

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la
VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :
MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Titre :

Systèmes Dynamiques Discrets Chaotiques

Par

Meridji Seloua

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Assis Senouci	UMKB	Président
Dr. Nadjette Bouziane	UMKB	Encadreur
Dr. Seïda Adouane	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

♡ Mon chère père qui dieu ait pitié, ci lui qui voulait que je serais un prof de
mathématique

♡ Ma chère mère, tu es la meilleure maman du monde

♡ Mon frères Aness, tu es mon soutien

♡ Mes amies Ines, Samah

♡ Je vous aime♡

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais remercier **Dieu**, mon Seigneur et mon aide pour
atteindre ce que je suis aujourd'hui

Je tiens à remercier cordialement mon encadreur Dr.**Nadjette Bouziane** pour
son aide afin d'améliorer le contenu de ce mémoire

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury(Dr. **SENOUCI
ASSIA** et Dr. **ADOUANE SAIDA**) d'avoir accepté d'examiner ce modeste
travail et de l'enrichir par leurs propositions

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de mathématiques

Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements toutes les personnes qui ont
contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail

Merci à tout

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Systèmes Dynamiques à Temps Discrets	3
1.1 Notion générales sur les systèmes dynamiques discrets	4
1.1.1 Définitions	4
1.1.2 Points fixes et les orbites périodiques	5
1.1.3 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques	7
1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles et multidimensionnelles	9
1.2.1 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles	9
1.2.2 Systèmes dynamiques discrets multidimensionnelles	10
1.2.3 Attracteur et Source	16
2 Systèmes Chaotiques à Temps Discrets	23
2.1 Caractéristique du chaos	24
2.2 Exposants de Lyapunov	25

2.2.1	Exposants de Lyapunov pour un système de dimension égale à 1	26
2.2.2	Exposants de Lyapunov pour un système supérieur à 1	28
2.2.3	Dimension de Lyapunov	30
2.3	Bifurcation	31
2.3.1	Différents types de bifurcation	32
2.3.2	Transition vers le chaos	34
2.4	Modèle de Hénon	35
2.4.1	Présentation et définition du système de Hénon	36
2.4.2	Calcul des points fixes	37
2.4.3	Attracteur de Hénon pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$	40
2.4.4	Sensibilité aux conditions initiales	44
2.4.5	Exposants de Lyapunov	45
	Conclusion	47
	Bibliographie	48

Introduction

La théorie des système dynamique est une branche classique des mathématiques fournit une description qualitative des Phénomènes naturelles qui se développent au fil du temps. Les système dynamique discret est née avec les travaux de **Poincaré** autors des années 1881-1890, qui trouve des système dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières.

Ainsi, vers la fin de **XIXe** siècle ce mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. **Poincaré** a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système (donnée par exemple par des conditions initiales ou des conditions aux limites), d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace des états. Certain des études de **Poincaré** ont conduit à la définition du terme "chaos".

Au préalable, rappelons que la théorie du chaos, issue des travaux fondamentaux d'**Edward Lorenz** et prolongée par quelques mathématiciens et physiciens autour des années 1975.

En 1963 le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il ob-

serva qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. **Lorenz** venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés : systèmes chaotiques

La théorie du chaos décrit le comportement de certains systèmes dynamiques déterministes (c'est-à-dire : l'existence d'une condition initiales, l'existence et l'unicité de la solution).

Dans ce mémoire, l'objectif est d'étudier la dynamique d'un système chaotique discret dépendant de paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Ainsi il est organisé comme suit :

Le premier chapitre, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des systèmes dynamiques discret (notion des espace, des orbites, des points critiques, des points d'équilibre, stabilité, attracteurs) et la linéarité du notre système soit dans le cas unidimensionnelles ou multidimensionnel.

Le deuxième chapitre, nous allons présenter d'abord les notions de base des systèmes chaotiques discret, où nous allons donner les caractéristiques du chaos et les différentes manières de transition vers le chaos.

Chapitre 1

Systemes Dynamiques à Temps

Discrets

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phase considéré.

La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, encore les valeurs d'une fonction par rapport a une variable x .

On a deux types des systèmes dynamiques (discrets ou continus).

Dans ce premier chapitre, on va essayer de donné les déférent notations et technique de base de la théorie des systèmes dynamiques discret et nous nous intéressons à le système linéaire et non linéaire dans le système unidimensionnelles et multidimensionnel.

1.1 Notion générales sur les systèmes dynamiques discrets

1.1.1 Définitions

Un système dynamique consiste en un ensemble d'état possible, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent d'un système en fonction de son état passé. Si la loi appliquée à de temps discret, nous parlons de système dynamique à temps discret.

Un système dynamique à temps discret est un triplet (D, \mathbb{N}, f) , avec (D, \mathbb{N}) un espace mesurable, ce système est définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.1)$$

Où :

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction d'itération et de classe C^1 , (fonction mesurable),
- $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ est une valeur initiale,
- $x_n \in D$ un vecteur des états du système.

Aussi ; \circ représente la composition des applications alors :

$$x_n = f^n(x_0).$$

Où :

$$f^n(x) = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f(x)$$

Définition 1.1.1

Quand la fonction f dans (1.1) dépend explicitement du temps le système est dit **non-autonome**. Le contraire est le système **autonome**.

Définition 1.1.2

Etant donné le point initiale x_0 , on appelle **orbite** (ou trajectoire) de système (1.1) la suite :

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n)), \dots\}.$$

Exemple 1.1.1

On a : $f(x) = x^2$ un système dynamique discret ; on prendre $x_0 = \frac{1}{4}$ condition initiale de cette système ; l'orbite correspondante est :

$$x(0) = x_0 = \frac{1}{4}, x(1) = f(x(0)) = \frac{1}{16}, x(2) = f(x(1)) = \frac{1}{256}, \dots, etc$$

En remarquant que :

$$x(n) = f(x_{n-1}) = f^n(x(0)) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

alors :

$$O(x_0) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots, x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = 0 \right\}.$$

1.1.2 Points fixes et les orbites périodiques

Les points fixes et les orbites périodique sont des trajectoires ont un rôle principale dans l'étude des systèmes dynamiques discrets

Points fixes et leurs stabilités :

Définition 1.1.3

On dit que x^* est un point fixe du système (1.1) ou de l'application f si elle vérifie $f(x^*) = x^*$ et on peut l'appeler aussi point stationnaire ou point d'équilibre.

Définition 1.1.4

Un point fixe x^* est **stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0; \forall n > 0; \exists n_0 \leq n; \exists \delta(\varepsilon, n_0) > 0; \|x_0 - x^*\| \leq \delta \implies \|x_n - x^*\| \leq \varepsilon.$$

D'une autre part un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit **instable**.

L'équilibre est un point **attractif** si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta(n_0) \text{ tel que : } \|x_0 - x^*\| \leq \delta(n_0) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*.$$

Lorsque $\exists \delta(n_0) = +\infty$, on dit que l'équilibre est **globalement attractif**.

L'équilibre est point **asymptotiquement** (resp. globalement asymptotiquement) **stable** s'il est stable et attractif (resp. globalement attractif).

Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités :

Définition 1.1.5

Un **p-cycles** est un *p-uplet* $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, on a :

$$f(x_{k-1}) = x_k \text{ et } f(x_{p-1}) = x_p = x_0,$$

p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. Tout point du cycle est p -périodique.

Définition 1.1.6

L'orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ d'un système dynamique gouverné par une application f est dit **stable** si pour tout point $x_i; i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ est un point d'équilibres de notre système dynamique gouverné par l'application f^p .

L'orbite périodique qui n'est pas stable est dit **instable**

1.1.3 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques

On a $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ une orbite d'un système dynamique sous la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases},$$

où x_0 est la condition initiale donnés.

