République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Sam Aymen

Titre

Principe du maximum pour les systèmes EDSPRs et application

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BOUGHERARA Saliha, *Université de Biskra*, ______________ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad-Eddine, *Université de Biskra*, ______________ **Encadreur**

Dr. GHOUL Abdelhak, *Université de Biskra*, ______________ **Examinateur**

2021

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À la source de la patience, Ma chère Mère.

À la source de ma force, Mon chèr père.

À mes soeurs.

À mon seul frère.

À mes chères amies.

À tous ceux qui étaient à côtés de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

$\mathcal{A}$ymen Sam

Remerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **Lakhdari Imad-Eddine,** professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, ses conseils, sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques.

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficiles.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal ont reçu beaucoup d'attention et sont devenus un outil puissant dans des nombreux domaines, tels que les mathématiques financière, les jeux differentielles, sciences économiques, etc. . . . Pour résoudre ce problème de contrôle, il existe deux célèbres approches de résolution, bien connues, qui sont le principe du maximum stochastique, connue aussi sous le nom de (condition nécessaire d'optimalité) et l'approche de la programmation dynamique.

Dans ce mémoire de master, nous sommes intéressés a étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité où le système est gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressivement rétrogrades (EDSPR) avec saut. Le domain du système est convexe. Cette étude est basé sur le travail de Shi et Wu[6]. Notez que ce type de problème a été étudié par de nombreux auteurs, voir par exemple [2, 3, 4, 5].

Nous présentons notre travail comme suit :

▶ Le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier les conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités pour notre système.

▶ Le deuxième chapitre contient l'essentielle de ce travail, nous étudions les conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressivement rétrogrades (EDSPR) avec saut.

▶ Finalement, nous appliquons le principe du maximum au problème de sélection de portefeuille moyen varaince.

Chapitre §.1
Rappel sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles en théorie du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement brownien, l'intégrale stochastique, processus d'Itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Tribu ou σ-Algèbre) *Soit E un ensemble quelconque, on appelle tribu de parties de E, tout sous ensembles $\mathcal{A}$ de E telle que :*

1. $E \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.2 (Variable aléatoire) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec :*

Ω : est un ensemble fondamental.

$\mathcal{F}$: est une tribu définie sur Ω.

$\mathbb{P}$: est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

L'application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est appelée une variable aléatoire si elle est mesurable par rapport à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i.e :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

.

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribus telle que pour* $s \leq t$, *on a :* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Remarque 1.1.1 *Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.4 (Processus stochastique) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T.

1. Si T est un ensemble dénombrable totalement ordonnée comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ alors X est un processus stochastique à temps discrèt.
2. Si $T = \mathbb{R}_+$ alors X est un processus stochastique à temps continu.
3. Pour $t \in T$ fixé : $w \in \Omega \mapsto X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
4. Pour $w \in \Omega$ fixé : la fonction $t \in T \mapsto X_t(w)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.5 (Indistinguabilité) *On dit que* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *sont indistinguables si leurs trajectoires sont les même* $\mathbb{P} - p.s$, *c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \ ; \forall\ t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.1.6 (Modification des processus) *On dira que* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *est une version (ou une modification) de* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1;\ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont indistinguables alors ils sont modification l'un de l'autre mais la réciproque est en générale fausse.*

Définition 1.1.7 (Équivalence de deux processus stochastiques) *On dit que*

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont équivalents si $X = Y$, i.e pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}).$$

Définition 1.1.8 (Processus adapté) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.9 (Processus progressivement mesurable) *On dit que $X(t)$ est progressivement mesurable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si l'application*

$$X : (w, t) \longmapsto X_t(w) \text{ de } \Omega \times [0, s] \text{ dans } \mathbb{R}\,;$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0, s])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.10 (Processus càdlàg) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche), si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.11 (Processus càglàd) *Un processus est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite), si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs réelles, B est un mouvement Brownien standard si :*

1. $B_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$
2. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ independante de $\mathcal{F}_s$.
3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t-s)$.

Proposition 1.2.1 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique telle que toutes ses trajectoires sont continues et $B_0 = 0$, Alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

1. Le processus B est un mouvement Brownien standard.
2. Le processus B est un processus gaussien avec :

$$\begin{cases} \text{Esperance } m(t) = 0, \\ \text{Covariance } \Gamma(s,t) = \min\{s,t\}. \end{cases}$$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

1.3 Intégrale stochastique (Intégrale d'Itô)

Définition 1.3.1 (Intégrale stochastique) *L'intégrale stochastique est un intégrale de la forme :*

$$\int_a^b X_s(w)dB_s(w),$$

où a et $b \in \mathbb{R}_+$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique, et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB.

Définition 1.3.2 (Bon processus) *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un "bon processus" s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté, càdlàg, et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty; \quad \forall t \geq 0.$$

L'integrale stochastique est vérifier les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux "bon processus" on donc

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \int_0^t (\alpha X_s(w)+\beta Y_s(w))dB_s(w) = \alpha \int_0^t X_s(w)dB_s(w)+\beta \int_0^t Y_s(w)dB_s(w).$$

2. **Centrage :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s(w)dB_s(w)\right] = 0.$$

3. **Appartenance à** $\mathbb{L}^2$: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (X_s(w)dB_s(w))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(w)ds\right]$$

Définition 1.3.3 (Processus d'Itô) *: Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé processus d'Itô s'il est de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b\,(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(s)\,dB_s,$$

où b_s est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tq :

$$\int_0^t |b\,(s)|\,ds < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s, \quad \forall t \geq 0.$$

σ est un "bon processus local". $x = X_0 \in \mathbb{R}$.

On écrit généralement le processus d'Itô par la forme différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t)\,dt + \sigma\,(t)\,dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

le processus $b\,(t)$ s'appelle la derivé (drift) du processus X ,et $\sigma\,(t)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

1.4 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.4.1 (Equation differentielle stochastique) *Une équation différentielle stochastique **(EDS)** est une équation de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} . \tag{1.1}$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien.*

Définition 1.4.2 (Solution forte d'EDS) *Soit* $d, m \in \mathbb{N}$,*et*

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}.$$

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par B_s, $s \leq t$ et par X_0, complétée par les ensembles négligeables $\mathcal{N}$.

Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appellé une solution forte de (1.1) si :

1. $X_0 = x$,
2. $\int_0^t \{|b(X(s))^2| + |\sigma(X(s))^2|\} ds < \infty$.
3. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \ t \in [0, \infty), \mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.4.3 (Solution forte unique d'EDS) ***:*** *On dit que l'équation admet une solution forte unique, si pour chaque deux solutions fortes* X_t *et* Y_t *on a :*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0,$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\left\{X_t = Y_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\right\} = 1.$$

Théorème 1.4.1 (Existence et unicité) *On suppose que :*

1. b et σ deux fonctions continues.

