République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

HACHANA DOUNIA

Titre :

Résolution des EDP d'ordre 2 linéaire : (Méthode de séparation des variables)

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BERBICHE Mohamed**	UMKB	Président
Dr.	**GUIDAD Derradji**	UMKB	Encadreur
Dr.	**SOLTANI Siham**	UMKB	Examinatrice

juin 2021

Dédicace

Je dédie ce humble travail à **mes parents**.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

En premier lieu, je remercie **mes parents** car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie ma soeur **NARIMAN** .

Je remercie mon amie **TALBI AYOUB**.

Je remercie mon encadreur **GUIDADD Derradji** qui m'a guidé dans mon projet et m'aider à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les professeurs, **BERBICHE MOHAMED** et **SOLTANI Sihame** qui m'ont accepté de présider les jurys de soutenance.

je suis particuliérement reconnaissante envers Pr **ATTAF Abd Alleh** le doyen de ma facultré, sans oublier de remercier tous mes ensiengnants de primaire à l'université.

En fin, je remercie toutes les personnes, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Beaucoup des phénomènes et des problèmes du monde aujourd'hui basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite.

En effet, les équations aux dérivées partielles traduisent par sa langage mathématique des lois des phénomènes en mécanique, la dynamique des fluides, l'élasticité et la météorologie,..., ect. En plus, grâce à la développement technologique l'EDP a utilisé pour traiter des images. Comme conséquence, la physique et la mathématique a une grande relation. Le parole de Poincaré affirme cette relation : " toutes les lois sont tirées de l'expérience, mais, pour les énoncer, il faut un langue spécial ; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis. Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques ; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler". (Poincaré, 1910). On va citer des travaux des grands noms sur les EDP :

Euler écrit en 1765 un mémoire de mathématiques pures consacré à une EDP spécifique. **Lagrange** donne une sorte d'inventaire des EDP rencontrées dans des problèmes physiques et livre des méthodes innovantes d'intégration. Il est moins systématique et « maths pures » dans son étude des EDP. **D'Alembert** va être le seul à, simultanément :

- considérer les EDP hors de tout problème physique.

- entreprendre l'étude de classes très larges d'EDP.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres, **le premier chapitre** contient des définitions de base sur les EDP et en particulier, les EDP d'ordre deux, linéaire. Dans **le deuxieme chapitre**, nous allons détallaier comment trouver la solution de problème par la méthode de séparation des variables . **Le dernier chapitre** est un ensemble des différentes examples qui l'on va chercher les solutions par la méthode de séparation des variables.

Chapitre 1

Généralités sur les équations ordinaires et les équations aux dérivées partielles.

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation reliant une fonction inconnue de plusieurs variables u à ses dérivées partielles. Les EDPs se trouvent dans les applications de la, physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, etc. En effet, dans ces domaines, les phénomènes se modélisent souvent par des systèmes mathématiques impliquant des EDPs. Les différents processus du phénomène se décrivent en déterminant une relation entre u et ses dérivées partielles.

1.1 Equations différentielles ordinaires.

L'exemple le plus simple est lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable. Alors cette relation est décrite simplement par ce qu'on appelle une EDO.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle est une relation de type :*

$$F(x, u(x), u.'(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dirévées de la fonction inconnu u au point x. La fonction F est une fonction de plusieurs variables

$$(x, y, ...) \rightarrow F\,(x, y, ...)$$

où x est dans $\mathbb{R}$ (ou par fois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et $y \rightarrow (y_0, ..., y_n)$ est dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple 1.1.1 *Le mouvement d'un objet sur une droite peut être décrit par l'équation*

$$u^{''}(x) = g(u(x))$$

La variable x correspond au temps et la fonction u correspond à la position de l'objet. Dans ce cas $x \in I \subset \mathbb{R}$ et :

$$\begin{array}{rcl} F : (x, y) & \rightarrow & F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 - g(y_0) \\ \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

1.1.1 Equation aux dirévées partielles

soit $u = u\,(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes au nombre fini. Une EDP pour la fonction u est une relation qui lie :

- Les variables indépendantes $(x, y, ...)$
- La fonction "inconnue" u de variables indépendantes
- Un nombre fini de dérivées partielles de u

$$F\left(x, y, ...u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, ...\right) = 0 \tag{1.1}$$

u est la solution de l'EDP Si, aprés substitution , la relation :

$$F\left(x, y, ...u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x^2}...\right) = 0$$

.est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'éspace des variable independantes.

Définition 1.1.2 *une équation aux dérivées partielles(EDP) est une relation fonctionnelle entre une fonction inconnue u de plusieurs variable* $(u = u(x_1, ...x_n))$ *est ses dérivées* $(x_1, ..., x_n) \in D$*,où D désigne un ouvert de* $\mathbb{R}^n, (n \succ 2)$.

Définition 1.1.3 *on appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus éléve des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.*

Exemple 1.1.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad 1^{er} ordre.$$

Définition 1.1.4 *si u et ses dérivées partielles apparaissant séparament et* $\ll$ *à la puissance 1* $\gg$ *dans l'EDP celle-ci est dit linéaire.*

Exemple 1.1.3 $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad 1^{er} \textit{ordre linéaire.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0 \qquad 1^{er} \textit{ordre non-linéaire.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 2^{éme} \textit{ordre non-linéaire.}$$

Pour une EDP non-linéaire homogéne :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \text{ solution} \\ u_2 \text{ solution} \end{array}\right\} \lambda u_1 + \mu u_2 \text{ est solution.}$$

1.1.2 Quelques équations de la physique mathématique

Equation de transport :

$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ où $u\left(x,t\right)$ est utilisée pour modéliser la polution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic.