Définition 1.1.7

Un point y est dit point limite de l'orbite $O(x_0)$, s'il existe une sous suite $\{x_{n_k} : k = 0, 1, 2, \dots\}$ de $O(x_0)$ qui vérifie :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| = 0.$$

Remarque 1.1.1

1. Le point fixe est le seul point limite de l'orbite stationnaire
2. Si l'orbite $O(x_0)$ est p-périodique alors à exactement p point limite et sont $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

On appelle **ensemble limite** l'ensemble $T(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $O(x_0)$.

1. Il y a une égalité entre $T(x_0)$ et son image par l'application f :

$$f(T(x_0)) = T(x_0).$$

2. Pour dit que $O(x_0)$ est apériodique si son ensemble limite $T(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.
3. Une orbite $O(x_0)$ est dite **asymptotiquement stationnaire** si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est **asymptotiquement périodique** si son ensemble limite est une orbite périodique.
4. Une orbite $O(x_0)$ est dite **éventuellement périodique** de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un m positif tel que :

$$f^{p+k}(x) = f^k(x), \text{ pour tous } k \geq m,$$

c'est-à-dire $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$.

5. Si $p = 1$, $O(x_0)$ est dite **éventuellement stationnaire**.

Téorème de Li-Yorke

D'après ce qui précède, il est clair que soit $O(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($T(x_0)$ est fini), ou apériodique ($T(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique.

Le théorème suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans \mathbb{R} .

Théorème 1.1.1 *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow I$ une application continu. Sup-*

posons que f a une orbite périodique de période 3. Alors f a des orbites périodiques de période p pour tout $p \geq 1$ et il y a un ensemble infini S contenu dans I telle que chaque orbite issu à partir d'un point de S est apériodique.

1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles et multidimensionnelles

1.2.1 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles

Généralement pour dit que le système dynamique discret :

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

est de dimension 1 ou unidimensionnelle si la variable d'état x est une scalaire c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$.

Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles linéaires :

Un système dynamique linéaire discret de dimension un ; peut mise sous la forme d'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + b \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}, \quad (1.2)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constants, $x_n \in \mathbb{R}$ variable d'état, x_0 valeur initiale.

On suppose que le système (1.2) est a l'état d'équilibre :

$$x^* = ax^* + b.$$

constantes, $X_n \in \mathbb{R}^n$ vecteur des états du système, $X_0 \in \mathbb{R}^n$: vecteur initiale, $x_{in} \in \mathbb{R}$: variable d'état.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Systèmes dynamiques discrets non-linéaires de dimension n :

Le système dynamique discret de dimension n être non linéaire si est sous la forme :

$$\begin{cases} x_{1n+1} = f_1(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \\ x_{2n+1} = f_2(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \\ x_{3n+1} = f_3(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \\ \vdots \\ x_{nn+1} = f_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \end{cases},$$

où $n \in \mathbb{N}$; et $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ sont donné ou bien d'une autre façons :

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n) \\ X_n \text{ donné} \end{cases},$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, $f(X_n) = (f_1(X_n), f_2(X_n), \dots, f_n(X_n))$.
 $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \forall i = 1, \dots, n$ une fonction différentiable, $X_n \in \mathbb{R}^n$: vecteur des états du système, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ vecteur initiale.

Point fixe du système dynamique discret de dimension n :

Le système dynamique discret de dimension n à un point fixe si :

$$X^* = f(X^*).$$

Où : $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)^t$.

Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnelles

Nous étudions des systèmes dynamiques de dimension plus grande a un. Pour simplifier les choses nous ne traiterons que les systèmes dynamiques dimension deux. Les systèmes de dimensions supérieures sont, bien sûr, importants mais la plupart des résultats restent valables aux dimensions supérieures

La caractérisation des trajectoires dans les systèmes linéaires autonomes bidimensionnels fournit les fondements conceptuels de la généralisation de l'analyse pour les systèmes dynamiques non linéaires, non autonomes.

Soit le système dynamique discret linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + b_1 \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + b_2 \end{cases}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

avec la condition initiale $(x_{1,0}; x_{2,0})$, et a_{11} , a_{12} , a_{21} , et a_{22} sont des constantes réelles.

La forme matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Il ya un unique point fixe $X^* = \begin{pmatrix} x_{1,n+1}^* \\ x_{2,n+1}^* \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} X^* = AX^* + B &\Rightarrow X^* - AX^* = B \\ &\Rightarrow X^* (I - A) = B \quad , \\ &\Rightarrow X^* = (I - A)^{-1} B \end{aligned}$$

si $\det(I - A) \neq 0$, mais si $\det(I - A) = 0$, il ya un nombre infini de points fixes.

L'étude de la stabilité du point fixe X^* de (1.4) n'est pas facile parce que nous avons une difficulté à la formule de solution de ce système dynamique, qui est dans la formule de la matrice A^t . Pour cela nous allons utiliser la décomposition de Jordan.

Matrice de Jordan : Ce paragraphe résume les propositions fondamentales de l'algèbre linéaire utilisée dans la dérivation et l'analyse qualitative des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels.

Lemme 1.2.1 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 ; tel que $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i$ et j :

1. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2\}$; alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q et une matrice diagonale D , telle que $A = QDQ^{-1}$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

et Q est une matrice 2×2 inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A .

2. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles répétées $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q , telle que $A = QDQ^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ et $w = u \pm iv$ sont les vecteurs propres associés alors il existe une matrice 2×2 non singulière, Q , telle que $A = QDQ^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix},$$

et de plus Q est inversible.

Caractérisation des solutions d'un système dynamique linéaire : Pour caractériser les solutions du système dynamique bidimensionnel :

$$X_{n+1} = AX_n + B,$$

avec $X \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée 2×2 , on s'intéresse dans un premier temps au système :

$$Y_{n+1} = DY_n + \acute{B}$$

avec $X = QY$ et $D = Q^{-1}AQ$, $B' = D$ et Q sont les matrices définies dans le lemme (1.2.1) et on déduit la caractérisation des solutions du système $X_{n+1} = AX_n + B$ en utilisant la relation $X = QY$. Pour simplifier la notation dans ce qui vient on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. *Valeurs propres réelles distincts :*

Soit le système dynamique :

$$Y_{n+1} = DY_n,$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Donc $Y_{n+1} = AY_n = D^n Y_0$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_n = (\lambda_1)^n x_0 \\ y_n = (\lambda_2)^n y_0 \end{cases}$$

2. Valeurs propres réelles égales :

Considérons le système dynamique $Y_{n+1} = DY_n$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Donc

$$Y_{n+1} = AY_n = D^n Y_0 \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\begin{cases} x_n = (\lambda)^n x_0 \\ y_n = n(\lambda)^{n-1} y_0 + (\lambda)^n y_0 \end{cases}.$$

3. Valeurs propres complexes :

Considérons le système dynamique $Y_{n+1} = DY_n$ avec $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a et $b \in \mathbb{R}$.

Considérons la représentation géométrique des valeurs propres, en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$ avec $0 < \theta < \pi$ alors $\lambda_{1;2} = a \pm ib = re^{i\theta}$. D'où :

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } D^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Et le système devient :

$$\begin{cases} x_n = (r)^n [x_0 \cos n\theta - y_0 \sin n\theta] \\ y_n = (r)^n [x_0 \sin n\theta + y_0 \cos n\theta] \end{cases}.$$

4. Caractérisation des solutions en fonction de trace de A et $\det(A)$:

Soit le système dynamique linéaire bidimensionnel :

$$X_{n+1} = AX_n$$

Les propriétés qualitatives de ce système peuvent être classées en fonction des valeurs

$tr(A)$; $det(A)$ et les valeurs propres de la matrice A sont obtenues comme solutions de l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A).$$

Si $(tr(A))^2 > 4det(A)$ les valeurs propres sont réelles et si $(tr(A))^2 < 4det(A)$ les valeurs propres sont complexes.

