt \qquad \forall v\in\mathcal{U} \tag{2.37}$$

où l'hamiltonien H de $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathcal{M}_{m\times d}\left(\mathbb{R}\right)\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est défini par

$$\begin{aligned} H\left(t,x,y,z,v,p,q,k\right) \quad = \quad & -l\left(t,x,y,z,v\right) - b\left(t,x,v\right)\left(p-k\right) \\ & -\sigma(t,x,v)(P-K) - f(t,x,y,z,v)q. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions nécessaires d'optimalité.

Théorème 2.1 *Soit u un contrôle optimal minimisant la fonctionnelle J sur $\mathcal{U}$, et soit (x_t,y_t,z_t) la trajectoire optimale correspondante. Ensuite, il y a trois uniques processus progressivement mesurables p, q et k, qui sont , respectivement , des solutions d'équations différentielles stochastiques* (2.30), (2.31) *et*(2.32) *telles que*

$$0 \leq H_v\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(u_t-v_t\right) \qquad \forall v\in\mathcal{U}. \tag{2.38}$$

Preuve. Le résultat découle immédiatement de (2.37). ■

2.1.3 Les conditions suffisantes d'optimalité

Dans cette section, nous étudions quand les conditions nécessaires d'optimalité (2.38) deviennent suffisantes.

Théorème 2.2 *(conditions suffisantes d'optimalité) Supposons que $g(.)$ et $h(.)$ sont convexe et l'application $(x, y, z, v) \longmapsto H(t, x, y, z, v, p, q, k)$ est concave.Alors u est un contrôle optimal s'il satisfait* (2.38).

Preuve. Soit u un contrôle admissible arbitraire (candidat optimal), et soit (x_t^u, y_t^u, z_t^u) la trajectoire du système contrôlé par u . Pour tout contrôle admissible v, avec trajectoire associée (x_t^v, y_t^v, z_t^v), on a

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \mathbb{E}\left[g\left(x_T^v\right) - g\left(x_T^u\right)\right] + \mathbb{E}\left[h\left(y_0^v\right) - h\left(y_0^u\right)\right] \\ &\quad + \int_0^T \left[l\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - l\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt, \end{aligned}$$

puisque g et h sont convexes, nous avons

$$\begin{aligned} g\left(x_T^v\right) - g\left(x_T^u\right) &\geq g_x\left(x_T^u\right)\left(x_T^v - x_T^u\right) \\ h\left(y_0^v\right) - h\left(y_0^u\right) &\geq h_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^v - y_0^u\right), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T^u\right)\left(x_T^v - x_T^u\right)\right] + \mathbb{E}\left[h_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - l\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

On remarque que $p_T = g_x(x_T^u)$ et $q_0 = h_y(y_0^u)$;en suit

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^v - x_T^u\right)\right] + \mathbb{E}\left[q_0\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - l\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

En appliquant la formule Itô à $p_t\left(x_t^u - x_t^v\right)$et $q_t\left(y_t^u - y_t^v\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^v - x_T^u\right)\right] &= -\mathbb{E}\int_0^T \left[l_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + b_x\left(t, x_t^u, u_t\right) p_t\right]\left(x_t^v - x_t^u\right) dt \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[\sigma_x\left(t, x_t^u, u_t\right) P_t + f_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(x_t^v - x_t^u\right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left(\left[b\left(t, x_t^v, v_t\right) - b\left(t, x_t^u, u_t\right)\right] p_t + \left[\sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) - \sigma(t, x_t^u, u_t)\right] P_t\right) dt \\ \mathbb{E}\left[q_0\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] &= \mathbb{E}\left[q_T\left(y_T^v - y_T^u\right)\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_y(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t) + f_y\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(y_t^v - y_t^u\right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[f\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - f\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] q_t dt \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_z(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t) + f_z\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(z_t^v - z_t^u\right) dt \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}\left[q_T\left(y_T^v - y_T^u\right)\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) + b_x\left(t, x_t^u, u_t\right) p_t\right]\left(x_t^v - x_t^u\right) dt \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[\sigma_x\left(t, x_t^u, u_t\right) P_t + f_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(x_t^v - x_t^u\right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left(\left[b\left(t, x_t^v, v_t\right) - b\left(t, x_t^u, u_t\right)\right] p_t + \left[\sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) - \sigma(t, x_t^u, u_t)\right] P_t\right) dt \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_y(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t) + f_y\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(y_t^v - y_t^u\right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[f\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - f\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] q_t dt \\ &\quad - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_z(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t) + f_z\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) q_t\right]\left(z_t^v - z_t^u\right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - l\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

