République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

KHIERADDINE ABDESSALEM

Titre :

Sur le contrôle optimal pour les EDSs de type Mckean-Vlasov

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	GHOUL ABDELHAK	UMKB	Président
Dr.	KORICHI FATIHA	UMKB	Encadreur
Dr.	BEROUIS NASSIMA	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail a :

Mes trés chers parents.

Qui veillent sans cesse sur moi avec leurs priéres et leurs recommandations. Que Dieu le tout puissant les protége et leur réserve une longue et meilleure vie.

Mes trés chers fréres et soeurs.

Mes chéres amies.

REMERCIEMENTS

Au seuil de ce mémoire, je remercie ALLAH tout puissant de me donner la patience, la

santé et le courage pour finir ce travail.

Je remercie ma encadreur Dr. KORICHI FATIHA, d'avoir accepté

de diriger ce projet et pour sa disponibilité. Tout au long de la réalisation de ce mémoire

pour ses encouragements, et ses précieux conseils.

Mes remerciements les plus distingués sont adressés aux membres du jury

Dr. GHOUL ABDELHAK et DR. BEROUIS NASSIMA

qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'évaluer ce modeste travail.

Enfin, je adresse mes plus sincères remerciements a tous mes proches et amis, qui nous

ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Le problème de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications, dans tout les domaines utilisant les applications des mathématiques surtout la finance, par exemple les problèmes d'investissements et de consommations dans un marché, le taux de fluctuation en bourse, etc........

Dans ce travail, nous sommes intéressés aux problèmes de contrôle optimal stochastique pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type $MCKEAN - VLASOV$, qui consiste a minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \psi(x^u(T), \mathbb{P}_{x^u(t)})\right]$$

avec $x^u(t)$ est une solution en t d'un système contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases}$$

où $W(.)$ est un mouvement Brownien, $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ x^{-1}$ disigne la loi de la variable aléatoire x, les applications f, σ sont des fonctions déterministes données.

Notre objectif est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités. Nous supposons que le domain du système est convexe. Cette étude est basé sur le travail de Pr. Hafayed Mokhtar, Pr. Deniz Hasan Gucoglu, et Sahlar Meherrem.

Nous présentons notre travail comme suite :

Le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour notre système.

Le deuxième chapitre contient l'essentielle de ce travail, nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type $MCKEAN-VLASOV$.

Et dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum au problème de sélection de portefeuille moyen variance.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles en théorie du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement brownien, l'intégrale stochastique, processus d'Itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastiques et les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

1.1 Processus stochastique

Dans cette section, nous discutons des processus stochastique. Il s'agit de familles des variables aléatoires qui jouent un important rôle dans l'étude des phénomènes aléatoires. Nous passerons en quelques processus aux propriétés particulièrement intéressantes

Définition 1.1.1 *Soit I un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique une famille des variables aléatoires $\{X_t; t \in I\}$ indexée par I, et définie sur l''espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valeurs dans un espace mésurable (E, B), qu'on appelle espace d'états.*

1/ Pour t fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.

2/ Pour ω fixé, $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction réelle, appellée trajectoire du processus.

Remarque 1.1.1

-Si $I \subseteq \mathbb{N}$,on dit que le processus est à temps discret .

-Si $I \subseteq \mathbb{R}$,on dit que le processus est à temps continu .

- Dans la suite, nous noterons variable aléatoire par v.a.

Définition 1.1.2 *soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle filtration un collection $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Donc, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$*

- L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$ sera appelé un espace de probabilité filtré.

- Un processus $\{X_t; t \in I\}$ est dit adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

- La filtration naturelle d'un processus $\{X_t; t \in I\}$ est $\left\{\mathcal{F}_t^X; t \in I\right\}$ telle que

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq t).$$

- Un processus $X = (X_t)_{t \in I}$ est dit à des trajectoires continues (processus continu) si :

$$P(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega)\}) = 1 \ .$$

1.1.1 Processus de Markov

Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit de Markov si pour tout $0 \leq s < t$, et tout filtration borélienne et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$E\left[f(X_t)\left|\mathcal{F}_s^X\right.\right] = E\left[f(X_t)\left|X_s\right.\right] \quad \text{(presque sûrement)}$$

avec $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq s)$.

1.1.2 Temps d'arrêt

Définition 1.1.3 *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est un v.a $T : \Omega \to [0, +\infty]$ telle que :*

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega\left|T(\omega) \leq t\right.\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0.$$

Pour tout temps d'arrêt t, on définie :

$$\mathcal{F}_T = \left\{A \in \mathcal{F}\left|A \cap \{T \leq t \leq\} \in \mathcal{F}_t\right. ,\forall t \geq 0\right\} \ .$$

1.1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.1.4 *Un <u>mouvement Brownien</u> est un processus stochastique $(W_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues dont les accroissements disjoints sont indépendants,*

et $\forall s > 0$, $(W_{t+s} - W_t) \sim N(0, s)$.

Si de plus, $W_0 = 0$, alors $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

- Si X_t est de la forme suivant :

$$X_t = X_0 \exp(ut + \sigma W_t),$$

on dit que X_t est une mouvement Brownien *géométrique.*

- On peut montrer (Yong et Zhou, 1999)$\lfloor p.$ 30-32$\rceil$ que les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement (p.s) nulle part différentiables, c'est à dire que :

$$P(\left\{\omega \in \Omega \middle| \lim_{h \to 0} \frac{W_{t+h}(\omega) - W_{t-h}(\omega)}{h} = \infty \right\}) = 1.$$

de plus, la fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ n'est pas p.s. à variation bornée.

1.2 L'intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô)

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^T X_t dW_t \tag{1.1}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $(W_t)_{t \geq 0}$ pourrait par example représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $(X_t)_{t \geq 0}$ la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur.

L'intégrale (1.1) est alors le gain réalisé à l'horizon T. La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. $\int_0^T (aX_1 + bX_2)(s)dW(s) = a\int_0^T X_1(s)dW(s) + b\int_0^T X_2(s)dW(s)$.
2. $E\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right) = 0$.
3. $E\left[\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right)^2\right] = E\left(\int_0^T X(s)^2 ds\right)$ (iséométrie d'Itô).
4. $E\left[(\int_0^T X_1(s)dW(s))(\int_0^T X_2(s)dW(s))\right] = E(\int_0^T X_1(s)X_2(s)ds)$.
5. $E\left(\int_0^t X(s)dW(s)\,|\mathcal{F}_u\right) = \int_0^u X(s)dW(s)$ (propriété martingale).

1.2.2 Processus d'Itô

Rappelons que S^1 désigne l'ensemble des processus intégrables, S^2 est l'ensemble des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ tels que :

$$E\left(\int_0^T X^2(s)ds\right) < \infty.$$

Définition 1.2.1 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô s'il existe X_0, $Y \in S^1$ et $Z \in S^2$ tels que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s ds + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Théorème 1.2.1 ***(formule d'Itô)***

- Soit f une fonction continument différentiable deux fois et W_t un mouvement Brownien standard. On posse :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

- Pour tout t, on a :

$$df(t, X_t) = \left[f_t(t, X_t) + b(t, X_t)f_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)^2 f_{xx}(t, X_t)\right]dt$$
$$+ \sigma(t, X_t)f_x(t, X_t)dW_t,$$

où f_t, f_x et f_{xx} sont les dérivées partielles.

