République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilité**

Par

**LEBKARA Ibtissam**

Titre :

# Introduction à l'optimisation stochastique

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **CHIGHOUB Farid** | UMKB | Président |
| Dr. | **LABED Saloua** | UMKB | Encadreur |
| Dr. | **ZOUZOU Akila** | UMKB | Examinateur |

Juin 2021

# Dédicace

Je dédie cet humble travail avec respect et sincérité à des êtres qui me sont très chers, les plus proches de mon coeur, à qui m'ont guidé vers la vie de la réussite à ceux qui ont fait l'impossible pour me donner le bonheur et sacrifier pour me permettre de poursuivre mes études jusqu'à ce jour, à ceux qui se brûlent les doigts pour m'éclaire le chemin de la réussite.

A la lumière et symbole de la vie, à la source de tendresse ma grand-mère : **BEN SADDOK Baya** qui m'encourage et me réconforter.

A mes parents : **Ibrahim** et **TINA Noura.**

A mon encadreuse : **Dr. LABED Saloua.**

A toute la famille **LEBKARA.**

A toute la famille **TINA.**

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

A tous mes amis : **Boubeche Noureddine, Berramdane Ahlem.**

A tout les étudiants de mathématique surtout la promotion de $2^{émé}$ année MASTER 2021.

A tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

## REMERCIEMENTS

Ce travail de mémoire de master est la première expérience dans l'activité de recherche.

Je pris **ALLAH** le tout puissant de m'avoie donnée courage et patience qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreuse : **Dr. LABED Saloua** s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie également les membres de jury Pr.**CHIGHOUB Farid** et **D.ZOUZOU Akila** pour avoir accepté d'évoluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques.

Je n'oublie pas ma grand-mère bien aimée : **BEN SADDOK Baya** qui a contribué à mon succès.

Enfin j'adresse mes plus sérères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

# Table des matières

**Remerciements** ii

**Table des matières** iii

**Introduction** 1

**1 Rappels sur le calcul stochastique** 3

1.1 Processus stochastique . . . . . 3

1.1.1 Filtration . . . . . 3

1.1.2 Mouvement Brownien . . . . . 5

1.2 Intégrale stochastique . . . . . 6

1.2.1 Propriétés d'intégrale stochastique . . . . . 6

1.2.2 Processus d'Itô . . . . . 7

1.2.3 Formule d'Itô . . . . . 8

**2 Formulation du problème de contrôle optimal stochastique** 10

2.1 Introduction au contrôle stochastique . . . . . 10

2.1.1 Classe des contrôles stochastiques . . . . . 11

2.2 Equation différentielles stochastique . . . . . 12

2.2.1 Solution forte de l'équation différentielles stochastique . . . . . 13

2.2.2 Existence et unicité . . . . . 14

**3 Principe du maximum et programmation dynamique** **20**

3.1 Formulation de problème . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.1.1 Formulation du problème du contrôle optimal stochastique . . . . . . . . . . . . 22

3.2 Principe du maximum stochastique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

3.2.1 Hamiltonien et équation adjoint . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

3.3 Principe de la programmation dynamique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.3.1 Principe de Bellman . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.3.2 Equation de Hamilton Jacobi Bellman(HJB) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

**Bibliographie** **40**

**Annexe : Abréviations et Notations** **41**

# Introduction

Un système de contrôle du point de vu mathématique est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrables, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastique, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Notre objectif dans ce travail est l'étude d'un problème de contrôle optimal stochastique. Nous abordons le problème de contrôle stochastique dont le but est de minimiser une fonction de coût $J(u_.)$ définie par

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)\, dt + g(x_T)\right]$$

où $X(T)$ est la solution prise au temps terminal $T$ d'un système gouverné par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)\, dt + \sigma(t, x_t, u_t)\, dB_t & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La fonction de valeurs associée à ce problème de contrôle est définie par $V(t, X) = \inf\limits_{u \in U[0,T]} (t, X, u_.)$.

Il existe deux approches majeures pour aborder la résolution des problèmes de contrôles, le principe du maximum de Pontryagin et la programmation dynamique appelé aussi principe de Bellman.

Principe du maximum de Pontryagin : les premiers travaux sur le principe du maximum stochastique a été fait par Kushner puis dans les années 1970, Haussmann a développé une version puissante du principe du maximum stochastique et appliqué pour résoudre certains problème importante dans le contrôle. Il fournit (principe du maximum) les condition nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle coût $J(u_{.})$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variation. La dérivée de la fonctionnelle $J(u_{.})$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être positive. Ceci entraîne que $\left.\frac{dJ(u_\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \geq 0$. Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Principe de la programmation dynamique : Le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) , certain problème analytiquement.

L'idée principale de la méthode de la programmation dynamique consiste à considérer une famille de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire appelée équation d'Hamilton Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification valide l'optimalité de ce candidat, la solution de HJB permet aussi de caractériser un contrôle optimal.

Notre travail et s'organisé comme suit

Le premier chapitre : en fait un rappel sur des notions très importantes en théorie de probabilité, nous commençons par les processus stochastique et processus de Lévy, ensuite en passe à la définition du mouvement Brownien. Nous abordons ensuite la notion d'intégrale stochastique et ses propriétés, a la fin processus d'Itô et formule d'Itô.

Le deuxième chapitre : est consacre à une introduction au contrôle stochastique on indiquant également des différentes classes de contrôles stochastique en suit en passe à la solution forte de l'équation différentielles stochastique.

Le troisième chapitre : contient la partie essentielle de notre travaille, nous commence par donnée une formulation de problème, en suite en passe aux conditions nécessaires d'optimalité ou bien on dit le principe du maximum de Pontryagin, finalement on s'intéresse au principe de la programmation dynamique.

# Chapitre 1

# Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions nécessaire en théorie du calcul stochastique, nous commençons par la définition de processus stochastique, processus de Lévy, mouvement Brownien, martingale, l'intégrale stochastique et EDS...ect.

## 1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** *Soit $I$ un ensemble d'indices non vide, on appelle processus stochastique (ou fonction aléatoire) une famille de variables aléatoire $\{X_t, t \in I\}$ indexée par $I$.*

***Remarque 1.1.1*** • *Si $I \subset \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret.*

*Si $I \subset \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps continu.*

- *Pour $\omega \in \Omega$ fixe, $t \in I \longrightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.*
- *Pour $t \in I$ fixe, $\omega \in \Omega \longrightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

### 1.1.1 Filtration

**Définition 1.1.2** *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous tribus tell que pou tout $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

- *La filtration naturelle d'une processus $\{X_t, t \in I\}$ est $\left\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\right\}$ tell que $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq t)$.*

- *Le quadruplet* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *est appelée un espace de probabilité filtré.*

**Définition 1.1.3** *Un processus* $\{X_t, t \in I\}$ *est dit adapte à une filtration* $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *si* $X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

**Définition 1.1.4 (Mesurable)** *Un processus* $(X_t)$ *est mesurable si l'application suivante* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *de* $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ *est mesurable.*

**Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable)** *Un processus* $(X_t)_{t\in I}$ *est dit progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \in I$ *l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *est mesurable sur* $[o, t] \times \Omega$ *muni de la tribu produit* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

**Définition 1.1.6 (Processus a trajectoire continue)** *Un processus* $(X_t)$ *est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}\right) = 1.$$

**Définition 1.1.7 (Processus adapté)** *Un processus* $(X_t)_{t\in I}$ *est dit adapté par rapport à* $\mathcal{F}_t$ *si pour tout* $t \in I$, $X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

**Définition 1.1.8** *Le processus* $X$ *est dit processus prévisible pour la filtration* $\mathcal{F}_t$ *ou* $\mathcal{F}_t$*-prévisible si*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad X_t \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable.}$$

**Définition 1.1.9 (Modification d'une processus, Indistingubilité)** – *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux processus stochastique dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X$ *est modification de* $Y$ *si pour tout* $t \geq 0$ *les variables aléatoires* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *sont égales, c'est-à-dire*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

– $X$ *et* $Y$ *sont indistinguables si leurs trajectoires sont le même* $\mathbb{P}$*-p.s c'est-à-dire*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t); \quad t \geq 0) = 1.$$

**Définition 1.1.10 (Processus càdlàg)** *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite pourvues de limite à gauche.*

**Définition 1.1.11 (Processus càglàd)** *Un processus est dit càglad (continu à gauche, limité à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche pourvues de limite à droite.*

**Définition 1.1.12 (Accroissement stationnaire)** *Soit $X$ un processus stochastique adapté à la filtration $\mathcal{F}$, On dit que*

1. *$X$ est a accroissement indépendant, si pour tous $s \leq t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_u, u \leq s\right)$.*
2. *$X$ est aaccroissement stationnaire si la loi de variable aléatoire $X_t - X_s$, pour $s \leq t$, ne dépend que de $t-s$, $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0 \quad \forall s \leq t$.*

### 1.1.2 Mouvement Brownien

Le Mouvement Brownien a été découvert en 1827 par le botaniste Robert Brown (1773-1858). C'est en observant sous un microscope du pollen dispersé dans de l'eau qu'il remarqua que les grains microscopiques le constituant étaient soumis à un mouvement continuel et irrégulier. Il crut, à l'époque qu'il avait découvert ‹‹ la molécule primitive ›› responsable de la vie. Il s'aperçut plus tard que l'on pouvait observer ce même phénomène avec toutes sortes de particules de taille suffisamment petite.