On remarque que $q_T(y_T^v - y_T^u) = -k_T(x_T^v - x_T^u)$ puis en appliquant la formule Itô à $k_t\,(y_t^v - y_t^u)$on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[k_T(x_T^v - x_T^u)\right] &= -\mathbb{E}\int_0^T \left[b_x\left(t, x_t^u, u_t\right)k_t + \sigma(t, x_t^u, u_t)K_t\right]\left(x_t^v - x_t^u\right)dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T \left(\left[b\left(t, x_t^v, v_t\right) - b\left(t, x_t^u, u_t\right)\right]k_t + \left[\sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) - \sigma(t, x_t^u, u_t)\right]K_t\right)dt\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}J\left(v\right) - J\left(u\right) &\geq \mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right) - H\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t, p_t, q_t, k_t\right)\right]dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T H_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(x_t^v - x_t^u\right)dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T H_y\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right)dt \\ &\quad +\mathbb{E}\int_0^T H_z\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)dt,\end{aligned}$$

puisque l'hamiltonien H est concave par rapport à (x, y, z, u) nous avons

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t, p_t, q_t, k_t\right) - H\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\right]dt \\ \leq\ &\mathbb{E}\int_0^T H_x\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(x_t^v - x_t^u\right)dt \\ &+\mathbb{E}\int_0^T H_y\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right)dt \\ &+\mathbb{E}\int_0^T H_z\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)dt \\ &+\mathbb{E}\int_0^T H_v\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t, p_t, q_t, k_t\right)\left(v_t - u_t\right)dt,\end{aligned}$$

ou,équivalent ;

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\int_0^T H_v\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(u_t-v_t\right)dt \\
\leq\ & \mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)-H\left(t,x_t^v,y_t^v,z_t^v,v_t,p_t,q_t,k_t\right)\right]dt \\
& +\mathbb{E}\int_0^T H_x\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(x_t^v-x_t^u\right)dt \\
& +\mathbb{E}\int_0^T H_y\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(y_t^v-y_t^u\right)dt \\
& +\mathbb{E}\int_0^T H_z\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(z_t^v-z_t^u\right)dt
\end{aligned}
$$

puis

$$J\left(v\right)-J\left(u\right)\geq\mathbb{E}\int_0^T H_v\left(t,x_t^u,y_t^u,z_t^u,u_t,p_t,q_t,k_t\right)\left(u_t-v_t\right)dt.$$

Les conditions nécessaires d'optimalité (38) impliquent $J\left(v\right)-J\left(u\right)\geq 0$. Le théorème est prouvé. ■

2.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme global

Dans cette section, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le forme global

Théorème 2.3 *(conditions nécessaires d'optimalité sous la forme global).Supposer que H est concave par rapport à la variable de contrôle v. Soit u un contrôle optimal minimisant la fonctionnelle J sur $\mathcal{U}$, et soit (x_t,y_t,z_t) la trajectoire optimal correspondent, ensuite, il y a trois processus uniques mesurables progressivement p,q,et k qui sont respectivement des solutions d'équations différentielles stochastiques* (2.30), (2.31) *,et* (2.32) *, de telle sorte que*

$$H(t,x_t,y_t,z_t,u_t,p_t,q_t,k_t)=\max_{v\in U}H(t,x_t,y_t,z_t,u_t,p_t,q_t,k_t) \tag{2.39}$$

Preuve. La condition que H est concave dans la variable de contrôle u implique que $-H$ est convexe par rapport au même argument. De plus l'application $v \longmapsto -H(x, y, z, v, p, q, k)$ est continu, et Gâteaux-différentiable, avec différentielle continue. Puis en appliquant le principe d'optimisation convexe , nous avons

u_t minimise $-H \iff -H_v(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t, k_t)(v_t - u_t) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}$

ou équivalent a

u_t maximise $H \iff H_v(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t, k_t)(u_t - v_t) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}$

À partir de la propriété ci-dessus et du théorème 1, la preuve est complétée. ■

Théorème 2.4 *(conditions suffisantes d'optimalité sous forme global).Supposons que* $g(.)$*et* $h(.)$*sont convexes et l'application* $(x, y, z, v) \longmapsto H(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t, k_t)$ *est concave. puis* u *un contrôle optimal s'il satisfait* (2.39) .