Equation de Burgers :

$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ où $u\left(x,t\right)$ est issue de l'étude de la dynamique des gazs.

Equation de des ondes :

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$ où $u\left(x,y;z;t\right)$ est utilisée pour modéliser de petites oscillations, elle joue un grand role dans la dynamique des fluides et dans l'électro-magnetisme.

Equation de la chaleur :

$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$ où $u\left(x,y;z;t\right)$ est utilisée dans l'étude de la conduction thermique

Equation d'Euler-bernoulli :

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ où u(x,t) est utilisée dans la theorie des poutres dans la prochaine sectionon illustre la maniére de dérivation de quelques EDPs citées ci-dessus en utilisant des lois physique

Equation de la place ou du pontentiel :

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ où $u(x,y,z,t)$ apparait notamment dans : astronomie, électro-statique, mécanique des fluides et la mécanique quantique.

EDP linéaire du 1^{er} ordre

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)u=D(x,y) \tag{1.2}$$

est la forme la plus générale pour une EDP linéaire 1^{er} ordre.

Exemple 1.1.4 $\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ *avec* $u=u(x,y)$ *est une EDP* 1^{er} *ordre, linéaire homogène.*

$$\begin{cases} du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \\ =(-ydx+dy)\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

si du et dx sont reliés par $-ydx+dy=0$ alors $du=0$.

u est constante le long des courbes $y=\varepsilon e^{x}$.

la solution générale de $\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ est de la forme :

$$u(x,y)=f(ye^{-x})$$

où $f\in C^{1}(\mathbb{R})$

EDP linéaire du $2^{éme}$ ordre

Définition 1.1.5 *une équation aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre de deux variables x et y est une équation de la forme :*

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+2E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=H(x,y)$$

dont un cas particulier important est celui ou A,B,C,D et F sont des constantes.

Exemple 1.1.5 *donnons quelques exemples fondamentaux d'EDP du second ordre*

Equation de la place :

En dimension n, on cherche $u = u(x_1, ...x_n)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans un ouvert } \Omega. \\ u = y \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Equation des ondes :

pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on cherche $u = u(x_1, ...x_N, t)$ telque

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u = g \text{ sur } \delta\Omega \times [0, T] \\ u(x, t = 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x) \end{cases}$$

Condition sur l'ensemble des solutions

pour trouver des solutions particuliéres d'EDP à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les conditions les plus fréquentes sont :

1. Conditions initiales :

   Si u est une fonction de $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ on donne $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou $D^\alpha u(x, t_0) = \Phi_0(x)$, on parle aussi des conditions de Cauchy.

2. Conditions aux limites

Définition 1.1.6 *Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des EDP sur une frontiére.Ces conditions imposent une valeur de u ou de ses derivées au bord du domaine*

Il existe plusieurs types de conditions aux limites citons ici :

Direchlet-valeurs aux bord :

dans ce type de condition la valeurs de la variable dépendante est imposée sur la frontiére du domaine de calcul.

Exemple 1.1.6

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ sur \ \Omega \ . \\ u = d \ \ sur \ \partial\Omega. \end{cases}$$

où d est une fonction, si $d = 0$ on qualifiera le problème d'homogène, dans le cas contraire il sera dit no homogène.

<u>Neuman-Grandients aux bord</u> :

La variable dépendante n'est pas connue sur la frontiére mais si dérivée est bien définie.

Exemple 1.1.7

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ sur \ \Omega \ . \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \ \ sur \ \Omega \ (n \ \ normale \ \grave{a} \ \partial\Omega). \end{cases}$$

où g est une fonction

<u>mixte-Grandients et valeurs aux bord</u> :

cette condition est composée des deux première condition imposée sur la frontière.

Exemple 1.1.8 *on note* $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \ . \\ u = D \text{ sur } \partial\Omega_1. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Classification des équations aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre.

Nous étudions l'équation aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre suivante :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où A, B et C sont constants de x et y.

les équations aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre sont classées comme équation du type elleptique ou du type hyperbolique ou encore du type parabolique, selon la valeur du determinant : $B^2 - 4AC$.

On dit alors que, l'équation $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ sur un domaine D, est de type :

elleptique : si $B^2 - 4AC < 0$ sur le domaine D.

parabolique : si $B^2 - 4AC = 0$ sur le domaine D.

hyperbolique : si $B^2 - 4AC > 0$ sur le domaine D.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $C > 0$

   $B^2 - 4AC > 0$ ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ainsi l'équation de la diffussion et parabolique.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

   $B^2 - 4AC = -4 < 0$ ainsi l'équation de la place est elliptique.

4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ èquation tricomi.

   $y > 0 \Rightarrow$l'EDP est hyperbolique.

   $y = 0 \Rightarrow$l'EDP est parabolique.

   $y < 0 \Rightarrow$l'EDP est elleptique.

Equation elliptique.

Les équation elliptiques régissent les problèmes stationnaires d'équilibre, généralement définis sur un domaine spétial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des condition aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann.

le problème elliptique est celui fourni par l'équation de la place (ou de poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Direchlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ .} \\ u = u_0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Chapitre 2

Méthode de séparation des variables de fourier

La méthode de séparation des variables ou la méthode de fourie est largement utilisée pour résoudre les problèmes aux limites relatives aux EDPs. Elle consiste de chercher des solutions particulières de la forme séparable $u(x, y) = X(x)Y(y)$,ou X et Y sont des fonctions de x et y respectivement. Dans de nombreux cas,l'EDP se réduit à deux équations differentielles ordinaires pour X et y.on obtient donc des problèmes aux limites impliquant des EDOs. Cependant, la question de la séparabilité d'une EDP en deux équations différentielles ordinaires ou plus n'est pas toujours possible. Dans ce chapitre, on va appliquer cette méthode sur des problémes aux limites relative aux limites relatives aux EDPs linéaire.