- Soit W_t un mouvement Brownien standard, et

$$dX_t = X_t dW_t$$

et on pose $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tels que :

$$f(x) = \ln x.$$

On a donc

$$f_t(X_t) = 0, \ \ f_x(X_t) = \frac{1}{X_t}, f_{xx}(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}.$$

D'après la formule d'Itô :

$$d(\ln X_t) = X_0 \exp(-\frac{1}{2}t + W_t).$$

On reconnaît là, un mouvement Brownien géométrique.

1.3 Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique adapté à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est intégrable, M est une :*

- sous martingale si : $\forall s \leq t, \quad E(M_t \,|\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

- sur martingale si : $\forall s \leq t, \quad E(M_t \,|\mathcal{F}_s) \leq M_s$

- martingale si : $\forall s \leq t \quad E(M_t \,|\mathcal{F}_s) = M_s$.

- Un mouvement Brownien W_t est une martingale.

- Le processus $\{W_t^2 - t\}$ est une martingale.

Théorème 1.3.1 *(représentation des martingales)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien.

Soit M_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adapté, alors il existe un processus Z_t tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s.$$

1.4 Variation quadratique

Soit M_1 et M_2 deux martingales, et $n \in \mathbb{N} : t_1 < \cdots < t_n = t$, une partition de $[0, t]$ telle que $\max\limits_{1\leq i\leq n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$, alors on pose :

$$\langle M_1, M_2\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (M_1(t_i) - M_1(t_{i-1}))(M_2(t_i) - M_2(t_{i-1})),$$

$\langle M_1, M_2\rangle_t$ s'appelle la covariation quadratique de M_1 et M_2.

On définit ainsi la variation quadratique d'une martingale M_t :

$$\langle M\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_{t_i} - M_{t_{i\text{-}1}},$$

et dans le cas de mouvement Brownien standard $\langle W\rangle_t = t$.

1.5 Équations différentielles stochastiques (EDSs)

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.5.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la* *forme :*

$$\begin{cases} dX_t = u(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où

* X_0 *est de* $\mathbb{R}^n$.

* W_t *est un mouvement Brownien.*

* $u(t, X_t)$ *et* $\sigma(t, X_t)$ *sont des fonctions continues.*

Définition 1.5.2 *Une solution forte de l'EDS (1.2) est un processus* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *continu,* $\mathcal{F}_t$*-adapté, et tel que :*

$$\begin{cases} \int_0^t |u(s, X)|^2 + |\sigma(s, X)|^2 \, ds < \infty. \\ X \;\; \textit{vérifie} \quad (1.2). \end{cases}$$

1.5.1 Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte

On rappelle que $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que

$$E(|X|^p) < \infty, \quad (p \geq 1).$$

Théorème 1.5.1 *Si les fonctions* $u(t, X(.))$ *et* $\sigma(t, X(.))$ *sont Lipchitziennes, c'est à dire qu'il existe* $M > 0$ *tel que :*

$$\begin{cases} |u(t, x(.)) - u(t, y(.))| \leq M \, |x(.) - y(.)| \, , \\ |\sigma(t, x(.)) - \sigma(t, y(.))| \leq M \, |x(.) - y(.)| \, , \end{cases}$$

et si de plus

$$|u(t, X(.))| + |\sigma(t, X(.))| \in L^2([0, T]; \mathbb{R}),$$

alors pour tout $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$*, il existe une solution fort* X *de (1.2) qui vérifie :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^p) \leq L_t(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p)), \\ \mathbb{E}(|X_t - X_s|^p) \leq L_t(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p)) \, |t - s|^{\frac{p}{2}} \, , \end{cases}$$

$\forall s, t \in [0, T]$*,* $L_T \in \mathbb{R}^*_+$*. D'autre part on suppose qu'il existe* $\hat{X}$ *une autre solution de (1.2), et tel que* $\hat{X}_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^n)$*.*

Alors pour tout $T > 0$, il existe $L_T > 0$ tel que :

$$E(\sup_{0\leq s\leq T} \left|X_s - \hat{X}_s\right|^p) \leq L_t(1 + \mathbb{E}(\left|X_0 - \hat{X}_0\right|^p)).$$

- Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou,1999).

Exemple 1.5.1 *L'équation de Black scholies, voir (Pandry wilson,* 2010*)⌊p. 8-9⌉*

1.5.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (ED-SRs)

les équations différentielles stochastiques rétrogrades (car la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée), sont introduites par Bsmut (1973) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng (1990) dan le cas général, en abrégé EDSR, apparaissent dans de nombreux problèmes en finance.

Selon les auteurs sus-cités, une solution d'un EDSR, est un couble de processus adaptés (Y, Z) satisfaisant :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t' dW_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{1.3}$$

où Z' est la transposée de Z.

Théorème 1.5.2 *On suppose que :*

$*$ f *est uniformément Lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe* $C > 0$ *tel que :*

$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)\ \forall(y_1, z_1), \forall(y_2, z_2).$

$*$ $f(., 0, 0)$ *est de caré integrable, c'est à dire :*

$\mathbb{E}(\int_0^T |f(., 0, 0)|^2 \, dt) > \infty.$

$*$ $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, *c-à-d* $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty.$
alors, il existe une paire de processus adapté (Y, Z) *qui satisfait l'EDSR (1.3).*

Preuve. *Voir (El Karoui et Mazliak,* 1997*).* ■

1.6 Classes des contrôle

1.6.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus $u(t)$ où $t \in [0; T]$ mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$.

Notons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles :

$$U = \{u : [0, T] \times \Omega \to A, \text{ tel que } u \text{ est mésurable } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}.$$

1.6.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U.

On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal si

$$J(\hat{u}) \leq J(u) \forall u \in U.$$

1.6.3 Contrôle Feed-Back

Soit $u(t)$ un contrôle $\mathcal{F}_t$-adapté, et soit $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendrée par le processus X.

On dit que $u(t)$ est un contrôle Feed-Back si $u(t)$ est aussi adapté par rapport la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$.

On dit aussi qu'un contrôle u est Feed-Back si et seulement si u dépend de X.

Chapitre 2

Conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités

Dans ce chapitre, nous étudions les conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type $MCKEAN - VLASOV$.

2.1 Formulation du problème

Dans ce travail, nous étudions un problème général de contrôle optimal stochastique pour des systèmes gouvernés par EDSs de type $MCKEAN - VLASOV$ contrôlée de la forme :

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $W(.)$ est un mouvement Brownien à une dimension défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ x^{-1}$ disigne la loi de la variable aléatoire x, les applications $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2(\mathbb{R}^d) \times U \to \mathbb{R}$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2(\mathbb{R}^d) \times U \to \mathbb{R}^{d \times n}$, sont des fonctions déterministes, où $Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'espace de toutes les mesures de probabilité μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathrm{R}^d))$ avec un second moment fini, *ie* $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(dx) < \infty$, doté avec la métrique 2-Wassertien suivant :

pour $\mu, \upsilon \in Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$\mathbb{W}_2(\mu, \upsilon) = \inf\left\{\left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2 \rho(dx, dy)\right]^{\frac{1}{2}}; \rho \in Q_2(\mathbb{R}^d), \rho(., \mathbb{R}^d) = \mu, \rho(\mathbb{R}^d, .) = \upsilon\right\}.$$

Le système stochastique de type $MCKEAN-VLASOV$ (2.1) est très générale, dans le sens où la dépendance des coefficients a la loi de la solution $\mathbb{P}_{x^u(t)}$ pourrait être véritablement non linéaire en tant qu'élément de l'espace des mesures de probabilité.

