République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Rahmani Yasmine

Titre :

Quelque étude numérique sur les problèmes elliptiques

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Radjeh Fouzia**	UMKB	Président
Dr.	**Tabrha Ouarda**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Kaci Fatima**	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

*Je dédie ce hu*Je dédie ce modeste travail à ma chère mère.

À mon cher père qui m'ont toujours soutenu.

À mes chères sœurs.

À tous mes distingués professeurs, sans exception pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

À mon meilleur ami.

À tous ce qui mon amie et à tous ce qui ma donne l'aide et l'encouragement de prés ou de loin.

REMERCIEMENTS

J'*aimerais en premier lieu remercier mon dieu* ***Allah*** *qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,*

j'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à ma superviseure

Dr.Tabrha Ouarda *, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques.*

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Dr.Radjeh Fouzia *d'avoir accepté la présidence du jury.*

Dr.Kaci Fatima *d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.*

Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail

Yasmine

Table des matières

Table des figures

Introduction

Une équations aux dérivée partielles (E.D.P) est une équation dont l'inconue est une fonction et portant sur les dérivée partielle de cette fonction

Si on note $u : \mathbb{R}^n(\text{ou } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$x \to u(x)$$

alors l'équation s'écrit sous la forme

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \ldots, D^pu(x))$$

avec n et p des entiers strictement positifs donnés et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^p}$ est une fonction donnée. L'entier p est appelé l'ordre de l'EDP

L'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématique des méthodes et leur mise en oeuvre, et son objectif est de concevoir et d'étudier des moyens pour donner des solutions approcheés à des problèmes mathematiques

Mon mémoire intitulé quelque étude numérique sur le problème elliptique

Notre travail est divisé en deux chapitres commençons par :

Dans le premier chapitre, en génerale les équations ordinaires et équations aux dérivées partielles et Developpement de Taylor et la méthodes numérique (on choisi les méthodes des différences finies et volumes finis avec la conclusion)

Dans le deuxième chapitre, on présenté une étude détaille sur quelques application de la méthode de différences finies sur les problème elliptique (équation de Laplace)

Chapitre 1

Géneralités et Méthodes Numériques

1.1 Équation différentielles ordinaires

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit l'application

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, y) \to f(t, y)$$

Une équation différentielle (vectorielle) du premier ordre,est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

On utilsera souvent la notation : $y' = f(t, y)$. Le lecteur peut s'il le désire utiliser d'autres notations ainis que d'autres variables comme par exemple :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\, ou \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

etc, nous les utiliserons en cas de besoin dans d'autres chapitres.

Définition 1.1.1 *Étant donné un point* $(t_0, y_0) \in \Omega$, *le probléme de Cauchy (relatif aux conditions initiales* (t_0, y_0) *) pour l'équation*

$$y\acute{}(t) = f\,(t, y)\,,$$

consiste à chercher une solution $y\,(t)$ *sur un intervalle* I *contenant* t_0 *telle que :*$y\,(t_0) = y_0$

Proposition 1.1.1 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *une fonction dont le graphe est inclus dans* Ω *.Alors la fonction* y *est solution du problème de Cauchy*

$$y\acute{} = f\,(t, y)\,, y\,(t_0) = y_0$$

Si et seullement si elle est continue et vérifie l'équation intégrale

$$y\,(t) - y\,(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(\tau, y\,(\tau))\, d\tau, \forall t \in I.$$

La solution y *de l'équation différentielle ci -dessus étant continue , on en déduit que* $f\,(\tau, y\,(\tau))$ *est aussi continue. En intégrant les deux membres de l'équation différentielle de* t_0 *à* t, *on obtient*

$$y\,(t) - y\,(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\,(\tau, y\,(\tau))\, d\tau.$$

Définition 1.1.2 *On dit que la fonction* $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une solution de l'équation différentielle d'ordre* n *:*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right),$$

Si elle est dérivable n fois et si

$$\forall t \in I, \left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), ..., y^{(n-1)}\left(t\right)\right) \in \Omega$$

$$et$$

$$y^{(n)}\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right), y\acute{}(t), ..., y^{(n-1)}\left(t\right)\right).$$

étant donné $\left(t_0, y_0, y\acute{}_0, ..., y_0^{(n-1)}\right) \in \Omega$ *le problème de Cauchy concernant cette équation consiste à trouver une solution telle que :*

$$y\left(t_0\right) = y_0, y\acute{}(t_0) = y\acute{}_0, ..., y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)}.$$

L'équation ci -dessus est dite sous forme normale (ou résolu en $y^{(n)}$).