Preuve. A partir de (**??**), il est facile de voir que si u satisfait (2.39), alors u satisfait (2.38).Par conséquent, à partir du théorème (2.2), u est un contrôle optimal. ■

2.2.1 Modèle avec condition terminale constante

Prenons un cas particulier de problème $(2.1) - (2.3)$ étudié dans les sections précédentes, où la condition terminale $y_T = \xi$ est un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable à n dimensions tel que

$$\mathbb{E}\,|\xi|^2 < \infty$$

Alors la condition terminale dans (2.16) est $\tilde{y}_T = 0$, de sorte que $\mathbb{E}[q_T \tilde{y}_T] = 0$, et équation (2.35) devient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[q_0 \tilde{y}_0] &= -l_y(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,\tilde{y}_t + f_x(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,q_t \tilde{x}_t \\ &\quad + f_v(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,q_t(v_t - u_t) - l_z(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\,\tilde{z}_t.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Par conséquent, à partir de l'inégalité variationnelle(2.36) , on a

$$0 \leq \tilde{H}_v\left(t, x, y, z, v, p, q\right)\left(v_t - u_t\right),$$

où l'hamiltonien $\tilde{H}$ dans ce cas, est défini à partir de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m \times d}\left(\mathbb{R}\right) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{H}\left(t, x, y, z, v, p, q\right) = -l\left(t, x, y, z, v\right) - b\left(t, x, v\right) p - \sigma\left(t, x, v\right) P - f\left(t, x, y, z, v\right) q.$$

Dans ce cas, nous n'avons que deux processus adjoints donnés par

$$dp_t = \tilde{H}_x\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t\right) dt + P_t dW_t, \qquad p_T = g_x\left(x_T\right), \tag{2.41}$$

et

$$dq_t = -\tilde{H}_y\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t\right) dt - \tilde{H}_z\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t, p_t, q_t\right) dW_t, \qquad q_0 = h_y\left(y_0\right). \tag{2.42}$$

Avec l'hamiltonien $\tilde{H}$ et les processus adjoints p et q , il est facile de voir en utilisant les mêmes preuves, que les théorèmes $1, 4$ sont valides, sans les processus k.

Chapitre 3

Application à l'évaluation des flux de trésorerie

Modélisation et contrôle des flux de trésorerie les processus d'une entreprise ou d'un projet , par exemple, la tarification et la gestion d'une assurance contract, est une classe de problèmes où les EDSPR fournissent une configuration naturelle et un puissant outil. Dans ce chapitre, nous donnerons un exemple d'une telle situation survenant dans la tarification d'un contrat d'assurance simple.

Un preneur d'assurance d'une compagnie d'assurance a payé des primes au moment 0 ont accumulé à la somme m_0. L'argent est investi dans un portefeuille d'actifs riche $(x_t)_{t\in[0,T]}$ géré par la compagnie d'assurance sous un intervalle de temps $[0,T]$. A chaque l'instant $t \in [0,T]$ le preneur d'assurance devrait recevoir un montant $c_t x_t$.

Le présent valeur (prix) du flux de trésorerie $(c_s x_s)_{t\le s\le T}$, actualisé au temps t avec une remise facteur (déflateur) $\exp\left\{-\int_0^t \lambda_s ds\right\}$, λ_t est supposé non négatif, borné et déterministe, est donnée par

$$y_t = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_0^s \lambda_r dr} c_s x_s ds / \mathcal{F}_t\right] \tag{3.1}$$

Supposons que le portefeuille soit investi dans un modèle de marché **Black − Scholes** simple consistant en un actif sans risque (par exemple, une obligation ou un compte bancaire) avec un taux d'intérêt r_t supposé borné et déterministe et un actif risqué évoluant en tant que mouvement brownien géométrique avec taux de rendement μ_t et volatilité σ_t ,tous deux supposés fonctions bornées et déterministes du temps, avec $\sigma_t \geq \varepsilon > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Dans ce marché le processus de richesse $(x_t)_t$ est régi par

$$dx_t = (r_t x_t + \rho_t u_t)\, dt + \sigma_t u_t dW_t, \qquad x_0 = m_0, \tag{3.2}$$