2.1 Situation du problème

On decrit maintenant la methode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des EDPs de second ordre de deux variables indépendentes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnu $u(x,t)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a,b] \quad , \quad -\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))\,u(x,t) = h(x,t)\,,(x,t) \in I \times J \\ u(x,0) = f(x)\,, x \in I \text{ condition initiale , condition aux limites} \\ \text{ou } a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, h(x,t)\,, f(x) \text{ sont des fonctions données.} \end{cases}$$

Conditions aux limites : On distingue différents types des conditions aux limites $(C.L)$

▶Conditions de Dirichlet :

u est fixée sur le bord de I

$u(a,t) = u(b,t) = 0$

▶Conditions de Neumann :

La derivée normale de u est fixée sur I

$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$

▶Conditions de Robin ou mixte :

$C_1(x)\,u(a,t) + C_2(x)\,u(b,t) = 0$

▶Conditions périodiques :

$u(a,t) = u(b,t)$ et $u_x(a,t) = u_x(b,t)$

Rapportons les principales étapes de cette méthode.

1. on recherche les solutions séparées de (ε) ces solutions sont de la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

et satisfont les conditions aux limites et la condition initiale il se trouve que X et T doivent être des solutions des problèmes aux limites linéaires (p_1) et (p_2) relatives aux X et T,respectivement.

2. On résout les problémes (p_1) et (p_2), les solutions de (p_1) nous permettent de construire une base hilbertiènne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on désigne par $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les solutions de (p_2).
3. On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées.
4. dans la derniére étape,on calcule les coefficient de cette série et étudie sa convergence.

Principe de superposition

Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.

Dans la suite on va rappeler quelques notions essentielles sur les séries de fourier qui seront utilisées dans le reste de ce chapitre.

2.2 Rappel sur les series de fourier

Définition 2.2.1 *Une suite de fonction* $\{\phi_n(x)\}, n \geq 0$ *définit sur un intervalle* $[a, b]$, *décrit un système orthonormal par rapport à la fonction de poids q(x) si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)q(x)dx = \begin{cases} 1 \ si \ m \neq n \\ 0 \ si \ m = n \end{cases}$$

Exemple 2.2.1 *On va voir que les fonctions* cos *et* sin *peuvent former une base orthonormale. Pour cela, l'ensemble des fonctions* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2\pi)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right.$ *un système orthogonale de fonction sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *pour la fonction de poids*

$q \equiv 1$ *ceci est affirmé par les calculs suivants :*

si $m, n \geq 1$,*on a :*

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)}{2} dx = \begin{cases} 1 \ si\ m \neq n \\ 0 \ si\ m = n \end{cases}$

si $m, n \geq 0$, on a :

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)}{2} dx = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \pi \text{ si } m = n \\ 2\pi \text{ si } m = n = 0 \end{cases}$

si $m \geq 0$ et $n \geq 1$, on a :

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m+n)x)-\cos((m-n)x)}{2} dx = 0$

Définition 2.2.2 *Soient f une fonction et D_f son ensemble de définition : On dit que la fonction f est periodique s"il existe un nombre réel non nul p vérifiant la propreté suivante :*

Si $x \in D_f$ alors $x + p \in D_f$ et $f(x+p) = f(x)$

Le nombre p est appelé la période de la fonction f

2.2.1 Series de Fourier et coefficients de Fourier

Le but de cette section est d'ecrire une fonction $f(x)$ continue par morceaux et 2π périodique sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ou a_n, b_n pour $n \geq 0$ sont appellés les coefficients de Fourier associes à la fonction f

Définition 2.2.3 *Les cofficients de fourier associées à la fonction f sont données par :*

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ *si* $n \geq 1$

Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2\pi^2}{3}$

Si $n \geq 1$ alors :

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\cos(nx)dx$

$= \frac{1}{n\pi}(x + x^2)\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + 2x)\sin(nx)dx$

$= \frac{1}{n^2\pi}\left\{(-(1 + 2x)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}(2\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi}\right\}$

$= \frac{4\cos(n\pi)}{n^2}$

$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$

et

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\sin(nx)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

donc la série de fourier :

$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{4(-1)^n}{n^2})\cos(nx) + (\frac{2(-1)^{n+1}}{n})\sin(nx))$

une remarque importante pour faciliter les calculs.

Remarque 2.2.1 1. *Si f est une fonction paire, alors sa série de fourie est :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \ \textit{avec}\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ \textit{pour}\ n \geq 0.$$

2. *Si f(x) est une fonction impaire, alors sa série de fourier est :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \ \textit{avec}\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ \textit{pour}\ n \geq 0.$$

2.3 Application

2.3.1 Equation de la chaleur

considérons le problème sur l'intervalle $[0, L]$ avec $L \geq 0$ constitué de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L, t > 0, \tag{2.1}$$

Les conditions aux limites de type direchlet

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0 \tag{2.2}$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L \tag{2.3}$$

où f est une fonction donnée et k est un constante positive.

Ce problème modélise la condition thermique dans un tige de longeur L. La chaleur est supposée nulle aux deux extrémités du tige et égale a $f(x)$ à l'instant $t = 0$.