2. il existe une constante $K > 0$, telle que ; pour tout $t \in [0, T]$, et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{i)}\ \left|b(t,x) + b(t,y)\right| + \left|\sigma(t,x) + \sigma(t,y)\right| \leq K\left|x - y\right|.$$

$$\text{ii)}\ \left|b(t,x)\right|^2 + \left|\sigma(t,x)\right|^2 \leq K^2(1 - \left|x\right|^2).$$

3. La condition initiale X_0 est indépendante de t, est de carrée intégrable.

Alors il existe une solution unique de trajectoires continues pour $t \leq T$.

De plus cette solution vérife :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t\right|^2) < \infty.$$

Chapitre §.2
Principe du maximum pour les systèmes EDSPRs

Chapitre 2

Principe du maximum pour les systèmes EDSPRs

2.1 Formulation du problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité satisfaisant les conditions usuelles. On suppose que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est gérée par les deux processus suivants mutuellement indépendants :

i) Un mouvement Brownien standard d-dimensionnel $\{B(t)\}_{t\geq 0}$.

ii) Une mesure aléatoire de Poisson N sur $E \times R_+$, où $E \subset R^l$ est un ensemble ouvert non vide équipé de son champ de Borel $B(E)$, avec compensateur

$$\widetilde{N}(dedt) = \pi(de)dt,$$

tel que

$$\widetilde{N}(A \times [0,t]) = (N - \widetilde{N})(A \times [0,t])_{t\geq 0},$$

est une martingale pour tout $A \in B(E)$ satisfaisant $\pi(A) < \infty$.

π est supposé être une mesure σ-finie sur $(E, B(E))$, est appelée mesure caractéristique.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de dimension finie et $T > 0$ le temps du durée fixé. On note par

- $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathcal{H})$ à tout les variables aléatoires de $\mathcal{H}-$ valeur $\mathcal{F}_T$-mesurables carré intégrables.
- $L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathcal{H})$ à tout les processus de $\mathcal{H}-$valeur $\mathcal{F}_t$-adaptés careé intégrable.
- $L^\infty_{\mathcal{F}}[0,T]; \mathcal{H})$ à tout les processes de $\mathcal{H}-$valeur $\mathcal{F}_t$-adaptées bornée.
- $L^2_{\mathcal{F},P}([0,T]; \mathcal{H})$ à tout les processus de $\mathcal{H}-$valeur $\mathcal{F}_t$-prévisibles carré intégrable.
- $F^2_P([0,T]; \mathcal{H})$ à tout les processus de $\mathcal{H}$ $-$valeur $\mathcal{F}_t$-prévisibles $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ définis sur $\Omega \times [0,T] \times E$ tellque
$$\mathbb{E}\int_0^T \int_E |f(\cdot,t,e)|^2 \pi(de)\, dt < \infty.$$

Soit U un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^k$. Nous définissons l'ensemble des contrôles admissibles :

$$U_{ad} = \left\{ v(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F},p}([0,T]; R^k); v(t) \in U, \text{a.e.} t \in [0,T], \mathbb{P}\text{-a.s.} \right\}.$$

Pour tout contrôle admissible donné $v(\cdot) \in U_{ad}$, et $x_0 \in R^n$, nous considérons le système stochastique suivant avec saut :

$$\begin{cases} dx^v(t) = & f(t, x^v(t), v(t))\, dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))\, dB(t) \\ & + \int_E c(t, x^v(t-), v(t), e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ -dy^v(t) = & \int_E g(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t))\, \pi(de)\, dt \\ & z^v(t)\, dB(t) - \int_E r^v(t,e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0) = x_0, & y^v(T) = \phi(x^v(T)), \end{cases} \tag{2.1}$$

avec la fonction de coût :

$$J(v(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_E l(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t))\, \pi(de)\, dt + h(x^v(T)) + \gamma(y^v(0)) \right]. \tag{2.2}$$

ou $f : [0,T] \times R^n \times U \to R^n, \sigma : [0,T] \times R^n \times U \to R^{n\times d}, c : [0,T] \times R^n \times U \times E \to R^n, g :$

$[0,T] \times R^n \times R^m \times R^{m\times d} \times R^m \times U \to R^m, l : [0,T] \times R^n \times R^m \times R^{m\times d} \times R^m \to R, \phi :$ $\Omega \times R^n \to R^m, h : R^n \to R$, et $\gamma : R^m \to R$.

Notre problème de contrôle optimal stochastique est de trouver un contrôle admissible pour minimiser la fonction de coût (2.2) sujet à (2.1).

Voici nos hypothèses principales sur les fonctions ci-dessus dans ce travail :

$$\begin{cases} \text{i)} & f, \sigma, c \text{ sont Lipschitz dans le monde } (x, v) \text{ et } g \\ & \text{est global Lipschitz en } (x, y, z, r, v)\,; \\ \text{ii)} & f, \sigma, c, g, l, h, \gamma \text{ sont continuellement différenciables} \\ & \text{dans leurs variables, y compris } (x, y, z, r, v)\,; \\ \text{iii)} & f_x, f_v, \sigma_x, \sigma_v, g_x, g_y, g_z, g_r, g_v \text{ et } \int_E |c_x(\cdot,\cdot,e)|^2 \pi(de)\,, \\ & \int_E |c_v(\cdot,\cdot,e)|^2 \pi(de) \text{ sont bornés}\,; \\ \text{iv)} & l_x, l_y, l_z, l_r, l_v \text{ sont limités par } C(1+|x|+|y|+|z|+|r|+|v|)\,, \\ & h_x \text{ et } \gamma_y \text{ sont limités par } C(1+|x|)\,, C(1+|y|)\,, \text{ respectivement;} \\ \text{v)} & \forall x \in R^n, \phi(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; R^m) \text{ et pour fixe } \omega \in \Omega, \phi(x) \text{ est} \\ & \text{différenciable en permanence } x, \phi_x \text{ est délimité}\,; \\ \text{vi)} & \text{Pour tous } t \in [0,T], f(t,0,0), g(t,0,0,0,0,0) \in L^2([0,T]; R^n)\,, \\ & \sigma(t,0,0) \in L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T]; R^{n\times d}\right) \text{ et } c(t,0,0) \in F^2_p([0,T]; R^n) \end{cases} \tag{H2.1}$$

Dans ce qui précède, les hypothèses sur b, σ, c, l, h sont des conditions habituelles pour obtenir le principe du maximum stochastique pour le système de contrôle stochastique. Cependant, le système (2.1) se compose d'un EDS et EDSR donc nous avons besoin d'hypothèses appropriés sur g, ϕ, γ.

Sous hypothèse ($H2.1$), l'équation (2.1) admet une solution unique $x^v(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; R^n)$, pour $(x_0, v(\cdot)) \in R^n \times U_{ad}$, puis l'équation rétrograde de (2.1) admet une solution unique

$$(y^v(\cdot), z^v(\cdot), r^v(\cdot,\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; R^m) \times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T]; R^{m\times d}\right) \times F^2_p([0,T]; R^m)\,.$$

Notre problème de contrôle optimal est donc bien défini.

Afin d'obtenir le principe du maximum, nous utilisons la méthode classique de variation convexe.

soit $u(\cdot)$ un contrôle optimal, et $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ la trajectoire optimale correspondante.