Proposition 1.1.2 *Tout équation différentielle d'ordre n sous forme normale peut être ramenée à un système de n équation du premier ordre sous forme normale*

1.2 Équations aux dérivées partielles

Le caractére particulier d'une équation aux dérivée partiellers (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieur variable

$$(x, y, ...) \rightarrow u\left(x, y, ...\right).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

Dérivées partielles

On introduira au fur et à mesure équelques notions sur les fonction de plusieurs variables réelles on se limite pour les énoncés au cas de fonction de deux variables

, mais les notions qui suivent se généralisent facilement aux fonction de n variables réelles , n est un entier quelconque (supérieur à 2). Pour le moment nous n'examinons que les propriétés des applications partielles associées à une telle fonction f

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle applications partielles associées à f en (x_0, y_0) les deux applications de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}$ abtenues en figeant l'une des variables

$$f_1 : x \to f_1(x) : f := (x, y_0)$$

et

$$f_2 : y \to f_2(y) := f(x_0, y)$$

La notion de dérivée partivées partielles du 1^{er}ordre

Équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre

Définition 1.2.1 *Une équation dans la quelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, ..., x_n$ et des dérivées partielles du 1^{er}ordre de f par rapport à ces variables,c'est -a-dire une équation de la forme*

$$F\left(x_1, ...x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

est dit une équation aux dérivées partielles (en abrégé :EDP) du 1^{er} ordre.

Toute fonction $f(x_1, ..., x_n)$ qui satisfait indentiquement à cette équation est une solution de celle -ci.

Dans la suite ,on utilisera souvent à la place de f les notations u ou z

Dans le cas de deux variable x, y,on a

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Équation aux dérivées partielles du $2^{ème}$ ordre

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction de deux variables x et y. on appelle équation aux dérivées partielles du $2^{ème}$ ordre , une relation de la forme*

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = g\left(y\right),$$

d'où

$$f\left(x, y\right) = xg\left(y\right) + h\left(y\right).$$

Où g et h sont des fonctions arbitraires.

Remarque 1.2.1 *La solution d'une équation aux dérivées partielles du $2^{ème}$ ordre dépent de deux fonctions arbitraires*

Les opérateurs différentiels

On introduit tout d'abord quelques opérateurs différentiels qui interviennent dans les équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.2.3 ***"Le gradiant"*** *soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.Le gradiant de u noté par ∇u ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ est donné par :*

$$\nabla u\left(x\right) = \left(\frac{\partial u}{x_1}\left(x\right), ..., \frac{\partial u}{x_n}\left(x\right)\right)^t.$$

Définition 1.2.4 "Le Laplacien" *soit u une fonction de classe $C^2(\Omega)$, on définit le Laplacien de u par :*

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$$

Définitions et propriétés des EDP

Définition 1.2.5 *Une équation aux d'érivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction et partant sur les dérivées partielles de cette fonction. Si on note*

$$u : \mathbb{R}^n \,(ou \quad \Omega) \to \mathbb{R}$$
$$x \to u(x)$$

alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$F\left(x, u(x), Du(x), D^2u(x)...D^pu(x)\right) = 0 \tag{1.1}$$

avec n et p sont des entiers strictement pàsitifs donnés et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times ... \times \mathbb{R}^{n^p}$ est une fonction donnée.

Définition 1.2.6 ***L'ordre d'une EDP*** *L'ordre d'une edp est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'edp.*

Définition 1.2.7 ***La dimension d'une EDP*** *La dimension d'une edp est le nombre de variables indépendantes de la fonction inconnue u.*

Remarque 1.2.2 *L'équation 1.1 est une edp d'ordre p et de dimension n.*

Définition 1.2.8 ***"Les edp's linéaires, quasi-linéaires, non linéaires "***

1.On dit qu'une edp est **linéaires** si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la varaible dépendante.

2.On dit qu'une edp est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.

3.En dehors des critères cités ci dessus l'edp est non linéaire.

1.2.1 Classification des EDP

On distingue trois grandes catégories d'équation aux d'érivées partielles :

1. Les équation de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par :
$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \tag{1.2}$$
pour tout $x = (x_1.....x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée ,et l'inconnue est la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$.
2. Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0 \tag{1.3}$$
3. Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont :

$i/$Léquation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \tag{1.4}$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

$ii/$L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0 \tag{1.5}$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$ et a un réel donné.

1.2.2 Conditions initiales et Conditions frontières

Comme pour les équations différentielles ordinaires, lorsque l'équation aux dérivées partielles dépend du temp, il faut spécifier les conditions au temps initial $t = t_{0.}$

1/Condition initiale :

Si u est une fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$(par exemple les équations 1.3,1.4,1.5 on donne

$$u(x, t_0) = \Phi_0(x) \text{ ou } D^p u(x, t_0) = \Phi_p(x),$$

ce type de condition est appelé condtions de Cauchy.