**Définition 1.1.13 (Mouvement Brownien)** *On dit que le processus stochastique à valeur réelles $B(t)$ est un mouvement Brownien standard si*

1. *$B_0 = 0$.*
2. *Les trajectoires $t \to B(t)$ est continue $\mathbb{P}-P.S.$*
3. *Pour $0 \leq s \leq t, B(t) - B(s)$ est indépendante de la tribu $\sigma\left(B(\omega), u \leq s\right)$*
4. *$\forall t > 0$ la variable aléatoire $B(t)$ suit la loi gaussienne centrée de variance $t$ de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2t}\right)$.*

## 1.2 Intégrale stochastique

**Définition 1.2.1 (Intégrale stochastique)** *L'intégrale stochastique est une intégrale de la forme*

$$\int_a^b X_s dB_s$$

*ou $a$ et $b \in \mathbb{R}_+, (X_t)_{t\geq 0}$ est processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est Mouvement Brownien.*

**Définition 1.2.2 (Bon processus)** *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus, il est $\mathcal{F}_t$-adapte, cadlàg et si $\forall t \geq 0$*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s ds\right) < \infty.$$

### 1.2.1 Propriétés d'intégrale stochastique

**Proposition 1.2.1** *Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont*

1. ***Linéaire*** *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux bon processus, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^t (\alpha X_s(\omega) + \beta Y_s(\omega))\, dB_S(\omega) = \alpha \int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega) + \beta \int_0^t Y_s(\omega)\, dB_s(\omega).$$

2. ***Additivité*** *: Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$*

$$\int_s^t X_u dB_u = \int_s^u X_u dB_u + \int_u^t X_u dB_u.$$

3. ***Appartenance à*** $\mathbb{L}^2$ *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un bon processus"et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien si*

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(X_t^2\right) dt \prec \infty$$

*alors pour tout $t \leq T$ on a*

$$\left(\mathbb{E}\int_0^t X_s dB_s\right) = 0$$

*et*

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(X_s^2\right) ds$$

*de plus le processus* $\int_0^t X_s dB_s$ *est une martingale.*

4. ***Centrage** : Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un bon processus et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega)\right) = 0 \text{ et var} \left(\int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega)\right) = \left(\mathbb{E}\int_0^t X_s^2(\omega)\, ds\right).$$

5. *Le processus* $\int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega)$ *est a trajectoires continue.*
6. *Le processus* $\int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega)$ *est adapté à* $\mathcal{F}_T$.

### 1.2.2 Processus d'Itô

**Définition 1.2.3** *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t$ *mouvement Brownien. On appelle* $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ *processus d'Itô à valeur dans* $\mathbb{R}$ *tell que*

$$\forall t \leq T \qquad X(t) = X_0 + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, ds(s)\, dB(s) \qquad \mathbb{P} - p.s$$

*avec*

1. $X_0$ $\mathcal{F}_0$−mesurable.
2. $(b)_{0\leq t\leq T}$ et $(\sigma)_{0\leq t\leq T}$ des processus adapté a $\mathcal{F}_t$.
3. $\int_0^T |b(s)|\, ds < \infty \quad \mathbb{P} - p.s.$
4. $\int_0^T |\sigma(s)|\, ds < \infty \quad \mathbb{P} - p.s.$

On écrit généralement le processus d'Itô sous la forme différentielle

$$\begin{cases} dX(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t) \\ X_0 = x \end{cases}$$

le processus $b(s)$ s'appelle le dérivé (drift) du processus $X$ et $\sigma(t)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

**Proposition 1.2.2** – *La décomposition d'une processus d'Itô est unique, ce qui signifie que si, pour tout $t \leq T$*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,ds(s)\,dB(s) = X'(0) + \int_0^t b'(s)\,ds + \int_0^t \sigma'(s)\,dB(s)$$

*alors*

$$X(0) = X(0) \quad d\mathbb{P} - p.s \qquad \sigma(s) = \sigma'(s) \quad ds \otimes d\mathbb{P} - p.p \qquad = b(s) = b'(s) \quad ds \otimes d\mathbb{P} - p.p.$$

– *Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de la forme* $X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB(s)$ *alors* $b(s) = 0 \quad d$

### 1.2.3 Formule d'Itô

C'est un outil qui permet du calculer l'intégral différentiel.

**Théorème 1.2.1 (Première formule d'Itô)** ’

*Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivée bornée alors*

$$f(X(t)) = f(x(0)) + \int_0^t f'(X(s))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\,d\langle X, X\rangle_s \tag{1.1}$$

*ou par définition*

$$d\langle X, X\rangle_t = dX_t dX_t = \sigma_t^2 dt$$

*avec la table multiplication*

| | $dt$ | $dB_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dB_t$ | 0 | $dt$ |

TAB. 1.1 – Table Caption

*alors la formule (1.1) s'écrite sous la forme différentielle*

$$\begin{aligned} df\left(X\left(t\right)\right) &= f'\left(X\left(t\right)\right)dX\left(t\right)+\frac{1}{2}f''\left(X\left(t\right)\right)d\left\langle X\right\rangle_t \\ &= f'\left(X\left(t\right)\right)dX\left(t\right)+\frac{1}{2}f''\left(X\left(t\right)\right)\sigma^2dt \\ &= \left(f'\left(X\left(t\right)\right)b_t+\frac{1}{2}f''\left(X\left(t\right)\right)\sigma^2\right)dt+f'\left(X\left(t\right)\right)\sigma dB_t \end{aligned}$$

**Théorème 1.2.2 (Deuxième formule d'Itô)** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à $t$ de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à $X$, on a*

$$\begin{aligned} f\left(t,X\left(t\right)\right) &= f\left(0,X\left(0\right)\right)+\int_0^t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(s,X\left(s\right)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(s,X\left(s\right)\right)dX\left(s\right) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\left(s,X\left(s\right)\right)\mathrm{d}\left\langle X\right\rangle_s \end{aligned}$$

*ou sous la forme différentielle*

$$df\left(t,X\left(t\right)\right)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(t,X\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(t,X\left(t\right)\right)\mathrm{d}X\left(t\right)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\left(t,X\left(t\right)\right)\mathrm{d}\left\langle X\right\rangle_t$$

**Théorème 1.2.3 ($3^{éme}$ formule d'Itô)** *Soient $X$ et $Y$ deux processus d'Itô issus de $x$ et $y$, soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornée, on a*

$$\begin{aligned} f\left(X\left(t\right),Y\left(t\right)\right) &= f\left(x,y\right)+\int_0^t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)\mathrm{d}X_s+\int_0^t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(X\left(s\right),Y\left(t\right)\right)\mathrm{d}Y\left(s\right) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)\mathrm{d}\left\langle X\right\rangle_s+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}y^2}\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)\mathrm{d}\left\langle Y\right\rangle_s \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)\mathrm{d}\left\langle X,Y\right\rangle_s \end{aligned}$$

# Chapitre 2

# Formulation du problème de contrôle optimal stochastique

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du systéme au cours du temps), cette grande théorie a de nombreuses applications en gestion et en fiance.

Dans ce chapitre, nous allons introduire les formulations du problème de contrôle et on donne une introduction aux équations différentielles stochastiques.

## 2.1 Introduction au contrôle stochastique

D'une manière générale, un problème de contrôle se construit par les caractéristiques suivantes

**État du système** : Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description totale du système. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant $t$.