1.2.3 Attracteur et Source

Attracteur :

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités (états stationnaires) plus générales que les points périodiques, ce sont les Attracteurs. Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'un attracteur. En général, un attracteur est défini comme une partie fermée de l'espace des phases qui attire les orbites issues de son voisinage.

Définition 1.2.1

Soit (X, N, f) un système dynamique discret. Une partie A de X est appelée **attracteur** si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée.
2. A est positivement invariante.
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

Définition 1.2.2

Soit $U \subset \mathbb{R}^q$ un ouvert et soit l'application $f : U \rightarrow U$, pour dit que l'ensemble fermé et borné $A \subset U$ est un **attracteur** si $f(A) = A$ et s'il existe $r > 0$, telle que $d(x_0, A) < r$, **alors** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0.$$

Généralement on peut trouve deux types d'attracteur :

1. Attracteur régulier : ce dernier caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :

i/ Un attracteur réduit à un point fixe, c'est le plus simple attracteur.

ii/ Un attracteur cycle limite est un attracteur formant une courbe fermé.

iii/ L'attracteur tore représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

2. Attracteur étrange : est une forme géométrique plus complexe qui caractérise d'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

Bassin d'attraction :

On a A un attracteur, le terme **bassin d'attraction** de A , est l'ensemble de toutes les conditions initiales x_0 , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0.$$

Points attractifs :

On a I un intervalle ouvert, sur cet intervalle on définit la fonction continue $f : I \longrightarrow I$. Le point x^* est un point fixe. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que :

$$\forall x_0 \in B_\varepsilon(x^*); x_n = f^n(x_0) \longrightarrow x^* \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

Alors x^* est s'appelle *attractif*.

Théorème 1.2.1 Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe x^* . Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout voisinage $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Alors :

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| < 1,$$

implique que le point x^* est attractif.

Remarque 1.2.1 Le nombre $S = f'(x^*)$ est appelé le multiplicateur du point fixe x^* .

On dit qu'une orbite périodique de période p $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ de f est *attractive* si chacun de ses points est un point fixe attractif de l'application f^p .

Théorème 1.2.2 Soit I un intervalle ouvert et $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ une orbite périodique de période p d'une fonction continue $f : I \longrightarrow I$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$ du point x_j et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_j pour tout $j = 1, 2, \dots, p - 1$. Alors :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x^*) \right| < 1;$$

implique que l'orbite périodique $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est attractive.

Remarque 1.2.2 $S = \frac{d}{dx} f^p(x^*)$ est appelé le multiplicateur de l'orbite périodique $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$.

Source :

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue, x^* un point fixe de f . S'il existe $\varepsilon > 0$ et :

$$\forall x_0 \in I, 0 < |x_0 - x^*| \leq \varepsilon, \exists \eta_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta_0, |x_n - x^*| > \varepsilon.$$

Donc : on peut dire que x^* est une *source* ou un point *répulsif*.

Théorème 1.2.3 Soit f une fonction continue $f : I \longrightarrow I$, I un intervalle ouvert et x^* le point fixe par f . Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout voisinage $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Si :

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| > 1,$$

alors le point x^* est répulsif.

Soit $O(x_0)$ une orbite périodique de période p de f , on dit que cette orbite est une *source* (ou répulsive) si chaque point de l'orbite est une source pour le système dynamique généré par f^p .

Théorème 1.2.4 Soit $O(x_0)$ une orbite périodique de période p d'une fonction continue f définie sur un intervalle ouvert I . Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$ du point x_j et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_j pour tout $j = 1; 2; \dots; p - 1$. Si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x^*) \right| > 1$$

alors l'orbite périodique $O(x_0)$ est répulsive.

Remarque 1.2.3 Lorsque la récurrence f est bidimensionnelle, on classifie les points fixes et les cycles selon les valeurs de leurs multiplicateurs λ_1 et λ_2 ainsi que de leurs modules.

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, un point fixe ou un cycle est dit **col** si :

$$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|.$$

Signalons qu'un col est toujours **répulsif**.

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, un point fixe ou un cycle est dit **noeud attractif** (resp. **répulsif**) si :

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2 \quad (\text{resp. } \lambda_i > 1, i = 1, 2).$$

3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$, un point fixe ou un cycle est dit **foyer attractif** (resp. **répulsif**) si :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1, \quad (\text{resp. } |\lambda_1| = |\lambda_2| > 1).$$

Exemple 1.2.1 Transformation de Chirikov :

Soit le système dynamique discret $([0, 1] \times [0, 1], N, T)$ généré par la transformation T définie par :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi y_n, & k > 0 \\ y_{n+1} = x_{n+1} + y_n \end{cases},$$

Les points fixes (x^*, y^*) de cette application sont :

$$x^* = 0 \text{ et } y^* = 0, \frac{1}{2}.$$

La matrice jacobienne de l'application aux points fixes s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm k \\ 1 & 1 \pm k \end{pmatrix},$$

Où le signe + correspond à $y^* = \frac{1}{2}$ et le signe - correspond à $y^* = 0$. L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - (2 \pm k)\lambda + 1 = 0$$

Le point fixe (x^*, y^*) est stable si :

$$|2 \pm k| < 2.$$

On en déduit que le point fixe $(x^*, y^*) = (0, \frac{1}{2})$ est toujours instable. Le point fixe $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est stable si $0 < k < 4$. Considérons un cycle d'ordre p :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi y_i, & k > 0 \\ y_{i+1} = x_{i+1} + y_i \\ x_{p+1} = x_1, y_{p+1} = y_1, & i = 1, \dots, p \end{cases},$$

La matrice jacobienne du cycle s'écrit :

$$M = \prod_{i=1}^p \begin{pmatrix} 1 & -k \cos 2\pi y_i \\ 1 & 1 - k \cos 2\pi y_i \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr}(M) + 1 = 0$$

On en déduit les valeurs propres de M :

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\beta \pm 2\sqrt{\beta(\beta - 1)}, \text{ avec } \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\text{tr}(M).$$

Si $0 < \beta < 1$, le p -cycle est stable. Sinon, les valeurs propres sont réelles avec :

$$|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$$

et le p -cycle est instable.

Chapitre 2

Systemes Chaotiques à Temps

Discrets

Un rôle très important dans la théorie moderne des systèmes dynamiques est joué par les phénomènes chaotiques. Pour les systèmes dynamiques discrets, plusieurs notions ont été introduites pour caractériser ce type de comportement : l'entropie ou les exposants de Lyapunov (Ruelle, Takens, Lorenz...).

Dans l'espace de phase, le chaos donne lieu à des trajectoires appelées attracteurs chaotiques. [Devaney, 1989] a proposé la définition suivante, couramment utilisée dans la littérature :

Un système dynamique discret (X, N, f) est chaotique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Sensitivité aux conditions initiales :

Un système dynamique discret (X, N, f) est dit sensible aux conditions initiales (S.C.I) si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X, \forall \eta > 0, \exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \eta \text{ et } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

2. Il est régulier :

Un système dynamique discret (X, N, f) est dit régulier si et seulement si l'ensemble des points périodiques est dense dans (X, d) . Autrement dit :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in P(f) / d(x, y) \leq \varepsilon,$$

où $P(f) = \{x \in X / \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in P_k(f)\}$ et $P_k(f)$ l'ensemble des points périodiques de période k .