La notion de conditions aux limites est spécifique aux équations aux dérivées partielles.Elle consiste à donner des condition au bord du domaine sur lequel est posée L'EDP.

2/**Condition aux bord :**

si u est une fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,on trois types de contraintes :

i/**Condition de Dirichlet :**Où u est fixé sur le bord de Ω :

$$u/\partial\Omega = f,$$

(f est une fonction donnée).

ii/**ConditionsdeNeumann :**Où la dérivée normale u est fixé

$$\left(\frac{\partial u}{\delta \overrightarrow{n}}\right)/\partial\Omega = g,$$

(g est une fonction donnée).

$iii/$**Condition de Fourier ou de Robin (ou mixte) :**

$$c(x)\, u + \widetilde{c}(x) \frac{\partial u}{\partial n} = h$$

Sur $\partial\Omega$, où h est une fonction donnée.

Si f, g est h sont toutes des fonctions nulles on dit que les conditons aux bord définies ci -dessus sont homogénes.

1.2.3 La formulation

Le modèle mathématique est formulé par des équation aux dérivées partielles et des conditions aux limites qui garantissent l'unicité de la solution , donc le fonctionnement du systéme physique . Nous nous intéressons particulièrement aux différents types d'équations du second ordre , à deux variables indépendantes x et y , de la physique mathématique écrites sous la forme générale :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \tag{1.6}$$

où $u = u(x, y)$ est la fonction recherchée dépendante de x et y . C'est la fonction qui donne le comportement du modèle . $A, B, ...$et F sont les coefficients de l'equation aux dérivées partielles . Ils sont fonction de x et y et peuvent être des constantes On ne traitera pas les équation non linéaires c'est -à-dire des équations dont les coefficients dépendent de u.

L'équation1.6 peut être réécrite sous la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Selon le signe du déterminant $B^2 - 4AC$ on adopate le classement suivant :

Si $B^2 - 4AC < 0$ l'équation est dite elliptique.

Si $B^2 - 4AC > 0$ l'équation est dite hyperbolique.

Si $B^2 - 4AC = 0$ l'équation est dite prabolique.Quelque exemple sur les équation de second ordre

1.2.4 Quelque Exemple

Equation de la chaleur

Elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivant :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

où t est le temps , u est le température d'un corps et α une constante , c'est une équation parabolique , puis que $B^2 - 4AC = 0$

Equation des ondes :

Elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

C'est une equation hyperbolique puis que $B^2 - 4AC = \frac{4}{c^2} > 0$

Equation de laplace :

Elle est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

C'est une equation elliptique puis que $B^2 - 4AC = -4 < 0$

Exemple 1.2.1 *(l'équation de Laplace).Encoordonnées cartésiennes x, y, z, l'équation de Laplace s'écrit*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que l'on note aussi $\Delta u = 0$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace en coordonnées x, y, z

Exemple 1.2.2 *On a l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

s'appalle équation des ondes.

1.3 Développement de Taylor

1.3.1 Développement en série de Taylor

On montre que si une fonction $f(x)$ est analytique, indéfiniment dérivable au voisinage d'un point $x = x_0$ (c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant le point $x = x_0$, $0 <\mid x - x_0 \mid< R$), alors cette fonction peut être approchée par une fonction polynomiale écrite sous la forme de série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)} + \ldots.. \quad (1.7)$$

Le second membre de l'équation 1.7 est le développement en série de la fonction f au voisinage du point $x = x_0$.

équation 1.7 s'écrit encore

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

1.3.2 Développement limité de Taylor

En fait, dans l'équation 1.7 on ne peut tenir compte que d'un nombre fini de termes : On effectue une troncature de la série. On a donc un développement à termes finis c'est le développement limité de Taylor (appelée aussi formule de Taylor) de la fonction f autour du point $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n \quad (1.8)$$

le dernier terme de l'équation 1.8 est appelé reste ou erreur de troncation, est donné par la formule de Lagrange

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad x - x_0 \leq \xi \leq x + x_0 \quad (1.9)$$

Cette erreur est de l'ordre de grandeur de $(x - x_0)^{n+1}$ et est notée par $\mathrm{O}(x - x_0)^{n+1}$. puisque la fonction est infiniment dérivable $f^{(n+1)}(\xi)$ existe et est bornée. Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, la série converge Ecrite sous la forme 1.9 la formule de Taylor est utlisée pour approcher les fonction par des fonctions polynomiales.