Les conditions aux limites impliqent que

$$\begin{cases} f(0) = u(0,0) = u(L,t) = 0 \\ \text{et} \\ f(L) = u(L,0) = u(L,0) = 0 \end{cases}$$

ces deux conditions s'appellent les conditions de compatibilité.

Etape 01 : On commence à chercher des solutions de(2.1) sous la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.4}$$

qui satisfont les conditions (2.2) où X et T sont des fonctions de x et t, respectivement. dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (2.3) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x,t) = 0$. on cherche donc des fonctions X et$T$ qui ne s'annulent pas identiquement.

Par différentiation de (2.4) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (2.1), obtient

$$XT'(t) = kX''(x)T(t), 0 < x < L, t > 0$$

on peut réecrire

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{kX''(x)}{X(x)}, 0 < x < L, t > 0. \tag{2.5}$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appellée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{kX''(x)}{X(x)} = -\lambda, 0 < x < L, t > 0. \tag{2.6}$$

Comme on cherche des solutions ne s'annulent pas identiquement , alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$ consequement on obtient

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X(0)\, T(t_0) = 0 \\ u(L, t_0) = X(L)\, T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

L'équation (2.6) conduit au système d' EDOs suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x} + \lambda X = 0, 0 \prec x \prec L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Et

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0, t \succ 0 \tag{2.8}$$

ou λ est une constante.

Etape 02 : On commence d'abord a resoudre le système (2.7), une solution non triviale de (2.7) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ en distingne 3 cas.

Cas 01 : $\lambda = -\mu^2 < 0$ alors :

$$X(x) = \alpha \exp(-\mu x) + \beta \exp(\mu x)$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \exp(-\mu L) + \beta \exp(\mu L) = 0 \end{cases}$$

De la première équation, on a $\alpha = -\beta$, La seconde equation implique donc :

$\alpha \exp(-\mu L) = \alpha \exp(\mu L)$ alors si $\alpha \neq 0$ on obtient $\exp(2\mu L) = 1$; ce ci n'est pas possible car μ et L sont différents de 0 et par conséquant $\alpha = \beta = 0$. Alors ce cas $X \equiv 0$ et $u(x,t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$ On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$,

Cas 02 : Si $\lambda = 0$, on obtient:

$$X(x) = \alpha + \beta x$$

où α, β sont des réels arbitraires.Les conditions aux limites impliquent

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta L = 0 \end{cases}$$

Comme $L \neq 0$, Il est claire que $\alpha = \beta = 0$, Alors dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x,t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$ on doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 03 : $\lambda = \mu^2 \succ 0$ alors :

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin(\mu L) = 0 \end{cases}$$

Pour éviter la solution triviale $X \equiv 0$, on suppose que $\beta \neq 0$. Ceci implique que $sin(\mu L) = 0$. Conséquemment

$$\mu L = n\pi, \lambda = (n\pi \diagup L)^2, n \in \mathbb{Z}$$

Il en résulte que

$$\lambda_n = (n\pi)^2$$

sont les valeurs propres de et les fonctions

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x \diagup L)$$

sont les fonctions caractéristiques du probléme (2,7) comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer

$$\lambda_n = (n\pi \diagup L)^2, X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x \diagup L), n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

Il rest maintenant à résoudre le problème(2.8), la solution est donnée par

$$T(t) = \delta_n \exp(-k(n\pi \diagup L)^2)t, n \in \mathbb{N}^*$$

À la fin de cette étape, on peut considérer qu'on a bien construit une base hilbertiènne $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$

Etape 03 : On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solution séparées. On a ainsi obtenu la suite de solutions séparées

$$U_n(x,t) = \delta_n \sin(n\pi x \diagup L)\exp(-k(n\pi \diagup L))^2, n \in \mathbb{N}^*$$

par le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L)\exp(-k(n\pi \diagup L)^2)t$$

de solution séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les condition aux limites de direchlet

Conidérons maintenant la condition initiale supposons qu'il ait la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L)$$

c'est à dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres ensuite, une solution au problème de chaleur (2.1)-(2.3) est donnée par :

$$U_n(x,t) = \sum_{n=1\gamma}^{N} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L)\exp(-k(n\pi \diagup L))^2 t$$

L'idée brillante de fourier était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (2.2) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x \diagup L)$. En d'autres termes, il est possible de trouver des constantes γ_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L)$$

une telle série est appelée une série (ou extension) de fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et $\gamma_n, n = 1, 2...$sont appelés les coefficients de fourier (généralisés) de la série. Dans ce cas,le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L) \exp(-k(n\pi \diagup L)^2)t$$

est un condidat naturel pour une solution généralisée du problème (2.1)-(2.3). on explique maintenant comment représenter une fonction ≪arbitraire≫ f sous la forme d'une série de fourier. En d'autre termes,comment calculer les coefficients γ_n.Remarquons

$$\int_0^L \sin(m\pi x \diagup L) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \sin(m\pi x \diagup L) \sin(n\pi x \diagup L) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L \diagup 2, m = n \end{cases}$$

par conséquent, les coefficients de fourier sont donnés par :

$$\delta_n = \frac{\int_0^L \sin(m\pi x \diagup L) f(x) dx}{\int_0^L \sin^2(m\pi x \diagup L) ds} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(n\pi x \diagup L) f(x) dx$$

on obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par :

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x \diagup L) \exp(-k(n\pi \diagup L)^2)t \\ \qquad o\grave{u} \\ \delta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(m\pi x \diagup L) f(x) dx \end{cases}$$

Equation de la chaleur avec condition de Neumann

Considérons le problème de conduction thermique suivant dans un intervalle fini :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L, t > 0. \tag{2.9}$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, t \geq 0. \tag{2.10}$$

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \tag{2.11}$$

où f est une condition initiale donnée est k est une constante positive. Afin de rendre (2.10) consistant avec (2.11) ou suppose la condition de compatibilité : $f_x(0) = f_x(L) = 0$

Ce problème correspond à l'évolution de la températeure $u\,(x, t)$ dans un tige thermo-conductrice unidimentionelle homogène de longeur L dont la temperature initiale (au temps $t = 0$) est connue et telle qu'il n'ya pas de flux de chaleur a travers les limites (la chaleur n'entre pas ou ne sort pas a travers le système).