Une fois l'état soit défini, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit l'évolution du système.

**Contrôle :** La dynamique $X_t$ de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $u_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant $t$ en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que $u_t$ est adapté par rapport à une certaine filtration et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

**Définition 2.1.1** *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\succeq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré on appelle contrôle tout processus* $u = (u_t)_{t\in[0,t]}$ *adapté par rapport á une filtration, de carré intégrable et prend ses valeurs dans un borélien* $\mathbb{A}$ *de* $\mathbb{R}^n$*.*

### 2.1.1 Classe des contrôles stochastiques

#### Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$. Notant $\mathbb{U}_{ad}$ l'ensemble de tout les contrôles admissibles.

$$\mathbb{U}_{ad} = \{u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{A}, \text{ tel que } u \text{ est mesurable et } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}.$$

#### Contrôle optimal

On dit que $u^*$ est un contrôle optimal ssi

$$J(u^*) \leq J(u), \ \forall u \in \mathbb{U}_{ad}([0,T]).$$

le but de cette contrôle est de minimiser la fonction de coût $J(u)$, sur un ensemble de contrôle admissible $\mathbb{U}_{ad}$ alors un contrôle $u^*$ est optimal si

$$J(u^*) = \inf_{u\in\mathbb{U}_{ad}} J(u).$$

### Contrôle presque optimal

Pour tout $\epsilon > 0$, le contrôle $u^{\epsilon}$ est dit presque optimale (ou $\epsilon$-optimal) si

$$\forall u \in \mathbb{U}_{ad} : \quad J\left(u^{\epsilon}\right) \leq J\left(u\right) + \epsilon.$$

### Contrôle feed-back

Soit $u$ un contrôle $\mathcal{F}_t-$adapté et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle engendrée par le processus $X$. On dit que $u_t$ est un contrôle feed-back si $u_t$ est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}_{t\geq 0}$. On dit aussi qu'un contrôle $u$ est feed-back si et seulement si $u$ dépend de $X$.

### Arrêt optimal

Généralement, dans les modèles de contrôles en finance, l'horizon du problème est fixé, soit infini. Il existe de nombreuses applications où le contrôleur a aussi la probabilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation est appelé problème d'arrêt optimal. Dans la formulation générale de tels problèmes. Le contrôle est existe constitué du couple contrôle temps d'arrêt $\left(u\left(.\right), \tau\right)$ est la fonctionnelle à optimiser s'écrit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} f\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + h\left(X\left(T\right)\right)\right].$$

**Remarque 2.1.1** *Les classes de contrôle exposé ci-dessus n'est bien entendu pas exhaustive. il existe nombreux autres classes de contrôle (Contrôle relaxé , Contrôle ergodique et Contrôle risk-sensitive...).*

## 2.2 Equation différentielles stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, on donne $B$ un mouvement Brownien sur cet espace. On considère également un variable aléatoire $X$ de carrée intégrable et indépendant du mouvement Brownien. Soit $T$ un réel strictement positive. On considère deux fonctions $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ qui sont mesurable.

**Définition 2.2.1** *Une équation différentielles stochastique* $(EDS)$ *est une équation de la forme*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

*où sous forme intégral*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \quad \forall t \geq 0$$

*où* $\{B_t; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien. Le coefficient* $b(t, X_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, X_t)$ *est appelé terme de diffusion.*

### 2.2.1 Solution forte de l'équation différentielles stochastique

**Définition 2.2.2** *Une solution fort de l'équation* (2.1) *est un processus* $X = \{x_t, t \in [0.T]\}$ *continu qui est* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, *les intégrales* $\int_0^t b(s, x_s)\, ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ *sont bien définies, c'est-à-dire*

$$\int_0^t |b(s, x_s)\, ds|^2 < \infty \;\; et \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\, dB_s < \infty.$$

2. $(X_t), t \geq 0$ *vérifie* (2.1)

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

On va citer maintenant des inégalités qu'on va les utilises.

**Lemme 2.2.1** ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que pour $t \geq 0$*

$$g(t) \leq a + +b \int_0^t g(s)\, ds.$$

*Alors pour tout $t \geq 0$ : $g(t) \leq a \exp(bt)$.*

**Proposition 2.2.1 (Inégalité de Holder)** – *Soit $p$ et $q$ deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec $p, q \in \left]1, \infty\right[$, $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$ alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et $\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$.*

– *Pour $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \left[\mathbb{E}\left[|X|^2\right]\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E}\left[|Y|^2\right]\right]^{\frac{1}{2}}.$$

### 2.2.2 Existence et unicité

Le théorème suivant donne les conditions sur $b$ et $\sigma$ sous les quelles on peut avoir un résultat d'existence et d'unicité de la solution de l'équation (2.1).

**Théorème 2.2.1** *Soient $b$ et $\sigma$ deux fonctions continues. On suppose qu'il existe une constante $K < \infty$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $x, y$ dans $\mathbb{R}^n$*

1. ***Condition de Lipchitz***

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|.$$

2. ***Condition de croissance linéaire***

$$|b(t,x)| - |\sigma(t,x)| \leq K(1 + |x|).$$

3. $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

*Alors pour tout $t \geq 0$, l'équation (2.1) admet une solution unique dans l'intervalle $[0,T]$. D'autre part* *la solution* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2<\infty\right)$$

**Preuve.** On définit l'espace $S_c^2$ comme suit :

$$S_c^2=\left\{\begin{array}{c}\text{Les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right)<\infty \text{ continue}\\ \text{muni de la norme : } ||X||=\mathbb{E}\left(\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}}<+\infty\right)\end{array}\right\}$$

pour $X\in S_c^2$, posons pour tout $t\in[0,T]$

$$\Psi\left(X_t\right)=X_0+\int_0^t b\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,X_s\right)dB_s$$

le processus $\Psi$ est bien définie est continue si $X\in S_c^2$.

Soient $X$ et $Y$ deux éléments de $S_c^2$, on utilisant le fait que $(a+b)\leq 2a^2+2b^2$, on a pour tout $0\leq t\leq u\leq T$

$$\begin{aligned}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2&=\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds+\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right)dB_s\right|^2\\&\leq 2\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2+2\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right)dB_s\right|^2\\&\leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2+2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right)dB_s\right|^2\end{aligned}$$

par l'inégalité de Doob

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]\leq 2\mathbb{E}&\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2\right.\\&\left.+\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right)dB_s\right|^2\right]\end{aligned}$$

en utilise les propriétés de l'intégrale stochastique, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^u\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|\right)^2+4\mathbb{E}\left(\int_0^u|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)|^2ds\right)\right]$$

l'inégalité de Hölder nous donne alors la majoration

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[T\left(\int_0^u\left|\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)\right|^2 ds\right)+4\mathbb{E}\left(\int_0^u\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2 ds\right)\right]$$

comme les fonctions $b$ et $\sigma$ sont Lipchitzienne, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\&\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\&\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\end{aligned}$$

on pose $C=2K^2\left(T+4\right)$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\&\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right].\end{aligned}\tag{2.2}$$

Maintenant on va montrer que la fonction $\Psi\left(X\right)\in S_c^2$. Notant $\Psi\left(0\right)$ le processus nul

$$\Psi\left(0\right)=X+\int_0^t b\left(s,0\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s$$

alors

$$\left|\Psi\left(0\right)\right|^2\leq\left|X+\int_0^t b\left(s,0\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2$$

et comme $\left(a+b\right)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, on a, pour tout $0\leq t\leq T$

$$\begin{aligned}\left|\Psi\left(0\right)\right|^2&\leq 3\left|X\right|^2+3\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2+3\left|\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2\\&\leq 3\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2\right]\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)|^2\right] \\
&\le 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X|^2+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(s,0)\,ds\right|^2+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)\,dB_s\right|^2\right]
\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)|^2\right]\le 3\left(\mathbb{E}\left[|X|^2\right]+T^2K^2+4K^2T\right)$$

et d'une autre part, l'inégalité (2.2) donc ce qui suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(X_t)-\Psi(0)|^2\right] &\le C\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\le t\le s}|X_s-0|^2\,ds\right]\\
&\le C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}|X_s|^2\right]ds
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(X_t)|^2\right]\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|\Psi(0)|^2\right]+C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}|X_s|^2\right]ds$$

alors $\Psi(X)\in S_c^2$ des que le processus $X\in S_c^2$.