En posant $h = \Delta x = x - x_0$ la formule de Taylor 1.9 devient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f'(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O\left(h^{n+1}\right) \quad (1.10)$$

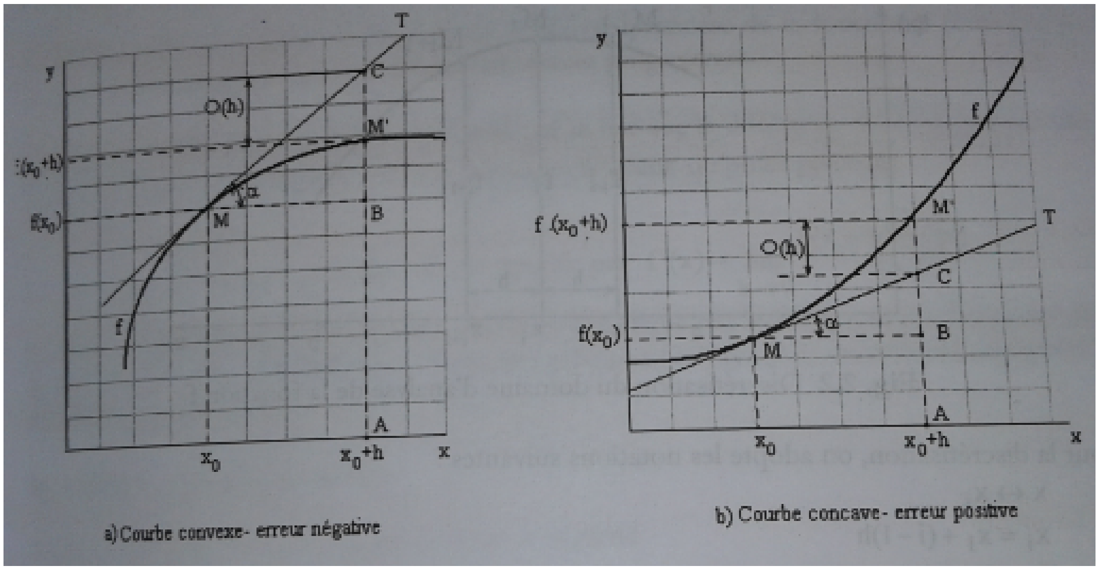

FIG. 1.1 – Interprétation graphique de l'erreur de troncation $O(h)$

l'équation 1.10 montre que l'erreur est donnée par :

erreur $=\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+ ...$ est de l'ordre de h^2, qui s'écrit $O(h^2)$

si h est très petit on a :

$$f\left(x_0+h\right)=T\left(x_0+h\right) \text{ et } O\left(h\right)\rightarrow 0$$

1.4 Méthodes Numériques

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes que rencontre l'ingénieur. Pour passer d'une problème exact continue régit par une EDPau problème approché discrt , il existe trois gramdes famille des méthodes

- **les différences finies :**La méthode consisté à remplacer les derivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeures ponctielles de la fonction en un nombre fini de point discrets ou noeuds du maillage .
- **Les éléments finis :**La méthode consiste à approcher,dans un sous-espace de dimension finie,un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de

dimension infinie .

- **Les volumes finis :**La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation .

1.4.1 Méthodes des D.F

La méthode des différences finies est approcher l'opérateur différentiel (ici $-u\acute{}$) par un quotient différentiel. De manière à en déduire un d'équations en fonction d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de u aux points de discrétisation. Voici comment on procède pour l'équation de Poisson unidimensionnelle. Effectuons d'abord un développement de Taylor en x_i, en supposant que $u \in \mathbb{C}^4\left([0,1]\right)$

$$u\left(x_{i+1}\right) = u\left(x_i\right) + hu\acute{}(x_i) + \frac{h^2}{2}u\acute{}(x_i) + \frac{h^3}{6}u\acute{}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}\left(\varepsilon_i\right)$$

$$u\left(x_{i-1}\right) = u\left(x_i\right) - hu\acute{}(x_i) + \frac{h^2}{2}u\acute{}(x_i) - \frac{h^3}{6}u\acute{}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}\left(\eta_i\right)$$

avec $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. En additionnant , on obtient :

$$u\left(x_{i-1}\right) + u\left(x_{i+1}\right) = 2u\left(x_i\right) + h^2u\acute{}(x_i) + O\left(h^2\right)$$

Il semble donc raisonnable d'approcher la dérivée seconde $-u\acute{}(x_i)$ par

$$\frac{u\left(x_{i-1}\right) + u\left(x_{i+1}\right) - 2u\left(x_i\right)}{h^2}$$