Soit $v(\cdot)$ tel que $u(\cdot)+v(\cdot)\in U$. Puisque U est convexe, alors pour tout $0\leq\rho\leq 1$, $u^{\rho}(\cdot)\doteq u(\cdot)+\rho v(\cdot)$ est également dans U.

On note $(x_{\rho}(\cdot), y_{\rho}(\cdot), z_{\rho}(\cdot), r_{\rho}(\cdot,\cdot))$ la trajectoire correspondant à $u^{\rho}(\cdot)$.

Soit $(x^{1,\rho}(t), y^{1,\rho}(t), z^{1,\rho}(t), r^{1,\rho}(t,\cdot))$ la solution de l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} dx^{1,\rho}(t)=\left[f_x(t)\,x^{1,\rho}(t)+f_v(t)\,v(t)\right]dt+\left[\sigma_x(t)\,x^{1,\rho}(t)+\sigma_v(t)\,v(t)\right]dB(t) \\ \qquad\qquad +\int_E\left[c_x(t)\,x^{1,\rho}(t)+c_v(t)\,v(t)\right]\widetilde{N}(dedt), \\ -dy^{1,\rho}(t)=\int_E\left[g_x(t,e)x^{1,\rho}(t)+g_y(t,e)y^{1,\rho}(t)+g_z(t,e)z^{1,\rho}(t)+g_r(t,e)r^{1,\rho}(t,e)\right. \\ \qquad\qquad \left.+g_v(t,e)v(t)\right]\pi(de)\,dt-z^{1,\rho}(t)dB(t)-\int_E r^{1,\rho}(t,e)\widetilde{N}(dedt), \\ x^{1,\rho}(0)=0, \quad y^{1,\rho}(T)=\phi_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $f(t)\equiv f(t,x(t),u(t)), \sigma(t)\equiv\sigma(t,x(t),u(t)), c(t,\cdot)\equiv c(t,x(t),u(t),\cdot)$, $l(t)\equiv l(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\cdot),u(t)), g(t,\cdot)\equiv g(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\cdot),u(t))$ et même notation pour leurs dérivés.

Sous $(H2.1)$, il existe un unique $(x^{1,\rho}(\cdot), y^{1,\rho}(\cdot), z^{1,\rho}(\cdot), r^{1,\rho}(\cdot,\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];R^n)\times L^2_{\mathcal{F}}([0,T];R^m)\times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T];R^{m\times d}\right)\times F^2_p([0,T];R^m)$ satisfaisant (2.3).

Pour $t\in[0,T], \rho>0$, on pose $\widetilde{x}^{\rho}(t)\doteq\rho^{-1}(x_{\rho}(t)-x(t))-x^{1,\rho}(t), \widetilde{y}^{\rho}(t)\doteq\rho^{-1}(y_{\rho}(t)-y(t))-y^{1,\rho}(t), \widetilde{z}^{\rho}(t)\doteq\rho^{-1}(z_{\rho}(t)-z(t))-z^{1,\rho}(t), \widetilde{r}^{\rho}(t,\cdot)\doteq\rho^{-1}(r_{\rho}(t,\cdot)-r(t,\cdot))-r^{1,\rho}(t,\cdot)$.

Nous avons les résultats de convergence suivants :

Lemme 2.1.1 (2.1) *Supposons que l'hypothèse $(H2.1)$ est vérifié. Puis*

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|\widetilde{x}^{\rho}(t)|^2=0, \quad \lim_{\rho\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|\widetilde{y}^{\rho}(t)|^2=0, \\ &\lim_{\rho\to 0}\mathbb{E}\int_0^T\left|\widetilde{z}^{\rho}(t)^2\right|dt=0, \quad \lim_{\rho\to 0}\mathbb{E}\int_0^T\int_E\left|\widetilde{r}^{\rho}(t,e)\right|^2\pi(de)\,dt=0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. *Premièrement, nous avons*

$$\begin{cases} d\widetilde{x}^{\rho}(t) = & [A^{\rho}(t)\widetilde{x}^{\rho}(t) + G^{1\rho}(t)]\,dt + [B^{\rho}(t)\widetilde{x}^{\rho}(t) + G^{2\rho}(t)]\,dB(t) \\ & + \int_E [C^{\rho}(t-,e)\widetilde{x}^{\rho}(t-) + G^{3\rho}(t-,e)]\,\widetilde{N}(dedt), \\ \widetilde{x}^{\rho}(0) = & 0, \end{cases}$$

où nous désignons (pour simplifier, nous omettons l'indice de temps t).

$$\begin{array}{ll} A^{\rho} & \doteqdot \int_0^1 f_x(x + \lambda\rho(x^{1,\rho} + \widetilde{x}^{\rho}), u + \lambda\rho v)\,d\lambda, \\ G^{1\rho} & \doteqdot [A^{\rho} - f_x(x,u)]\,x^{1,\rho} + \int_0^1 [f_v(x, u + \lambda\rho v) - f_v(x,u)]\,vd\lambda, \\ B^{\rho} & \doteqdot \int_0^1 \sigma_x(x + \lambda\rho(x^{1,\rho} + \widetilde{x}^{\rho}), u + \lambda\rho v)\,d\lambda, \\ G^{2\rho} & \doteqdot [B^{\rho} - \sigma_x(x,u)]\,x^{1,\rho} + \int_0^1 [\sigma_v(x, u + \lambda\rho v) - \sigma_v(x,u)]\,vd\lambda, \\ C^{\rho}(\cdot) & \doteqdot \int_0^1 c_x(x + \lambda\rho(x^{1,\rho} + \tilde{x}^{\rho}), u + \lambda\rho v)\,d\lambda, \\ G^{3\rho}(\cdot) & \doteqdot [C^{\rho} - c_x(x,u,\cdot)]\,x^{1,\rho} + \int_0^1 [c_v(x, u + \lambda\rho v, \cdot) - c_v(x,u,\cdot)]\,vd\lambda. \end{array}$$

En appliquant la formule d'Itô à $|\tilde{x}^{\rho}(t)|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\tilde{x}^{\rho}(t)|^2 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\langle 2\tilde{x}^{\rho}(t), A^{\rho}(t)\tilde{x}^{\rho}(t) + G^{1\rho}(t)\rangle + |B^{\rho}(t)\tilde{x}^{\rho}(t) + G^{2\rho}(t)|^2\right] dt \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T |C^{\rho}(t,e)\tilde{x}^{\rho}(t) + G^{3\rho}(t,e)|^2\,\pi(de)\,dt \\ &\leq C\mathbb{E}\int_0^T |\tilde{x}^{\rho}(t)|^2\,dt + 0(\rho). \end{aligned}$$

