République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Mebarki Asma

Titre :

Les conditions nécessaires d'optimalités pour les EDSPR de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	ABBA Abedlmajid	UMKB	Président
Pr.	GHERBAL Boulakhras	UMKB	Encadreur
Dr.	ROMEILI Nacira	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon cher pére "**Nour eddine**", que Dieu le protége, et à ceux qui m'ont soutenu dans la vie, et à ceux qui ont étaient éveillés et fatigue pour se reposer, au reste de mes yeux et de mon sœur, ma chère mère "**Mabrouka**", Dieu allonge sa vie, en fait une tente au-dessus de nos tete.

À mes cher fréres : Youcef, Charaf eddine et Abd Raouf.

À mes belles soeurs : Fatma, Amira et Somia.

À mes chéres amies : Hasnia, Chaima, Mounira, Bothaina, Rim.

REMERCIEMENTS

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à **ALLAH** tout puissant, de m'avoir donné la force, le moral et la santé de bien terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercies vivement tous mes professeurs.

Je remercie mon encadreur **Pr. GHERBAL Boulakhras**, pour m'avoir proposé ce projet et pour son

encadrement, je le remercie vivement pour son écote, son aide et pour ses conseils.

Ainsi, je remercie les membres du jury Dr. ABBA ABEDELMAJID et Dr. ROMILI NACIRA qui ont acceptent d'évaluer mon projet, je leurs présent

toute mesgratitudes et mes profonds respects.

Et une mention spéciale de notre professeur et chef de département de mathématiques

Mokhtar HAFAYED.

Je souhaite exprimer enfin ma gratitudes et mes vifs remerciments à toute la famille et mes amis

pour leurs soutien

Merci à tout

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques progressives et rétrogrades (EDSPR) ont été introduites par Bismut en 1973, [2],dont le but est de résoudre un problème de théorie du contrôle, en particuler le principe de maximum. A l'époque, il s'agissait de résoudre un système découplé d'une équation différentielle stochastique progressive classique (EDS) et une équation différentielle stochastique linéaire rétrograde (EDSR) qui représente l'équation adjointe.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un problème de contrôle relaxé pour des systèmes dirigés par des équations différentielles stochastique progressives et rétrogrades **(EDSPR)**. En particulier, on va établir les conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe de maximum pour le contrôle relaxé optimal pour un problème de contrôle gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} dy_t = b\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right], u\right) \mu_t\left(du\right) dt + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right]\right) dW_t \\ dY_t = -f\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right], Y_t, \mathbb{E}\left[Y_t\right], Z_t, \mathbb{E}\left[Z_t\right], u\right) \mu_t\left(du\right) dt \\ \qquad\qquad -Z_t dW_t \\ \qquad X_0 = x \quad , Y_T = h\left(X_T, \mathbb{E}\left[X_T\right]\right) \quad , t \in [0,T], \end{cases}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défni dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et b, et f sont des fonctions mesurables. La fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est définie sous la forme

$$\mathbb{J}(\mu) := \mathbb{E}\left[\alpha\left(y_T^\mu, \mathbb{E}\left[y_T^\mu\right]\right) + \beta\left(Y_0^\mu, \mathbb{E}\left[Y_0^\mu\right]\right) \right.$$
$$\left. + \int_0^T \int_{\boldsymbol{U}} l\left(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], Y_t^\mu, \mathbb{E}\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, \mathbb{E}\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu_t(du)\, dt\right].$$

Nous disons qu'un contrôle relaxé q est un contrôle optimal si

$$J(q) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu).$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Chapitre 1 Dans le premier chapitre, on donne un petit rappel sur le calcul stochastique : les processus stochastiques, filtation, mesurabilité, adaptation, esperance conditionnelle, mouvement Brownien, Martingale, intégrale stochadtique et les équations différentielles stochastiques.

Chapitre 2 Dans ce chapitre, on étude un type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires ce type s'appel de champ moyen, où le système est dépend du processus d'état, ainsi que de sa distribution. On va donner la démonstration du résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes dérigés par des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, de type champ moyen, en utilisant l'itération de Picard.

chapitre 3 : Notre objectif dans le troisième chapitre, est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme de principe de maximum stochastique, pour les contrôles relaxés pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, de type champ moyen. Pour atteindre cet objectif, nous donnons les étapes nécessaires. L'idée ici est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, en appliquant la méthode de perturbation faible (convexe).

Chapitre 1

Rappel de calcul stochastique

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles en théorie des calculs stochastique,en suite nous rappelons l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques (EDS).

1.1 Espace de probabilités

Définition 1.1.1 *On appelle un espace de probabilité, tout triple* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *où* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable et* P *est une probabilité sur* $\mathcal{F}$[5].

Proposition 1.1.1 *L'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est dit complet si* $N \subset \mathcal{F}$ *telle que* N *la famille de toute les ensembles négligeable de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$[5].

1.1.1 Variable aléatoire

Définition 1.1.2 *Soient* (Ω, A) *et* (E, F) *deux espaces mesurables. On appelle variable aléatoire toute application de* Ω *dans* E *telle que :*$\forall B \in F$, $X^{-1}(B) \in A$ *avec*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Définition 1.1.3 *On dit que X défnie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans un espace mesurable (E, B) ; est mesurable si $X^{-1} \subset \mathcal{F}, \forall A \in B$ et*

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} = (X \in B) \in \mathcal{F}.$$

1.1.2 Mesurabilité

Définition 1.1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et (E, E) deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, E)$-mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \varepsilon$, on a*

$$f^{-1(A)} =^{def} \{\omega \in \Omega / f(\omega) \in A\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les tribus employées, on dit simplement que f est mesurable.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est Borélienne si elle est $(B_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}})$-mesurable, soit $f^{-1}(A) \in B_R$, $\forall A \in B_{\mathbb{R}}$.Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles A.