Analyse de la méthode des différences finies

On cherche à discrétiser le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\, u'(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ \\ u(x) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

où c$\in$ $C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion - réaction d'une espèce chimique. On se donne un pas du maillage constant $h = \frac{1}{N+1}$, et une subdivision de $[0, 1[$, notée $(x_k)_{k=0,\dots,N+1}$, avec : $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_N < x_{N+1} = 1$. Soit u_i l'inconnue disscrète associée au noeud i $(i = 1, ..., N)$. On pose $u_0 = u_{N+1} = 0$. On obtient les équations discrètes en approchant $u''(x_1)$ par quotient différentiel par développementde Taylor, comme on l'a vu au paragrphe 1.1.1 page 6. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}\left(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}\right) + c_i u_i = f_i, & i = 1, \dots, N \\ \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

avec $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$. On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$A_h U_h = b_h, \text{ avec } U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \; b_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

et

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+c_Nh^2 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Proposition 1.4.1 *Soit $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_1 \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$; alors la matrice $A_h$définie par 1.14 est symétrique définie positive, et donc inversible*

Preuve. *La matrice A_h est évidemment symétrique. Montrons qu'elle est définie positive. soit $v = (v_1 \dots v_N)$, on pose $v_0 = v_{N+1} = 0$. Calculons le produit scalaireon a :$A_hv \cdot v = v^tA_hv$. On a :*

$$A_hv \cdot v = \frac{1}{h^2}(v_1v_2\dots v_N)\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ 0 & & -1 & 2+c_Nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \\ \\ v_N \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$A_hv.v = \frac{1}{h^2}\left[\sum_{i=1}^{N} v_i\left(-v_{i-1} + \left(2+c_ih^2\right)v_i - v_{i+1}\right)\right].$$

On a donc ,par changement d'indice :

$$A_hv \cdot v = \frac{1}{h^2} = \left[\sum_{i=1}^{N}(-v_{i-1}v_i) + \sum_{i=1}^{N}\left(2+c_ih^2\right)v_i^2 - \sum_{j=1}^{N+1}v_{j+1}v_j\right]$$

Et comme on a posé $v_0 = 0$ et $v_{N+1} = 0$,on peut écrire

$$A_hv \cdot v = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}\left(2+c_ih^2\right)v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(-2v_iv_{i-1}),$$

soit encorere :

$$A_h v \cdot v = \sum_{i=1}^{N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} \left(-2v_i v_{i-1} + v_i^2 + v_{i-1}^2\right) + v_N^2.$$

on a donc finalement :

$$A_h v \cdot v = \sum_{i=1}^{N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} (v_i - v_{i-1})^2 \geq 0, \forall v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$$

si on suppose $A_h v \cdot v = 0$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{N} c_i h^2 v_i^2 = 0 \text{ et } v_i - v_{i-1} = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, N+1.$$

On a donc $v_1 = v_2 = \ldots = v_N = v_0 = v_{N+1} = 0$. Remarquons que ces égalités sont vérifiées même si sont nuls.Ceci démontre que la matrice A_h est bien définie. ■

Lemme 1.4.1 *Si la solution de 1.11 vérifie $u \in \mathbb{C}^4([0,1])$,alors le schéma 1.12 est consistant d'ordre 2, et on a plus precisément :*

$$| R_i | \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} | u^{(4)} |, \forall i = 1, \ldots, N.$$

Preuve. :Par développement de Tanylor, on a :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu\acute{}(x_i) + \frac{h^2}{2} u\acute{}(x_i) + \frac{h^3}{6} u\acute{}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\varepsilon_i)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu\acute{}(x_i) + \frac{h^2}{2} u\acute{}(x_i) - \frac{h^3}{6} u\acute{}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\eta_i)$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient que :

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) - 2u(x_i)\right) = u\acute{}(x_i) + \frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\varepsilon_i) + u^{(4)}(\eta_i)\right)$$

ce qui entraîne que :

$$| R_i | \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} | u^{(4)} |$$

■

1.4.2 Méthode de volumes finis 1D

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème

$$\begin{cases} -u\'(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ \\ u(x) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

Définition 1.4.1 *(Maillage volumes finis) On appelle maillage volumes finis de l'intervalle* $[0,1]$*, un ensemble de* N *mailles* $(K_i)_{i=1,\ldots,N}$*, telles que* $K_i = \left]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right[$*, avec* $x_{\frac{1}{2}} = 0 < x_{\frac{3}{2}} < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \ldots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$*, et on note* $K_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$*. On se donne également* N *points* $(x_i)_{i=1,\ldots,N}$ *situés dans les mailles* K_i*. On a donc*

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \ldots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \ldots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