On commence par rechercher des solutions de la forme spéciale,

$$u\,(x, t) = X\,(x)\,T\,(t) \tag{2.12}$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t respectivement, Différencions la solution séparée (2.12) et remplaçons dans l'EDP, on obtient

$$XT_t = KX_{xx}T$$

On peut réecrire par λ (appellé constante de séparation) telle que :

$$\frac{T_t}{T} = K\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda \tag{2.13}$$

λ est une constante réelle. Comme on cherche des solutions ne s'annule pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ telque $T(t) \neq 0$ conséquement on obtient :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = X_x(0).T(t_0) = 0 \\ u_x(L,t) = X_x(L).T(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_x(0) = X_x(L) = 0$$

L'équation (2.13) conduit au système d'EDPs suivant

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

et

$$\{T' + \lambda KT = 0, t > 0 \tag{2.15}$$

où λ est une constante. On commence d'abord à résoudre le système (2.14)

<u>Cas 01 :</u>

$\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X(x) = \alpha \exp(-\mu x) + \beta \exp(\mu x)$ et $X\prime(x) = \mu[-\alpha \exp(-\mu x) + \beta \exp(\mu x)]$

où α, β sont des nombres réels arbitraires mais les conditions

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(-\alpha + \beta) = 0 \\ \mu(-\alpha \exp(-\mu L) + \beta \exp(\mu L)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ -\alpha \exp(-\mu L) + \beta \exp(\mu L) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha = 0 \Rightarrow X \equiv 0 \text{ et } u(x,t) = 0$$

pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$ on doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.

<u>Cas 02 :</u>

si $\lambda = 0$; $X(x) = \alpha + \beta x$ et $X\prime(x) = \beta$

où α, β sont des nombres réels arbitraires mais

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0$$

Donc $\lambda = 0$ est une valeur propre avec la fonction propre $X(x) = \alpha$ (constante).

Cas 03 :

Si $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x)\right]$

où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta\cos(0) = 0 \\ -\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \text{ et } \alpha\sin(\mu x) = 0$$

comme $\alpha\sin(\mu l) = 0$, alors $\sin(\mu L) = 0$. Conséquemment $\mu L = n\pi$ et $\lambda = (n\pi\backslash L)^2$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ on obtient $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ et $X_n(x) = \alpha_n\cos(\frac{n\pi x}{L})$

Parceque $\cos(x) = \cos(-x)$pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on prend en considération la valeur

$\lambda = 0$. Les valeurs et les fonctions propres sont définies par :

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \text{ et } X_n(x) = \alpha_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) : n \in \mathbb{N}$$

On passe maintenant à l'équation (2.8) dont la solution générale est donnée par $T(t) = \gamma_n\exp(-k(n\pi/L)^2)t, n \in \mathbb{N}$

On a ainsi obtenu la suite suivante de solution séparée :

$$u_n(x,t) = \delta_n\cos(n\pi x/L) : n \in \mathbb{N}$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire :

$$U(x,t) = \delta_n \cos(n\pi x/L), n \in \mathbb{N}$$

supposons que l'on a :

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \delta_n \cos(n\pi x/L)$$

Dans ce cas le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L) \exp(-k(n\pi/L)^2)t$$

On sait que si $m, n \succeq 0$. On a

$$\int_0^L \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^L \frac{\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)dx}{2} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L/2, m = 0 \\ L, m = n = 0 \end{cases}$$

On passe maintenant à expliquer comment calculer les coefficients $\delta_m, m = 0, 1, 2........$

Pour m=0 multipliant f par $cos\,(0\pi x/L)$et on integre sur $(0, L)$ on obtient ;

$$\int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x)dx = \frac{\delta_0}{2} \int_0^L \cos(0\pi x/L)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx = \frac{\delta_0 L}{2} + 0$$

Car $\int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx = 0$ puisque $n \neq (m = 0)$; alors :$\delta_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x)dx$ $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$

Pour $m \neq 0$ Multipliant f par $\cos(m\pi x/L)$; $m \neq 0$ On intègre sur $(0, L)$ on obtient ;

$$\begin{aligned}\int_0^L \cos(m\pi x/L) f(x)dx &= \frac{\delta_0}{2}\int_0^L \cos(m\pi x/L)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx \\ &= \frac{\delta_0 L}{2m\pi}\left[\sin(0) - \sin(m\pi)\right] + \delta_m \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx \\ &= \delta_m \frac{L}{2}\end{aligned}$$

ce qui donne

$\delta_m = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(m\pi x/L) f(x)dx$

et $f(x)) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x/L)\int_0^L \cos(n\pi x/L) f(x)\,dx$

Par consequant. La solution formelle est donnée par ;

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x/L)\exp(-k(n\pi/L)^2)t\int_0^L \cos(n\pi x/L) f(x)\,dx$$

Exemple 2.3.1

Soit la fonction $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ alors $L = \pi$ et

$$\delta_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi'}\left(x + x^2\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}$$