3. Il est transitif :

Un système dynamique discret (X, N, f) est transitif si et seulement si pour chaque couple d'ensembles non-vides ouverts $A, B \subseteq X$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f^k(A) \cap B \neq \emptyset$$

2.1 Caractéristique du chaos

On va présenter quelque caractéristique qui permettent de comprendre qualitativement les points marquants d'un système chaotique elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos, et les plus connues sont :

1. Non-linéarité :

Un système chaotique est un système dynamique non -linéaire, tout simplement un système linéaire ne peut pas être chaotique

2. Non-périodicité :

Un système présentant un comportement chaotique évolue dans une orbite qui ne répète jamais sur elle-même. C'est-à-dire, les orbites ne sont jamais périodiques.

3. Imprévisible :

Il est imprévisible. C'est la sensibilité aux conditions initiales : même si on bouge à peine les données initiales, au bout d'un certain nombre d'itérations, le système sera très différent. Bien entendu, un tel comportement rend extrêmement difficile (même pour un ordinateur) le calcul de $f^n(x)$ pour un x donné, puisque la moindre erreur d'arrondi a des conséquences catastrophiques.

4. Déterminisme :

Le déterminisme se veut dire que le système ne possède aucun paramètre ou entrée stochastique ou bien d'un autre terme le système est non aléatoire.

5. Attracteur étrange :

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos.

Attracteur Chaotique : Un sous-ensemble de l'espace des phases est un attracteur chaotique si et seulement si c'est un attracteur contenant une orbite dense, présentant une sensibilité aux conditions initiales et possédant une structure fractale.

2.2 Exposants de Lyapunov

Alexander Lyapunov (1857-1918) a développé un paramètre pour quantifier la sensibilité par rapport aux conditions initiales. Les exposants de Lyapunov sont des grandeurs qui mesurent la divergence entre différentes orbites au sein d'un attracteur. C'est une généralisation de l'analyse de stabilité autour d'un point fixe ou d'une orbite (cycle limite).

2.2.1 Exposants de Lyapunov pour un système de dimension égale à 1

Soit un système dynamique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases},$$

et $f \in C^1(\mathbb{R})$, soient x_0, \bar{x}_0 deux conditions initiales très proche, telle que :

$$\bar{x}_0 = x_0 + \delta x_0.$$

On souhaite voir comment se comportent les orbites issues x_0, \bar{x}_0 , comment varie leur écart.

Etant suppose infinitésimal, il vient :

$$\bar{x}_1 = x_1 + \delta x_1 = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta x_0.$$

Donc la distance entre deux trajectoires après une itération est donnée :

$$|\delta x_1| = |f'(x_0)\delta x_0| = |f'(x_0)| |\delta x_0|,$$

et après deux itérations, on trouve :

$$|\delta x_2| = |f'(x_1)| |\delta x_1| = |f'(x_1)| |f'(x_0)| |\delta x_0|.$$

En utilisant la règle des itérations enchaîné, après n itérations, nous obtenues :

$$|\delta x_n| = |f^n(\bar{x}_0) - f^n(x_0)| = \left[\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right] |\delta x_0|.$$

On peut donner :

$$|f^n(\bar{x}_0) - f^n(x_0)| = |\bar{x}_n - x_n|,$$

alors :

$$|\delta x_n| = |\bar{x}_n - x_n| = \left[\prod_{i=0}^n |f'(x_i)| \right] |\delta x_0|,$$

si les deux orbites \bar{x}_n, x_n s'écartent à un rythme exponentiel après n itérations,

alors :

$$\begin{aligned} \frac{|\delta x_n|}{|\delta x_0|} = e^{nE} &\iff \ln \frac{|\delta x_n|}{|\delta x_0|} \simeq nE \\ &\iff E \simeq \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^n |f'(x_i)| \quad ; E \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors :

$$E = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

Donc on donne la définition suivante :

On appelle exposant de Lyapunov, la limite E (s'il existe) :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

Pour $E < 0$:

L'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov qui tend vers $-\infty$.

Pour $E > 0$:

Le comportement est chaotique (les deux orbites divergentes) c'est-à-dire ; il y a une sensibilité aux conditions initiales.

Pour $E = 0$:

L'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est

dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

Exemple 2.2.1 Soit un système dynamique à temps discret définie par :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

avec :

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \leq \frac{1}{2} \\ 4(1-x) & x > \frac{1}{2} \end{cases},$$

ce système est chaotique car :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| = \ln 4 > 0.$$

D'où le comportement est chaotique.

Exemple 2.2.2 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

le paramètre r défini dans $[0, 4]$ est responsable du type de comportement de cette dynamique. Si on calcule l'exposant de Lyapunov de ce fonction, on aura alors :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |r - 2rx_i|$$

2.2.2 Exposants de Lyapunov pour un système supérieur à

1

La relation $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|$ se généralise aux systèmes de dimension $p > 1$, qui possèdent p exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux

de divergence suivant un des axes de l'espace des phases.

On prend le système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$, $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$, sous les mêmes conditions initiales x_0, \bar{x}_0 , on a :

$$\delta x_1 = J(x_0)\delta x_0,$$

où $J(x_0)$ désigne la matrice jacobienne de f en x_0 .

Après n itérations, on obtient :

$$\delta x_n = \prod_{i=0}^n J(x_i)\delta x_0.$$

Le produit des matrices jacobiennes est :

$$\prod_{i=0}^n J(x_i) = J(x_0) \times J(x_1) \times \dots \times J(x_n).$$

On note $\prod_{i=0}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$ ainsi :

$$\delta x_n = J^n(x_0) \times \delta(x_0)$$

où $J^n(x_0)$ représente la matrice Jacobienne de $f^n(\cdot)$ au point x_0 , il s'agit d'une matrice carré de $p \times p$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_p telle que :

$$D_p^n = P_p^{-1} \times J^n \times P_p,$$

une matrice diagonale des valeurs propres λ_i de $J^n(x_0)$, $i = 1, \dots, p$,

On définit les p exposants de Lyapunov E_i ($i = 1, \dots, p$) de la manière suivante :

$$E_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\lambda_i|.$$

-Si $E_i \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ avec $\sum_{i=0}^p E_i < 0$, l'attracteur est non chaotique.

-Si $\exists E_i > 0$, avec $\sum_{i=0}^p E_i < 0$, l'attracteur est étrange.

Soit f une fonction sur la droite réelle \mathbb{R} de class C^1 , si une orbite $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ périodique de f satisfait $|f'(x_i)| \neq 0$ pour tout i et est asymptotiquement périodique à une orbite périodique $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, alors ces deux orbites ont les même exposants de Lyapunov.

2.2.3 Dimension de Lyapunov

Un paramètre permettant de mesurer la dimension de chaos, ou bien d'une autre façon, est un outil pour déterminer la structure géométrique d'un attracteur, cet outil se base sur l'exposant de Lyapunov. Kaplan et Yourk ont suggéré de calculer la dimension d'un attracteur dans l'espace de dimension $d > 1$ en utilisant les exposants de Lyapunov associe de cet attracteur.

Soit A un attracteur représente dans l'espace multidimensionnelle de dimension d . Classant les exposants de Lyapunov $E_1 \geq E_2 \geq E_3 \geq \dots \geq E_n$, la dimension de Lyapunov D_L est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j E_i}{E_{j+1}},$$

où j est le plus grand entier qui satisfait $E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_j \geq 0$.

Les exposants de Lyapunov de la transformation du boulanger sont :

$$E_1 = \log 2, \quad E_2 = \log \frac{a}{2},$$

d'où :

$$D_L = 1 + \frac{\log 2}{\log 2 - \log a}.$$

Donc : l'attracteur de boulanger est de structure fractale.

2.3 Bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la *théorie de la bifurcation*. Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier change. La théorie de bifurcation s'intéresse aux familles des systèmes dynamique dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$.