Le tout attendu à minimiser la fonction de coût sur la classe du contrôle admissible est égalment de type $MCKEAN - VLASOV$, qui est a la forme :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \psi(x^u(T), \mathbb{P}_{x^u(t)})\right] \tag{2.2}$$

où $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}; \psi : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes. Le but est trouver un processus $\mathcal{F}_t-$adapté $u^*(.)$ qui minimiser la fonction de coût J.

Pour tout contrôle admissible $u^*(.)$ satisfait :

$$J(u^*(.)) = \min_{u(.) \in U} J(u(.))$$

est appelé contrôle optimal.

Soit $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ l'espace Hilbert de produit intérieur $(x \cdot y)_2 = \mathbb{E}[x \cdot y]$, où $x, y \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ et la norme :

$$\|x\|_2 = [(x \cdot y)_2)]^{\frac{1}{2}}$$

On note par $\mathbb{L}^p_{\mathcal{F}}([0.T], \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des processus $\mathcal{F}$-adaptés tel que $x(.) \in [0, T]$

et

$$\|x\|_p = \mathbb{E}\left[\int_0^T |x(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nous rappelons maintenant brièvement, l'outille principal utilisé pour prouver le résultat principal.

La différentiablilité par rapport au mesure de probabilité. l'idée principale est d'identifier un distribution $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ avec la variable aléatoire $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ tel que $\mu = \mathbb{P}_z$.

Plus précisément, on suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suffisamment riche au sens que pour chaque $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$.

Il existe un variable aléatoire $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = \mathbb{P}_z$(par exemple l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$, où dx est la mesure de Borel) satisfait cet propriété.

Tou au long de cet travail, nous considérons le problème de contrôle stochastique $MCKEAN - VLASOV$ du type suivant.

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x_t, \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases}$$

.Soit $T > 0$ un nombre réels strictement positive fixé, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé, satisfaisant les conditions usuelles, dans lequel les mouvements Browniens d-dimensionnels $W(t) = \{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ et $W(0) = 0$ sont définis.

Nous supposons qu'il existe un sous-σ-champ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, tel que le mouvement Brownien $W(.)$ est independent de $\mathcal{F}_0$, et $\mathcal{F}_0$ est assez riche,

$$\text{ie.} \;\; Q_2(\mathbb{R}^d) = \left\{\mathbb{P}_z; \;\; z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)\right\}.$$

Par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, on note la filtration engendrée par $W(.)$, complétée est augmentée par $\mathcal{F}_0$.

Pour tout fonction $f : Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, on défini la fonction $\tilde{f} : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\tilde{f}(z) := f(\mathbb{P}_z); z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d).$$

Clairement, la fonction $\tilde{f}$ est appelée la portance de f, ne dépend que la loi de z, et indépendant du choix de représentant z.

Définition 2.1.1 *une fonction $f : Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\mu_0 \in Q_2(\mathbb{R}^d)$, s'il existe $z_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ avec $\mu_0 = \mathbb{P}_{z_0}$.*

De plus précisément, il existe une fonction linéaire continue $\mathbf{D}\tilde{f}(z_0) : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z_0 + \xi) - \tilde{f}(z_0) &= \langle \mathbf{D}\tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle + O(\|\xi\|_2) \\ &= \mathbf{D}_\xi \ f(\mu_0) + O(\|\xi\|_2). \end{aligned}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit dual en $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$.

Nous avons appelé $\mathbf{D}_\xi \ f(\mu_0)$ comme dérivée de Fréchet de f en μ_0 dans la direction ξ.

Alors on obtenu :

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_\xi \ f(\mu_0) = \langle \mathbf{D}\tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle = \frac{d}{dt}\tilde{f}(z_0 + t\xi)\Big|_{t=0}, \\ &\textit{avec} \quad \mu_0 = \mathbb{P}_{z_0} \end{aligned}$$

On appliquant le théorème de représentation de Reisz, il existe un variable unique $\Theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\langle \mathbf{D} \ \tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle = (\Theta_0 \cdot \xi)_2 = \mathbb{E}\left[(\Theta_0 \cdot \xi)_2\right],$$

où $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$.

Il a été montré (voire les travaux de Buckdahn et al[11] et Carmona et al[26]), qu'il existe une fonction de Borel $h\left[\mu_0\right] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, dépendant uniquement de la loi $\mu_0 = \mathbb{P}_{z_0}$, mais pas de le choix particulier de représentant z_0 tel que :

$$\Theta_0 = h\left[\mu_0\right](z_0).$$

On peut écrire :

$$f(\mathbb{P}_z) - f(\mathbb{P}_{z_0}) = (h\left[\mu_0\right](z_0) \cdot z - z_0)_2 + O\left(\|z - z_0\|_2\right),\ \forall z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d).$$

On note

$$\partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, x) = h\left[\mu_0\right](x), x \in \mathbb{R}^d.$$

de plus, nous avons les identités suivants :

$$\mathbf{D}\tilde{f}(z_0) = \Theta_0 = h\left[\mu_0\right](z_0) = \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, z_0).$$

Et

$$\mathbf{D}_\xi\ f(\mathbb{P}_{z_0}) = \langle \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, z_0) \cdot \xi \rangle,$$

où $\xi = z - z_0$.

Remarque 2.1.1 *pour chaque* $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d), \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}) = h\left[\mu_0\right](\cdot)$ *n'est défini que dans un sens* $\mathbb{P}_z(dx)$, *où* $\mu = \mathbb{P}_z$.

Nous rappelons maintenant brièvement une notion important de la théorie du champ-moyen, à savoir la différentiable par rapport au mesures de probabilité.

Dans l'ouvre de Cardalaiguet (voir les travaux de Buckdahn et al[25] *et Carmona et al*[26] *pour plus discussion).*

Définition 2.1.2 (2) (espace de fonctions différentiables sur $Q_2(\mathbb{R}^d)$) *On dit que la fonction* $f \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$, *si pour tout* $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$, *il existe un* $\mathbb{P}_z$-

modification de $\partial_\mu f(\mathbb{P}_z, \cdot)$ *tel que :*

$$\partial_\mu f : Q_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

est borné et Lipchitz continu, c'est à dire pour un $C > 0$, *il tient que :*

1) $|\partial_\mu f(\mu, x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}^d$,
2) $|\partial_\mu f(\mu_1, x_1) - \partial_\mu f(\mu_2, x_2)| \leq C(\mathbb{W}_2(\mu_1, \mu_2) + |x_1 - x_2|), \forall \mu_1, \mu_2 \in Q_2(\mathbb{R}^d), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,

Nous tenons á souligner que la version de $\partial_\mu f(\mathbb{P}_z, \cdot), z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$, indiqué dans la *définition* 2.1.2 est unique (voir la remarque (2.2) dans les travaux de Bukdahn et al[11] et les travaux da Cardalaiguet pour plus discussion).

Maintenant, soit $\mathbb{U}_1$ une sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}$, soit U_1 une classe de processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}_1$.

Comme l'objectif de ce travail est d'étudier le contrôle optimal stochastique, nous donnons ici la définition de la contrôle optimale admissible.

Définition 2.1.3 (3) *Un contrôle* $u(\cdot)$ *est dit admissible si :*

i) $u(\cdot) \in \mathbb{U}_1$.

ii) $x(\cdot)$ *est l'unique solution de l'équation (2.1).*

iii) $g, \psi \in \mathbb{C}_b^{1.1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

On note par U_1 l'ensemble de tout les contrôles admissibles.