On notera $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i$*, et* $h = \max x_{i=1,\ldots,N}$*, et pour des questions de notations, on posera également* $x_i = 0$ *et* $x_{N+1} = 1$*.*

On rappelle que pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale obtenue en intégrant l'équation de problème 1.15 sur $K_i = \left]x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}\right[$:

$$-u\'\left(x_i + \frac{1}{2}\right) + u\'\left(x_i - \frac{1}{2}\right) = \int_{K_i} f(x)\, dx$$

On pose $f_i = \frac{1}{h_i} \int\limits_{K_i} f(x)\, dx$, et on introduit les inconnues discrètes $(u_i)_{i=1,\ldots,N}$ et les équations discrètes du schéma numérique :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i,\ i = 1, ..., N \tag{1.16}$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}$ être une approximation raisonnable de $-u^{/}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$. On pose alors :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}},\ i = 1, ..., N$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}},\ F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}}$$

pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u(0) = u(1) = 0$. On peut aussi écrire :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}},\ i = 0, ..., N \tag{1.17}$$

on posant

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \tag{1.18}$$

On peut écrire le système linéaire obtenu sur $(u_1, ..., u_N)$ sous la forme

$$A_h U_h = b_h$$

avec

$$(A_h U_h)_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{-1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) + \frac{-1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(u_i - u_{i-1})\right] b_h \text{ et } (b_h)_i = f_i.$$

Proposition 1.4.2 *(Existence de la solution du schéma volumes finis) Soit $f \in C([0,1])$ et $u \in C^2([0,1])$ solution du problème 1.15. Soit $(K_i)_{i=1,\ldots,N}$ le maillage.*

Alors il existe une unique solution $u_h = (u_1, ..., u_N)$ de 1.16,1.17 et 1.18.

Preuve. Voir[5] ■

1.4.3 Comparaison entre deux méthode

Comparons les deux méthode sur le cas simple précédemment exposé. On choisit comme fonction $f(x) = \sin(\pi x)$. L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -u\'(x) = \sin(\pi x) \ \ , x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique au problème est $u(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$. Notons par un indice '$a$' la solution analytique.

Divisons l'intervalle $]0,1[$ en dix segment réguliers e pas $h = 0.1$. Pour les Différences Finies il y a $N = 9$ noeus de calculs. Et pour la méthode des Volumes Finis, il y a $N = 10$ mailles de calculs.

La solution discrète obtenue avec les D.F est reportée dans figure2.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_i	0.0316	0.06	0.0826	0.09716	0.10216	0.09716	0.0826	0.06	0.0316
$(u_i)_a$	0.0313	0.0595	0.082	0.09636	0.10113	0.09636	0.082	0.0595	0.0313
|erreur|	$9.6\,10^{-3}$	$8.4\,10^{-3}$	$7.3\,10^{-3}$	$8.3\,10^{-3}$	$1\,10^{-2}$	$8.3\,10^{-3}$	$7.3\,10^{-3}$	$8.4\,10^{-3}$	$9.6\,10^{-3}$

FIG. 1.2 – méthode des Différences Finies

La valeur moyenne par maille obtenue avec les Volumes Finis est reportée dans le tableau 2.

Le calcul de la valeur moyenne de $f(x)$ dans la i *ème* maille est : $\tilde{f}_i = f_i \left(\dfrac{\sin \frac{\pi}{2} h}{\frac{\pi}{2} h} \right)$.Notons $(\tilde{u}_i)_a$ la valeur moyenne de la solution analytique calculée sur la i *ème* maille soit :

$$(\tilde{u}_i)_a = \tfrac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)dx = u_i \left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}h}{\dfrac{\pi}{2}h}\right).$$

x_i	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
u_i	0.01589	0.04612	0.07184	0.0905	0.1003	0.1003	0.0905	0.07184	0.04612	0.01589
$(\tilde{u}_i)_a$	0.01585	0.046	0.07164	0.09028	0.1001	0.1001	0.09028	0.07164	0.046	0.01585
$\vert$erreur$\vert$	$2.5\,10^{-3}$	$2.6\,10^{-3}$	$2.8\,10^{-3}$	$2.4\,10^{-3}$	$2\,10^{-3}$	$2\,10^{-3}$	$2.4\,10^{-3}$	$2.8\,10^{-3}$	$2.6\,10^{-3}$	$2.5\,10^{-3}$

FIG. 1.3 – méthode des Volumes Finis

Conclusion 1.4.1 *Les trois méthodes permettent d'obtenir des résultats avec une bonne précision.L'ereur la plus faible est obtenue avec la méthode des Volumes Finis.*

Chapitre 2

Méthode des differences finies pour un problème Elliptique

2.1 Procédure de résolution des problème aux limites par la méthode de D.F.

Selon les étapes suivantes :

1. Construire le maillage du domaine Ω.
2. Transformer l'EDF sous forme de schéma numérique de différences finies.
3. Écrire l'équation de différences finies aux point du maillage.
4. Obtenir le système d'équations algèbriques discrétes $[K] \cdot \{y\} = \{y_c\}$.