Si $n \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi'}\left(x + x^2\right)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[-\left(x + x^2\right)\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi'}(1+2x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\left\{\left[-(1+2x)\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\left[-(1+2x)\cos(nx) + 1\right] \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\left[(1+2\pi)(-1)^n - 1\right]\end{aligned}$$

Donc

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{2}{3}\pi^{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{2}\pi}\left(\left(1+2\pi\right)\left(-1\right)^{n}-1\right)\right]\cos(n\pi x\diagup L)$$

Dans ce cas le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u(x,t)=\delta_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{2}\pi}\left(\left(1+2\pi\right)\left(-1\right)^{n}-1\right)\right]\cos(n\pi x\diagup L)\exp(-k(n\pi\diagup L)^{2})t$$

Chapitre 3

Examples

Exemple 3.0.2 *on considère le problème suivant pour* $x \in]1, e[, t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(1,t) = u(e,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

où f *est une fonction continue sur]1,e[. Résoudre ce problème (3.1) par la méthode de séparation des variables, en recherchant la solution sous la forme* $u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} X_k(x) T_k(t)$.

1. On injecte la forme séparée $u(x,t) = X(x)T(t)$ dans l'équation :

$$XT'' = x^2 X'' T + 3x X' T$$

Ce qui donne $\frac{x^2 X'' + 3x X'}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}$

2. Les conditions aux limites conduisent à :

$$X(1) = X(e) = 0$$

3. On pose $x = e^2$ et $X(x) = Z(z)$

$$X^{'} = \frac{dz}{dx} Z^{'} = \frac{Z^{'}}{x}$$
$$X^{''} = \frac{d^2 z}{dx^2} Z^{'} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 Z^{''} = \frac{Z^{'}}{x^2} + \frac{Z^{''}}{x^2}$$
$$x^2 X^{''} + 3x X^{'} - \lambda X = Z^{''} + 2Z^{'} - \lambda Z$$

4.

$$Z(0) = Z(1) = 0$$

5. L'équation caractéristique est donnée par : $r^2 + 2r - \lambda = 0$ Son descriminant reduit est $1 + \lambda$

◦ Dans le cas ou $1 + \lambda = \omega^2 \succeq 0$. Les deux racines distinctes sont $r = -1 \pm \omega$ ce qui conduit a $Z(z) = e^{-z}(Ae^{\omega z} + Be^{-\omega z})$ou A et B sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A + B = 0 \text{ et } Z(1) = e^{-1}\left(Ae^{\omega} + Be^{-\omega}\right) = 0$$

Ce qui conduit necessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale.

◦ Dans le cas ou $1 + \lambda = \omega^2 = 0$ La racine double est $r = -1$. Ce qui conduit à $Z(z) = e^{-z}(A + Bz)$ .ou A et B sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :$Z(0) = A = 0$ et $Z(1) = e^{-1}(A + B) = 0$ Ce qui conduit necessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale.

◦ Dans le cas ou $1 + \lambda = -\omega^2 \prec 0$. Les deux racines complexes distinctes sont

$r = -1 \pm i\omega$.Ce qui conduit à $Z(z) = e^{-z}(A\cos(\omega z) + B\sin(\omega z))$ .ou A et B sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A = 0 \text{ et } Z(1) = e^{-1}(B\sin[\omega]) = 0$$

Pour obtenir une solution non triviale on doit donc avoir $sin(\omega) = 0$ ce qui implique $\omega = k\pi.k \in \mathbb{N}$ Il en resulte :

$$Z_k(z) = B_k e^{-z}\sin(k\pi z)$$

et

$$X_k(x) = Z_k(z) = Z_k(\ln x) = B_k e^{-\ln x}\sin(k\pi \ln x)$$

Les vecteurs sont normalisés en choisissant $B_k = \sqrt{2}$. On injectant la forme $\sum_{k\in\mathbb{N}} X_k T_k$ dans l'éqution on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^\star} X_k T_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^\star}\left(x^2 X_k^{''} + 3x X_k^{'}\right) T_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^\star} \lambda_k X_k T_k$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}^\star}\left(T_k^{''} - \lambda_k T_k\right) X_k = 0$$

L'independance linéaire des X_k conduit alors à :

$$T_k^{''} - \lambda_k T_k = T_k^{''} + \left(1 + (k\pi)^2\right) T_k = 0$$

de solution generale :

$$T_k(1) = T_k(0)\cos\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right) + \frac{T_k^{'}(0)}{\sqrt{1+(k\pi)^2}}\sin\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right)$$

La deuxième condition initiale imopose ensuite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x;0) = \sum_{k\in\mathbb{N}^\star} T_k^{'}(0)\, X_k(x) = f(x)$$

Finalement :

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k \frac{\sin(k\pi \ln x)\sin\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right)}{x}$$

ou

$$u(x,t)c_k = 2\frac{\int_1^e \sin(k\pi\ln x)\, f(y)\, dy \sin(t)}{\sqrt{1+(k\pi)^2}}$$

Exemple 3.0.3 *Résoudre le probléme suivant par la méthode de séparation des variables :*

$$\begin{cases} a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0; (x,t) \in]0,\ell[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t}, u(\ell,t) = u_0 e^{-\beta t} \\ \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

où a. b. α. β. u_0 et ℓ des réels striquetement positifs tel que $a\pi^2 > b\ell^2$.

On commence par rendre homogènes les conditions aux limites en cherchant un rélevement (le domaine prismatique suggère une solution affine de x).

$$U(x,t) = u_0\left(e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + \frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right)$$

U est regulier et verifié les conditions aux limites. On pose $\upsilon = u - U$.