Hypothèse (H1) Tout au longe de ce travail , nous supposons ce qui suite :

Les fonctions : $f, \sigma, g : [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U}_1 \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont mesurables dans toutes les variables.

De plus, pour tout $u \in \mathbb{U}_1, f(\cdot, \cdot, u), \sigma(\cdot, \cdot, u) \in \mathbb{C}_b^{1.1}(Q_2(\mathbb{R}^d), \mathbb{R})$.

Plus précisément, si $\Gamma(x, \mu) = f(x, \mu, u), \sigma(x, \mu, u), g(x, \mu, u), \psi(x, \mu)$, la fonction Γ satisfaite les propriétés suivantes :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\Gamma(x, \cdot) \in \mathbb{C}_b^{1.1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$.
2) Pour $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ fixé, $\Gamma(\cdot, \mu) \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R})$.
3) Tout les dérivés $\partial_x\Gamma, \partial_\mu\Gamma,$ pour $\Gamma = f, \sigma, g, \psi$ sont bornés et Lipschitz continus, où les constantes Lipschitz sont independantes de $u \in \mathbb{U}_1$.
4) Les fonctions : f, σ et g sont continuellment différentiables par rapport á la variable du contrôle $\mu,$ et toutes leur dérivées $\partial_u f, \partial_u \sigma$ et $\partial_u g$ sont continues et bornés.

Clairement, dans la l'hypothèse (H1), la dynamique $Mckean-Vlasov$ a une solution fort unique $x^u(t)$, qui donnée par :

$$x^u(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s))dW(t).$$

(voir les travaux de Carmona et al[26] et Buckahn et al[25])

Puis par l'arguments standards, il facile de montrer que pour tout $n > 0$, il tient que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |x^u(t)|^m\right] < k(m).$$

où $k(m)$ est constante dépendent uniquement de m et la fonctionnelle J est bien définie.

Soit $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}_1$ un contrôle optimale et le processus d'état correspondant $x^{u^*}(.)$, et la solution de la dynamique $Mckean - Vlasov$ (2.1) sont noté par $x^*(\cdot) = x^{u^*}(\cdot)$.

2.2 Equations adjointes

Soit $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\right)$ une copie de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour toute couble de variables aléatoires $(z, \xi) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$,

nous laissons $(\hat{z}, \hat{\xi})$ une copie indépendant de (z, ξ) défini sur $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\right)$. Nous considérons l'espace de produit de probabilité $\left((\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F} \times \hat{\mathcal{F}}, \mathbb{P} \times \hat{\mathbb{P}}\right)$ et réglage $(\hat{z}, \hat{\xi})(\omega, \hat{\omega}) = (z(\hat{\omega}), \xi(\hat{\omega}))$ pour tout $(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \hat{\Omega}$.

Soit $(\hat{u}^*(t), \hat{x}^*(t))$ un copie independant de $(u^*(t), x^*(t))$ de sort que $\mathbb{P}_{\hat{x}^*(t)} = \hat{\mathbb{P}}_{x^*(t)}$.

Nous désignons par $\hat{\mathbb{E}}$ l'espérance sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$. Nous disignons pour $\phi = f, \sigma, g, \psi$ ce qui suite :

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_\mu(t) &:= \partial_\mu \phi(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \hat{x}^*(t)). \\
\hat{\phi}^*_\mu(t) &:= \partial_\mu \phi(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t)).
\end{aligned}$$

Nous définissons l'Hamiltonien habituel au problème du contrôle stochastique de champ-moyen (2.1) et (2.2) comme suite :

pour tout $(t, x, \mu, u, \Phi, \mathsf{Q}) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U}_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$H((t, x, \mu, u, \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t})) = \Phi(t) f(t, x, \mu, u) + \mathsf{Q}(\mathsf{t}) \sigma(t, x, \mu, u) + g(t, x, \mu, u), \quad (2.3)$$

où $(\Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,et donné par l'équation différentielle stochastique arrière de champ (2.4) ci-dessous.

2.2.1 L'équation adjointe imliquée dans le principe du maximum

Nous introduisons l'équation adjoint impliquée dans le principe du maximum stochastique pour notre problème du contrôle :

$$\begin{cases} -\mathsf{d}\Phi(t) & = (f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\Phi(t) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\hat{\Phi}(t)\right] \\ & \quad +\sigma_{xx}(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\mathsf{Q}(\mathsf{t}) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \sigma(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\hat{\mathsf{Q}}(\mathsf{t})\right] \\ & \quad +g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu g(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\right])dt - \mathsf{Q}(\mathsf{t})\mathsf{dW}(\mathsf{t}) \\ \Phi(T) & = \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(t)}) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}; x^*(t))\right] \end{cases} \tag{2.4}$$

(voir le travail de Buckdahn et al[28] pour plus discussion)

on a :

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \phi(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\right] = \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \phi(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); y)\right]_{y=x^*(t)}$$

pour $\phi = f, \sigma, g, \psi$, si nous dénotons par $\mathcal{H}(t) := H(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))$, alors l'équation adjointe peut être récrite comme suivante :

$$\begin{cases} -\mathsf{d}\Phi(t) = \left\{\mathcal{H}_x(t) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \mathcal{H}(t)\right]\right\} dt - \mathsf{Q}(\mathsf{t})\mathsf{dW}(\mathsf{t}) \\ \Phi(T) = \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(t))\right]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Clairement, sou l'hypothèse (C1), l'équation adjointe (2.4) admet une seule solution forte, et $\mathcal{F}_t$-adapté $(\Phi(.), \mathsf{Q}(.)) \in (\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}))^2$ (voir letravail de Buckdahn et al[11]) telle que :

$$E\left[\sup_{s\leq t\leq T} |\Phi(t)|^2 + \int_0^T |\mathsf{Q}(t)|^2 \, dt\right] \leq +\infty.$$

2.3 Conditions nécéssaires pour un contrôle optimal

Dans cette section, nous développons la condition necéssaire d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontrayagin pour le contrôle optimal stochastique, où le systéme est gouvernés par une dynamique de $Mckean - Vlasov$ contrôlée non linéaire. La preuve de notre resultat est basée sur le dérivée par rapport a la mesure de probabilité est donée dans la *section* 2, avec la formule d'Itô correspondante la méthode de dualité.

Le premier resultat principale de cete travail est énoncé dans le théorème suivante :

Théorème 2.3.1 (1) *Soit* $(u^*(t), x^*(t))$ *une solution optimale de problème de contrôle (2.1) et (2.2). Que la condition (C1) soit maintenue. Alors, il existe un paire unique de processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté* $(\Phi(.), \mathsf{Q}(.))$ *solution de l'équation adjointe (2.4) telle que pour tout* $u \in \mathbb{U}_1$:

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))(u(t) - u^*(t))dt\right] \tag{2.6}$$

Remarque 2.3.1 *Sous l'hypothèses de théorème* 1, *il existe un paire unique de processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté* $(\Phi(.), \mathsf{Q}(.))$ *solution de l'équation (2.4) telle que :*

pour tout $u \in \mathbb{U}_1$*,et* $t \in [0, T]$:

$$0 \leq H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))(u(t) - u^*(t))dt, \mathbb{P}\text{-}p.s$$

Nous avons besoin des résultats suivantes, que nous devons traduire en notre problème de contrôle $Mckean - Vlasov$.