En suite, nous pouvons obtenir le premier résultat de convergence de (2.4) à partir de l'inégalité de Gronwall. Et nous avons :

$$\begin{cases} -d\tilde{y}^{\rho}(t) & = \int_E [D^{\rho}(t,e)\widetilde{x}^{\rho}(t) + I^{\rho}(t,e)\widetilde{y}^{\rho}(t) + F^{\rho}(t,e)\widetilde{z}^{\rho}(t) + \Lambda^{\rho}(t,e)\widetilde{r}^{\rho}(t,e) \\ & \quad G^{4\rho}(t,e)]\,\pi(de)\,dt - \widetilde{z}^{\rho}(t)\,dB(t) - \int_E^{\rho} \widetilde{r}(t,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ \tilde{y}^{\rho}(T) & = \rho^{-1}[\phi_x(x_p(T)) - \phi_x(x(T))] - \phi_x(x(T))\,x^{1,\rho}(T), \end{cases}$$

ici nous désignons :

$$
\begin{aligned}
D^{\rho}(\cdot) &\doteq \textstyle\int_0^1 g_x\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right),\right.\\
&\quad \left. z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right), r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v, \cdot\right) d\lambda,\\
I^{\rho}(\cdot) &\doteq \textstyle\int_0^1 g_y\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right),\right.\\
&\quad \left. z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right), r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v, \cdot\right) d\lambda,\\
F^{\rho}(\cdot) &\doteq \textstyle\int_0^1 g_z\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right),\right.\\
&\quad \left. z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right), r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v, \cdot\right) d\lambda,\\
\Lambda^{\rho}(\cdot) &\doteq \textstyle\int_0^1 g_r\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right),\right.\\
&\quad \left. z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right), r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v, \cdot\right) d\lambda,\\
G^{4\rho}(\cdot) &\doteq \left[D^{\rho}(\cdot)-g_x(\cdot)\right] x^{1,\rho}+\left[I^{\rho}(\cdot)-g_y(\cdot)\right] y^{1,\rho}\\
&\quad +\left[F^{\rho}(\cdot)-g_z(\cdot)\right] z^{1,\rho}+\left[H^{\rho}(\cdot)-g_r(\cdot)\right] r^{1,\rho}(\cdot)\\
&\quad +\textstyle\int_0^1 \left[g_v\left(x+\lambda\rho\left(x^{1,\rho}+\widetilde{x}^{\rho}\right), y+\lambda\rho\left(y^{1,\rho}+\widetilde{y}^{\rho}\right), z+\lambda\rho\left(z^{1,\rho}+\widetilde{z}^{\rho}\right),\right.\right.\\
&\quad \left.\left. r(\cdot)+\lambda\rho\left(r^{1,\rho}(\cdot)+\widetilde{r}^{\rho}(\cdot)\right), u+\lambda\rho v\right)-g_v(\cdot)\right] v d\lambda.
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule d'Itô à $|\tilde{y}^{\rho}(t)|^2$*, on obtient :*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\widetilde{y}^{\rho}(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|\widetilde{z}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_t^T\int_E\left|\widetilde{r}^{\rho}(s,e)\right|^2\pi(de)\,ds\\
&=\mathbb{E}\int_t^T\int_E\left\langle 2\widetilde{y}^{\rho}(s), D^{\rho}(s,e)\,\widetilde{x}^{\rho}(s)+I^{\rho}(s,e)\,\widetilde{y}^{\rho}(s)+F^{\rho}(s,e)\,\widetilde{x}^{\rho}(s)+\Lambda^{\rho}(s,e)\,\widetilde{r}^{\rho}(s,e)\right.\\
&\left.+G^{4\rho}(s,e)\right\rangle\pi(de)\,ds+\mathbb{E}\left\{\rho^{-1}\left[\phi\left(x_{\rho}(T)\right)-\phi\left(x(T)\right)\right]-\phi_x\left(x(T)\right)x^{1,\rho}(T)\right\}^2\\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^T\left|\widetilde{y}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T\left|\widetilde{z}^{\rho}(s)\right|^2 ds+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\int_E\left|\widetilde{r}^{\rho}(s,e)\right|^2\pi(de)\,ds+0(\rho).
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Gronwall à nouveau, nous pouvons obtenir les trois derniers résultats de convergence de(2.4).

Puisque $u(\cdot)$ *est un contrôle optimal, alors :*

$$\rho^{-1}\left[J\left(u^{\rho}(\cdot)\right)-J\left(u(\cdot)\right)\right]\geq 0.$$

De ceci et du Lemme 2.1, nous avons ce qui suit. ■

Lemme 2.1.2 *Supposons que l'hypothèse (H2.1) soit vérifié, alors l'inégalité variationnelle suivante est vraie :*

$$\begin{aligned} o(\rho) \quad &\leq \mathbb{E}\int_t^T \int_E \left[l_x(t)\, x^{1,\rho}(t) + l_y(t)\, y^{1,\rho}(t) + l_z(t)\, z^{1,\rho}(t) + l_r(t)\, r^{1,\rho}(t,e)\right. \\ &\left. l_v(t)\, v(t)\, \pi(de)\right] dt + \mathbb{E}\left[h_x(x(T))\, x^{1,\rho}(T)\right] + \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0))\, y^{1,\rho}(0)\right]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. A partir du premier résultat de (2.4), on dérive

$$\begin{aligned} \rho^{-1}\mathbb{E}\left[h(x_\rho(T)) - h(x(T))\right] \quad &= \rho^{-1}\mathbb{E}\int_0^1 h_x\left(x(T) + \lambda\left(x_\rho(T) - x(T)\right)\right)\left(x_\rho(T) - x(T)\right) d\lambda \\ &\to \mathbb{E}\left[h_x(x(T))\, x^{1,\rho}(T)\right]. \end{aligned}$$

De même, pour :

$$\begin{aligned} \rho^{-1}\mathbb{E}\left[\gamma(y_\rho(0)) - \gamma(y(0))\right] \quad &= \rho^{-1}\mathbb{E}\int_0^1 \gamma_y\left(y(0) + \lambda\left(y_\rho(0) - y(0)\right)\right)\left(y_\rho(0) - y(0)\right) d\lambda \\ &\to \mathbf{E}\left[\gamma_y(y(0))\, y^{1,\rho}(0)\right]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\rho^{-1}\left\{\mathbb{E}\int_t^T \int_E \left[l\left(t, x_\rho(t), y_\rho(t), z_\rho(t), r_\rho(t,e), u(t)\right) - l(t)\right] \pi(de)\, dt\right\} \\ &\to \mathbb{E}\int_t^T \int_E \left[l_x(t)\, x^{1,\rho}(t) + l_y(t)\, y^{1,\rho}(t) + l_z(t)\, z^{1,\rho}(t) + l_r(t)\, r^{1,\rho}(t,e) + l_v(t)\, v(t)\right] \pi(de)\, dt. \end{aligned}$$