υ est une solution de :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + b\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} &= -\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \frac{\partial U}{\partial t}\right) \\ &= u_0\left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\,\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

et on doit satisfaire les conditions :

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(\ell,t) = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \upsilon = \lim_{t\to+\infty} u - U = 0$$

Posons $\upsilon = XT$ ce qui donne :

$$a\frac{X''}{X} = -b - \frac{T''}{T} = \lambda$$

les conditions aux limites conduit à $X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$. On injecte enfin la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n T_n$ dans l' EDP

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell}\right) T_n + T_n^{'}\right) = u_0 \left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\, \frac{x}{\ell} e^{-\beta t}\right)$$

On projette alors le second membre sur la base : Il faut donc calculer les projections de $x \to 1$ et $x \to \frac{x}{\ell}$

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx = \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\ell\sqrt{\ell}} \int_0^\ell \sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx = \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$\left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right) T_n + T_n^{'} = u_0 \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi} \left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\, \frac{x}{\ell} e^{-\beta t}\right)$$

Par hypothèse : $b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} < 0$, ce qui donnerait une exponentielle croissante en solution de problème homogène, incompatible avec l'hypothèse de solution nulle a l'infini. On cherche donc une solution particulière qui tend vers 0 en l'infini et donc :

$$T_n(t) = \left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right) T_n + T_n^{'} = u_0 \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi} \left(\frac{(b-\alpha)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \alpha} e^{-\alpha t} + (-1)^{n+1} \frac{(b-\beta)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \beta} e^{-\beta t} \right)$$

ce qui conduit à

$$v(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_0 \frac{2}{n\pi} \left(\frac{(b-\alpha)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \alpha} e^{-\alpha t} + (-1)^{n+1} \frac{(b-\beta)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \beta} e^{-\beta t} \right) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right).$$

Etant donné que le second membre est C^1, on a convergence uniforme des séries spatiales. Par ailleurs les $|T_n|$ sont bornés et décroissants (pour n croissant) il y a donc convergence uniforme de la série de la fonction de (x,t) sur tout segment temporel.

Exemple 3.0.4 *Soit la température $u(x,t)$ dans un tige de longueur ℓ qui est parfaitement isolée thermiquement incluant les extrémités à $x = 0$ et $x = \ell$. Aucune chaleur ne s'échappe des extrémités de la tige. Mathématiquement cette condition signifie que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

supposons que la température initiale est $u(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in [0,\ell]$. En d'autres mots, la température $u(x,t)$ est une solution du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0, \quad \forall t\geqslant 0. \;\; et \;\; u(x,0)=f(x) \quad \forall x\in[0,\ell]\,.$$

1. *En utilisant la méthode de séparation de variables, montrer que la solution formelle du problème sera :*

$$\begin{cases} u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{\ell})\exp[-(\frac{cn\pi}{\ell})^2t] \\ \text{où} \\ a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx \quad et\; a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})dx. \end{cases} \tag{3.3}$$

2. *Déterminer la température $u(x,t)$ dans la tige si $\ell=\pi$, $c=1$ et $f(x)=(3\pi x^2-2x^3)$.*

Solution 3.0.1 *Nous voulons étudier le problème suivant :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \qquad où\; u=u(x,t), 0\leq x\leq \ell, t\geqslant 0$$

Avec les conditions :

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0$ *pour tout* $t\geqslant 0$ *ainsi* $u(x,0)=f(x)$ *pour tout* $x\in[0,\ell]$

Nous devons premièrement considérer le problème intérmédiaire (*) suivant :

$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$ où $u=u(x,t), 0\leq x\leq \ell, t\geqslant 0$

Avec les conditions :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0 \quad \text{pour tout} \quad t\geq 0$$

1. Nous cherchons à déterminer des solutions de ce dernier problème qui sont de la forme $u(x,t)=X(x)T(t)$. En substituant dans L'EDP , nous obtenons $XT'=x^2X''T$ ou

$X^{''}$ estla dérivée seconde de X par rapport à x et $T^{'}$ est la dérivée de T par rapport à t. En divisant les deux cotés de l'équation par c^2XT,$nousobtenons$
$\frac{1}{c^2}\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X}$
Le terme de gauche est une fonction de t et celui de droite une fonction de x. Pour que ceci soit possible, il faut que ces deux termes soient constants. Donc

$$\frac{1}{c^2}\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X} = \lambda \text{ où } \lambda \text{ est une constante}$$

Nous pouvons aussi tenir compte des conditions au bord. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \Rightarrow X^{'}(0)T(t) = 0 \Rightarrow X^{'}(0) = 0 \quad \text{et}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0 \Rightarrow X^{'}(\ell)T(t) = 0 \Rightarrow X^{'}(\ell) = 0$$