Soit $(u^*(t), x^*(t))$ la solution optimale du problème de contrôle (2.1) et (2.2), notre résultat est prouvé en plusieurs étapes en utilisant le fait que :

$$J(u^{\theta}(.)) - J(u^{*}(.)) \geq 0, \tag{2.7}$$

où $u^{\theta}(.)$ est le <u>perturbation convexe</u> de $u^{*}(.)$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$u^{\theta}(t) = u^{*}(t) + \theta \left[u(t) - u^{*}(t)\right],$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit, et $u(.)$ est un élément arbitraire de $\mathbb{U}_1$. Nous soulignons que la convexité de $\mathbb{U}_1$ a pour conséquence que $u^{\theta}(t) \in \mathbb{U}_1$.

Soit $x^{\theta}(.) = x^{u^{\theta}}(.)$ est la solution de l'équation (2.1) correspondant au contrôle admissible.

Lemme 2.3.1 *Laissez l'hypothèse (C1),nous avons obtient :*

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| x^{\theta}(t) - x^{*}(t) \right|^{2} \right] = 0$$

Preuve. À partir d'estimation standard et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{0 \leq s \leq t} \left|x^{\theta}(s) - x^{*}(s)\right|^{2}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))\right|^{2} ds\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - \sigma(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))\right|^{2} ds\right] \end{aligned}$$

En appliquant les conditions de Lipchitz sur les coefficients f, σ par rapport à x, μ

et u, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^\theta(t)-x^*(t)\right|^2\right] & \leq k_T\mathbb{E}\left[\int_0^t(\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2+\left|\mathbb{W}_2(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)})\right|^2)ds\right] \\ & +k_T\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t(\left|u^\theta(s)-u^*(s)\right|^2)ds\right]\end{aligned} \tag{2.8}$$

Rappelons que pour la métrique 2-Wassarstein, nous avons :

$$\mathbb{W}_2(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)})\leq\left[\mathbb{E}\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

À partir de (2.8) et (2.9) nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^\theta(t)-x^*(t)\right|^2\right]\leq k_T\mathbb{E}\left[\int_0^t\sup_{\alpha\in[0,s]}\left|x^\theta(\alpha)-x^*(\alpha)\right|^2ds\right]$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, le résultat souhaité suite immédiatement en laissant θ aller à *zéro.*

■

Lemme 2.3.2 *Soit $\phi(t)$ la solution de système $Mckean-Vlasov$ suivant :*

$$\begin{cases} d\phi(t) & =(f_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\phi(t)+\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);\hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)\right] \\ & +f_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t)))dt \\ & +(\sigma_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\phi(t)+\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu\sigma(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);\hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)\right] \\ & +\sigma_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t)))dt, \\ \phi(0) & =0,\end{cases} \tag{2.10}$$

ensuite, l'estimation suivant tient :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\left|\frac{x^\theta(t)-x^*(t)}{\theta}-\phi(t)\right|^2\right]=0 \tag{2.11}$$

Preuve. On appliquant la condition (C1), l'équation (2.10) admet une solution unique, nous mettons :

$$\vartheta^{\theta}(t) = \frac{x^{\theta}(t) - x^{*}(t)}{\theta} - \phi(t), \quad t \in [0, T]$$

de puis $\mathbf{D}_{\xi}\ f(\mathbb{P}_{z_0}) = \langle \mathbf{D}\tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle = \frac{d}{dt}\tilde{f}(z_0 + t\xi)\Big|_{t=0}$, nous avons la forme simple suivante da la développement de Taylor :

$$f(\mathbb{P}_{z_0+\xi}) - f(\mathbb{P}_{z_0}) = \mathbf{D}_{\xi} f(\mathbb{P}_{z_0}) + T(\xi),$$

où $T(\xi)$ est d'ordre $O(\|\xi\|_2)$ avec $O(\|\xi\|_2) \to 0$ pour $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\vartheta^{\theta}(t) \;&= \tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[f(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[\sigma(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - \sigma(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] dW(s) \\
&- \textstyle\int_0^t (f_x(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))\phi(s) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_{\mu} f(s, \hat{x}^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, \hat{u}^{*}(s); \hat{x}^{*}(s))\hat{\phi}(s) \right] \\
&+ f_u(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))(u(s) - u^{*}(s)))ds \\
&+ \textstyle\int_0^t (\sigma_x(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))\phi(s) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_{\mu} f(s, \hat{x}^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, \hat{u}^{*}(s); \hat{x}^{*}(s))\hat{\phi}(s) \right] \\
&\sigma_u(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s))(u(s) - u^{*}(s)))dW(s)
\end{aligned}$$

Nous décomposons $\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] ds$ dans les parties suivantes :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[f(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] ds \\
&= \tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[f(s, x^{\theta}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{\theta}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{\theta}(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta}\textstyle\int_0^t \left[f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{\theta}(s)) - f(s, x^{*}(s), \mathbb{P}_{x^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] ds
\end{aligned}$$

Nous remarquons que :

$$\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))-f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))\right]ds$$
$$=\int_0^t\int_0^t \left[f_x(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^\theta(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))(\gamma^\theta(s)+\phi(s))\right]d\lambda ds$$

et

$$\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))-f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s))\right]ds$$
$$=\int_0^t\int_0^t \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^\theta(s)+\phi(s))},u^\theta(s);\hat{x}^*(s))((\hat{\gamma}^\theta(s)+\hat{\phi}(s))\right]$$

et

$$\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s))-f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s))\right]ds$$
$$=\int_0^t\int_0^t \left[f_u(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)+\lambda\theta(v(s)-u^*(s))(v(s)-u^*(s))\right]ds$$

La relation analogique est valable pour σ. Par conséquence nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right]\\
&\leq k(t)(\mathbb{E}\textstyle\int_0^t\int_0^1\left|f_x(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^\theta(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s))\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+\mathbb{E}\textstyle\int_0^t\int_0^1\hat{\mathbb{E}}\left|\partial_\mu f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat{\gamma}^\theta(s)+\hat{\phi}(s))},u^\theta(s);\hat{x}^*(s))\hat{\gamma}^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+\mathbb{E}\textstyle\int_0^t\int_0^1\left|\sigma_x(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^\theta(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s))\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+\mathbb{E}\textstyle\int_0^t\int_0^1\hat{\mathbb{E}}\left|\partial_\mu \sigma(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat{\gamma}^\theta(s)+\hat{\phi}(s))},u^\theta(s);\hat{x}^*(s))\hat{\gamma}^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds\\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|\eta^\theta(s)\right|^2\right]).
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque les dérivées de f et σ par rapport à (x,μ,u) sont Lipchitz continues en (x, μ, u), on obtient :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\eta^\theta(s)\right|^2\right] = 0.$$

Puisque les dérivées de f et σ par rapport à (x, μ, u) sont bornées, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right] \leq k(t)\left\{\mathbb{E}\int_0^t \left|\gamma^\theta(s)\right|^2 ds + \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\eta^\theta(s)\right|^2\right]\right\}.$$

On appliquant le lemme de Gronwall, alors pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right] \leq k(t)\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\eta^\theta(s)\right|^2\right] \exp\left\{\int_0^t k(s)ds\right\}$$

Enfin, mettre $t = T$ et laisser θ aller à 0 :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right] = 0.$$

d'où

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\left|\frac{x^\theta(t) - x^*(t)}{\theta} - \phi(t)\right|^2\right] = 0.$$