■

Ensuite, nous introduisons les équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} dp(t) &= \int_E \left[g_y^\intercal(t,e)\, p(t) - l_y^\intercal(t)\right] \pi(de)\, dt + \int_E \left[g_z^\intercal(t,e)\, p(t) - l_z^\intercal(t)\right] \pi(de)\, dB(t) \\ &\quad + \int_E \left[g_r^\intercal(t-,e)\, p(t-) - l_r^\intercal(t-)\right] \widetilde{N}(dedt), \\ -dq(t) &= \left[f_x^\intercal(t,e)\, q(t) - \int_E g_x^\intercal(t,e)\, p(t)\, \pi(de) + \sigma_x^\intercal(t)\, k(t) + \int_E \left(c_x^\intercal(t,e)\, R(t,e)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + l_x^\intercal(t)\right) \pi(de)\right] dt - k(t)\, dB(t) - \int_E R(t,e)\, \widetilde{N}(dedt), \\ p(0) &= -\gamma_y(y(0)), \quad q(T) = -\phi_x^\intercal(x(T))\, p(T) + h_x(x(T)). \end{cases} \tag{2.6}$$

De même que (2.3), sous l'hypothèse ($H2.1$), il existe un unique $(p(t), q(t), k(t), R(t,\cdot))$ $\in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; R^m) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; R^n) \times L^2_{\mathcal{F},p}\left([0,T]; R^{n\times d}\right) \times F^2_p([0,T]; R^n)$ satisfying EDSPR (**2.6**).

On définit la fonction Hamiltonienne $H : [0,T] \times R^n \times R^m \times R^{m\times d} \times R^m \times U \times R^m \times R^n \times R^{n\times d} \times R^n \to R$ comme suit :

$$\begin{aligned}
&H(t,x,y,z,r(\cdot),v,p,q,k,R(\cdot)) \\
&\doteq \langle q, f(t,x,v)\rangle + \langle k, \sigma(t,x,v)\rangle - \textstyle\int_E [\langle p, g(t,x,y,z,r(e),v)\rangle \\
&-l(t,x,y,z,r(e),v) - \langle R(e), c(t,x,v,e)\rangle]\,\pi(de)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On note $H(t) \equiv H(t, x(t), y(t), z(t), r(t,\cdot), u(t), p(t), q(t), k(t), R(t,\cdot))$, et ses dérivées, puis les équations adjointes (2.6) , peuvent être réécrites comme le type de système Hamiltonien stochastique suivant :

$$\begin{cases}
dp(t) & = -H_y(t)dt - H_z(t)dB(t) - \int_E H_r(t-,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\
-dq(t) & = H_x(t)dt - k(t)dB(t) - \int_E R(t,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\
p(0) & = -\gamma_y(y(0)), \quad q(T) = -\phi_x^{\intercal}(x(T))\,p(T) + h_x(x(T))
\end{cases} \tag{2.8}$$

Le principal résultat de ce travail est le suivant.

2.2 Principe du maximum

Théorème 2.2.1 (Principle du maximum stochastique) *Soit ($H2.1$) vérifié et soit $u(\cdot)$ un contrôle optimal pour notre problème de contrôle. $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ est la trajectoire optimale correspondante. Alors nous avons*

$$\langle H_v(t), v - u(t)\rangle \geq 0, \forall v \in U, \quad a.e.t \in [0,T], \quad \mathbb{P}\text{-}as. \tag{2.9}$$

Preuve. En appliquant la formule d'Ito $\langle x^{1,\rho}(t), q(t)\rangle + \langle y^{1,\rho}(t), p(t)\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[h_x(x(T))\, x^{1,\rho}(T)\right] + \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0))\, y^{1,\rho}(0)\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \int_E \left[-l_x(t)x^{1,\rho}(t) - l_y(t)y^{1,\rho}(t) - l_z(t)z^{1,\rho}(t) - l_r(t)r^{1,\rho}(t,e) - l_v(t)v(t)\right]\pi(de)\, dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \langle H_v(t), v(t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Ceci avec l'inégalité variationnelle (2.5) implique, pour $v(\cdot)$ tel que $u(\cdot) + v(\cdot) \in U_{ad}$,

$$\mathbb{E}\int_0^T \langle H_v(t), v(t)\rangle\, dt \geq 0.$$

Donc (2.9) vérifié. ■

Comme nous avons mentionné dans l'introduction, nous pouvons également prouver, sous quelques conditions additionnelle de convexité/concavité, la condition nécessaire et suffisante ci-dessus dans le Théreme 2.1.1. Suppossons ($H2.1$) : h est convexe en x et γ est convexe en y.

Ensuite, nous avons la résultat suivante.

Théorème 2.2.2 (Conditions suffisantes d'optimalités) *Soit* ($H2.1$) *est vérifié. Soit* $u(\cdot)$ *un contrôle admissible, et* $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ *la trajectoire correspondante avec*

$$y(T) = M_T x(T),\, M_T \in R^{m\times n}.$$

Soit $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot), R(\cdot,\cdot))$ *la solution des équations adjoints* (2.6).

Supposons que H *est convexe en* $(x, y, z, r(\cdot))$, *alors* $u(\cdot)$ *est un contrôle optimal s'il satisfait* (2.9).

Preuve. Soit $v(\cdot)$ un contrôle admissible arbitraire et $(x^v(\cdot), y^v(\cdot), z^v(\cdot), r^v(\cdot,\cdot))$ être la trajectoire correspondante. Nous considérons

$$
\begin{aligned}
J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) &= \mathbb{E}\int_0^T \int_E \left[l(t) - l\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t)\right)\right] \pi(de)\, dt \\
&+ \mathbb{E}\left[h(x(T)) - h(x^v(T))\right] + \mathbb{E}\left[\gamma(y(0)) - \gamma(y^v(0))\right].
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Par la convexité de h et la formule d'Itô, en notant (2.1) , (2.6) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[h(x(T)) - h(x^v(T))\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(x(T) - x^v(T)\right)^\top h_x(x(T))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(x(T) - x^v(T)\right)^\top q(T)\right] + \mathbb{E}\left[\left(x(T) - x^v(T)\right)^\top M_T^\top p(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \Big[\left(x(t) - x^v(t)\right)^\top \Big(-f_x^\top(t)\, q(t) + \int_E g_x^\top(t,e)\, p(t)\, \pi(de) - \sigma_x^\top(t)\, k(t) \\
&- \int_E c_x^\top(t,e)\, R(t,e)\, \pi(de) - l_x^\top(t)\, \pi(de)\Big) + \left\langle q(t), f(t) - f\left(t, x^v(t), v(t)\right)\right\rangle \\
&+ \left\langle k(t), \sigma(t) - \sigma\left(t, x^v(t), v(t)\right)\right\rangle + \int_E \left\langle R(t,e), c(t,e) - c\left(t, x^v(t), v(t), e\right)\right\rangle \pi(de)\Big]\, dt \\
&+ \mathbb{E}\left[\left(x(T)\right) - \left(x^v(T)\right)^\top M_T^\top p(T)\right].
\end{aligned}
$$