Le mot *Bifurcation*, introduit par Poincaré est employé pour désigner un changement qualitatif du comportement du système au cours de l'évolution d'un ou plusieurs paramètre. On dit qu'il y a bifurcation. Par bifurcation locale, on entend une modification du comportement du système au voisinage d'un point fixe (ou d'une solution périodique). Tout autre changement sera désigné par le terme de bifurcation globale

Le point où se produit la bifurcation est appelé point de bifurcation. La représentation des branche de points fixe dans cet espace afin de localiser les bifurcation, permet d'établir ce qu'on nomme "*diagramme de bifurcation*".

Le nombre de paramètre μ_i nécessaire à l'apparition d'une bifurcation s'appelle la codimensions de la bifurcation.

Mathématiquement on a :

Soit un système dynamique à temps discret définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(\mu, x_n) \\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{cases},$$

où μ le paramètre de contrôle.

L'idée :

Lorsque l'on fait varier le paramètre on dit qu'il se produit une bifurcation quand il apparaît dans le voisinage du point fixe, c'est -à-dire s'il existe $\mu^* \in \mathbb{R}^+$ tel que :

* **Pour** $\mu < \mu^*$; x^* stable.

* **Pour** $\mu > \mu^*$; x^* instable.

Où μ^* est appelé valeur de bifurcation (locale) et x^* est appelé point de bifurcation.

Définition 2.3.1

Une bifurcation est changement de type topologique du système (changement qualitatif et quantitatif) lorsque le paramètre μ passe à travers une valeur critique $\mu = \mu^*$ appelé valeur de bifurcation.

Définition 2.3.2

Le diagramme de bifurcation est un tracé de point de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle.

2.3.1 Différents types de bifurcation

Dans cette subsection, on considère trois types de bifurcation locales :

1. Bifurcation flip ou de doublement de période.

2. Bifurcation fold ou Nœud-col.
3. Bifurcation de Neimark-sacker

Bifurcation flip ou doublement de période :

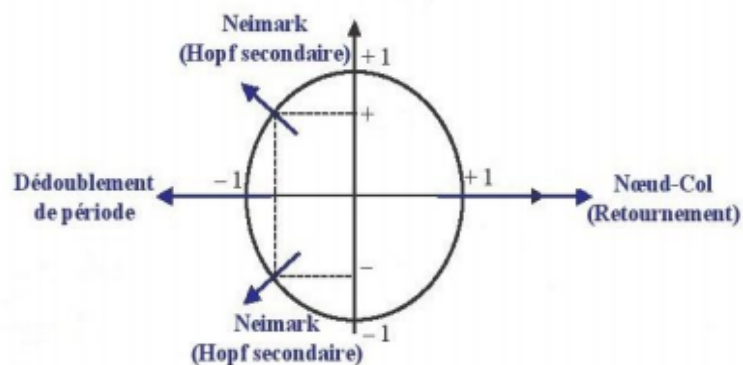
Cette bifurcation à lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à -1 un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire un point fixe stable d'ordre 1 ; par exemple devient instable en même temps que l'application d'un cycle d'ordre 2 stable.

Bifurcation fold ou Nœud-col :

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre k , de stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et ont un multiplicateur S égal à 1.

Bifurcation de Neimark :

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice jacobienne possède deux valeurs propres complexe conjuguée $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.



Différents types de bifurcations.

2.3.2 Transition vers le chaos

Une route vers le chaos est une séquence spécifique de bifurcations menant d'une évolution totalement prévisible (possède par exemple un point fixe stable) à une évolution chaotique. Une caractéristique remarquable, découverte dans les années 1980s, est que ces séquences sont souvent qualitativement identiques, même si les systèmes physiques sont totalement différents. C'est ce qu'on appelle l'universalité des routes du chaos. On a pu mettre en évidence trois grands scénarios de passage d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre.

Trois routes typiques ont été mises en évidence pour les systèmes dissipatifs, chacune associée à un type de bifurcation : la route de doublement de période associée à la bifurcation flip ou doublement de période, la route d'intermittence associée à la bifurcation fold ou nœud col et la route de Ruelle-Takens associée à la bifurcation de Neimark-Sacker.

Cascade de doublements de période :

Cette route décrit le passage d'une situation où le système dynamique atteint un état d'équilibre (c'est-à-dire un point fixe stable) à un régime chaotique par une succession de bifurcations de type doublement de périodes.

Ce scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu. Par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16,... ,etc. Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique.

Par intermittence :

La route appelée intermittence décrit la persistance de phases régulières et prévisibles dans une dynamique globalement chaotique. Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle "bouffée" plus tard. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s'accroître plus on s'éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition.

Scénario de Ruelle et Takens ou quasi-périodicité :

Qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de **Jean Christophe Yoccoz**, leur éat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

2.4 Modèle de Hénon

Maintenant, nous donnons une illustration concrète de toutes les notions précédentes par un exemple célèbre de systèmes dynamiques chaotique discrets dans le plan. Alors, on va cherché les points fixes et étudie la stabilité de ces points, après la localisation des courbes de bifurcation et leurs évolution dans le plan paramétrique.

2.4.1 Présentation et définition du système de Hénon

Le système de **Hénon** est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien **Michel Hénon**. **Hénon** fait des recherches pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque **Pomeau** expose l'idée de réaliser des systèmes dynamiques plus simples encore que celui de **Lorenz**, mais présentant des caractéristiques similaires, et qui permettraient de prouver plus clairement des "évidences" mises en lumière par les calculs numériques.

Puisque le raisonnement repose sur la section de **Poincaré** il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de Lorenz et son attracteur étrange. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de *système de Hénon*.

Le modèle de **Hénon** consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante :

$$H(X_n; Y_n) : \begin{cases} X_{n+1} = -aX_n^2 + Y_n + 1 \\ Y_{n+1} = bX_n \end{cases},$$

où a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. et $X_n; Y_n$; un point de coordonnées. On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(X; Y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

2.4.2 Calcul des points fixes

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation $H(X_n; Y_n) = (X_n; Y_n)$:

$$H(X_n; Y_n) = (X_n; Y_n) \iff \begin{cases} -aX_n^2 + Y_n + 1 = X_n \\ bX_n = Y_n \end{cases}, \quad (*)$$

Pour $|b| < 1$, $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ on a :

1. Si $a < a_0(b)$; l'itération H n'a aucun point fixe.
2. Si $a = a_0(b)$; l'itération H a un seul point fixe.
3. Si $a > a_0(b)$; l'itération H a deux points fixes.

Le discriminant de l'équation (*) est donné par l'équation :

$$(b-1)^2 + 4a = 0.$$

Donc pour $|b| < 1$, $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ on a :

1. Si $a < a_0(b)$; $X_{\pm}(a; b)^2 \notin \mathbb{R}^2$; alors dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour H .
2. Si $a = a_0(b)$; nous obtenons $X_+(a; b) = X_-(a; b) = \frac{b-1}{2a}$. Donc dans ce cas le système H admet exactement un seul point fixe $(X_1, Y_1) = (\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$.
3. Pour $a > a_0(b)$; nous avons $X_+(a, b)$ et $X_-(a, b)$ dans \mathbb{R}^2 et $X_+(a, b) \neq X_-(a, b)$
 Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme : $P_1 = (X_1, Y_1)$; et $P_2 = (X_2, Y_2)$

avec :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{b-1+\beta}{2a} \\ Y_1 = b(\frac{b-1+\beta}{2a}) \end{cases}, \quad \begin{cases} X_2 = \frac{b-1-\beta}{2a} \\ Y_2 = b(\frac{b-1-\beta}{2a}) \end{cases}, \quad (**)$$

où : $\beta = \sqrt{4a + (b-1)^2}$.