■

Lemme 2.3.3 *Pour tout $u(.) \in \mathbb{U}_1$, on a :*

$$\begin{aligned} 0 \; &\leq \mathbb{E}\left\{\left[\psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) + \hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu \psi(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}))\right]\phi(T)\right. \\ &+ \int_0^T \left[g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t) + \hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu g(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t)))\phi(t)\right. \\ &+ \left.\left. + g_u(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t))(u(t) - u^*(t))\right] dt\right\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve. De (2.2) et (2.7), on a :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq J(u^\theta(t)) - J(u^*(t)) \\
&= \mathbb{E}\left[\psi_x(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^\theta(T)}) - \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^\theta(t)}, u^\theta(t)) - g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\right] dt \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[g(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t)) - g(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\right] dt\right] \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

On commencer par :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}\left[\psi_x(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^\theta(T)}) - \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\psi_x(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^\theta(T)}) - \psi_x(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) - \psi_x(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) + \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^1 \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}; x^*(T)\right] \theta(\hat{\gamma}^\theta(T) - \hat{\phi}(T)) d\lambda \\
&+ \mathbb{E}\int_0^1 \left[\psi_x(x^*(T) + \lambda\theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \theta(\hat{\gamma}^\theta(T) + \hat{\phi}(T)) d\lambda
\end{aligned}
$$

Par conséquence :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^\theta(t)}, u^\theta(t)) - g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\right] dt \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^\theta(t)}, u^\theta(t)) - g_x(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\right] dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t)) - g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\right] dt \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^\theta(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}, u^\theta(t))\right] \theta(\hat{\gamma}^\theta(T) + \hat{\phi}(T)) d\lambda dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 g_x(t, x^*(t) + \lambda\theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t)) \theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)) d\lambda dt
\end{aligned}
$$

De même pour I_3

$$
I_3 = \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 g_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t)) \theta(v(t) - u^*(t)) d\lambda dt
$$

À partir de (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \mathbb{E}\int_0^1 \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu\psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))};x^*(T)\right]\hat{\phi}(T)d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^1\left[\psi_x(x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T)),\mathbb{P}_{x^*(T)})\right]\hat{\phi}(T)d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^\theta(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))},u^\theta(t))\right]\hat{\phi}(T)d\lambda dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 g_x(t,x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T)),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\phi(T)d\lambda dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 g_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)+\lambda\theta(v(t)-u^*(t))\theta(v(t)-u^*(t))d\lambda dt+\mathbf{B}_\theta(t)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_\theta(t) \quad &= \mathbb{E}\int_0^1\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu\psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))};x^*(T)\right]\hat{\gamma}^\theta(T)d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^1\left[\psi_x(x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T)),\mathbb{P}_{x^*(T)})\right]\gamma^\theta(T)d\lambda \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^\theta(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))},u^\theta(t))\right]\hat{\gamma}^\theta(T)d\lambda dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 g_x(t,x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T)),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\gamma^\theta(T)d\lambda dt
\end{aligned}$$

A partir de (2.11), on voit que $\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\gamma^\theta(t)\right|^2\right]=0$.

De plus, puisque les dérivée de ψ et g par rapport à (x,μ,u) sont bornées, on a :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{B}_\theta(t)=0 \tag{2.15}$$

Enfin, à partir de (2.11), (2.14) et (2.15), et la continuité de Lipschitz des dérivées avec le fait que $u^\theta(t)\to u^*(t)$ comme $\theta\to 0$, alors (2.12) est rempli. Précédement :

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \mathbb{E}\Big\{\Big[\psi_x(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)})+\hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu\psi(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}))\Big]\phi(T) \\
&+\int_0^T\Big[g_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\phi(t)+\hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu g(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t)))\phi(t) \\
&+\ +g_u(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t))(u(t)-u^*(t))\Big]dt\Big\}
\end{aligned}$$

■

2.4 Conditions suffisantes pour un contrôle optimal

le but de cette section est de dériver des conditions suffisantes pour un contrôle optimal stochastique pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type $MCKEAN - VLASOV$, nous prouvons que sous certaines conditions de convexité sur l'Hamiltonien et sur la fonction ψ, les conditions nécessaires deviennent également suffisantes pour l'optimalité.

Une fonction $f : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ est convexe, si pour tout $(x, \mu), (x', \mu') \in \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}^d)$,

$$f(x', \mu') - f(x, \mu) \geq f_x(x, \mu)(x' - x) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(x, \mu)(X' - X)\right],$$

où $\mu = \mathbb{P}_X$ et $\mu' = \mathbb{P}_{X'}$, nous imposons l'hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1) les fonctions $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $H(t, \cdot, \cdot, \cdot, \Phi, \mathbf{Q})$:$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}_1 \to \mathbb{R}$ satisfait :

$$\psi \text{ est convexe par rapport à } (x, \mu). \tag{2.16}$$

$$H \text{ est convexe par rapport à } (x, \mu, u) \tag{2.17}$$

Théorème 2.4.1 *Soit $v(\cdot)$ un contrôle admissible, et $x^v(\cdot), (\Phi^v(\cdot), \mathbf{Q}^v(\cdot))$ la solution de (2.1) et (2.5), respectivement, correspondant à $v(\cdot)$.*

Que l'hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiées, supposons que le contrôle $v(\cdot)$ vérifie que pour tout $u(\cdot) \in \mathbb{U}_1$:

$$0 \leq \mathbb{E} \int_0^T H_u(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t), \Phi^v(t), \mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))(u(t) - v(t))dt. \tag{2.18}$$

Alors, $v(\cdot)$ est un contrôle optimal, qui réalise :

$$J(v(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathbb{U}_1} J(u(\cdot)).$$

Preuve. Pour tout $u(\cdot) \in \mathbb{U}_1$ et d'après (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) &= \mathbb{E}\left[\psi(x^u(T), \mathbb{P}_{x^u(T)}) - \psi(x^v(T), \mathbb{P}_{x^v(T)})\right] \\ &+ \int_0^T \left[g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t)) - g(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t))\right] dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) &\geq \mathbb{E}\left[(\psi(x^v(T), \mathbb{P}_{x^v(T)}) + \hat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}; x^*(t))\right])(x^u(t) - x^v(t))\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t)) - g(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t))\right] dt \end{aligned} \tag{2.19}$$

Maintenant, on noté par :

$$\begin{aligned} x^u(t) - x^v(t) &= \int_0^t \left[f(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s)) - f(s, x^v(s), \mathbb{P}_{x^v(s)}, v(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s)) - \sigma(s, x^v(s), \mathbb{P}_{x^v(s)}, v(s))\right] dW(s). \end{aligned}$$

et en utilisant la formule d'intégration par partie à $\Phi^v(t)(x^u(t) - x^v(t))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Phi^v(T)(x^u(T) - x^v(T))\right] &= \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t) d(x^u(t) - x^v(t)) + \mathbb{E}\int_0^T (x^u(t) - x^v(t)) d\Phi^v(t) \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t)\left[\sigma(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t)) - \sigma(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t))\right] dt \\ &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

où :

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t) d(x^u(t) - x^v(t)) \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t)\left[f(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t)) - f(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t))\right] dt. \end{aligned}$$

A partir de (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} L_2 &= \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t)(x^u(t)-x^v(t))d\Phi^v(t) \\ &= -\mathbb{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))\left[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right. \\ &\left.+\hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu H(t,\hat{x}^v(t),\mathbb{P}_{\hat{x}^v(t)},\hat{v}(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t});\mathsf{x}^*(t)))\right]dt. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$L_3 = \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t)(\sigma(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t)))dt - \mathbb{E}\int_0^T \Phi^v(t)\sigma\left((t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t))\right)dt \tag{2.21}$$