On définit alors par récurrence une suite de processus de $S_c^2$ en posant

$$X^0=0 \quad \text{et} \quad X^{n+1}=\Psi(X^n) \quad \text{pour tout } n\ge 0$$

on montrer que la suite $(X^n)$ converge vers une limite qui représente la solution de l'$EDS$ (2.1) pour cela nous allons majorer $\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1}-X_t^n$ est uniformément convergence sur $[0,T]$, alors on a

$$\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2=\left|\Psi(X_t^n)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)\right|^2.$$

En utilisant la condition de Lipchitz, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi\left(X_t^n\right)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)\right|^2\right] \\ &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq s_1}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2 ds_1\right] \\ &\leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_1}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right] ds_1\end{aligned}$$

et par récurrence on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq C^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_{n-1}}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_n}\left|X_t^1\right|^2\right]ds_n...ds_2ds_1$$

donc on trouve que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]$$

ce qui signifie que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq L\frac{C^nT^n}{n!}$$

avec $L$ est la majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]$, il résulte de cette dernière inégalité que

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(L\frac{C^nT^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

alors

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{L}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}$$

en sommant sur $n$, il vient

$$\sum_{n\geq0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{L}\sum_{n\geq0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty$$

alors la série $\sum_{n\geq0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc $\mathbb{P}-p.s$ $X^n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $X\in S_c^2$.

On vérifier que $X$ est solution de l'$EDS$ (2.1) en passant à limite dans la définition

$$X = \lim_{n\to\infty}\left(X^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\Psi\left(X^{n}\right) = \Psi\left(\lim_{n\to\infty}X^{n}\right) = \Psi\left(X\right).$$

Si $X_t$ et $Y_t$ deux solution de l'$EDS$ avec les conditions initiales respectivement dans $X_0 = X$ et $Y_0 = Y$, on pose $f\left(t\right) = b\left(t, X_t\right) - \sigma\left(t, Y_t\right)$ et $g\left(t\right) = b'\left(t, X_t\right) - \sigma'\left(t, Y_t\right)$ alors

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[X - Y + \int_0^t f\left(s\right)ds - \int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2$$

comme $\left(a+b+c\right)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, alors

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left|X - Y\right|^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)ds\right]^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2$$

et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz et le propriété d'Isométrie de l'intégrale stochastique

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left|X - Y\right|^2\right] + 3t\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)^2 ds\right]$$

et comme $b$ et $\sigma$ sont Lipchitziennes, alors

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right] + 3\left(1+t\right)C^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s - Y_s\right|ds\right]$$

lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right]\exp\left\{3\left(1+t\right)C^2 t\right\}$$

alors $X_t = Y_t \quad \mathbb{P} - p.s$, ce qui montre l'unicité. ■

# Chapitre 3

# Principe du maximum et programmation dynamique

Dans ce chapitre nous présenterons des méthodes de résolution tell que il ya deux méthode de résolution de problèmes de contrôle optimal stochastique : le principe du maximum de Pontryagin et la programmation dynamique.

L'objectif des deux méthodes de résolution est minimiser (ou maximiser) sur l'ensemble des contrôles une fonctionnelle $J$.

## 3.1 Formulation de problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\succeq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace filtré tel que $(\mathcal{F}_t)$ satisfaisant aux condition habituelles. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, on a l'équation différentielle stochastique d'état

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t \quad \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.1}$$

avec

$$b\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right):[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\times U\rightarrow\mathbb{R}^{n}$$

$$\sigma\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right):[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\times U\rightarrow\mathbb{R}^{n\times d}.$$

1. Condition de croissance linéaire

$$\left|b\left(t,x,u\right)\right|+\left|\sigma\left(t,x,u\right)\right|\leq M\left(1+\left|x\right|\right). \tag{3.2}$$

2. Condition de Lipshitz globale telle qu'il existe une constante $L>0$ ; telle que

$$\left|b\left(t,x,u\right)-b\left(t,y,u\right)\right|+\left|\sigma\left(t,x,u\right)-\sigma\left(t,y,u\right)\right|\leq L\left|x-y\right|. \tag{3.3}$$

sous les conditions(3.2)et(3.3), l'équation (3.1) admet une solution unique pour condition initiale donnée. On considère la fonction de coût

$$J\left(u\right)=\mathbb{E}\left[\int_{t}^{T}f\left(s,x_{s},u_{s}\right)ds+g\left(x_{T}\right)\right], \tag{3.4}$$

où $\mathbb{E}=\mathbb{E}^{t,x}$ est l'opérateur espérance conditionnelle sachant $x_t=x$ et $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\rightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, sont des fonctions mesurable. On suppose que

$$\left|f\left(t,x,u\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|\leq M\left(1+\left|x\right|^{2}\right)$$

pour une constante $M$ la condition de croissance quadratique implique que $J$ est bien définie.

**Hypothèses $\mathbf{H}_1$**

1. Les dérivées $b_x$,$b_u$,$\sigma_x$,$\sigma_u$,$f_x$,$f_u$ et $g_x$ sont continues en $(x,u)$ et uniformément bornée.
2. $b$,$\sigma$ et $f$ sont bornées par $M\left(1+\left|x\right|+\left|u\right|\right)$ et $g$ est bornée par $K\left(1+\left|x\right|\right)$ tel que : $M>0$ et $K>0$.

sous les conditions précédentes, le problème de contrôle admet un contrôle optimal.

### 3.1.1 Formulation du problème du contrôle optimal stochastique

#### Formulation forte

**Définition 3.1.1** *Un contrôle $u_.$ est dit admissible et $(x_., u_.)$ une paire admissible si :*

1. $u_. \in U\,[0,T]$.
2. $x_t$ *est l'unique solution de l'équation* (3.1) *et vérifie les éventuelles contraintes imposées.*
3. $f\,(t, x\,(t)\,, u\,(t)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$ *et* $g\,(x_t) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$.

*On note $U_{ad}\,[0,T]$ l'ensemble de tout les contrôles admissibles.*

Notre problème de contrôle optimal stochastique sous la formulation faible peut être énoncé comme suite

**Problème 3.1.1 (FF)** *: $\langle\langle$Minimiser* (3.4) *sur $U_{ad}\,[0,T]\rangle\rangle$*

*L'objectif est trouver $u^*_. \in U_{ad}\,[0,T]$ tel que*

$$J\,(u^*_.) = \inf_{u_. \in U^F_{ad}[0,T]} J\,(u_.)\,. \tag{3.5}$$

*Alors $u^*_.$ sera appelé contrôle optimal. Et le problème est dit fini si le membre de droite de* (3.5) *est fini.*

#### Formulation faible

Dans la formulation fort l'espace filtré et le mouvement Brownien sont tous fixé, dans certaines situations il sera pratique on nécessaire de faire varier $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\,, \mathbb{P}\right)$ ainsi que $B_t$ et $u_t$ les considérer comme les parties du contrôle.

**Définition 3.1.2** *Un 6−uplets $\pi = \left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\,, \mathbb{P}, B_., u_.\right)$ est appelé un contrôle admissible ( au sens faible ) et $(x_., u_.)$ un couple admissible ( au sens faible ) s'il satisfaisant les condition suivantes*

1. $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\,, \mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilité filtré satisfaisant les condition habituelles.*
2. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien standard définie sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\,, \mathbb{P}\right)$.

3. *$u_{.}$ est un processus $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ −adapte sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $U$.*

4. *$x_{.}$ est la solution de l'équation (3.1) sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.*

5. *Les contraintes éventuelles sur $x_t$ sont satisfaites.*

6. *$f\left(., x_{.}, u_{.}\right) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$ et $g\left(x_T\right) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$. $L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$ et $L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ sont définies sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}\right.$ associé au 6−upltets $\pi$.*

L'ensemble de toute les contrôle admissible sous la formulation faible est noté par $U^f_{ad}[0, T]$.

Notre problème de contrôle optimale stochastique sous la formulation faible peut être énoncé comme suite

**Problème 3.1.2** *$\left\langle\left\langle \text{Minimiser (3.4) sur } U^f_{ad}[0, T]\right\rangle\right\rangle$*
*L'objectif est de trouver $\pi^* \in U^f_{ad}[0, T]$ s'il existe tel que*

$$J\left(\pi^*\right) = \inf_{\pi \in U^f_{ad}[0,T]} J\left(\pi\right).$$

**Remarque 3.1.1** *On s'intérèsse a l'existence du contrôle optimal dans le cas de la formulation fort.*

## 3.2 Principe du maximum stochastique

Dans cette section, nous étudions les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme d'un principe du maximum, on va utiliser la méthode de perturbations convexes du contrôle optimal.