   * Tq $\{y_c\}$ est le vecteur connu donné par les conditions aux limites non homoène.

   * $[K]$ est la matrice des coefficients.

   * $\{y\}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.
5. Trouver la solution $\{y\}$ en résolvant le système d'équations $[K] \cdot \{y\} = \{y_c\}$.

2.2 Le problème de Dirichlet

On considère le problème elliptique donné par l'equation de Laplace.

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ , dans } \Omega = rec_{abcd} \tag{2.1}$$

$$\text{Tq } x \in [0, L] \quad \text{et} \quad t \in [0, l] \,.$$

Et les conditions aux limites appliquées sur les frontières du domaine rectangulaire (L, l) (problème de Dirichlet)

$$u\left(x,0\right) = u_{ab\ ,}\ u\left(0,t\right) = u_{ad\ ,}\ u\left(L,t\right) = u_{bc\ ,}\ u\left(x,l\right) = u_{cd.}$$

2.2.1 Le Maillage

Maillage du domaine rectangulaire régulier (données : Δx , Δt , L , l). Le domaine Ω étant à frontière régulière est construit à l'aide des relations :

$$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 \,;\, n = \frac{l}{\Delta t} + 1$$

Le nombre de points m et n selon x et t est donné par les relations connues $m = \frac{L}{\Delta x} + 1 \,;\, n = \frac{l}{\Delta t} + 1$.

2.2.2 Le Schéma Numérique

Les dérivées secondes apparaissant dant l'équation aux dérivées s'écrivent en un point pvot (i, j) de Ω à l'aide d'un schéma de différences centrées :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\left(\Delta x\right)^2} + o\left((\Delta x)^2\right) \text{ avec } o\left((\Delta x)^2\right) = -\frac{\left(\Delta x\right)^2}{12} y^{(4)}\left(\varepsilon, \eta\right)\big|_{(i,j)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{(\Delta t)^2} + o\left((tx)^2\right) \text{ avec } o\left((\Delta t)^2\right) = -\frac{(\Delta t)^2}{12} y^{(4)}\left(\varepsilon, \eta\right)\big|_{(i,j)}$$

Donc :

$$2.1 \Longleftrightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{(\Delta t)^2} = 0$$

En tronquant l'erreur $o\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right)$. On pose : $r = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ donc

$$\frac{\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right] + u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{(\Delta t)^2} = 0$$

Alors

$$ru_{i-1}^j - 2(r+1)\,u_i^j + ru_{i+1}^j + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} = 0$$

On choisit un maillage à pas égaux $\Delta x = \Delta t \Longrightarrow r = 1$. Donc

$$u_{i-1}^j - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} = 0 \tag{2.2}$$

2.2.3 Le système d'équations algébriques

Soit par exemple $m = 5$ et $n = 4$ donc $j = \overline{1,4}$, et $i = \overline{1,5}$. On obtient un maillage de $(m-2)(n-2) = 6$ point pivots (on suppose $r = 1$). Donc d'après les conditions aux limites :

$$u_{i1} = u_{ab}\,, \;\; i = \overline{1,5}$$

$$u_{in} = u_{cd}\,, \;\; i = \overline{1,5}$$

$$u_{1j} = u_{ad}\,, \;\; j = \overline{1,4}$$

$$u_{mj} = u_{bc}\,, \;\; j = \overline{1,4}\,;\, m = 5 \text{ et } n = 4$$

Les équations sont obtenues par le "mouvement" de la molécule quand celle-ci parcourt es différents points pivots du maillage. Pour $j = 2$ et $i = 2, 3, 4$ et par l'equation 2.2 On trouve l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{ab} - u_{ad} \\ -u_{ab} \\ -u_{ab} - u_{bc} \\ -u_{ad} - u_{cd} \\ -u_{cd} \\ -u_{bc} - u_{cd} \end{bmatrix}$$

Soit $[K] . \{y\} = \{y_c\}$

- La matrice $[K]$ est une matrice bande symétrique.
- La dernière étape : résoudre le système d'équations (trouver $\{y\}$). Par exemple par méthode de Gauss-Seidel.

2.2.4 Méthode de Gauss-Seidel

- Soit le système :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = b_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 = b_3 \end{cases}$$

On passe par les étapes suivantes :

- Initialisation : Soit $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ une solution connue à l'étape initiale $k = 0$.