Les fonctions continues sont Boréliennes[1].

Proposition 1.1.2 *Si X est une v.a.r. $\mathbf{G}$-mesurable et f une fonction Borélienne, $f(X)$ est $\mathbf{G}$-mesurable*

*Une v.a. **G** mesurable est une limite croissante de v.a. du type $\sum_{i=1}^{n} a_i \amalg_{Ai}$ avec $A_i \in \mathbf{G}$.*

Une fonction Borélienne est une limite croissante des fonctions du type $\sum_{i=1}^{n} a_i \amalg_{Ai}$ où A_i est un intervalle.

1.2 Processus stochastiques

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique à valeurs dans un espace E muni d'une tribu ε, est une famille $X = \{X_t\}_{t\in\tau}$ des variables aléatoires défnies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, ε).*

Remarque 1.2.1 *L'indice t désignera le temps, τ sera donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$. On se placera dans le cadre des processus à temps continu, i.e. $\tau = \mathbb{R}$ ou éventuellement, $\tau = [0, T]$.*

$T < \infty$, dans quelques cas on seplacera dans le cas discret, i.e $\tau = \{1, 2, ..., n\}, (n < \infty)$. Donc sauf mention contraire, $\tau = \mathbb{R}_+$.

1.2.1 Filtration

Définition 1.2.2 *Une Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est une collection croissante de sous-tribus de A, i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset A$ pour tous $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.*

Remarque 1.2.2 *$\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps.*

Définition 1.2.3 *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit $\mathcal{F}$-adapté si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \in [0, T]$[3].*

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un $\mathcal{F}$-**mouvement Brownien** (standard) est un processus B vérifiant :*

i) B est $\mathcal{F}$-adapté,

ii) $B_0 = 0$, P-p.s.,

iii) B est continu, i.e., $t \to B_t(\omega)$ est continue pour P-presque tout $\omega \in \Omega$,

iv) B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$,

v) B est à accroissements stationnaires et gaussiens : $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Par fois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la filtration à considérer ou lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du processus B, on parlera de mouvement Brownien tout court[3].

1.3.1 Espérance

Définition 1.3.2 *X une variable aléatoire réelle défnie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; on appelle espérance de X, et on la note $\mathbb{E}[X]$; intégrale de Lebesgue de X relativement à la mesure P :*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} X dP.$$

Définition 1.3.3 *Soit X un vecteur aléatoire continu à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec une fonction de densité $f_X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$*

Soit $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) f_X(x) dx.$$

1.3.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.3.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire réelle intégrable et $\mathbf{G}$ une sous -tribu de $\mathcal{F}$. Il existe une unique variable aléatoire réelle $\mathbf{Y}$ - à un négligeable près appelée espérance conditionnelle de X relativement à $\mathbf{G}$, telle que :*

· **Y** *est* **G**–*mesurable.*

· **Y** *est intégrable.*

· $\forall G \in \mathbf{G}, \mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[Y \mid G]$ *c'est-à-dire :*

$$\int_G X(\omega)P(d\omega) = \int_G Y(\omega)P(d\omega).$$

Définition 1.3.5 *Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; on a :*

$$\mathbb{E}[X \mid Z] = \mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Z)\right].$$

1.3.3 Propriéts de l'espérance conditionnelle

Propriétés 1.3.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilité,* **G** *sous tribu de* $\mathcal{F}$ *et* **X**, **Y** *deux variables aléatoires dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, P)$*,on a les propriétés*

– Linéarité si $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, P); \forall a; b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid G] = a\mathbb{E}[X \mid G] + b\mathbb{E}[Y \mid G].$$

– Croissance : $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X \mid G] \leq \mathbb{E}[Y \mid G]$.

– $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G]] = \mathbb{E}\left[X\right]$.

– Si **X** est **G**–mesurable alors :

$$\mathbb{E}[X \mid G] = X.$$

– Si **Y** est une variable aléatoire **G**-mesurable alors :

$$\mathbb{E}[XY \mid G] = Y\mathbb{E}[X \mid G].$$

– Si X indépendant de $\mathbf{G}$ alors :

$$\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X].$$

– Soient $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$, si $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G] \mid H] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid H] \mid G] = \mathbb{E}[X \mid H].$$

– Si X variable aléatoire telle que $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P), p \geq 1$ alors :

$$\|\mathbb{E}[X \mid G]\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|X\|_{\mathcal{L}^p}.$$

– L'espérance conditionnelle est dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.3.4 Martingale

Définition 1.3.6 *Un processus aléatoire $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}$-**martingale** si*

i) M est $\mathcal{F}$-adapté,

ii) $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, pour tout $t \in [0, T]$,

iii) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que : $s \leq t$.

Un processus M est une $\mathcal{F}$-**sur-martingale** (resp. une $\mathcal{F}$-**sous-martingale**) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$ (resp. $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$) pour tout s, $t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.[3]

Remarque 1.3.1 *Soit M une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$, alors :*

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s],$$

pour tout s, $t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$.

Définition 1.3.7 *Une famille des variables aléatoires* $(X_t; t \in [0, \infty[)$ *est une martingale par rapport à la flltration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable et intégrable pour tout* t.

$$\mathbb{E}([X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s \leq t.$$

1.4 Intégrale stochastique

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et de défnir l'intégrale $\int\limits_0^\infty \theta_s dW_s$ pour des processus stochastiques θ.

Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j, telles que $0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$, soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \Pi_{]t_j, t_{j+1}]}(s).$$

On défnit alors :

$$\int\limits_0^\infty \theta_s dW_t = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right).$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0 \text{ et } var\left(\int\limits_0^\infty \theta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On obtient :

$$\int\limits_0^t \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t} \right).$$

Remarque 1.4.1 *Si T_j, $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, si :$\theta_s = \theta_j \Pi_{]T_j,T_{j+1}]}(s)$ où θ_j est une suite de variables aléatoires telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{T_j}$mesurable, appartienne $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on défnit alors :*

$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(W_{T_{j+1}\wedge t} - W_{T_j \wedge t} \right).$$

Cas général

On défnit les processus continus à gauche limités à droite (cáglád) de carré intégrable appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble Δ des processus θ adaptés cáglád , $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 \overset{déf}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_t^2 dt\right] \leq \infty.$$

On dit que θ_n converge vers θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si $\|\theta - \theta^n\|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

L'application $\theta \to \|\theta\|$ défnie une norme qui fait de Δ un espace complet.

Alors on peut défnir $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour tous les processus θ de Δ : on approche θ par des processus étagés. Soit

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n,$$

où

$$\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n \Pi_{]t_j,t_{j+1}]},$$

avec $\tilde{\theta}^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right),$$

dont l'espérance est 0 et la variance

$$\mathbb{E}\left[\sum_j \tilde{\theta}^2 \left(t_{j+1} - t_j\right)\right].$$

On a alors :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On note :

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s \overset{déf}{=} \int_0^\infty \theta_s \Pi_{[0,t]}\left(s\right) dW_s.$$

Si θ est étagé :

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_i \theta_i \left(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}\right).$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $\Pi_{[0,\tau]}\left(t\right)$ est adapté et on défnit :

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta_s dW_s = \int_0^t \theta_s \Pi_{[0,\tau]}\left(s\right) dW_s.$$

1.4.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

1. L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

   1. $\int_0^T (aX_1 + bX_2)(s)\,dW(s) = a\int_0^T X_1(s)\,dW(s) + b\int_0^T X_2(s)\,dW(s)$.
   2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)\,dW(s)\right] = 0.$
   3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)\,dW(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)^2\,ds\right)$, (iséométrie d'Itô).
   4. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_1(s)\,dW(s)\right)\left(\int_0^T X_2(s)\,dW(s)\right)\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T X_1(s)\,X_2(s)\,ds\right).$
   5. $\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)\,dW(s) \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)\,dW(s)$, (propriété martingale).

1.5 Intégrale de Winer

Définition 1.5.1 *On note $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que : $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty$. C'est un espace de Hilbert pour la norme*

$$||f||_2 = \left(\int_0^{+\infty} (f(s))^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.5.1 Formule d'Itô

Théorème 1.5.1 *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s. :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f\prime(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(B_s)ds \quad ,\forall t \leq T$$

Définition 1.5.2 *La notation infinitésimale de cette relation est :*

$$df(B_s) = f\prime(B_s)dB_s + \frac{1}{2}f"(B_s)ds.$$

1.5.2 Processus d'Itô

Définition 1.5.3 *Un processus X est un processus d'Itô s'il écrit sous la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s., pour tout t, et σ est un processus appartenant à Λ. On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coeffcient b est le drift ou la dérive et σ est le coeffcient de difiusion. L'écriture :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t,$$

est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t.$$

alors $b = \tilde{b}$ et $\sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'Itô pour des coeffcients de difiusion tels que $\int_0^t \sigma_s^2 ds <$

∞. P.p.s., mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A a variation flnie est une martingale, s'il est une constante. En efiet, si :

$$A_0 = 0 \quad , \quad A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s,$$

et par suite $\mathbb{E}\left[A_t^2\right] = 0$.

1.5.3 Variation quadratique

Soit M_1 et M_2 deux martingales et $n \in \mathbb{N}$: $t_1 \leq ... \leq t_n = t$, une partition de $[0, t]$ telle que $\underset{1 \leq i \leq n}{max} |t_i - t_{i-1}| \to 0$, alors on pose :

$$\langle M_1, M_2 \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(M_1\left(t_i\right) - M_1\left(t_{i-1}\right)\right)\left(M_2\left(t_i\right) - M_2\left(t_{i-1}\right)\right).$$

$\langle M_1, M_2 \rangle$ s'appelle la covariation quadratique de M_1 et M_2.

On défnit ainsi la variation quadratique d'une martingale M_t par :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right),$$

et dans la cas de mouvement Brownien standard $\langle W \rangle_t = t$[3].

1.6 Equation différentielle stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x, \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$X_t = \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

- Soient $n, d \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n$ (condition initiale), et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un MB d-dimensionnel.

- Les fonctions

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d},$$

sont mesurables et bornées. L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation diférentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coeffcients b et σ, l'EDS (1.2) admit une unique solution.

1.7 Existence et unicité

Théorème 1.7.1 *Soit $T > 0$ et $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ sont des fonctions mesurables satisfaisantes :*

1. *(condition de Lipschitz locale) $\exists k \in \mathbb{R}_+$*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k\,|x - y| \quad , t \in [0, T] \quad ; x, y \in \mathbb{R}^n,$$

2. *(condition de croissance linéaire) $\exists M \in \mathbb{R}+$*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k\,(1 + |x|) \quad ; t \in [0, T] \quad ; x \in \mathbb{R}^n.$$

3. *X_0 varaible aléatoire indépandante de $W = (W_t)_{t \geq 0}$ et de carré intégrable (ie :*

$\mathbb{E}\left[|X_0^2|\right] < +\infty$*) : Alors l'équation* (1.1) *admet une unique solution forte* $X = (X_t(\omega))_{t\geq 0}$ *adaptée par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_0^{x_0} = \mathcal{F}_t \wedge \sigma(X_0)$ *et vérife :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2 \, dt\right] < +\infty.$$

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions pour les EDSPRs de type champ moyen

Dans ce chapitre, on s'interesse d'un nouveau type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, ce type s'appel **"champ moyen"** c'est-à-dire le système est dépend du processus d'état, ainsi que de sa distribution, alors , on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes d'équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, (**EDSPRs** par la suite) de type champ moyen.