Nous allons maintenant nous munir d'outils nécessaires pour énoncer notre principe du maximum.

### 3.2.1 Hamiltonien et équation adjoint

L'Hamiltonien associé à notre problème de contrôle, noté $H$ telle que

$$H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n\times n}\right) \to \mathbb{R}$$
$$H\left(t, x_t, u_t, p_t, q_t\right) := f(t, x_t, u_t) + p_t b\left(t, x_t, u_t\right) + q_t \sigma\left(t, x_t, u_t\right).$$

Soit $u_t^*$ un contrôle optimal et soit $x_t^*$ la trajectoire optimale correspondant. Ensuite, nous considérons un couple $(p_t, q_t)$ des processus adaptés de carrés intégrables associés à $(x^*, u^*)$.

L'équation adjointe est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire donnée sous la forme

$$\begin{cases} dp_t = -\left[f_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) + p_t b_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) + q_t \sigma_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right)\right] dt + q_t dB_t \\ p_T = g_x\left(x_T^*\right) \end{cases}$$

en utilisant la définition du Hamiltonien, nous obtenons l'équation adjoint suivante

$$\begin{cases} dp_t = -H_x\left(t, x_t^*, u_t^*, p_t, q_t\right) dt + q_t dB_t \\ p_T = g_x\left(x_T^*\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

### Condition nécessaire d'optimalité

Pour trouver les conditions nécessaire d'optimalité on se donne un contrôle optimal $u^*$ minimisant le coût $J$ sur $U_{ad}$ et soit $x_t^*$ la trajectoire optimale c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à $u_t^*$.

**Théorème 3.2.1** *Soit $u^*$ un contrôle optimal, alors il existe un processus adapté $(p_t, q_t)$ qui est la solution unique de l'EDSR (3.6) tell que*

$$H_u\left(t, x_t^*, u_t^*, p_t, q_t\right)\left(v_t - u_t^*\right) \geq 0 \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall v_t \in U.$$

### Estimation de solution

On perturbe le contrôle $u_t^*$ à l'aide du contrôle $u_t^\epsilon$ défini comme suit

$$u_t^\epsilon = u_t^* + \epsilon v_t, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Par définition $u_t^\epsilon$ est un processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $\mathbb{A}$, donc $u_t^\epsilon \in U_{ad}$.

On note par $x_t^\epsilon$ la solution de (3.1) et par $J\left(u_t^\epsilon\right)$ la fonction coût associée au $u_t^\epsilon$. Notre objectif est l'estimation des solution $x_t^*$ et $x_t^\epsilon$, on se base sur le lemme suivant

**Lemme 3.2.1** *Soient $x_t^*$ et $x_t^\epsilon$ les solutions de (3.1) associées respectivement à $u_t^*$ et $u_t^\epsilon$ alors on a*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\epsilon - x_t^*\right|^2\right) \leq c.\epsilon^2.$$

**Preuve.** Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} x_t^* &= x + \int_0^t b\left(s, x_s^*, u_s^*\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^*, u_s^*\right) dB_s \\ x_t^\epsilon &= x + \int_0^t b\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) dB_s \end{aligned}$$

alors

$$x_t^\epsilon - x_t^* = \int_0^t \left[b\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - b\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] dB_s$$

en ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t b\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) ds$ et $\int_0^t \sigma\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) dB_s$, on trouve

$$\begin{aligned} x_t^\epsilon - x_t^* &= \int_0^t \left[b\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - b\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right)\right] ds + \int_0^t \left[b\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) - b\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right)\right] dB_s + \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] dB_s \end{aligned}$$

en passant aux espérances et comme $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ alors

$$\mathbb{E}\left|x_t^\epsilon - x_t^*\right|^2 \leq 4\int_0^t \mathbb{E}\left|b\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - b\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right)\right|^2 ds + 4\int_0^t \mathbb{E}\left|b\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) - b\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right|^2 ds$$

$$+4\int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma\left(s, x_s^\epsilon, u_s^\epsilon\right) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right)\right|^2 ds + 4\int_0^t \mathbb{E}\left|\sigma\left(s, x_s^*, u_s^\epsilon\right) - \sigma\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right|^2 ds$$

puis que $b$ et $\sigma$ sont lipchitzienne en $x$ et en $u$, on a :

$$\mathbb{E}\left|x_t^\epsilon - x_t^*\right|^2 \leq 8\int_0^t \mathbb{E}\left|x_t^\epsilon - x_t^*\right|^2 ds + 8\int_0^t \mathbb{E}\left|u_t^\epsilon - u_t^*\right|^2 ds$$

et par passage au sup sur $[0,T]$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] \leq 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] ds + 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|u_t^\epsilon - u_t^*|^2\right] ds$$

puisque $u_s^\epsilon = u_s^* + \epsilon v_s$ alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] \leq 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] ds + M_t^\epsilon$$

où

$$M_t^\epsilon = 8\epsilon^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|v_s|^2\right] ds$$

comme $\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{t\in[0,T]}|v_s|^2 ds\right] \leq \infty$, on obtient que $M_t^\epsilon \leq N.\epsilon^2$, ce ci implique que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] \leq 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right] ds + N\epsilon^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient le résultat

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\epsilon - x_t^*|^2\right) \leq c.\epsilon^2.$$

■

### Linéarisation de l'équation d'état

On introduit l'équation variationnelle suivante

$$\begin{cases} dy_t = \left[b_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t + b_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right]dt + \left[\sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t + \sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right]dB_t \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

avec $y$ est la solution unique de l'équation (3.7) .

Posons

$$\Gamma_t^\epsilon = \frac{x_t^\epsilon - x_t^*}{\epsilon} - y_t \tag{3.8}$$

on veut approcher $\Gamma_t^\epsilon$ par une forme linéarisée de l'équation (3.1), pour cela nous avons le lemme suivant

**Lemme 3.2.2** *On considère $x_t^*$ et $x_t^\epsilon$ les trajectoires associées respectivement à $u_t^*$ et $u_t^\epsilon$ on a*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E} \left| \frac{x_t^\epsilon - x_t^*}{\epsilon} - y_t \right|^2 = 0.$$

**Preuve.** En dérive $\Gamma_t^\epsilon$, on obtient

$$d\Gamma_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left[ dx_t^\epsilon - dx_t^* \right] - dy_t$$

en remplaçant $dx_t^\epsilon$, $dx_t^*$ et $dy_t$ par leurs valeurs, ceci que nous donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \left[ b\left(t, x_t^\epsilon, u_t^\epsilon\right) - b\left(t, x_t^*, u_t^*\right) \right] dt + \frac{1}{\epsilon} \left[ \sigma\left(t, x_t^\epsilon, u_t^\epsilon\right) - \sigma\left(t, x_t^*, u_t^*\right) \right] dB_t \\ &\quad - \left[ b_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) y_t + b_u\left(t, x_t^*, u_t^*\right) v_t \right] dt - \left[ \sigma_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) y_t + \sigma_u\left(t, x_t^*, u_t^*\right) v_t \right] dB_t \end{aligned} \tag{3.9}$$

par le développement de Taylor avec reste intégrale aux points $(x, u)$ a l'ordre 1 des fonctions $b\left(t, x_t, u_t\right)$ et $\sigma\left(t, x_t, u_t\right)$, on a

$$\begin{aligned} b\left(t, x_t^\epsilon, u_t^\epsilon\right) - b\left(t, x_t^*, u_t^*\right) &= \int_0^1 \left[ b_x\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right) \right] d\theta \\ &+ \int_0^1 \left[ b_u\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right) \right] d\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma\left(t, x_t^\epsilon, u_t^\epsilon\right) - \sigma\left(t, x_t^*, u_t^*\right) &= \int_0^1 \left[ \sigma_x\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right) \right] d\theta \\ &+ \int_0^1 \left[ \sigma_u\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right) \right] d\theta \end{aligned}$$

en remplaçant ces deux inégalités dans (3.9), on obtient

$$d\Gamma_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\left[\int_0^1 \left[b_x\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right)\right] d\theta\right] dt$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\left[\int_0^1 \left[b_u\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right] d\theta\right]$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\left[\int_0^1 \left[\sigma_x\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right)\right] d\theta\right] dB_t$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\left[\int_0^1 \left[\sigma_u\left(t, x_t^* + \theta\left(x_t^\epsilon - x_t^*\right), u_t^* + \theta\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right)\left(u_t^\epsilon - u_t^*\right)\right] d\theta\right] dB_t$$