Et de même, par la convexité de γ et de la formule d'Itô, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\gamma(y(0)) - \gamma(y^v(0))\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(y(0) - y^v(0)\right)^\top \gamma_y(y(0))\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\left(y(0) - y^v(0)\right)^\top p(0)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\left(x(T) - x^v(T)\right)^\top M_T^\top p(T)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_E \Big[\left(y(t) - y^v(t)\right)^\top \left(g_y^\top(t,e)\, p(t) - l_y^\top(t)\right) \\
&+ \left(z(t) - z^v(t)\right)^\top \left(g_z^\top(t,e)\, p(t) - l_z^\top(t)\right) + \left(r(t,e) - r^v(t,e)\right)^\top \left(g_r^\top(t,e)\, p(t) - l_r^\top(t)\right) \\
&- \left\langle p(t), g(t,e) - g\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), r^v(t,e), v(t)\right)\right\rangle\Big] \pi(de)\, dt.
\end{aligned}
$$

Par la définition (2.7) de H on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T\int_E \left[l\left(t\right)-l\left(t,x^v\left(t\right),y^v\left(t\right),z^v\left(t\right),r^v\left(t,e\right),v\left(t\right)\right)\right]\pi\left(de\right)dt\\
&=\mathbb{E}\int_0^T\left[H\left(t\right)-H\left(t,x^v\left(t\right),y^v\left(t\right),z^v\left(t\right),r^v\left(t,\cdot\right),v\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\right]dt\\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_E\left[-\left\langle q\left(t\right),f\left(t\right)-f\left(t,x^v\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right\rangle-\left\langle k\left(t\right),\sigma\left(t\right)-\sigma\left(t,x^v\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right\rangle\right.\\
&+\left\langle p\left(t\right),g\left(t,e\right)-g\left(t,x^v\left(t\right),y^v\left(t\right),z^v\left(t\right),r^v\left(t,e\right),v\left(t\right),e\right)\right\rangle\\
&\left.-\left\langle R\left(t,e\right),c\left(t,e\right)-c\left(t,x^v\left(t\right),v\left(t\right),e\right)\right\rangle\right]\pi\left(de\right)dt.
\end{aligned}
$$

En ajoutant (dans) l'égalité ci dessus, à partir de (2.10), nous pouvons obtenir :

$$
\begin{aligned}
&J\left(u\left(\cdot\right)\right)-J\left(v\left(\cdot\right)\right)\\
&\leq\mathbb{E}\int_0^T\left[H\left(t\right)-H\left(t,x^v\left(t\right),y^v\left(t\right),z^v\left(t\right),r^v\left(t,\cdot\right),v\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\right.\\
&-\left\langle H_x\left(t\right),x\left(t\right)-x^v\left(t\right)\right\rangle-\left\langle H_y\left(t\right),y\left(t\right)-y^v\left(t\right)\right\rangle-\left\langle H_z\left(t\right),z\left(t\right)-z^v\left(t\right)\right\rangle\\
&\left.-\left\langle H_r\left(t\right),r\left(t,\cdot\right)-r^v\left(t,\cdot\right)\right\rangle\right]dt.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Puisque H est convexe en $\left(x,y,z,r\left(\cdot\right),v\right)$, ensuite

$$
\begin{aligned}
&H\left(t\right)-H\left(t,x^v\left(t\right),y^v\left(t\right),z^v\left(t\right),r^v\left(t,\cdot\right),v\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),R\left(t,\cdot\right)\right)\\
&\leq\left\langle H_x\left(t\right),x\left(t\right)-x^v\left(t\right)\right\rangle+\left\langle H_y\left(t\right),y\left(t\right)-y^v\left(t\right)\right\rangle+\left\langle H_z\left(t\right),z\left(t\right)-z^v\left(t\right)\right\rangle\\
&\qquad+\left\langle H_r\left(t\right),r\left(t,\cdot\right)-r^v\left(t,\cdot\right)\right\rangle+\left\langle H_v\left(t\right),u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

En combinant (2.11) et (2.12), on obtient :

$$
J\left(u\left(\cdot\right)\right)-J\left(v\left(\cdot\right)\right)\leq\mathbb{E}\int_0^T\left\langle H_v\left(t\right),u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt.
$$

Puis à partir de la condition (2.9), on déduit que

$$
J\left(u\left(\cdot\right)\right)\leq J\left(v\left(\cdot\right)\right)\ \text{ pour tout } v\left(\cdot\right)\in U,
$$

ce qui prouve que $u\left(\cdot\right)$ est optimal. ■

Chapitre §.3
Application en finance

Chapitre 3

Application en finance

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre 2 pour étudier le problème de sélection de portefeuille moyenne variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une function d'utilité récursive.

Supposons que nous avons deux types de titres dans le marché pour un choix d'investissement possible :

- Une sécurité sans risque (par exemple, une obligation), où le prix $S_0(t)$ au temps t est donné par

$$dS_0(t) = \rho_t S_0(t)\,dt,\ \ S_0(0) > 0, \tag{3.1}$$

ici ρ_t est une fonction déterministe bornée.

- Une sécurité risqué (par exemple, Un stock), où le prix $S_1(t)$ au temps t est donné par

$$dS_1(t) = S_1(t-)\left[\mu_t dt + \sigma_t dBt + \int_E \eta_t(e)\,\widetilde{N}(dedt)\right],\ \ S_1(0) > 0, \tag{3.2}$$

avec μ_t, $\sigma_t \neq 0$ sont des fonctions déterministes bornées et $\mu_t > \rho_t$.

Pour toute $S_1(t) > 0$, on suppose que $\eta_t(e) > -1, \forall e \in E$, de plus nous supposons que $\int_E \eta^2(e)\,\pi(de)$ est une fonction bornée.

Soit $v(t) \doteq \theta_1(t)\,S_1(t)$ est le montant investi dans la sécurité risqué que nous appelons la stratégie de portefeuille.

Etant donné la richesse initiale $x^v(0) = x_0 \geq 0$, en combinant (3.1) et (3.2) nous pouvons obtenir la dynamique de la richesse suivante :

$$\begin{cases} dx^v(t) = [\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t) v(t)] dt + \sigma_t v(t) dBt + \displaystyle\int_E \eta_t(e) v(t-) \widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

On note par U_{ad} l'ensemble des portefeuilles admissibles à valeur dans $U = \mathbb{R}$.

Sous le cadre ci-dessus, Framsted et al.[14] discuté le problème de sélection du protfolio moyenne variance dans l'Exemple 3.1, c'est -à-dire que l'objet de l'investisseur est de trouver un portefeuille admissible $v^*(t)$ qui minimise la variance

$$Var[x^v(T)] \doteq \mathbb{E}\left[(x^v(T) - \mathbb{E}[x^v(T)])^2\right],$$

à un moment futur $T > 0$ sous la condition que $\mathbb{E}[x^v(T)] = A$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, nous savons que c'est équivalent à étudier le problème suivant :

$$\sup_{v(\cdot) \in U_{ad}} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}(x^v(T) - a)^2\right], \tag{3.4}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est donné. En utilisant un principe de maximum suffisant, Framastad, et Al.[14]–[15] a donné l'expression de la sélection de portefeuille optimale.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de sélection de portfeuille moyenne variance ci dessus mélangé avec un problème d'optimisation fonctionnelle utilitaire récursif.