2.1 Notation et définitions

– $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet.

– (W_t) est un mouvement Brownien.

– $\mathcal{F}_t$ est une filtration.

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right]\right) dt + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right]\right) dW_t \\ -dY_t = f\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[X_t\right], Y_t, \mathbb{E}\left[Y_t\right], Z_t, \mathbb{E}\left[Z_t\right]\right) dt - Z_t dW_t. \\ X_0 = x \quad , \; Y_T = g\left(X_T, \mathbb{E}\left[X_T\right]\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que les fonctions suivantes soient mesurables et bornées :

$$\begin{cases} b : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ b : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}, \\ g : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Ce système peut être interpréter sous forme intégrale comme suit :

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right]\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right]\right) dW_s \quad , \; t > 0, \\ Y_t = g\left(X_T, \mathbb{E}\left[X_T\right]\right) + \int_t^T f\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right], Y_s, \mathbb{E}\left[Y_s\right], Z_s, \mathbb{E}\left[Z_s\right]\right) ds \\ \qquad - \int_t^T Z_s dW_s \quad , \; 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le système 2.1 et appelé équation différentielle stochastique progressive et rétrograde (EDSPR) de type champ moyen. Telle que, le coeffcient b s'appelle le drift, σ s'appelle le diffusion de l'EDS et f s'appelle le générateur de l'EDSR.

–On travaillera avec deux espaces de processus :

–On notera tout d'abord $S^2(\mathbb{R}^n)$ l'éspace vectoriel formé du processus X_t, progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que :

$$\|X_t\|_{s^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_t|^2\right] < \infty.$$

Et $S_c^2(\mathbb{R}^n)$ le sous-éspace formé par les processus continus

– Et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{m \times d})$ celui formé par le processus Z_t progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times d}$, telle que :

$$\|Z_t\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty.$$

–Les espaces S^2 , S_c^2 et M^2 sont des éspaces de Banach pour les normes défnies précedemment.

–Nous désignerons B^2 l'espace de Banach

$$S^2(\mathbb{R}^n) \times S_c^2(\mathbb{R}^n) \times M^2(\mathbb{R}^{m \times d}).$$

Lemme 2.1.1 ***(Lemme de Granwall)***

Soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue vérifiant :*

$$\forall t \in [0, T] \quad , 0 \leq g(t) \leq \alpha\,(t) + \beta \int_0^t g(s) ds.$$

Pour une constante $\beta \geq 0$ *et pour une fonction* $\alpha : [0; T] \to \mathbb{R}$ *intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, on a alors :*

$$\forall t \in [0, T] \quad , g(T) \leq \alpha e^{\beta t},$$

et si $\alpha = 0$, *on a* $g = 0$.

Définition 2.1.1 *On appelle solution du système des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades* ($EDSPR$) *de type champ moyen 2.1, tout triple* $(X,\, Y,\, Z)$ *de processus progressivement mesurables à valeurs* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ *et de carré intégrabl tels que[4] :*

$$\begin{cases} X_t = x + \int\limits_0^t b(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}[X_s])dW_s, \\ Y_t = g(X_T, \mathbb{E}[X_T]) + \int\limits_t^T f(s, X_s, \mathbb{E}[X_s], Y_s, \mathbb{E}[Y_s], Z_s, \mathbb{E}[Z_s])ds - \int\limits_t^T Z_s dW_s. \end{cases}$$

2.2 Théoréme d'existance et d'unicité

Théorème 2.2.1 ***(Existence et unicité)***

Soient b, σ, f *et* g *des fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout* $t \in [0,T]$, *tout* $(x_1, x_1', x_2, x_2', y_1, y_1', y_2, y_2', z_1, z_1', z_2, z_2')$ $\in \mathbb{R}^{4n+4m+4m\times d}$:

1. ***Condition de Lipschitz :***

$$|b\left(t, x_1, x_1'\right) - b\left(t, x_2, x_2'\right)| + \|\sigma\left(t, x_1, x_1'\right) - \sigma\left(t, x_2, x_2'\right)\|$$
$$\leq k\left(|x_1 - x_2| + |x_1' - x_2'|\right),$$

et$|g\left(x_1 - x_1'\right) - g\left(x_2 - x_2'\right)| \leq k\left(|x_1 - x_2| - |x_1' - x_2'|\right).$

2. ***Croissance linéaire :***

$$|b\left(t, x, x'\right)| + \|\sigma\left(t, x, x'\right)\| \leq k\left(1 + |x| + |x'|\right).$$

et

3.
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(s,0,0,0,0,0,0)|^2\right] ds < +\infty.$$

Alors, il existe une solution unique (X,Y,Z) de l'EDSPR de type champ moyen 2.1.

Preuve.