Stabilité des points fixes

La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation $\det(J - \lambda I) = 0$; où I est la matrice identité et J est la matrice jacobienne donne par l'expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2aX & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique suivant :

$$\lambda^2 + 2aX\lambda - b = 0$$

Alors les valeurs propres (multiplicateurs) de la récurrence de Hénon sont :

$$\lambda_1 = -aX + \sqrt{a^2X^2 + b}, \quad \lambda_2 = -aX - \sqrt{a^2X^2 + b}$$

1. Pour le point fixe $P1$:

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -(b - 1 + \beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(b - 1 + \beta) - b$$

On résout donc :

$$\Delta = (b - 1 + \beta)^2 + 4b$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \beta + \sqrt{b + \frac{1}{4} (\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \beta - \sqrt{b + \frac{1}{4} (\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \right)$$

2. Pour le point fixe P2 :

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -(b - 1 - \beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(b - 1 - \beta) - b.$$

On résout donc :

$$\Delta = (b - 1 - \beta)^2 + 4b.$$

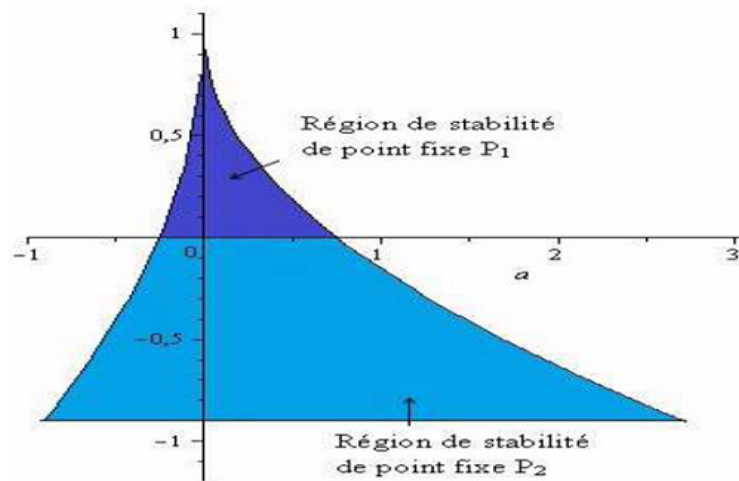
Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{a} \left(\sqrt{b + \frac{1}{4} (b + \beta - 1)^2} + \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \right), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{a} \left(\sqrt{b + \frac{1}{4} (b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \right).$$

Il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la signe positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$. et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont $(-1, 1314; -0, 3394)$ et $(0, 6314; 0, 1894)$, les valeurs propres au premier point d'équilibre sont $(2, 3284; -0, 0657)$ et les valeurs propres au deuxième point sont $(0, 5657; -1, 8284)$. D'où le premier est un point selle et le deuxième est

clairement un point stable.

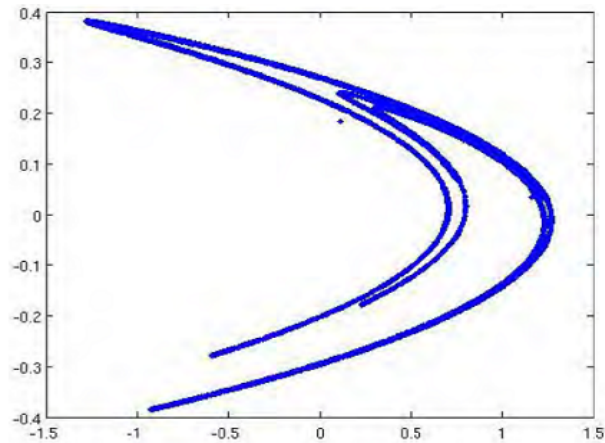


Les régions de la stabilité des points fixes P_1 et P_2

2.4.3 Attracteur de Hénon pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$

Le modèle de Hénon est un système dynamique de comportement chaotique les plus étudiés. Il dépend de deux paramètres a et b , qui ont pour valeurs canoniques : $a = 1,4$ et $b = 0,3$. Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de a et b , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique. On peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur. voir

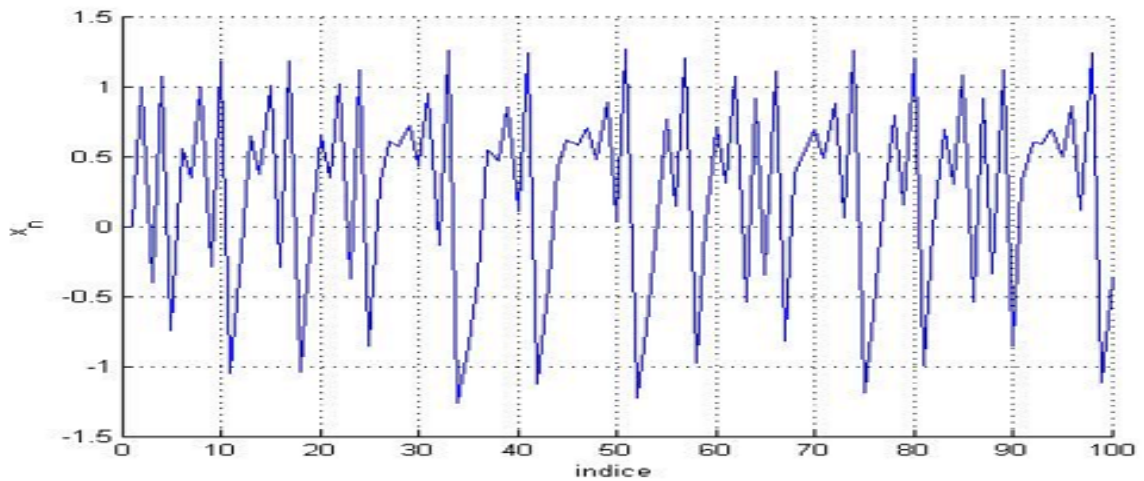
figure (2,3).



Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$; $b = 0.3$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement.

On peut voir aussi comment évoluent les variables X et Y pour une condition initiale $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, voir *Figure (2,4)* et *Figure (2,5)* respectivement. On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.



Les 100 premières itérées de X_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0; Y_0) = (0; 0)$

Analyse numérique de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système de Hénon.

Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$.

Lemme 2.4.1

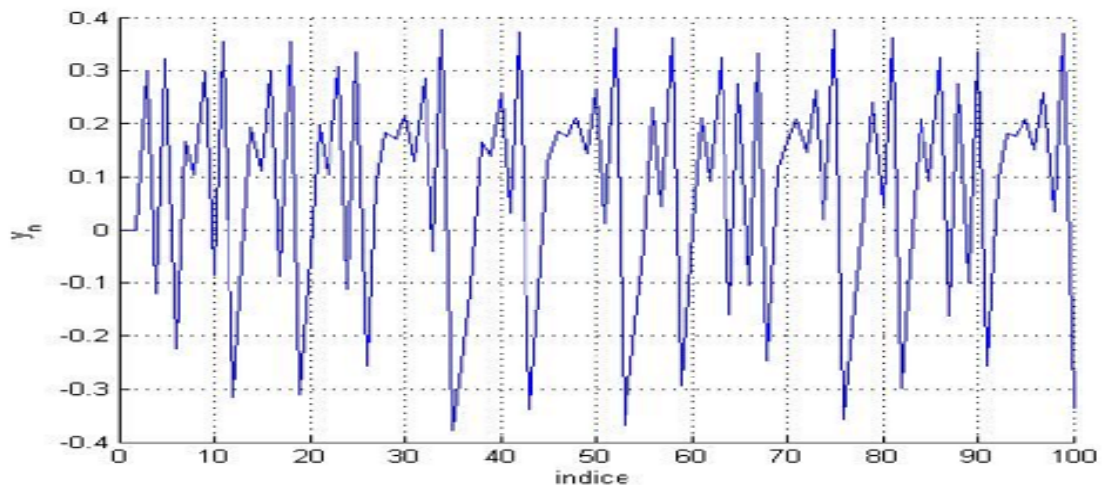
Pour $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$ et $\beta = 0$ le système de Hénon a un unique point d'équilibre en $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ avec les valeurs propres $\{1, -b\}$ indiquant une bifurcation selle-noeud.