$$-\left[b_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) y_t + b_u\left(t, x_t^*, u_t^*\right) v_t\right] dt - \left[\sigma_x\left(t, x_t^*, u_t^*\right) y_t + \sigma_u\left(t, x_t^*, u_t^*\right) v_t\right] dB_t$$

en remplaçant $x_t^\epsilon - x_t^* = \epsilon.\left(\Gamma_t^\epsilon + y_t\right)$ et $u_t^\epsilon - u_t^* = \epsilon.v_t$ et en passe à l'espérance carrées on a

$$\mathbb{E}\left|\Gamma_t^\epsilon\right|^2 \leq M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 b_x\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right)\Gamma_s^\epsilon d\theta\right|^2 ds$$

$$+ M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \sigma_x\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right)\Gamma_s^\epsilon d\theta\right|^2 ds + l^\epsilon$$

où $l^\epsilon$ est donne par

$$l^\epsilon = M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[b_x\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right) - b_x\left(s, x_s^*, u_s\right)\right] y_s d\theta\right|^2 ds$$

$$+ M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[b_u\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right) - b_u\left(s, x_s^*, u_s\right)\right] v_s d\theta\right|^2 ds$$

$$+ M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[\sigma_x\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right) - \sigma_x\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] y_s d\theta\right|^2 ds$$

$$+ M\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left[\sigma_u\left(s, x_s^* + \theta\left(x_s^\epsilon - x_s^*\right), u_s^* + \theta\epsilon v_s\right) - \sigma_u\left(s, x_s^*, u_s^*\right)\right] v_s d\theta\right|^2 ds$$

puis que $b_x$ et $\sigma_x$ sont continue et avec passage à limite quand $\epsilon$ tend vers 0, on obtient $\lim\limits_{\epsilon\to 0} l^\epsilon = 0$. Comme $b_x$ et $\sigma_x$ sont bornées, alors on a

$$\mathbb{E}\left|\Gamma_t^\epsilon\right|^2 \leq 2Mc\int_0^t \mathbb{E}\left|\Gamma_t^\epsilon\right|^2 ds + l^\epsilon$$

en appliquant l'inégalité de Gronwall on obtient le résultat. ■

**Lemme 3.2.3** *Sous l'hypothèse* $(H1)$*, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\epsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\epsilon} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t + f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt + g_x\left(x_T^*\right)y_T\right].$$

**Preuve.** Comme $g$, $f$ sont de classe $\mathbb{C}^1$, alors pour presque tout $\epsilon$ il existe $\epsilon\left(\omega\right)\in[0,1]$ tel que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\epsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f\left(t,x_t^\epsilon,u_t^\epsilon\right)+f\left(t,x_t^*,u_t^*\right)\right)dt + g\left(x_T^\epsilon\right)-g_x\left(x_T^*\right)\right] \tag{3.10}$$

en remplaçant $x_t^\epsilon - x_t^* = \epsilon\left(\Gamma_t^\epsilon + y_t\right)$ et $u_t^\epsilon - u_t^* = \epsilon v_t$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\epsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[f_x\left(t,x_t^*+\theta\epsilon\left(\Gamma_t^\epsilon+y_t\right),u_t^*+\theta\epsilon v_t\right)\epsilon\left(\Gamma_t^\epsilon+y_t\right)\right]d\theta\right)dt\right]\right.\\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[f_u\left(t,x_t^*+\theta\epsilon\left(\Gamma_t^\epsilon+y_t\right),u_t^*+\theta\epsilon v_t\right)\epsilon v_t\right]d\theta\right)dt\right]\\ &\left.+\mathbb{E}\left[\int_0^1\left[g_x\left(x_T^*+\theta\epsilon\left(\Gamma_T^\epsilon+y_T\right)\right)\epsilon\left(\Gamma_T^\epsilon+y_T\right)\right]d\theta\right]\right\}\end{aligned}$$

finalement

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{J\left(u_t^\epsilon\right)-J\left(u_t^*\right)}{\epsilon} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t + f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt + g_x\left(x_T^*\right)y_T\right].$$

■

**Preuve.** (**Théorème 3.2.1**)

Comme $u_t^*$ est optimal alors

$$\frac{J\left(u_t^{\epsilon}\right)-J\left(u_t^*\right)}{\epsilon}\geq 0$$

d'après cette inégalité et lemme 3.2.3 précédent, on obtient

$$\left[\int_0^T \left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+f_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T^*\right)y_T\right]\geq 0$$

en appliquant la formule d'intégration par parties d'Itô à $(p_tq_t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
d\left(p_ty_t\right) &= p_tdy_t+y_tdp_t+d\left\langle p,y\right\rangle_t\\
&= p_t\left[\left(b_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+b_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dt+\left(\sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+\sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right)dB_t\right]\\
&+ y_t\left[-\left(f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)+b_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_t+\sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_t\right)dt+q_tdB_t\right]\\
&+ q_t\left[\sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_t+\sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)v_t\right]dt\\
&+ \sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_ty_tdt+\sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_tv_tdt\\
&= -f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_tdt+b_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_tv_tdt+\sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_tv_tdt+q_ty_tdB_t\\
&+ \sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_ty_tdB_t+\sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_tv_tdB_t
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
p_ty_t = p_0y_0 &- \int_0^T f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_tdt+\int_0^T b_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_tv_tdt+\int_0^T \sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_tv_tdt\\
&+\int_0^T q_ty_tdB_t+\int_0^T \sigma_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_ty_tdB_t+\int_0^T \sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_tv_tdB_t
\end{aligned}$$

en passant à l'espérance

$$\mathbb{E}\left[p_ty_t\right]=\mathbb{E}\left[-\int_0^T f_x\left(t,x_t^*,u_t^*\right)y_tdt+\int_0^T b_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)p_tv_tdt+\int_0^T \sigma_u\left(t,x_t^*,u_t^*\right)q_tv_tdt\right]$$

avec le condition $p_T = g_x(x_T^*)$, on trouve

$$\mathbb{E}\left[g_x(x_T^*)\, y_t\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T f_x(t, x_t^*, u_t^*)\, y_t dt + \int_0^T b_u(t, x_t^*, u_t^*)\, p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_u(t, x_t^*, u_t^*)\, q_t v_t dt\right]$$

donc

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t, x_t^*, u_t^*)\, v_t dt + \int_0^T b_u(t, x_t^*, u_t^*)\, p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_x(t, x_t^*, u_t^*)\, q_t v_t dt\right]$$

c'est-a-dire

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, x_t^*, u_t^*, p_t, q_t)(v_t - u_t^*)\, dt\right].$$

■

## 3.3 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique ou le principe de Bellman est l'un des fondamentals principes dans la théorie de contrôle optimal stochastique ou déterministe.

Le but de cette méthode est la minimisation de

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, x_s, u_s)\, ds + g(x_T)\right] \tag{3.11}$$

ce qui est appelé la fonction valeur du probléme(3.1) et(3.4)

### 3.3.1 Principe de Bellman

**Théorème 3.3.1** *Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ donnée, alors pour tout $h \in [0, T-t]$ nous avons*

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f(s, x_s, u_s)\, ds + v(t+h, x_{t+h})\right] \tag{3.12}$$

**Preuve.** Soit $h > 0$, on considère par $u_s^* = u^*(s, x)$ le contrôle optimal pour le problème (3.1) et (3.4) sur l'intervalle de temps $[t, T]$ à partir du point $x_{t+h}$ ie :

$$J\left(t+h, x_{t+h}, u_{t+h}^*\right) = v\left(t+h, x_{t+h}\right) \tag{3.13}$$

maintenant, nous considérons

$$\bar{u} = \begin{cases} u(s,x) & si \ s \in [t, t+h] \\ u^*(s,x) & si \ s \in [t+h, T] \end{cases}$$

pour un contrôle quelconque $u$.