1. **L'existence** : Nous construisons la solution par la méthode **d'itération** de **Picard**. En défnissant la suite $(X^n, Y^n; Z^n)_{n\in N}$ telle que $X_0 = x, Y_0 = Z_0 = 0$, et $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ est la solution du système d'EDSPR de type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = x + \int_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n])\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n])\, dW_s, \\ Y_t^{n+1} = g(X_T^n, \mathbb{E}[X_T^n]) + \int_t^T f(s, X_s^n, \mathbb{E}[X_s^n], Y_s^n, \mathbb{E}[Y_s^n], Z_s^n, \mathbb{E}\ [Z_s^n])\, ds \\ \qquad\qquad - \int_t^T Z_s^{n+1} dW_s. \end{cases} \tag{2.3}$$

Et telles que les intégrales stochastiques sont bien défnies car il est clair par récurrence que pour chaque n, X_t^{n+1} continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}\ [X_s^n])$ l'est aussi.

–**Premièrement**, on montre l'existance de solution de l'EDS dans 2.1, pour $t \in [0,T]$, vérifant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0,T]$.

$$\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n.$$

Supposons que $\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n$ et on montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq C_{n+1}. \tag{2.4}$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 = \left|x + \int_0^t b\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right) dW_s\right|^2,$$

comme on a $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, par passage a l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq 3 \Bigg(|x|^2 &+ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)\right| ds\right)^2\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left\|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)\right\| dW_s\right)^2\right]\Bigg).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Appliquant l'isométrie, le théorème de Fubini et la croissance linéaire, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}.\left[\left(\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right) dW_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)\right\|^2 ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t k^2\left(1 + \left|X_s^n\right|^2 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds\right] \\ &\leq \int_0^t k^2\left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right]\right) ds \\ &\leq \int_0^t k^2\left(1 + 2\mathbb{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right) ds\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right) \times \left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)\right|^2\right) ds\right] \tag{2.7}$$

$$\leq T.\mathbb{E}\left[\int_0^t k^2\left(1+\left|X_s^n\right|^2+\mathbb{E}\ \left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds\right]$$

$$\leq \int_0^t k^2\left(1+2\mathbb{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds.$$

remplaçant 2.6 et 2.7 dans 2.5 on trouve

$$\mathbb{E}.\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq 3\left(|x|^2+T.\mathbb{E}\left[\int_0^t k^2\left(1+\left|X_s^n\right|^2+\mathbb{E}\ \left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds\right]\right.$$
$$\left.+\int_0^t k^2\left(1+2\mathbb{E}.\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds\right)$$
$$\leq C+C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_t^n\right|^2\right] ds \quad ,\forall t\in[0,T] \quad ,C>0.$$

Ce qui prouve 2.4.

On va majorer par récurrence la quantité

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right].$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\right)\right)dW_s\right|^2\right]\\
&+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)-b\left(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\right)\right)ds\right|^2\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left\|\sigma\left(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\right)\right\|^2ds\right]\\
&+2T\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|b\left(s,X_s^n,\mathbb{E}\left[X_s^n\right]\right)-b\left(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\right)\right|^2ds\right].
\end{aligned}
$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, on obtient pour $t\in[0;T]$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\\
&\leq 4\left(1+T\right)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right].
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\\
&\leq C\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2\right].
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

où $C=4\left(1+T\right)K^2$.

Nous répétons la même méthode, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|$

pour obtenir

$$
\begin{aligned}
&\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^s \left(\sigma\left(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-1}\right]\right) - \sigma\left(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right) dW_r\right|^2 \\
&+ 2\left|\int_0^s \left(b\left(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-1}\right]\right) - b\left(r, X_r^{n-2}, E\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right) dr\right|^2 \\
&\leq 2\int_0^s \left\|\left(\sigma\left(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-1}\right]\right) - \sigma\left(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right)\right\|^2 dr \\
&+ 2T\left|\int_0^s \left(b\left(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-1}\right]\right) - b\left(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right)\right|^2 dr.
\end{aligned}
$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2\right] &\leq C\int_0^s \mathbb{E}\left[\left|X_r^{n-1} - X_r^{n-2}\right|^2\right] dr \\
&\leq C\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r}\left|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}\right|^2\right] dr.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

De même façon que 2.8 et 2.9, on peur trouver :

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq k\leq r}\left|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}\right|^2\right] \leq C\int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2\right] dk. \tag{2.10}
$$

En remplaçant 2.9 et 2.10 à 2.7, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le C\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2\right]ds\\
&\le C^2\int_0^t\left(\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\le k\le r}\left|X_k^{n-1}-X_k^{n-2}\right|^2\right]dr\right)ds.\\
&\le C^3\int_0^t\left(\int_0^s\left(\int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{0\le l\le k}\left|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}\right|^2\right]dk\right)dr\right)ds.\\
&\le C^3\mathbb{E}\left[\sup_{0\le l\le k}\left|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}\right|^2\right]\int_0^t\left(\int_0^s\left(\int_0^r dk\right)dr\right)ds\\
&\le C^3\mathbb{E}\left[\sup_{0\le l\le k}\left|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}\right|^2\right]\int_0^t\left(\int_0^s r\ dr\right)ds\\
&\le C^3\mathbb{E}\left[\sup_{0\le l\le k}\left|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}\right|^2\right]\int_0^t\frac{s^2}{2}ds\\
&\le \frac{C^3T^3}{3!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le l\le k}\left|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\le\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\right]\le D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\ge\frac{1}{2^{n+1}}\right]\le D\frac{C^nT^n}{n!}/\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2=4D\frac{(4CT)^n}{n!}.$$

Il vient que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}P\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\ge\frac{1}{2^{n+1}}\right]\le\sum_{n=0}^{\infty}D\frac{C^n}{n!}/\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2=4D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4C)^n}{n!}=4De^{4TC}<\infty.$$