Le récursif utilité signifie que l'utilité au temps t est une fonction de l'utilité future (dans ce cas, nous ne considérons pas la consommation). En fait, dans notre cadre de diffusion avec sauts, l'utilitaire récursif peut être supposée satisfait certains EDSR. Les problèmes d'optimisation avec l'utilité récursif ont un contexte économique important, voir [10] – [11]

pour plus de détails.

On considère un petit investisseur, doté d'une richesse initiale $x_0 > 0$, qui choisit à chaque instant t sa stratégie de portefeuille $v(t)$. L'investisseure veut choisir une stratégie de portefeuille $v^*(\cdot) \in U_{ad}$ maximiser la fonctionn d'utilité attendue suivante qui peut être séparée en deux parties : une partie est le récompense terminale équivalente

$$\mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(x^v(T)-a\right)^2\right];$$

l'autre partie est une fonction utilitaire récursif avec générateur

$$g(t,v,x,y) = \rho_t x + (\mu_t - \rho_t)v - \beta y,$$

où $\beta \geq 0$ constante. Plus précisément, pour tout $v(\cdot) \in U_{ad}$ la fonctionn utilitaire de l'investisseur est défini par :

$$\overline{J}(v(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}\left(x^v(T)-a\right)^2\right] + y^v(t)\,|_{t=0}, \tag{3.5}$$

où

$$y^v(t) \doteq \mathbb{E}\left[x^v(T) + \int_t^T \left[\rho_s x^v(s) + (\mu_s - \rho_s)v(s) - \beta y^v(s)\right] ds\,|_{\mathcal{F}_t}\right], \quad t \in [0,T].$$

En fait, dans notre cadre de diffusion avec sauts, le processus de richesse $x^v(\cdot)$ et le processus utilitaire récursif $y^v(\cdot)$ peut être considéré comme la solution de ce qui suit EDSPR :

$$\begin{cases} dx^v(t) = \left[\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t)v(t)\right]dt + \sigma_t v(t)\,dBt + \displaystyle\int_E \eta_t(e)\,v(t-)\,\widetilde{N}(dedt), \\ -dy^v(t) = \left[\rho_t x^v(t) + (\mu_t - \rho_t)v(t) - \beta y^v(t)\right]dt - z^v(t)\,dBt - \displaystyle\int_E r^v(t,e)\,\widetilde{N}(dedt), \\ x^v(0) = x_0, \quad y^v(t) = x^v(T), \end{cases} \tag{3.6}$$

et notre problème d'optimisation peut être réécrit comme (indiquant $J = -\overline{J}$)

$$J\left(v^{*}\left(\cdot\right)\right) = \inf_{v(\cdot)\in U_{ad}} J\left(v\left(\cdot\right)\right). \tag{3.7}$$

Nous pouvons vérifier que toutes les hypothèses de la section 2 sont satisfaites, puis nous pouvons utilitser notre principe du maximum (Thérème 2.1.1) pour résoudre le problème d'optimisation précèdent (3.7) . Dans ce cas, l'equation adjointe (**??**) se rèduit à

$$\begin{cases} dp\left(t\right) = -\beta p\left(t\right)dt, \\ -dq\left(t\right) = \rho_{t}\left[q\left(t\right) - p\left(t\right)\right]dt - k\left(t\right)dBt - \displaystyle\int_{E} R\left(t,e\right)\widetilde{N}\left(dedt\right), \\ p\left(0\right) = 1, \quad q\left(T\right) = x\left(T\right) - a - p\left(T\right). \end{cases} \tag{3.8}$$

Notant que dans ce cas le processus adjoint $p\left(\cdot\right)$ réduit à un fonction déterminste car notre générateur g ne contient pas les processus $z\left(\cdot\right), r\left(\cdot,\cdot\right)$. Soit $v^{*}\left(\cdot\right)$ une stratégie de portfeuille optimale et $x^{*}\left(\cdot\right), y^{*}\left(\cdot\right)$ le processus de richesse correspondant et le processus d'utilité récursif, respictivement, avec la solution correspondante $\left(p^{*}\left(\cdot\right), q^{*}\left(\cdot\right), k^{*}\left(\cdot\right), R^{*}\left(\cdot\right)\right)$ aux équations adjioints (3.8). Alors, la fonction d'hamiltonienne (**??**) se réduit à

$$\begin{aligned} & H\left(t, x^{*}\left(\cdot\right), y^{*}\left(t\right), v, p^{*}\left(\cdot\right), q^{*}\left(t\right), k^{*}\left(t\right), R^{*}\left(t,\cdot\right)\right) \\ & = -\left[\rho_{t}x^{*}\left(t\right) + \left(\mu_{t} - \rho_{t}\right)v\right]\left(p^{*}\left(t\right) - q^{*}\left(t\right)\right) + \sigma_{t}k^{*}\left(t\right)v \\ & + \beta p^{*}\left(t\right)y^{*}\left(t\right) + \int_{E}\eta_{t}\left(e\right)R^{*}\left(t,e\right)v\pi\left(de\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

De plus, cette expression est linéaire de v. Par la condition nécessaire (**??**), nous avons

$$-\left(\mu_{t} - \rho_{t}\right)\left(p^{*}\left(t\right) - q^{*}\left(t\right)\right) + \sigma_{t}k^{*}\left(t\right) + \int_{E}\eta_{t}\left(e\right)R^{*}\left(t,e\right)\pi\left(de\right) = 0. \tag{3.10}$$

Afin de trouver l'expression de $v^{*}\left(t\right)$, nous conjecturons un processus $q^{*}\left(t\right)$ avec forme

$$q^{*}\left(t\right) = \phi_{t}x^{*}\left(t\right) + \Psi_{t}, \tag{3.11}$$

où ϕ_t, Ψ_t sont des fonctions différentiables.

En appliquant la formule d'Itô à (3.11), on peut obtenir

$$\begin{aligned} dq^*(t) &= \phi_t \left\{ \left[\rho_t x^*(t) + (\mu_t - \rho_t) v^*(t) \right] dt + \sigma_t v^*(t) dB(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_E \eta_t(e) v^*(t-) \widetilde{N}(dedt) \right\} + x^*(t) \dot{\phi}_t dt + \dot{\Psi}_t dt \\ &= \left[\phi_t \rho_t x^*(t) + \phi_t (\mu_t - \rho_t) v^*(t) + x^*(t) \dot{\phi}_t + \dot{\Psi}_t \right] dt \\ &\quad + \phi_t \sigma_t v^*(t) dB(t) + \int_E \phi_t \eta_t(e) v^*(t-) \widetilde{N}(dedt) \end{aligned} \tag{3.12}$$