- Pour $k = 1$

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}u_2^{(0)} - a_{13}u_3^{(0)}\right]\\
u_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}u_1^{(0)} - a_{23}u_3^{(0)}\right]\\
u_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}u_1^{(0)} - a_{32}u_3^{(0)}\right]
\end{aligned}$$

- Pour $k = 2$

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}u_2^{(1)} - a_{13}u_3^{(1)}\right]\\
u_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}u_1^{(2)} - a_{23}u_3^{(1)}\right]\\
u_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}u_1^{(2)} - a_{32}u_3^{(2)}\right]
\end{aligned}$$

- Un calcul similaire est obtenu à l'itération $k + 1$ on a :

$$\begin{aligned}
u_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}u_2^{(k)} - a_{13}u_3^{(k)}\right]\\
u_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}u_1^{(k+1)} - a_{23}u_3^{(k)}\right]\\
u_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}u_1^{(k+1)} - a_{32}u_3^{(k+1)}\right]
\end{aligned}$$

Donc en général, soit le système :

$$\begin{cases}
a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + ... + a_{1n}u_n = b_1\\
a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + ... + a_{2n}u_n = b_2\\
...\\
a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + ... + a_{nn}u_n = b_n
\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}u_2^{(k)} - a_{13}u_3^{(k)} - ... - a_{1n}u_n^{(k)}\right] \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}u_j^{(k)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}u_1^{(k+1)} - a_{23}u_3^{(k)} - ... - a_{2n}u_n^{(k)}\right] \\ &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}u_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}u_j^{(k)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}u_1^{(k+1)} - a_{32}u_3^{(k+1)} - ... - a_{3n}u_n^{(k)}\right] \\ &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=4}^{n} a_{3j}u_j^{(k)}\right] \end{aligned}$$

Donc :

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^{(k)}\right]$$

Remarque 2.2.1 *On arrete la calcul lorsque deux valeurs successives de u_i sont suffisamment voisines. On peut utilise les deux critères suivants :*

$$\textit{convergence absolue :} \left|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}\right| \leq \varepsilon$$

$$\textit{convergence relative :} \left|\frac{u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}}{u_i^{(k)}}\right| \leq \varepsilon$$

La convergence ne dépend pas de la solution initiale mais des valeurs des coefficients a_{ij} , la convergence est assurée pour chaque ligne si :

$$a_{ii} \geqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad Tq : i \neq j.$$

2.3 Le problème de Neumann

On considère le problème elliptique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ x \in [0, L] \quad \text{et} \quad t \in [0, l[\end{cases}$$

la condition de Neumann est donnée par :

$$a = \frac{\partial u}{\partial t},\ t = l \text{ et } x \in [0, L]$$

où a est une constante donnée.

2.3.1 Schéma Numérique

On utilise l'équation de différences finies centrées de la dérivées première on a :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(i,j)} = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_i^{(j+1)} - u_i^{(j-1)}\right) = a$$

Donc

$$u_i^{(j+1)} = 2a\Delta t + u_i^{(j-1)}$$

Alors

$$ru_{i-1}^j - 2\,(r+1)\,u_i^j + ru_{i+1}^j + u_i^{j-1} + \left(2a\Delta t + u_i^{(j-1)}\right) = 0$$

Donc

$$ru_{i-1}^j - 2\,(r+1)\,u_i^j + ru_{i+1}^j + 2u_i^{j-1} + 2a\Delta t = 0$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé la différence finie et nous avons utilisé la résolution de problème au moyen de volume finie et différence finie. Nous avons utilisé la méthod de différence finie aussi pour l'équation de Laplace par la condition de Dirichlet et la condition de Neuman.

Bibliographie

[1] Curtis F.Gerald & Patrick O.Wheathley,Applied Numerical Analysis, California Polytechnique State University.

[2] Eric.G,Resolution numérique, descritisation des EDP et EDO,institut national polytechique de grenoble, septembre 2005.

[3] Lesfari, A(2015) :Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles :cours et exercices corrigés.E.É.M.S.A,Paris

[4] Miloud, T.A.(2007) :Méthodes Numérique :Tome 1 Méthode des différences finies, Méthodes intégrale et variationnelles.O.P.U, Alger.

[5] Raphaèle.H, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Engineering school, Marseille, 2011, cel-00637008.

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDO	:	Équations différentielles ordinaires
EDP	:	Équations aux dérivées partielles
$\partial\Omega$	:	le frontière du domaine Ω
∇u	:	Gradient de u
Δu	:	Laplacien de u