Ce qu'implique d'après le Lemme de Borel-Cantelli :

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|>\frac{1}{2^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}\right]=0.$$

Ce que signifer que :

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}\right]=1.$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}},\forall n\geq n_0,\text{pour certaine } n_0\in\mathbb{N}.$$

Avec probabilité égale à 1. Passons à la somme on trouve :

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^m-X_s^n\right|\leq\sum_{k=m\wedge n-1}^{m\curlyvee n}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_s^{k+1}-X^k\right|\leq\sum_{k=m\wedge n-1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\leq\frac{1}{2^{m\wedge n}}.$$

Pour $m\wedge n\geq n_0(\omega)$; où $m\vee n=max\left\{m,k\right\}$. Alors le processus$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Alors il existe un processus continu $(X_t)_{t\in[0,T]}$, tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right|\rightarrow 0:\text{quand } n\rightarrow\infty,\ \text{avec probabilité } 1.$$

Donc, $P-p.s$, X_n converge vers un processus continu X_t. On vérife très facilement que X_t est une solution de l'EDS dans 2.1 en passant à la limite dans l'équation prégressive dans le système 2.3.

–Donc en passant à résoudre la deuxième équation de récurrence pour Y_n .

Prouvons maintenant que la suite (Y^n,Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach B^2.

En appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2$, en passant à l'intégrale entre t et

T, on obtient

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha T}\left|g\left(X_T^n, E\left[X_T^n\right]\right)-g\left(X_T^{n-1}, E\left[X_T^{n-1}\right]\right)\right|^2-e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2 \\
&=\alpha \int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds-2\left\langle\int_t^T e^{\alpha s}\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2,\right. \\
&f\left(s, X_s^n, \mathbb{E}\left(X_s^n\right), Y_s^n, \mathbb{E}\left(Y_s^n\right), Z_s^n, \mathbb{E}\left(Z_s^n\right)\right) \\
&\left.-f\left(s, X_s^{n-1}, \mathbb{E}\left(X_s^{n-1}\right), Y_s^{n-1}, \mathbb{E}\left(Y_s^{n-1}\right), Z_s^{n-1}, \mathbb{E}\left(Z_s^{n-1}\right)\right)\right\rangle ds \\
&+2\int_t^T\left\langle e^{\alpha s}\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2, Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\rangle dW_s+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Par passage à l'espérance et utilisant le fait que f est Lipshitzienne, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\alpha\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right] \\
&+2k\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|+\left|\mathbb{E}\left[X_s^n\right]-\mathbb{E}\left[X_s^{n-1}\right]\right|\right.\right. \\
&\left.\left.+\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|+\left|\mathbb{E}\left[Y_s^n\right]-\mathbb{E}\left[Y_s^{n-1}\right]\right|+\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|+\left\|\mathbb{E}\left[Z_s^n\right]-\mathbb{E}\left[Z_s^{n-1}\right]\right\|\right]\right)
\end{aligned}$$

Ce qui implique (d'après l'inégalité de Yong $(2ab \leq \frac{1}{\varepsilon^2}a^2 + \varepsilon^2 b^2)$) que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right]+\left(k^2\varepsilon^2-\alpha\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right]+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2 ds\right]+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right]\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|^2\right] ds\right]+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2\right] ds\right],
\end{aligned}$$

alors d'après le théoreme de Fubini :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right]+\left(k^2\varepsilon^2-\alpha\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds\right] \\
&\frac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right]+\frac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&+\frac{12}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left[\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2\right] ds\right].
\end{aligned}$$

On choisit α et ε tel que $\frac{12}{\varepsilon^2} = \frac{1}{12}$et $144K^2 - \alpha = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1} - Y_t^n\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1} - Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n - X_T^{n-1}\right|^2\right] \\
&+ \frac{1}{12}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 + \left|Y_s^n - Y_s^{n-1}\right|^2 + \left\|Z_s^n - Z_s^{n-1}\right\|^2\right) ds\right].
\end{aligned}$$

Donc pour $t = 0$, trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1} - Y_t^n\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1} - Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n - X_T^{n-1}\right|^2\right] + \frac{c}{12}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left(\left|X_t^n - X_t^{n-1}\right|^2\right)\right]\right. \\
&\left.+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n - Y_t^{n-1}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t}\left\|Z_s^{n+1} - Z_s^n\right\|^2 ds\right]\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|Y_t^n - Y_t^{n-1}\right|$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n - Y_t^{n-1}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n - Z_s^{n-1}\right\|^2 ds\right] \\
&\leq k'\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^{n-1} - X_T^{n-2}\right|^2\right] + \frac{c'}{12}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}(\left|X_t^{n-1} - X_t^{n-2}\right|^2)\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n-1} - Y_t^{n-2}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n-1} - Z_s^{n-2}\right\|^2 ds\right]).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

En remplaçant 2.12 dans 2.11 on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right]\\
&\leq k\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right]+k'\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\right|^2\right]\\
&+\frac{c}{12}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left(\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right)\right]+\frac{c'}{12}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}(\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2)\right]\\
&+\frac{c'}{12^2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}\right\|^2 ds\right]\right)
\end{aligned}
$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right]\\
&\leq C(\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\right|^2\right]+...\\
&...+\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}(\left|X_T^1-X_T^0\right|^2)\right]+C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left(\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right)\right]\right)\\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left(\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2\right)\right]....+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left(\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right)\right])\\
&+\frac{C"}{12^n}(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n-Y_t^{n-1}\right|^2\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\right|^2\right]+...\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^1-Y_t^0\right|^2\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t}\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2 ds\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t}\left\|Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}\right\|^2 ds\right]....+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha t}\left\|Z_s^1-Z_s^0\right\|^2 ds\right]),
\end{aligned}
$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right]$$
$$\le \frac{D}{12^n}\to 0 \text{ quand } n\to\infty$$