où u_t est le montant investi dans l'actif risqué et $\rho_t = \mu_t - r_t$ est la prime de risque .
L'assureur répartit les montants (u_t) afin de se rapprocher dela cible suivante au temps T :
Trouver des stratégies admissibles (c, u) qui maximisent les préférences du preneur d'assurance représentées par la fonction d'utilité F des flux de trésorerie,actualisé à son taux d'actualisation personnel β , supposé constant, et minimiser la variance de la fortune terminale, à condition que le montant total à verser est égal à la prime totale m_0 :

$$\begin{bmatrix} \max_{(c,u)} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta t} F(c_t x_t)\, dt - (x_T - \mathbb{E}\, x_t)^2\right] \\ \text{sous contrainte } \mathbb{E}\, x_T = d \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_s ds} c_s x_s ds\right] = m_0. \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, le problème peut être réduit au suivant problème de contrôle sans contrainte :

$$\max_{(c,u)} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta t} F(c_t x_t)\, dt - \frac{\delta}{2}(x_T - a)^2 + \theta (y_0 - d)\right], \tag{3.3}$$

où δ et θ sont les poids relatifs de l'atteinte de la cible et

$$y_0 = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_0^s \lambda_r dr} c_s x_s ds / \mathcal{F}_0\right]$$

est la valeur totale du flux de trésorerie actualisé au temps zéro.
Nous avons besoin de la définition suivante des stratégies admissibles adaptées à notre problème.

Définition 3.1 *Une stratégie admissible est une paire de* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- *processus adaptés*$(c, u)$ *tel* *que*(3.2) *a une solution forte* $(x_t)_{t\in[0,t]}$ *qui satisfait*

$$\mathbb{E}\int_0^T |x_t|^2\, dt < \infty \tag{3.4}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_s ds} c_t x_t dt\right)^2 < \infty \tag{3.5}$$

maintenent,pour chaque stratégie admissible (c, u), le $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -processus de valeur adaptée $(y_t)_t$ (3.1) satisfait le EDSR suivant :

$$dy_t = (\lambda_t y_t - c_t x_t)\, dt + z_t dW_t, \qquad y_T = 0,$$

où $(z_t)_t$est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -adapté et intégrable au carré par rapport à $dt \times P$ sur$[0, T] \times \Omega$ posons

$$\Lambda_t = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_s ds\right\}, \quad M_t = \mathbb{E}\left[\int_0^T \Lambda_s c_s x_s ds/\mathcal{F}_t\right]$$

maintenent, par (3.5) il s'ensuit que M_t est une martingale carrée intégrable adaptée à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ .Par conséquent, par le théorème de représentation des martingales, il existe un unique$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-processus stochastique adapté φ_s tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dW_s,$$

où $\varphi_s$est un$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -processus adapté tel que $\mathbb{E}\int_0^T \varphi_s^2 < \infty$. Maintenant, nous pouvons écrire y_t comme suit :

$$y_t = \frac{M_t}{\Lambda_t} - \frac{1}{\Lambda_t}\int_0^t \Lambda_s c_s x_s ds$$

Par conséquent, y_t satisfait

$$dy_t = (\lambda_t y_t - c_t x_t)\, dt + \frac{\varphi_t}{\Lambda_t} dW_t.$$

on pose $z_t = \frac{\varphi_t}{\Lambda_t}$, on obtient que $(z_t)_t$est$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté et intégrable au carré par rapport à $dt \times P$ sur$[0,T] \times \Omega$ et que $(y_t)_t$ satisfait(**??**) .Par conséquent, (3.2) - (**??**) satisfait par (x,y,z) est un EDSPR.Supposons que la fonction d'utilité du preneur d'assurance soit de type HARA. Autrement dit, $F(X) = X^\gamma/\gamma$ où $\gamma \in [0,1]$ .Nous voulons résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{(c,u)} \mathbb{E}\left[g(x_T) + h(y_0) + \int_0^T e^{-\beta t \frac{(c_t x_t)^\gamma}{\gamma}} dt \right], \tag{3.6}$$

où

$$g(x) = -\frac{\delta}{2}(x-a)^2, \qquad h(y) = \theta(y-d),$$

et (x,y) est la solution du EDSPR linéaire (3.2),(3.1) .En appliquant les résultats du chapitre précédent, le hamiltonien de notre problème de contrôle est