En résumé, nous devons considérer le système d'équations différentielles ordinaires suivante :

$$\begin{cases} X^{''} - \lambda X = 0 \quad \text{avec } X^{'}(0) = 0 \text{ et } X^{'}(\ell) = 0 \\ T^{'} - \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Il nous faut maintenant considérer les différents cas de λ si $\lambda \succ 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu \succ 0$, alors la solution générale de $X^{''} - \lambda X = 0$ est $X(x) = A\exp(\nu x) + B\exp(-\nu x)$ parce que $X^{'}(x) = A\nu\exp(\nu x) - B\nu\exp(-\nu x)$ et on considérant les deux conditions $X^{'}(0) = 0$ et $X^{'}(\ell) = 0$, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{pmatrix} \nu & -\nu \\ \nu\exp(\nu\ell) & -\nu\exp(-\nu\ell) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parce que $\nu\ell \neq 0$ alors le déterminant

$$\det\begin{pmatrix} \nu & -\nu \\ \nu\exp(\nu\ell) & -\nu\exp(\nu\ell) \end{pmatrix} = \nu^2(\exp(\nu\ell) - \exp(-\nu\ell)) = 2\nu^2\sinh(\nu\ell) \neq 0$$

et conséquemment la seule solution de système d'équations lineaires est $A = B = 0$. Il nous faut donc exclure le cas $\lambda \succ 0$. Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $X^{''} = 0$ et $X(x) = A + Bx$ parce que $X^{'}(x) = B$ et en considérant les conditions $X^{'}(0) = 0$ et $X^{'}(\ell) = 0$ nous obtenons une seule équation $B = 0$, il nous faut donc inclure ce cas $\lambda = 0$ et dans ce cas $X(x) \equiv A$ est une fonction canstante . Finalement si $\lambda < 0$ disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $X^{''} - \lambda X = 0$ est $X(x) = A\cos(\nu x) + B\sin(\nu x)$ parce que $X^{'}(x) = -\nu A\sin(\nu x) + \nu B\cos(\nu x)$ et on considérant les deux conditions $X^{'}(0) = 0$ et $X^{'}(\ell) = 0$, nous obtenons le système d'équations

Solution 3.0.2

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu\sin(\nu\ell) & \nu\cos(\nu\ell) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De ceci nous obtenons que $B = 0$ *et* $-\nu\sin(\nu\ell)A = 0$ *comme nous cherchons une solution* $X(x)$*non triviale. Nous pouvons supposer que* $A \neq 0$ *et conséquement* $\sin(\nu\ell) = 0$.*Rappelant que* $\nu \succ 0$, *donc* $\nu\ell = n\pi$ *pour* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \text{ et } X(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \text{ ou } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

En conclusion pour que l'équation $X^{''} - \lambda X = 0$ *avec les conditions* $X^{'}(0) = 0$ *et* $X^{'}(\ell) = 0$ *ait une solution non nulle, il faut que soit* $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *et* $X(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ *.*

Si nous considérons maintenant l'équation $T^{'} - \lambda c^2 T = 0$ *pour ces différents* λ*. Dans le cas où* $\lambda = 0$*, alors la solution générale* $T^{'} = 0$ *et* $T(t) \equiv D$ *où* D *est une constante. Dans le cas ou* $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *ou* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$*. Alors la solution générale de* $T^{'} - \lambda c^2 T = 0$ *est* $T(t) = D\exp\left(-\left(\frac{cn}{\ell}\pi\right)^2 t\right)$*. où* D *est une constante.*

Nous pouvons conclure que si $\lambda = 0$ *alors* $u(x,t) = X(x)T(t) \equiv AD$ *est une solution du problème intermédiaire* $(*)$*,alors que si* $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *; alors* $u(x,t) = X(x)T(t) = A\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\exp\left(-\left(\frac{cn}{\ell}\pi\right)^2 t\right)$ *est aussi une solution du problème intermédiaire* $(*)$*. Parceque l'équation de la chaleur est linéaire ; nous pouvons additionner ces solutions. Donc la solution formelle du problème intermédiaire* $(*)$ *est*

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\exp\left(-\left(\frac{c_n\pi}{\ell}\right)^2 t\right)$$

Si nous revenons au problème initiale, il nous faut considérer la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

C'est-à-dire que les coefficients a_n *pour* $n \geq 0$ *sont les cofficients de la série de fourier paire de f(x). En d'autre mots,*

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \qquad \textit{pour tout } n \geq 0$$

2- En utilisant (3.3) il nous faut determiner la série de fourier paire de $f(x) = 3\pi x^2 - 2x^3$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\pi} (3\pi x^2 - 2x^3) dx = \pi^3$$

et, si $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3\pi x^2 - 2x^3) \cos(nx) dx. \\ &= \frac{(1 + (-1)^{n+1} 24}{\pi n^4}. \end{aligned}$$

Donc la solution cherchée est :

$$u(x,t) = \frac{\pi^3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{n+1})24}{\pi n^4} \cos(nx) \exp(-n^2 t)$$

Bibliographie

[1] Baddari, K., & Abbassov, A. (2009). Equations de la physique mathématique appliquées.

[2] Bezard, M. (1996). Equations aux dérivées partielles. Ecole nationale supérieure des techniques avancées.

[3] KELLECHE, A. (2019). Ėquations de la physique mathématique.

[4] Robert Bédard. Offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal. Notes pour le cours Equations aux dérivées partielles.

[5] Vladmir Arnold. (1997). Leçons sur les équations aux dérivées partielles.

[6] Zitouni, S., & Zennir, K. (2018). Equations aux Dérivées Partielles de nature physique : EDPs de nature physique Editions universitaires européennes.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDP	:	Equation aux dérivées partielles.
$\partial\Omega$	:	la frontière de Ω.
C^1	:	classe C^1
EDO	:	Equation différentielle ordinaire.
sh	:	Sinus hyperbolique.

Résumé

Nous avons traité dans ce mémoire les équations aux dérivées linéaires de second ordre. Nous avons discuté sur la méthode de séparation des variables pour obtenir la solution.

Abstract

In this work, we have dealt with second order linear derivative equation we discussed about the method of separating variables to get the solution.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى المعادلات ذات مشتقات جزئية الخطية من الدرجة الثانية حيث تطرقنا إلى كيفية إيجاد الحل بطريقة فصل المتغيرات.