Par définition de $v(t,x)$ et en utilisant (3.4) on obtient

$$v(t,x) \leq J\left(t,x,\bar{u}\right) = \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, x_s, u_s\right) ds + \int_{t+h}^T f\left(s, x_s, u_s^*\right) ds + g\left(x_T\right)\right]$$

par l'unicite de la solution de l'$EDS$ (3.1) nous avons pour $s \geq t+h$, $x_s^{t,x} = x_s^{t+h, x_{t+h}^{t,x}}$ alors

$$\begin{aligned} J\left(t,x,\bar{u}\right) &= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, x_s, u_s\right) ds + \int_{t+h}^T f\left(s, x_s^{t+h, x_{t+h}^{t,x}}, u_s^*\right) ds + g\left(x_T^{t+h, x_{t+h}^{t,x}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, x_s, u_s\right) ds + \mathbb{E}\left[\int_{t+h}^T f\left(s, x_s, u_s^*\right) ds + g\left(x_T\right) / x_{t+h}^{t,x}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, x_s, u_s\right) ds + v\left(t+h, x_{t+h}^{t,x}\right)\right] \end{aligned}$$

donc nous obtenons

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, x_s, u_s\right) ds + v\left(t+h, x_{t+h}^{t,x}\right)\right] \tag{3.14}$$

on obtient l'égalité si $\bar{u} = u^*$, ce qui prouve (3.12) ■

### 3.3.2 Equation de Hamilton Jacobi Bellman(HJB)

Soit $\mathcal{H} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\mathcal{H}(t,x,r,p,A) = b(t,x,u)^T p + \frac{1}{2} Tr\left[\sigma\sigma^T(t,x,u) A\right] + f(t,x,u)$$

nous avons aussi présenter $\mathcal{L}_u$ le deuxième opérateur de command linéaire associé au processus $x_t$, $t \geq 0$ comme suite

$$\mathcal{L}^u \varphi(t,x) = b(t,x,u)^T D_x \varphi(t,x) + \frac{1}{2} Tr\left[\sigma \sigma^T(t,x,u) D_{xx}^2 \varphi(t,x)\right]$$

où $D_x$, $D_{xx}^2$ désigne le gradient et le Hessien par rapport à la variable $x$.

**Lemme 3.3.1** *Supposons que la fonction de valeur $v \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R})$ et $f(.,.,u)$ continue en $(t,x)$ alors pour tout $u \in U$*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u \in U}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0.$$

**Preuve.** D'après la formule d'Itô

$$v(t+h, x_{t+h}) = v(t,x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^u v\right)\left(s, x_s^{t,x}\right) ds + \int_t^{t+h} Dv\left(s, x_s^{t,x}\right)^T \sigma\left(s, x_s^{t,x}, u\right) dB_s$$

en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[v(t+h, x_{t+h})\right] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^u v\right)\left(s, x_s^{t,x}\right) ds\right].$$

Par (3.11) nous avons

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^u v\right)\left(s, x_s^{t,x}\right) + f\left(s, x_s^{t,x}, u_s\right)\right) ds\right]$$

par passage a la limite quand $h$ tend vers à zéro nous obtenons

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)$$

ceci étant valable pour tout $u \in U$, on a alors

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = -\inf_{u \in U}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)\right] \leq 0 \tag{3.15}$$

maintenant on suppose que $u^* \in U$ et en utilisant la même procédure ci-dessus, nous concluons que

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u^*} v(t,x) - f(t,x,u) = 0$$

ce qui combiné avec (3.15) prouve que $v$ satisfait

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u \in U} \left[\mathcal{L}^{u} v(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

comme

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u^*} v(t,x) - f(t,x,u) \geq -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u \in U} \left[\mathcal{L}^{u} v(t,x) + f(t,x,u)\right]$$

et

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u^*} v(t,x) - f(t,x,u) = 0$$

donc

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf_{u \in U} \left[\mathcal{L}^{u} v(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0$$

■

### Théorème de vérification

Dans cette section, on s'intéresse à citer des conditions suffisantes qui nous permet de conclure que la solution de l'équation coïncide avec la fonction de valeur.

**Proposition 3.3.1** *Soit*

$$v(t,x) = \inf_{u \in U} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, x_s^{t,x}, u_s\right) ds + g\left(x_T^{t,x}\right)\right], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

*alors $v$ doit résoudre*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \inf\limits_{u \in U} \left[\mathcal{L}^{u} v(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0, & \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ v(t,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n & \end{cases}$$

*où*

$$\mathcal{L}^u\varphi(t,x) = b(t,x,u)^T D_x\varphi(t,x) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma\sigma^T(t,x,u)\,D_x^2\varphi(t,x)\right].$$

*de plus si pour* $(t,x)$, $u^*(t,x)$ *est un point de minimum sur* $A$ *de* $\inf_{u\in U}\left[-\mathcal{L}^u v(t,x) - f(t,x,u)\right]$ *alors* $\{u^*(s,x_s^*), t\le s\le T\}$ *est un contrôle optimal feedback, où*

$$\begin{cases} dx_s^* = b\left(x_s^*, u^*\left(s,x_s^*\right)\right) + \sigma\left(x_s^*, u^*\left(s,x_s^*\right)\right)dB_s, & t\le s\le T \\ x_t^* = x. \end{cases}$$

**Proposition 3.3.2** *Il existe une constante* $C>0$ *(dépondant de* $T$*) tell que pour tout* $s,\ t\in[0,T]$ *et* $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$|v(t,x) - v(s,y)| \le C\left(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|\right).$$

**Preuve.**

1. En notant que $|\inf_i a_i - \inf_i b_i| \le \sup_i |a_i - b_i|$, alors

$$|v(t,x)-v(s,y)| = \left|\inf_{u\in U}\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(t,x_s^{t,x},u_s\right)ds + g\left(x_T^{t,x}\right)\right] - \inf_{u\in U}\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(t,x_s^{t,y},u_s\right)ds + g\left(x_T^{t,y}\right)\right]\right|$$
$$\le \sup_{u\in U}\left\{\mathbb{E}\int_t^T \left|f\left(t,x_s^{t,x},u_s\right) - f\left(t,x_s^{t,y},u_s\right)\right|ds + \mathbb{E}\left[\left|g\left(x_T^{t,x}\right) - g\left(x_T^{t,y}\right)\right|\right]\right\}$$

par la condition de Lipschitz sur $f$ et $g$, en déduit que

$$\begin{aligned} |v(t,x)-v(s,y)| &= \sup_{u\in U}\left\{\mathbb{E}\int_t^T \left|x_s^{t,x} - x_s^{t,y}\right|ds + \mathbb{E}\left|x_T^{t,x} - x_T^{t,y}\right|\right\} \\ &\le C|x-y|\left[\int_t^T \exp\left(\beta_0(s-t)\right)ds + \exp\left(\beta_0(T-t)\right)\right] \\ &\le C|x-y|. \end{aligned}$$

2. Soit $0\le t\le s\le T$, d'après le principe de la programmation dynamique avec $t+h=s$, on a

$$v(t,x) = \inf_{u\in U}\mathbb{E}\left[\int_t^s f(s,x_r,u_r)\,dr + v\left(s,x_s^{t,x}\right)\right]$$

d'où

$$\begin{aligned}|v(t,x)-v(s,x)| &= \left|\inf_{u\in U}\mathbb{E}\left[\int_t^s f(s,x_r,u_r)\,dr+v\left(s,x_s^{t,x}\right)-v(s,x)\right]\right| \\ &\leq \sup_{u\in U}\mathbb{E}\int_t^s |f(s,x_r,u_r)|\,dr+\sup_{u\in U}\mathbb{E}\left|v\left(s,x_s^{t,x}\right)-v(s,x)\right|\end{aligned}$$

comme $f$ est bornée et d'après l'inégalité précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}|v(t,x)-v(s,x)| &\leq C(s-t)+\sup_{u\in U}\mathbb{E}\,|x_s-x| \\ &\leq C(s-t)+C(s-t)^{\frac{1}{2}}\leq C'(s-t)\,.\end{aligned}$$

■

**Théorème 3.3.2** *Soit $W$ une fonction de classe $\mathbb{C}^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^n)\cap\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Supposons que $f$ et $g$ sont à croissance quadratique, c'est-a-dire*

$$|f(t,x,u)|+|g(x)|\leq M\left(1+|x|^2\right)$$

*pour tout $(t,x,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U$*

1. *Supposons que $W(T,.)\leq g$ et*

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\mathcal{H}(t,x,W(t,x),D_xW(t,x),D_{xx}W(t,x))\geq 0 \tag{3.16}$$

*sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ alors $W\leq v$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.*

2. *Supposons en outre que $W(T,.)=g$ et il existe un minimisant $u^*(t,x)$ de $\mathcal{L}^u v(t,x)+f(t,x,u)$, de telle sorte que*