$$H(t,x,y,z,u,c,p,q) = e^{-\beta t}\frac{(cx)^\gamma}{\gamma} + (r_t x + \rho_t u)\,p + \sigma_t u P + (\lambda_t y - cx)\,q, \tag{3.7}$$

et le système d'équations adjointes (2.41), (2.42) devient

$$\begin{cases} dp_t = -\left\{ r_t p_t + e^{-\beta t} c_t^\gamma x_t^{\gamma-1} - c_t q_t \right\} dt + P_t dW_t, \\ p_T = g_x(x_T) = -\delta(x_T - a) \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} dq_t = \lambda_t q_t dt, \\ q_0 = h_y(y_0) = \theta, \end{cases} \tag{3.9}$$

Maintenant, nous allons $(\hat{c},\hat{u})$ être candidat à une stratégie optimale, soit $(\hat{x}_t,\hat{y}_t,\hat{z}_t)$ la solution de notre FBSDE (3.2), (**??**) avec une solution associé$(\hat{p}_t,\hat{q}_t)$. La valeur de c qui maximise $H(t,\hat{x}_t,\hat{y}_t,\hat{z}_t,.,\hat{u},\hat{p}_t,\hat{q}_t)$ vérifie

$$\hat{c}_t = \left(e^{-\beta t}\hat{x}_t^{1-\gamma}\hat{q}_t \right)^{1/(\gamma-1)} \tag{3.10}$$

Puisque $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ est supposé non négatif, la condition (3.5)est satisfaite. Par ailleurs,puisque le terme impliquant u dans l'hamiltonien est linéaire, le coefficient u devrait disparaître,c'est à dire

$$\hat{P}_t = -\frac{\rho_t}{\sigma_t}\hat{p}_t \tag{3.11}$$

Par conséquent, par(3.10) et , $(\hat{p}_t, \hat{q}_t)$ satisfait à ce qui suit découplé FBSDE :

$$dp_t = -r_t p_t dt - \frac{\rho_t}{\sigma_t} p_t dW_t, \qquad p_T = g_x(x_T), \tag{3.12}$$

$$dq_t = \lambda_t q_t dt, \qquad q_0 = h_y(y_0). \tag{3.13}$$

L'équation (3.13) a une solution unique

$$\hat{q}_t = h_y(\hat{y}_0)\exp\left\{\int_0^t \lambda_s ds\right\}. \tag{3.14}$$

Cherchons une solution à (3.12) de la forme

$$p_t = f(t)\,\hat{x}_t + g(t)$$

où les fonctions f et g sont déterministes.Ce choix est motivé par le fait que la valeur finale $\hat{p}_T$ est linéaire en $\hat{x}_T$. En utilisant le lemme Itô et en identifiant les coefficients en (3.2) et (3.12), les fonctions f et g doivent satisfaire

$$(f(t) + 2r_t f(t))\,\hat{x}_t + \rho_t \hat{u}_t f(t) + g(t) + r_t g(t) = 0, \tag{3.15}$$

$$-\frac{\rho_t}{\sigma_t}(f(t)\,\hat{x}_t + g(t)) = f(t)\,\sigma_t \hat{u}_t. \tag{3.16}$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \left(\frac{\rho_t^2}{\sigma_t^2} - 2r_t\right) f(t), \qquad f(T) = -\delta, \\ \dot{g}(t) &= \left(\frac{\rho_t^2}{\sigma_t^2} - r_t\right) g(t), \qquad g(T) = \delta a, \end{aligned} \tag{3.17}$$

Les solutions de ces équations sont

$$f(t) = -\delta \exp\left\{\int_t^T \left(\frac{\rho_s^2}{\sigma_s^2} - 2r_s\right) ds\right\}, \qquad t \in [0, T], \tag{3.18}$$

$$g(t) = \delta a \exp\left\{\int_t^T \left(\frac{\rho_s^2}{\sigma_s^2} - r_s\right) ds\right\}, \qquad t \in [0, T], \tag{3.19}$$

finalement

$$\hat{u}_t = -\frac{\rho_t}{\sigma_t^2}\hat{x}_t - \frac{g(t)}{f(t)\,\sigma_t^2}. \tag{3.20}$$

Puisque $\hat{u}_t$ est linéaire en $\hat{x}_t$, elle conduit à une EDS linéaire à coefficients bornée pour $\hat{x}$,et donc il satisfait (3.4).En résumé, une stratégie optimale admissible$(\hat{c}, \hat{u})$ de problème (3.6) soumis aux dynamique (3.2) et (3.1) est donnée par(3.10) et (3.20).