En substituant $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ et $\beta = 0$ dans l'équation (2.2) les deux points d'équilibre se trouvent à s'imbriquer les uns les autres en $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ La jacobienne du système en ce point d'équilibre est :

$$\begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi les valeurs propres sont $\{1, b\}$.

On considère la bifurcation selle-noeud avec un exemple numérique.



Les 100 premières itérées de Y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0; Y_0) = (0; 0)$

Proposition 2.4.1

Pour $b = 0,3$ et $a = -1,1225$; le point d'équilibre du système est $(2,8571; 0,8571)$ indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la *Figure(2,6)*. La région de a de la branche stable est comprise entre $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$.

Proposition 2.4.2

Pour le cas particulier de $a = 0,3675$ une bifurcation par doublement de la période est observée.

Pour $a = \frac{3}{4}(b-1)^2 = 0,3675$; le système de Hénon a deux points d'équilibre en $(0,9524; 0,2857)$. Les valeurs propres sont $\{-1; 0,3\}$ et $\{2,2343; -0,1343\}$ En effet, quand a s'approche de $0,3675$, une orbite périodique de période 2 est constatée.

Diagramme de bifurcation :

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 1,4 avec un pas de 0,001, b est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :

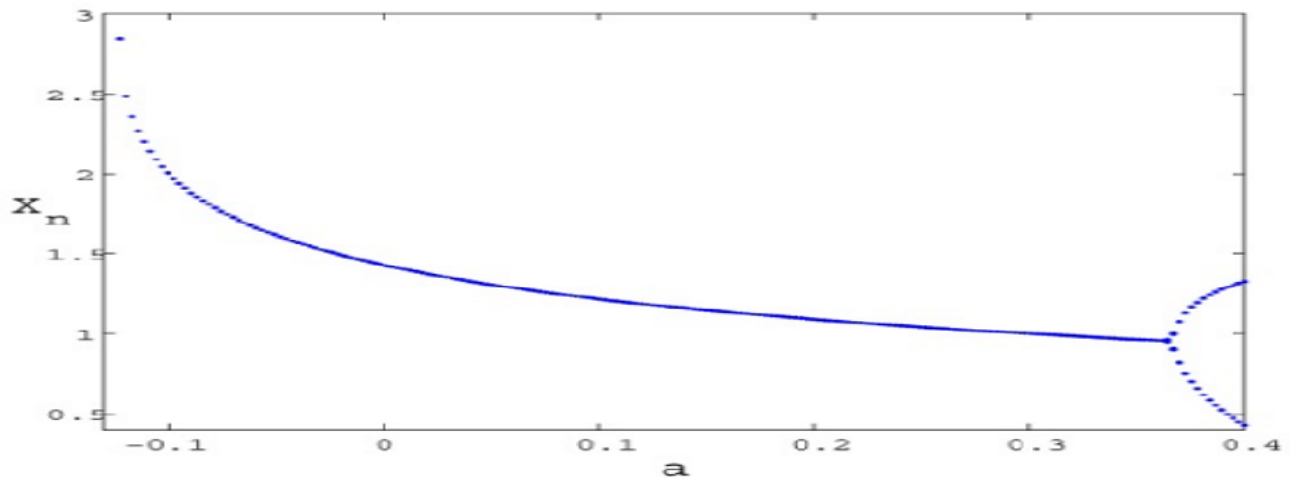


Diagramme de bifurcation pour le système de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$ et $b = 0,3$

1. Si $0,1225 < a < 0,3675$; les itérations convergent vers un point du plan
2. Si $0,3675 < a < 0,9$; les itérations tendent à constituer une suite (X_n, Y_n) telle que (X_{2n}, Y_{2n}) converge vers un point et (X_{2n+1}, Y_{2n+1}) converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.
3. Si $0,9 < a < 1,02$; on assiste à un nouveau doublement de période. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.
4. Pour $a \geq 1,02$; on ne distingue plus les cycles, et donc le système est chaotique.

2.4.4 Sensibilité aux conditions initiales

Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines ? Prenons par exemple $(X_0, Y_0) = (0,001; 0,001)$. On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quand à $(X_0, Y_0) = (0; 0)$; voir *figure (2.8)* et *figure (2.9)*.

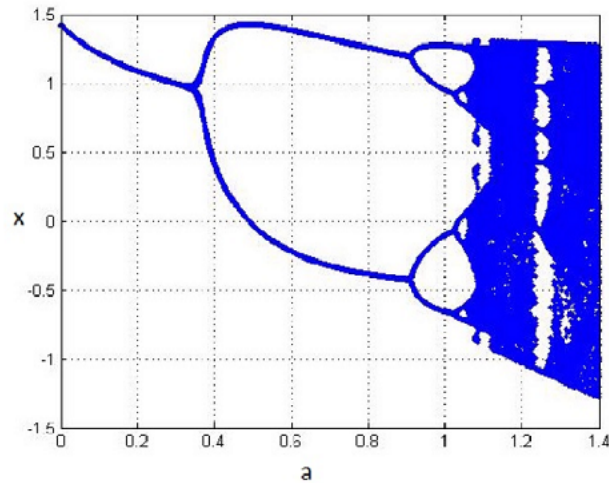


Diagramme de bifurcation de Hénon

2.4.5 Exposants de Lyapunov

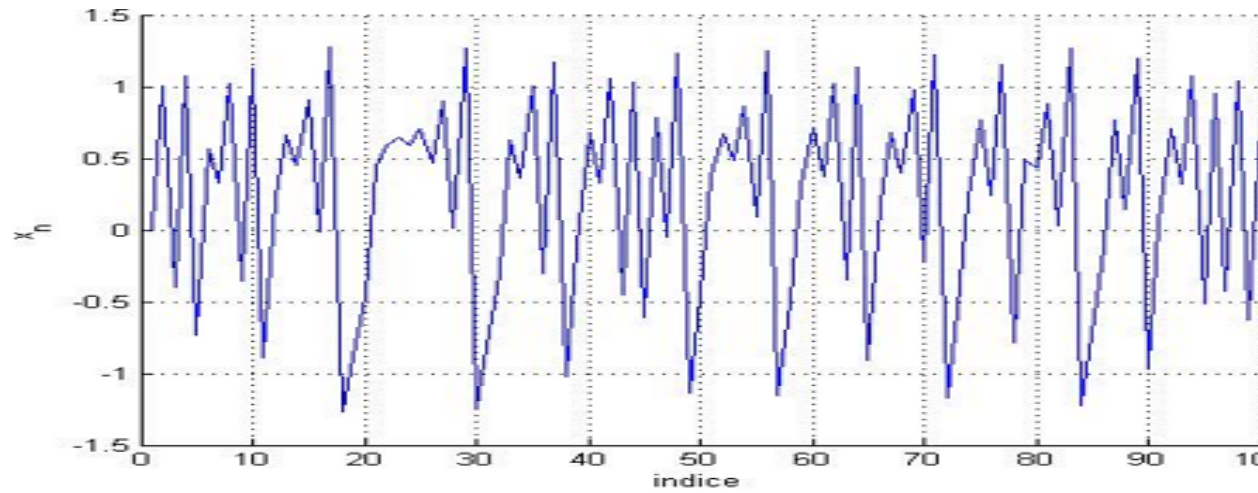
Pour justifier l'apparition de l'état chaotique et pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b