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial W}{\partial t}(t,x)+\mathcal{H}(t,x,W(t,x),D_xW(t,x),D_{xx}W(t,x)) \\ &= \frac{\partial W}{\partial t}(t,x)+\mathcal{L}^{u^*(t,x)}W(t,x)+f(t,x,u)\end{aligned}$$

*alors* $W = v$ *sur* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

**Théorème 3.3.3 (Théorème de vérification)** *Soit* $W \in \mathbb{C}^{1,2}((0,T), \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{C}^0([0,T], \mathbb{R}^n)$ *on suppose que* $f$ *et* $g$ *sont à croissance quadratique.*

1. *Supposons que* $W(T,.) \leq g$ *et*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{H}(t, x, W(t,x), D_x W(t,x), D_{xx} W(t,x)) = 0$$

*sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, *alors* $W \leq v$ *sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

2. *Supposons en outre que* $W(T,.) = g$ *et il existe un minimisant* $u^*(t,x)$ *de* $\mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)$, *tell que*

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^{u^*(t,x)} W(t,x) + f(t,x,u) = 0.$$

*Si l'équation différentielle stochastique*

$$dx_s = b(s, x_s, u^*(t,x))\, ds + \sigma(s, x_s, u^*(t,x))\, dB_s$$

*admet une solution unique pour chaque donnée initiale* $x_0 = x$ *et processus* $u^*(s,x)$ *de contrôle, alors* $W = v$ *et* $u^*$*est un processus de contrôle Markovien optimal.*

**Preuve.**

1. La fonction $W \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$, pour tout $0 \leq t \leq s \leq T$ et par le lemme d'Itô nous obtenons

$$W\left(t, x_r^{t,x}\right) = \int_t^s \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{L}^{u_r} W\right)\left(r, x_r^{t,x}\right) dr + \int_0^t D_x W\left(t, x_r^{t,x}\right) \sigma\left(r, x_r^{t,x}, u_r\right) dB_r$$

le processus $\int_0^t D_x W(t, x_r^{t,x})\, \sigma(r, x_r^{t,x}, u_r)$ est une martingale, en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left(W\left(s, x_s^{t,x}\right)\right) = W(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{L}^{u_r} W\right)\left(r, x_r^{t,x}\right) dr\right]$$

puisque $W$ satisfait (3.16), alors on trouve

$$\frac{\partial W}{\partial t}\left(r,x_r^{t,x}\right)+\mathcal{L}^{u_r}W\left(r,x_r^{t,x}\right)+f\left(r,x_r^{t,x},u_r\right)\geq 0,\quad \forall u\in U$$

d'ou

$$\mathbb{E}\left(W\left(s,x_s^{t,x}\right)\right)\geq W\left(t,x\right)-\mathbb{E}\left[\int_t^s f\left(r,x_r^{t,x},u_r\right)dr\right]$$

comme $W$ est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, en faisant tendre $s$ vers $T$

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_T^{t,x}\right)\right]\geq W\left(t,x\right)-\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(r,x_r^{t,x},u_r\right)dr\right]$$

et donc $W\left(t,x\right)\leq v\left(t,x\right)$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

2. Notons par $\tilde{x}_s^{t,x}$ la solution de l'$EDS$

$$\begin{cases} d\tilde{x}_s=b\left(s,\tilde{x}_s,u^*\left(t,x\right)\right)ds+\sigma\left(s,\tilde{x}_s,u^*\left(t,x\right)\right)dB_s, & \forall s>t \\ \tilde{x}_0=x \end{cases}$$

et en appliquant la formule d'Itô à $W\left(s,\tilde{x}_s^{t,x}\right)$, on trouve

$$\mathbb{E}\left[W\left(s,\tilde{x}_s^{t,x}\right)\right]=W\left(t,x\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^s\frac{\partial W}{\partial t}\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)+\mathcal{L}^{u^*\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)}W\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)dr\right]$$

par définition de $u^*\left(t,x\right)$ on a

$$-\frac{\partial W}{\partial t}-\mathcal{L}^{u^*(t,x)}W\left(t,x\right)-f\left(x,u^*\left(t,x\right)\right)=0$$

d'ou

$$\mathbb{E}\left[W\left(s,\tilde{x}_s^{t,x}\right)\right]=W\left(t,x\right)-\mathbb{E}\left[\int_t^s f\left(\tilde{x}_r^{t,x},u^*\left(r,\tilde{x}_r^{t,x}\right)\right)dr\right]$$

en faisant tendre $s$ vers $T$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \mathbb{E}\left[\int_t^s f\left(\tilde{x}_r^{t,x}, u^*\left(r, \tilde{x}_r^{t,x}\right)\right) dr + g\left(\tilde{x}_T^{t,x}\right)\right] \\ &= J(t,x,u^*) \end{aligned}$$

où $u_s^* = u^*\left(s, \tilde{x}_s^{t,x}\right)$ avec l'état correspondant $\tilde{x}$. Donc $W(t,x) = J(t,x,u^*) > v(t,x)$ et finalement $w = v$ avec $u^*$ comme contrôle optimal Markovien.

■

**Théorème 3.3.4** *On suppose que*

$$\begin{aligned} &\exists C > 0 \ / \ \xi^t \sigma\sigma^T(t,x,u)\,\xi \geq C\,|\xi|^2, \forall (t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \\ &U \ \textit{est compact} \\ &b, \sigma \ \textit{et} \ f \ \textit{sont dans} \ \mathbb{C}^{1,2}((0,T), \mathbb{R}^n) \\ &g \in \mathbb{C}^3(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

*alors l'équation d'HJB (3.15) avec le condition* $v(t,x) = g(x)$ *a une solution unique* $v \in \mathbb{C}^{1,2}((0,T), \mathbb{R}^n)$.

**Preuve.** Voir fleming et Rischel [2] ■

# Bibliographie


[1] Briand, P. (2001). Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (2012). Deterministic and stochastic optimal control (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[3] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Èvry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[4] Krylov, N. V. (2008). Controlled diffusion processes (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

[5] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[6] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

[7]

## Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | : | Espace de probabilité. |
| $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ | : | Filtration. |
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ | : | Espace de probabilité filtré. |
| $(B(t))_{t\geq 0}$ | : | Mouvement Brownien. |
| $ssi$ | : | si et selement si |
| $\mathbb{P} - p.s$ | : | Presque surement pour la mesure de probabilite $\mathbb{P}$. |
| $EDS$ | : | Equation différentielle stochastique. |
| $U_{ad}[0.T]$ | : | L'ensemnle des contrôles admissibles |
| $J(u(.))$ | : | La fonction de coût minimiser dans le cas sans contrainte.. |
| $u$ | : | Processus de contrôle. |
| $u^*$ | : | Contrôle optimal. |
| $u^\epsilon$ | : | Contrôle perturbé |
| $H(t, x, u, p, q)$ | : | Hamiltonien du probléme de contrôle optimale. |
| $HJB$ | : | Equation Hamilton-Jacobi-Bellman. |
| $(p_t, q_t)$ | : | Les processus adjoints. |
| $v(s, x)$ | : | Fonction de valeur. |
| $\mathcal{L}^u$ | : | |
| $\mathbb{A}$ | : | Un borélien de $\mathbb{R}^n$. |
| min | : | Minimisation. |
| $ie$ | : | C'est-à-dire. |

# Résumé

Dans ce travail, nous étudions le problème de contrôle optimal stochastique. Notre objectif principal dans ce travail est trouver les condition nécessaires d'optimalité, tel qu'il existe généralement deux méthode de résolution de ce problèmes le principe du maximum de Pontryagin et la programmation dynamique de Bellman , impliquant un processus adjoint et la fonction de valeur respectivement.



# Abstract

In this work, we study the stochastic optimal control problem. Our main objective in this work is to find the necessary conditions of optimality such that there are generally two methods of solving this problem the principle of the maximum of Pontryagin and the dynamic programming of Bellman, involving an assistant process and the function of value



# الملخص

هذا العمل ، ندرس ممسألة التحكم الأمثل العشوائية. هدفنا الرئيسي في هذا العمل هو إيجاد الشرو
زمة لتحقيق الأمثل ، بحيث توجد عموماً طريقتان لحل هذه المشكلة ، مبدأ الحد الأقصى لبونترياجي
رمجة الديناميكية لـبلمان، التي تتضمن عملية مساعدة ووظيفة القيمة على التوالي.