En combinant (2.20)-(2.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\Phi^v(T)(x^u(T)-x^v(T))\right] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T (H(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})) \\ &-H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})))dt \\ &-\mathbb{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))\left[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right. \\ &\left.+\hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu H(t,\hat{x}^v(t),\mathbb{P}_{\hat{x}^v(t)},\hat{v}(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t});\mathsf{x}^*(t)))\right]dt \\ &-\mathbb{E}\int_0^T g(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t))dt \\ &+\mathbb{E}\int_0^T g(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t))dt \end{aligned} \tag{2.22}$$

A partir de (2.19) et (2.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &J(u(\cdot))-J(v(\cdot)) \\ &\geq \mathbb{E}\int_0^T (H(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})) \\ &-H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})))dt \\ &-\mathbb{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))\left[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right. \\ &\left.+\hat{\mathbb{E}}(\partial_\mu H(t,\hat{x}^v(t),\mathbb{P}_{\hat{x}^v(t)},\hat{v}(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t});\mathsf{x}^*(t)))\right]dt \end{aligned} \tag{2.23}$$

D'après (2.17) et (2.23), on obtient :

$$J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \geq \mathbb{E}\int_0^T H(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t), \Phi^v(t), \mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))(u(t) - v(t))dt. \quad (2.24)$$

Puisque le contrôle $u(\cdot)$ est un élément arbitraire de l'ensemble $\mathbb{U}_1$, et qu'en combinant (2.18) et (2.24), on obtient :

$$J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \geq 0\,; \quad \text{pour tout } u(\cdot) \in \mathbb{U}_1.$$

Ceci complète la preuve du théorème. ∎

Chapitre 3

Problème de sélection de portefeuille moyen variance

Dans cette section, nous appliqons notre principe d'optimalité maximale nécessaire et suffisant pour étudier un problème de sélection de portefeuille à moyenne-variance.

Et nous dérivons l'expression explicite de la stratégie optimale de sélection de portefeuille.

Supposons qu'on nous donne une marché mathématique composé de deux investissements possibles :

Bond : le premier actif est un titre sans risque dont le prix $R_0(t)$ évolue selon l'équation différentielle ordinaire :

$$dR_0(t) = \gamma(t)R_0(t)dt, \quad t \in [0, T], \; R_0(0) > 0, \tag{3.1}$$

où $\gamma(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction déterministe, continue, localment borné.

stock : le second est un titre risqué où le prix $R_1(t)$ au temps t est donné par :

$$dR_1(t) = \varsigma(t)R_1(t)dt + \sigma(t)R_1(t)dW(t), \quad R_1(t) > 0, \tag{3.2}$$

Afin de garantir que $R_1(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$, nous supposons que les fonctions $\varsigma(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}$ et $\sigma(\cdot)\, [0, T] \to \mathbb{R}$, sont des fonctions déterministes continues bornées telle que :

$$\varsigma(t), \sigma(t) \neq 0 \text{ et } \varsigma(t) - \gamma(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit $x^u(0) = x_0$ une richesse initiale et $G > 0$.

En combinant (3.1) et (3.2), nous introduisons cette dynamique de richesse :

$$\begin{cases} dx^u(t) = \gamma(t)x^u(t)dt + u(t)\left[(\varsigma(t) - \gamma(t))dt + \sigma(t)dW(t)\right] \\ x^u(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Ici, $\gamma(t)$ est le taux d'intérêt, $\varsigma(t)$ est le rendement excédentaire, et $\sigma(t)$ est la volatilité du cours d'action.

Le problème de moyenne-variance consiste à minimiser une fonction de coût de la forme :

$$J(u) = \frac{\delta}{2} Var(x^u(T)) - \mathbb{E}(x^u(t)).$$

Pour certains $\delta > 0$, avec une dynamique du processus de richesse $x^u(t)$ contrôlée par le montent.

Par simple calcul, nous montrons que :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\frac{\delta}{2} x^u(t)^2 - x^u(t)\right] - \frac{\delta}{2}\mathbb{E}(\mu^*(T)).$$

où $\mu^*(T) = \mathbb{E}(x^\mu(T))$. Soit $\mathbb{U}_1$ un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}$. on note $\mathbb{U}_1$ comme l'ensemble des stratégies de porte feuille $\mathcal{F}_t-$prévisible admissible et $u(.)$ valorisée en $\mathbb{U}_1$. Le Hamiltonien fonctionnel (2.3) obtient :

$$H(t,x,\mu,u,\Phi,\mathsf{Q}) = [\gamma(t)x(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))u(t)]\,\Phi(t) + \sigma(t)u(t)\mathsf{Q}(\mathsf{t}).$$

Selon la condition maximale (2.6), *théoreme* 1, et puisque $u^*(t)$ est optimal, on obtient immédiatment :

$$(\varsigma(t) - \gamma(t))\,\Phi^*(t) + \sigma(t)\mathsf{Q}^*(\mathsf{t}) = 0. \tag{3.4}$$

Par conséquent, l'équation adjointe devient :

$$\begin{cases} d\Phi^*(t) = -\gamma(t)\Phi^*(t)dt + \mathsf{Q}^*(\mathsf{t})dW(t) \\ \Phi^*(t) = \delta(x^*(t) - \mu^{x^*}(t)) - 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\psi(x,\mu) = \frac{\delta}{2}x^2 - x - \frac{\delta}{2}\mu^2$.

Afin de résoudre l'équation (3.5) et de trouver l'expression de la stratégie de portefeuille optimale $u^*(.)$, nous conjecturons un processus $\Phi^*(t)$ sous la forme :

$$\Phi^*(t) = y_1(t)x^*(t) + y_2(t)\mu^{x^*}(t) + y_3(t), \tag{3.6}$$

où $y_1(.)$, $y_2(.)$ et $y_3(.)$ sont des fonctions déterministes différentiables, notons qu'à partir de (3.3), on obtient

$$d\mu^x(t) = [\gamma(t)\mu^x(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))\,\mathbb{E}(u(t))]\,dt.$$

En appliquant la formule d'Itô à (3.6), en vertu de l'EDS (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} d\Phi^*(t) &= y_1(t)\left\{\left[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,u^*(t)\right]dt + \sigma(t)u^*(t)dW(t)\right\} + x^*(t)y_1'(t)dt \\ &\quad + y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^x(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,\mathbb{E}(u(t))\right]dt + \mu^{x^*}(t)y_2'(t)dt + y_3'(t)dt \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $y_1'(t)$, $y_2'(t)$ et $y_3'(t)$ designent respectivement les dérivées de $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$ par rapport à t, Par conséquent, à partir de (3.7), on obtient :

$$\begin{cases} d\Phi^*(t) &= \left\{y_1(t)\left[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,u^*(t)\right] + x^*(t)y_1'(t)\right. \\ &\quad \left.+\ y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^x(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,\mathbb{E}(u(t))\right] + \mu^{x^*}(t)y_2'(t) + y_3'(t)\right\}dt \\ &\quad + y_1(t)\sigma(t)u^*(t)dW(t) \\ \Phi^*(t) &= y_1(T)x^*(T) + y_2(T)\mu^{x^*}(T) + y_3(T) \end{cases} \tag{3.8}$$