- * Pour $a = 1,4; b = 0,3$; l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0,42205; \lambda_2 = -1,626$ la dimension de Lyapunov par définition est égale à $D_L = 1,2596$
- * On fixe $b = 0,3$, on laisse a varier entre 0 et 1,4

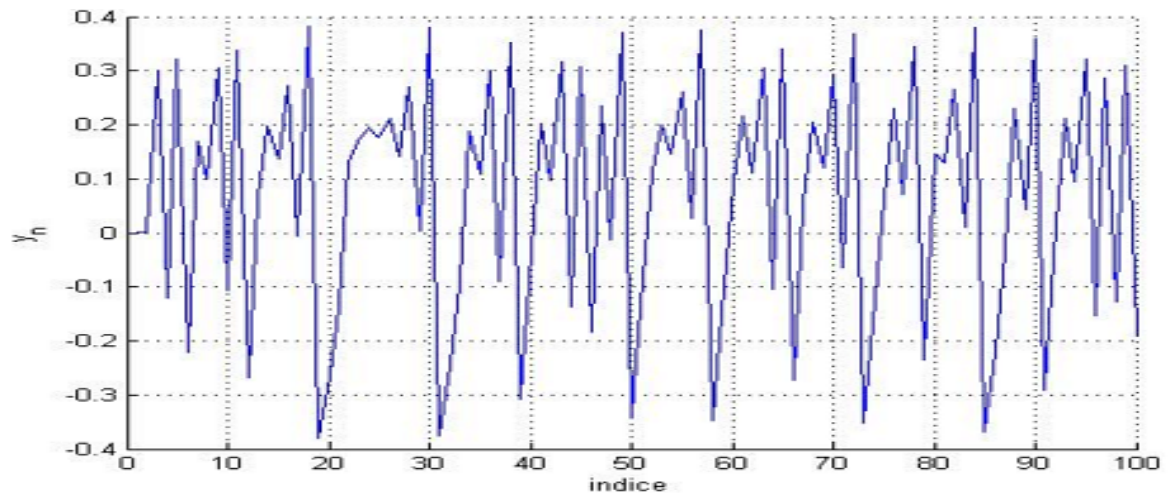
A partir de la *Figure(2.10)* on obtient deux zones :

- * Une zone stable lorsqu' a varie dans l'intervalle $[0, 1.052]$.

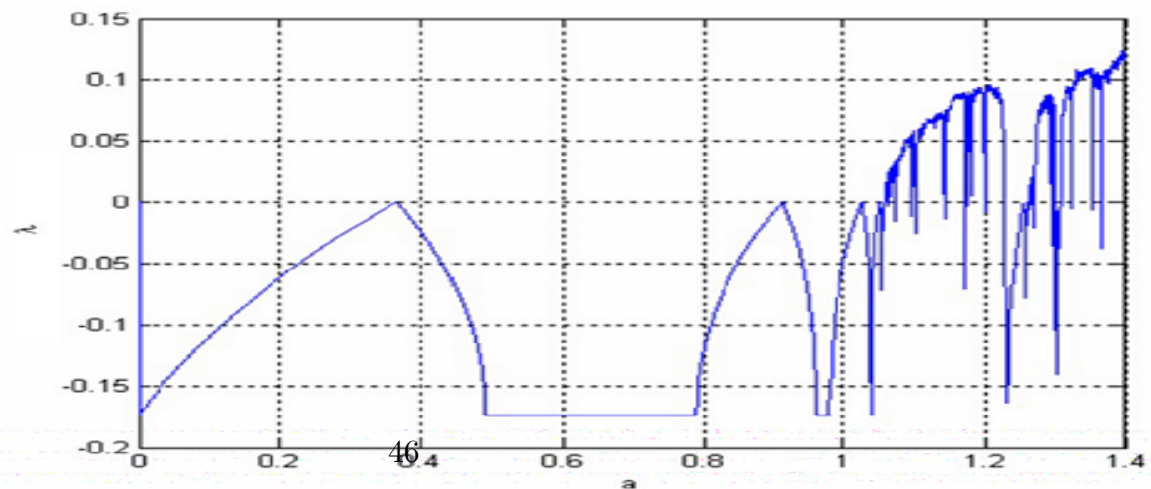
* Une zone chaotique lorsqu' a varie dans l'intervalle]1.052, 1.4].



Les 100 premières itérées de X_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0; Y_0) = (0.001; 0.001)$



Les 100 premières itérées de Y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0; Y_0) = (0.001; 0.001)$



L'évolution de l'exposant le Lyapunov de système de Hénon en fonction de a

Conclusion

Les travaux exposés dans ce mémoire avait comme objectif générale d'étude des systèmes dynamique chaotique discret. Premièrement on a introduite la notion d'un système dynamique à temps discret et on a essayé de donne une idée totale, et on a entamé tout les notions de base et les outils mathématiques nécessaires sur le système dynamique discret.

Deuxièmes à maîtriser et à comprendre certaines des propriétés complexes de la dynamique chaotique discrète. Nous avons également vu des illustrations concrètes de quelque notion précédente par un exemple célèbre modèle de *Hénon*.

Bibliographie

- [1] Bonnefoy Olivier. Systèmes dynamiques et instabilités hydrodynamiques (08/04/2021).
- [2] Manneville Paul. Systèmes non-linéaire et chaos (2006).
- [3] Oded, G. Discrete Dynamical Systems. Springer (2007).
- [4] Benzemam Djamila. Systèmes chaotiques et hyperchaotiques pour la transmission sécurisée de données. Thèse de magister en Télécommunications université Abou Bekr Belkaid Tlemcen (2009-2010).
- [5] Hamaizia Tayeb. Systèmes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique". Thèse de Doctorat université Constantine-1- (25/04/2013)
- [6] Talbi Ibtissem . Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie). Mémoire de Magistère en Mathématique université Mentouri de constantine (29/06/2010).
- [7] Kihal Ahmed Ridha. Systèmes dynamiques pour la transmission sécurisée de données. Mémoire de Magistère en Electronique. Université Mohamed Khider Biskra (26/11/2013).
- [8] Saidi, Messaoud. Etude dynamique d'une application discrète du plan. Université de M'SILA (2012)

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous étudions le système dynamique chaotique dans le cas discret, et pour cela nous avons traité d'abord les concepts généraux et quelques définitions nécessaires pour le système dynamique discret, puis le deuxième chapitre que nous avons consacré à l'étude du système dynamique chaotique discret, ou nous avons abordé la définition de chaotique et bifurcation, ainsi que les exposants de Lyapounov avec quelques exemples pratiques dont modèle de Hénon.

Mots clé :

Chaos, système dynamique, système chaotique, bifurcation.

ABSTRACT

In this memoir, we have studied the chaotic dynamic system in the discrete case, and for this we dealt first with the general concepts and some necessary definitions for the discrete dynamic system, then the second chapter we devoted to the study of the discrete chaotic dynamic system, where we touched on the definition of the chaotic and bifurcations, as well as the exposants of Lyapounov, and applied exemples including the Henon model.

Key words :

Chaos, dynamic system, chaotic system, bifurcation.

المخلص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة النظام الديناميكي الفوضوي في الحالة المنفصلة, ولهذا تناولنا أولاً المفاهيم العامة وبعض التعريفات الضرورية الخاصة بالنظام الديناميكي المنفصل. ثم الفصل الثاني خصناه لدراسة النظام الديناميكي الفوضوي المتقطع حيث تطرقنا لتعريف الفوضى والتفرعات وكذلك أسس اليافونوف , طرحنا بعض الأمثلة التطبيقية منها نموذج هان .

الكلمات المفتاحية:

الفوضى, نظام ديناميكي, نظام فوضوي , التفرعات