En comparant (3.12) avec le EDSR dans (3.8), on obtient (en notant que $\rho^*(t) = e^{-\beta t}$)

$$\phi_t \rho_t x^*(t) + \phi_t (\mu_t - \rho_t) v^*(t) + x^*(t) \dot{\phi}_t + \dot{\Psi}_t = -\rho_t (\phi_t x^*(t) + \Psi_t) + \rho_t e^{-\beta t}, \tag{3.13}$$

et

$$k^*(t) = \phi_t \sigma_t v^*(t), \tag{3.14}$$

$$R^*(t,e) = \phi_t \eta_t(e) v^*(t). \tag{3.15}$$

Remplacer (3.14) , (3.15) par (3.10) et désigner

$$\Lambda_t \doteq \sigma_t^2 + \int_E \eta_t^2(e) \pi(de), \tag{3.16}$$

on peut avoir

$$v^*(t) = \frac{(\rho_t - \mu_t)\left(\phi_t x^*(t) + \Psi_t - e^{-\beta t}\right)}{\phi_t \Lambda_t}. \tag{3.17}$$

D'autre part, (3.13) donne :

$$v^*(t) = \frac{\left(2\phi_t \rho_t + \dot{\phi}_t\right) x^*(t) + \rho_t \Psi_t + \dot{\Psi}_t - \rho_t e^{-\beta t}}{\phi_t (\rho_t - \mu_t)}. \tag{3.18}$$

En combinant (3.17) et (3.18) (en notant la condition terminale en (3.8)), on obtient :

$$\dot{\phi}_t = \left[\frac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - 2\rho_t\right]\phi_t, \quad \phi_T = 1,$$

et

$$\dot{\Psi}_t = \left[\frac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - \rho_t\right]\Psi_t - e^{-\beta t}\left[\frac{(\rho_t-\mu_t)^2}{\Lambda_t} - \rho_t\right], \quad \Psi_T = -a-1.$$

La solution de cette équation est

$$\phi_t = \exp\left\{-\int_t^T \left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - 2\rho_s\right] ds\right\}, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi_t = \exp\left\{-\int_t^T \left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s\right] ds\right\} & \qquad (3.20)\\ \cdot\left\{\int_t^T e^{-\beta s}\left[\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s\right]\exp\left\{\int_s^T\left[\frac{(\rho_r-\mu_r)^2}{\Lambda_r} - \rho_r\right] dr\right\} ds - a - e^{-\beta T}\right\}.\end{aligned}$$

Avec ce choix de ϕ_t et Ψ_t le processus

$$\begin{aligned} p^*(t) &= e^{-\beta t}, & q^*(t) &= \phi_t x^*(t) + \Psi_t,\\ k^*(t) &= \phi_t \sigma_t v^*(t), & R^*(t,e) &= \phi_t \eta_t(e)\, v^*(t), \end{aligned}$$

Satisfant l'equation adjointe (3.8) avec $v^*(t)$ donnée par (3.17) . Ainsi, avec ce choix de $v^*(t)$, la condition nécessaire du thérème 2.1.1 est vérifié.

Théorème 3.0.3 *La solution optimale $v^*(t)$ de notre problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'utilitté récursif* (3.7)*, lorsque la dynamique de richesse obéit* [17]*, est donné sous forme de feedback par*

$$v^*(t,x^*) = \frac{(\rho_t-\mu_t)\left(\phi_t x^* + \Psi_t - e^{-\beta t}\right)}{\phi_t \Lambda_t}, \tag{3.21}$$

où $\Lambda_t, \phi_t, \Psi_t$ *sont respectivement donnés par* (3.16) , (3.19) , (3.20) .

Conclusion

Dans cet mémoire de master, les conditions nécessaires et suffisants d'optimalités pour un système stochastique EDSPR avec sauts a été étudié. Les coefficients de saut et le processus du diffusion dependent par la variable de contrôle. Le résultat obtenu est appliqué au problème de sélection de portefeuille moyenne variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une function d'utilité récursive. L'expression explicite de la stratégie est donné sous forme de feedback .

Bibliographie

[1] S. G. Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. on Control and Optimization, 1990, 28(4) : 966–979.

[2] S. G. Peng, Backward stochastic differential equations and applications to optimal control, Applied Mathematics and Optimization, 1993, 27 : 125–144.

[3] W. S. Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, J. of Australian Mathematical Society, 1995B, 37 : 172–185.

[4] Z. Wu, Maximum principle for optimal control problem of fully coupled forward-backward stochastic systems, Systems Science and Mathematical Sciences, 1998, 11(3) : 249–259.

[5] J. T. Shi and Z. Wu, The maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic control system, Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2) : 161–169.

[6] Shi, J., Wu, Z. : Maximum principle for forward-backward stochastic control system with random jumps and applications to finance. Journal of Systems Science and Complexity 23(2), 219-231 (2010).

[7] R. Situ, A maximum principle for optimal controls of stochastic systems with random jumps, in Proceedings of National Conference on Control Theory and its Applications, Qingdao, China, 1991.

[8] S. J. Tang and X. J. Li, Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps, SIAM J. on Control and Optimization, 1994, 32(5) : 1447–1475.

[9] X. Y. Zhou and D. Li, Continuous time mean-variance portfolio selection : A stochastic LQ frame-work, Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42 : 19–33.

[10] N. El-Karoui, S. G. Peng, and M. C. Quenez, A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints, The Annals of Applied Probability, 2001, 11(3) : 664–693.

[11] N. El-Karoui, S. G. Peng, and M. C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Mathematical Finance, 1997, 7(1) : 1–71.

[12] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Kodansha, 1989.

[13] A. Bensoussan, Lecture on Stochastic Control : Nonlinear Filtering and Stochastic Control, Lecture Notes in Mathematics, 972, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[14] N. C. Framstad, B. Oksendal, and A. Sulem, A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance, J. of Optimization Theory and Applications, 2004, 121(1) : 77–98 (Errata, 2005, 124(2) : 511–512).

[15] Bensoussan, A. : Lectures on stochastic control. In : Nonlinear filtering and stochastic control. pp. 1-62. Springer, (1982)

[16] Pham, H. : Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, vol. 61. Springer, (2007)

[17] Yong, J., Zhou, X.Y. : Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, vol. 43. Springer Science & Business Media, (1999)

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressivement rétrograde (EDSPR) avec saut. A titre d'exemple, nous étudions le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive.

Mots clés. Contrôle optimal. Equation différentielles stochastique progressivement rétrograde. Principe du maximum. Condition suffisante d'optimalité. Portefeuille moyenne-variance.

Abstract

In this thesis, we are interested in studying of the stochastic maximum principle for a type of forward-backward system with jump. We apply our result to study the mean-variance portfolio selection problem with a problem of optimizing a recursive utility function.

Key words. Optimal control. Forward-Backward stochastic differential equation. Maximumprinciple. Sufficient condition of optimality. Mean-variance portfolio.

الملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة مبدأ الحد الأقصى لنوع من نظام متقدم و متاخر مع القفز ، ونحصل أيضا على شروط كافية للمثالية. نطبق ناتجتنا لدراسة مشكلة اختيار حافظة محافظ التباين المتوسط مع مشكلة تحسين وظيفة المرافق العددية.

الكلماتالمفتاحية. السيطرة الأمثل. المعادلة التفاضلية الاستوكاستك متقدمة و متاخرة. مبدأ الحد الأقصى. الشروط الكافية المثالية. حافظة التباين المتوسط.