Conclusion

Dans ce mémoire , nous nous intéressé aux problèmes de contrôles dans lesquels le système est régi par une équation différentielle stochastique progréssive et rétrograd (EDSPRs)

La première partie est basée sur le calcule stochastique , le calcul d'Itô et l'équation différentielle stochastique et l'éxistence et l'unicité de cette équation , et cette étude nous aide dans la deuxième partie.

Dans la deuxième partie , nous avons parlons sur le principe du maximums stochastique L'objectif principale de cette étude est de trouver des conditions nécessaires d'optimalité vériffées par un contrôle optimale minimisant le coût

Dans la troisieme partie nous appliquons notre version du principe du maximum stochastique au modèle financier d'un problème de valorisation des flux de trésorerie

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1982). Lectures on stochastic control. In Nonlinear filtering and stochastic control (pp. 1-62). Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] Jeanblanc, M. (2002). Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance.

[3] Briand, P. (2001).Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[5] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

[6] Boughrara, S. (2005). Principe du maximum pour les problemes de controle stochastique : Approche par les probabilités equivalant (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider-Biskra).

[7] S. BAHLALI (2006) . Necessary and Sufficient Conditions of Optimality for Optimal Control Problems of Forward and Backward Systems

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	Espace de probabilité filtré.
B_t	Mouvement Brownien.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$B(\mathbb{R}^d)$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
E	Espérance par rapport à la probabilité P.
sup	Sépérieur.
inf	Inférieur.
càdlàg	Continue à droite pourvu de limite à gauche.
càglàd	Continu àgauche pourvu de limite à droite.
exp	exponentiel.

EDS	Equation différentielle stochastique.
$< .,. >$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
U_{ad}	L'ensemble des corntrôles admissibles.
u	contrôle admissible.
u^*	contrôle optimal.
u^ρ	Contrôle perturbé.
$J(.)$	fonction de coût.
PMS	Principe du maximum stochastique.
$H(t,x,u,p,q)$	Hmiltonien.

Résumé

Dans ce mémoire nous donnons des rappelles sur le calcule stochastique et des notions de base puis nous formulons le problème et donnez les différentes hypothèses utilisées tout au long de le mémoire, et certains résultats préliminaires, qui seront utilisés dans ce qui suit puis nous introduisons des processus adjoints et nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalité, pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme d'un principe de maximum. Enfin nous appliquons notre version du principe du maximum stochastique au modèle financier d'un problème de valorisation des flux de trésorerie.

Mots clés : équation différentielle stochastique avant et arrière, principe du maximum stochastique, contrôle optimal, équation adjointe, équation variation elle, évaluation des flux de trésorerie

Abstract

In this thesis we give reminders on the stochastic calculus and basic notions then we formulate the problem and give the different hypotheses used throughout the thesis, and some preliminary results, which will be used in what follows then we introduce some adjunct processes and we derive the necessary conditions of optimality, to obtain the necessary and sufficient conditions of optimality in the form of a maximum principle. Finally, we apply our version of the principle of the stochastic maximum to the financial model of a problem of evaluation of cash flows.

Key words: forward and backward stochastic differential equation, stochastic maximum principal, optimal control, adjoint equation, variational equation, cash flow valuation

ملخص

في هذه الأطروحة نعطي تذكيرا بحساب التفاضل والتكامل العشوائي والمفاهيم الأساسية، ثم نصوغ المشكلة ونعطي الفرضيات المختلفة المستخدمة في الأطروحة، وبعض النتائج الأولية، والتي سيتم استخدامها فيما يلي ثم نقدم بعض العمليات المساعدة ونشتق الشروط اللازمة لتحقيق الأمثل، للحصول على الشروط الضرورية والكافية الأمثل في شكل مبدأ أقصى. أخيرا، نطبق نسختنا من مبدأ الحد الأقصى العشوائي على النموذج المالي لمشكلة تقييم التدفقات النقدية

الكلمات المفتاحية: لمعادلة التفاضلية العشوائية للأمام والخلف، القيمة الأساسية القصوى العشوائية، التحكم الأمثل، المعادلة المساعدة، المعادلة المتغيرة، تقييم التدفق النقدي