Par conséquent, $(X^n, Y^n, Z^n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Alors, il existe un triple de processus stochastique $(X_t, Y_t, Z_t)\in B^2$, tel que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^n-X_t\right|^2\right]\to 0, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|Y_t^n-Y_t\right|^2\right]\to 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 dt\right]\to 0,$$

quand $n\to\infty$, avec une probabilité égale à 1. C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} X^n = X, \lim_{n\to\infty} Y^n = Y, \lim_{n\to\infty} Z^n = Z.$$

Il est facile de vérifer que (X, Y, Z) est une solution de l'EDSPR 2.1 il suffit de faire une passage à la limite dans l'EDSPR de type champ moyen 2.3.

2 L'unicite : Supposons que (X, Y, Z) et $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ deux solutions de 2.1 pour tout $t\in[0,T]$. Comme $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, alors

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t-\hat{X}_t\right|^2\right]\le 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left\{b\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right]\right)-b\left(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]\right)\right\}ds\right|^2\right]$$
$$+2E\left[\left|\int_0^t\left\{\sigma\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right]\right)-\sigma\left(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]\right)\right\}dW_s\right|^2\right].$$

D'après inégalité de Cauchy, Schwarz et par l'isométrie d'Itô on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t - \hat{X}_t\right|^2\right] \leq 2TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] ds + 2K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] ds \tag{2.13}$$

$$= \left(2TK^2 + 2K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] ds$$

$$= C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] ds \quad ou\ C = \left(2TK^2 + 2K^2\right),$$

soit

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[\left|X_t - \hat{X}_t\right|^2\right] \quad , \phi(t) \leq C\int_0^t \phi(s)\, ds \quad , \ \forall t \in [0,t].$$

Utilisant le lemme de Granwall, avec $C_0 = 0$ implique $\phi = 0$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] = 0. \tag{2.14}$$

En appliquant la formule d'Itô à $\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2$, on trouve :

$$d\left(\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2\right) = 2\left|Y_t - \hat{Y}_t\right| d\left(\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|\right) + d\left\langle Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}\right\rangle_t.$$

Par passage à l'intégrale de t à T et l'espérance , on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s - \hat{Z}_s\right\|^2 ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|g\left(X_T, \mathbb{E}\left[X_T\right]\right) - g\left(\hat{X}_T, \mathbb{E}\left[\hat{X}_T\right]\right)\right|^2\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\langle Y_s - \hat{Y}_s, f\left(s, X_s, \mathbb{E}\left[X_s\right], Y_s, \mathbb{E}\left[Y_s\right], Z_s, \mathbb{E}\left[Z_s\right]\right)\right.\right. \\
&\left.\left. -f\left(s, \hat{X}_s, \mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right], \hat{Y}_s, \mathbb{E}\left[\hat{Y}_s\right], \hat{Z}_s, \mathbb{E}\left[\hat{Z}_s\right]\right)\right\rangle\right].
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t-\hat{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left\|Z_s-\hat{Z}_s\right\|^2 ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-\hat{X}_T\right|^2\right]\\
&+2K\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|Y_s-\hat{Y}_s\right|\left(\left|X_s-\hat{X}_s\right|+\left|\mathbb{E}\left[X_s\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}_s\right]\right|+\left|Y_s-\hat{Y}_s\right|\right.\right.\\
&\left.\left.+\left|\mathbb{E}\left[Y_s\right]-\mathbb{E}\left[\hat{Y}_s\right]\right|+\left|Z_s-\hat{Z}_s\right|+\left|\mathbb{E}\left[Z_S\right]-\mathbb{E}\left[\hat{Z}_s\right]\right|\right)\right]
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Yong on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t-\hat{Y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left\|Z_s-\hat{Z}_s\right\|^2 ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-\hat{X}_T\right|^2\right]+2K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|Y_s-\hat{Y}_s\right|^2 ds\right]\\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|X_s-\hat{X}_s\right|^2 ds\right]+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|Y_s-\hat{Y}_s\right|^2 ds\right]\\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left\|Z_s-\hat{Z}_s\right\|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

on posant $\frac{6}{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}$,alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t-\hat{Y}_t\right|^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left\|Z_s-\hat{Z}_s\right\|^2 ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-\hat{X}_T\right|^2\right]+\left(24K^2+\frac{1}{2}\right)\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|Y_s-\hat{Y}_s\right|^2 ds\right]\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int\limits_t^T\left|X_s-\hat{X}_s\right|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité 2.14 on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s - \hat{X}_s\right|^2\right] = 0.$$

alors $X_s = \hat{X}_s$ et $X_T = \hat{X}_T$, donc :

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s - \hat{Z}_s\right\|^2 ds\right]$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2 ds\right] \quad , \text{ avec } C = 24K^2 + \tfrac{1}{2}.$$

On peut extraire deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s - \hat{Y}_s\right|^2 ds\right], \tag{2.15}$$

et

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s - \hat{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s - \hat{Y}_s\right|^2 ds\right]. \tag{2.16}$$

D'après l'inégalité de Granwall à 2.15, (on a $b = 0$), donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] = 0.$$

Le lemme de Granwall appliqué à 2.16 a nous donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s - \hat{Z}_s\right\|^2 ds\right] = 0.$$

donc $Y_t \equiv \hat{Y}_t, Z_s \equiv \hat{Z}_s$. Ce qui prouve l'unicité[2].