En suite, en comparent (3.8) à (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned} -\gamma(t)\Phi^*(t) &= y_1(t)\left[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,u^*(t)\right] + x^*(t)y_1'(t) \\ &\quad y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^x(t) + (\varsigma(t)-\gamma(t))\,\mathbb{E}(u^*(t))\right] + \mu^{x^*}(t)y_2'(t) + y_3'(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

et :

$$\mathsf{Q}^*(t) = y_1(t)\sigma(t)u^*(t)$$

En regardant la condition terminale de $\Phi^*(t)$, en (3.8) , en conclut que :

$$y_1(T) = \delta\ ,\ y_2(T) = -\delta\ ,\ et\ y_3(T) = -1.$$

en combinant (3.6) et (3.9), on déduire que $y_1(.)$, $y_2(.)$ et $y_3(.)$ satisfont l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\gamma(t)y_1(t) \ , \ y_1(T) = \delta \\ y_2'(t) = -2\gamma(t)y_2(t) \ , \ y_1(T) = -\delta \\ y_3'(t) = -\gamma(t)y_3(t) + y_1(t)(\gamma(t) - \varsigma(t))u^*(t) + y_2(t)(\gamma(t) - \varsigma(t))\mathbb{E}\left[u^*(t)\right] \\ y_3(T) = -1. \end{cases} \tag{3.10}$$

En résolvant les deux premières équations différentielles ordinaires en (3.10), on obtient :

$$y_1(t) = -y_2(t) = \delta \exp\left\{2\int_t^T \gamma(s)ds\right\}. \tag{3.11}$$

En conbinant (3.4), (3.8), (3.9) et (3.11), on obtient :

$$u^*(t) = \frac{(\gamma(t) - \varsigma(t))}{\sigma(t)^2}(x^*(t) - \mu^{x^*}(t) + \frac{y_3(t)}{y_1(t)}).$$

la valeur attendue du contrôle $u^*(t)$ est :

$$\mathbb{E}\left[u^*(t)\right] = \frac{(\gamma(t) - \varsigma(t))}{\sigma(t)^2}\frac{y_3(t)}{y_1(t)}. \tag{3.12}$$

Ainsi, il résulte de la troisième équation en (3.10), et avec (3.12) que :

$$\begin{aligned} y_3'(t) &= -\gamma(t)y_3(t) \ , \ t \in [0, T] \\ y_3(T) &= -1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$y_3(t) = -\exp\left\{\int_t^T \gamma(s)ds\right\}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, les conditions nécessaires et suffisantes du contrôle optimal pour la dynamique générale contrôlée de Mckean-Vlasov ont été dérivées.

La dérivée du processus de résolution par rapport à la mesure de probabilité et une formule d'Itô correspondante on été appliquées pour établir nos résultats

une question ouverte est d'établir les conditions d'optimalité sous la forme de Pontriaguine pour ces problèmes de contrôle pour le domaine de contrôle non convexe.

La principale caractéristique de ces résultats est de résoudre explicitement certains nouveaux problèmes mathématiques financiers, en particulier, les problèmes de suivi optimal avec impact sur les prix et la sélection de portefeuille moyenna-variance conditionnelle dans un modèle de marché incomplet.

Apparemment, il y a beaucoup des problèmes non résolu, et un problème possible et d'étudier les conditions d'optimalité du contrôle optimal pour une dynamique stochastique Mckean-Vlasov contrôlée. La méthode sera basée sur l'utilisation d'un version de contrôle de l'Hamiltonien. Il est certain que ces problèmes intéressants seront résolus dans un proche avenir.

Bibliographie

[1] D. Andersson and B. Djehiche, A maximum principle for sdes of mean-field type, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 3, 341-356.

[2] F. Chighoub, B. Djehiche and B. Mezerdi, The stochastic maximum principle in optimal control of degenerate diffusions with non-smooth coefficients, Random Operators and Stochastic Equations 17 (2009), no. 1, 37-54.

[3] J. Yong and X. Y. Zhou, Stochastic controls : Hamiltonian systems and hjb equations,vol. 43, Springer Science & Business Media, 1999.

[4] M. Hafayed, A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal stochastic control. Commun math stat . 2014 ; 1(4) :417-435.

[5] M. Hafayed, A. Abba, S. Abbas. On partial-information optimal control problem for mean-field stochastic differential equations driven by Teugels martingales measures. Internat J control.2016 ; 89(2) :397-410.

[6] M. Hafayed. H.G Deniz. M. Sahlar. On optimal singular control problem for general Mekean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions, Optimal Contol Applications and Methods, January 2018.

[7] R. Buckdahn, B. Djehiche, J. Li and S. Peng, Mean-Öeld backward stochastic differential equations : A limit approach, The Annals of Probability 37 (2009), no. 4, 1524-1565.

[8] X. Y. Zhou and D. Li, Continuous-time mean-variance portfolio selection : A stochastic lq framework, Applied Mathematics and Optimization 42 (2000), no, 1, 19-33.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	*Espace de probabilité.*
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	*Espace de probabilité filtré.*
$W(t)$	*Mouvement Brownien*
EDS	*équation différentielle stochastique.*
$EDSR$	*équation différentielle stochastique rétrogrede.*
$B(\mathbb{R}^d)$	*Tribu Borélienne sur* $\mathbb{R}^d$.
$J(.)$	*La fonction de coût.*
$\hat{u}$	*Contrôle optimal.*
U	*Ensemble des contrôles admissibles.*
$\mathbb{E}$	*Espérence par rapport á la probabilité* $\mathbb{P}$.
$u^\theta(t)$	*Contrôle perturbé.*
$\mathbb{R}^d$	*Espace réel ecludienne de dimension* d.
$H(t, x, \mu, p, q)$	*Hamiltonien.*
$\langle ., . \rangle$	*Le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^d$.
$P - p.s$	*presque surement pour la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$

RESUME

Dans ce travail, nous avons présenté un problème de contrôle optimal stochastique ou le système est gouverné par une EDS de type Mekean-Vlasov. Notre objectif est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les systèmes gouverné par les EDSs de type Mekean-Vlasov, en utilisant ces résultats pour résoudre un problème de sélection de portefeuille moyenne variance.

Mots clés:

Contrôle optimal stochastique, Équations différentielles stochastique, EDS de type Mekean-Vlasov, conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités.

ABSTRACT

IN this work, we are present the problem of stochastic where the system is governed by a stochastic equation with Mekean-Vlasov. Our objective is to study the necessaries and sufficient conditions of optimality for EDSs type Mekean-Vlasov.

Using these results to solve a mean-variance portfolio selection problem.

Keywords:

Stochastic control optimal, Stochastic differential equation, EDSs with Mekean-Vlasov, .Necessary and sufficient optimality conditions.

ملخـــص

في هذا العمل، نتطرق إلى مشكلة التحكم الأمثل العشوائي حيث يتم التحكم في النظام بواسطة معادلة تفاضلية عشوائية من نوع ميكين فلاصوف. هدفنا هو دراسة الشروط الضرورية والكافية للحل الأمثل لهذا النوع من المعادلات.

وعلى سبيل المثال، استخدمنا هذه النتائج لحل مشكلة اختيار محفظة التباين المتوسط.

الكلمات المفتاحية:

التحكم العشوائي، المعادلة التفاضلية العشوائية، المعادلة التفاضلية لميكين فلاصوف، الشروط الضرورية والكافية للمثالية.