■

Chapitre 3

Conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle relaxé pour l'EDSPR de type champ moyen

Dans ce chapitre, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité sous forme du principe de maximum stochastique pour un problème de contrôle relaxé où le système est dirigé par des équations différentielles stochastique progressives et rétrogrades non linéaires.

Soit $P(\boldsymbol{U})$ désigne l'espace des mesures de probabilité sur $B(\boldsymbol{U})$ équipé de la topologie de convergence faible, où $\boldsymbol{U}$ est un sous-ensemble compact Borel non vide de $\mathbb{R}^k$. Dans un problème de contrôle relaxé, Le contrôle strict v_t valorisé en $\boldsymbol{U}$ est remplacé par un processus q_t valorisé en $P(\boldsymbol{U})$. De plus, si $q_t\,(du) = \delta_{v_t}\,(du)$ est une mesure de Dirac chargé en v_t pour chaque t, alors nous obtenons que le problème de contrôle strict est un cas particulier de celui de relaxé. On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble des contrôles relaxés.

Nous considérons un problème de contrôle relaxé gouverné par lEDSPR de type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} dy_t^\mu = \int\limits_{\boldsymbol{U}} b\left(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], u\right) \mu_t\left(du\right) dt + \sigma\left(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right]\right) dW_t \\ dY_t^\mu = -\int\limits_{\boldsymbol{U}} f\left(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], Y_t^\mu, \mathbb{E}\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, \mathbb{E}\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu_t\left(du\right) dt \\ \qquad\qquad + Z_t^\mu dW_t. \\ y_0^\mu = x \quad, Y_T^\mu = h\left(y_T^\mu, \mathbb{E}\left[y_T^\mu\right]\right) \quad, t \in [0, T], \end{cases} \tag{3.1}$$

le fonctionnel de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxé, est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\left(\mu\right) := \mathbb{E}\Big[& \alpha\left(y_T^\mu, \mathbb{E}\left[y_T^\mu\right]\right) + \beta\left(Y_0^\mu, \mathbb{E}\left[Y_0^\mu\right]\right) \\ & + \int_0^T \int\limits_{\boldsymbol{U}} l\left(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], Y_t^\mu, \mathbb{E}\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, \mathbb{E}\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu_t\left(du\right) dt \Big]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous disons qu'un contrôle relaxé q est un contrôle optimal si

$$J\left(q\right) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J\left(\mu\right). \tag{3.3}$$

Selon le fait que l'ensemble de contrôles relaxés est convexe, donc pour établir les conditions nécessaire d'optimalité nous utilisons la méthode de perturbation convexe (faible). Laissez q d'être un contrôle relaxé optimal avec les trajectoires associées $\left(y_t^q, Y_t^q, Z_t^q\right)$ vérifiant l'EDSPR de type champ moyen 3.1. Ensuite, nous pouvons définir un contrôle relaxé perturbé par $q_t^\varepsilon = q_t + \varepsilon\left(\mu_t - q_t\right)$,

où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et $\mu_.$ est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$. Notons par $\left(y_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon\right)$ la solution du système 3.1 correspondante au contrôle perturbé q^ε.

Considérons les hypothèses suivantes :

- (**H1**) (condition de Lipschitz) $\exists C > 0$ tels que $\forall y_1, y_1', y_2, y_2', Y_1, Y_1', Y_2, Y_2', Z_1, Z_1', Z_2, Z_2', u$

$$|b(t,y_1,y_1',u)-b(t,y_2,y_2',u)|^2 \leq C\left(|y_1-y_2|^2+|y_1'-y_2'|^2\right),$$
$$|\sigma(t,y_1,y_1')-\sigma(t,y_2,y_2')|^2 \leq C\left(|y_1-y_2|^2+|y_1'-y_2'|^2\right),$$

$$\begin{aligned}
&|f(t,y_1,y_1',Y_1,Y_1',Z_1,Z_1',u)-f(t,y_2,y_2',Y_2,Y_2',Z_2,Z_2',u)|^2\\
&\leq C\Big(|y_1-y_2|^2+|y_1'-y_2'|^2+|Y_1-Y_2|^2+|Y_1'-Y_2'|^2\\
&+\|Z_1-Z_2\|^2+\|Z_1'-Z_2'\|^2\Big),\\
&|l(t,y_1,y_1',Y_1,Y_1',Z_1,Z_1',u)-l(t,y_2,y_2',Y_2,Y_2',Z_2,Z_2',u)|^2\\
&\leq C\Big(|y_1-y_2|^2+|y_1'-y_2'|^2+|Y_1-Y_2|^2+|Y_1'-Y_2'|^2\\
&+\|Z_1-Z_2\|^2+\|Z_1'-Z_2'\|^2\Big)
\end{aligned}$$

•(**H2**) (Conditions de régularité)

(i) Les fonctions b, h, σ, α sont bornées et continuement différentiables par rapport à (x, x'), et les fonctions f et β sont bornées et continuement différentiables par rapport à (y, y', Y, Y', Z, Z') et à (y, y') respectivement.

(ii) Les dérivées de b, h, σ, f par rapport leurs arguments sont continues et bornées.

(iii) Les dérivées de l sont bornées par $C(1+|y|,|y'|,|Y|,|Y'|,|Z|,|Z'|)$.

(iv) Les dérivées de α et β sont bornées par $C(1+|y|+|y'|)$ et $C(1+|Y|+|Y'|)$,

pour un certain C constant positif.

3.1 L'inégalité variationnelle.

En utilisant l'optimalité de q, l'inégalité variationnelle sera dérivée de l'inégalité :

$$0 \leq J(q^{\varepsilon}) - J(q).$$

Pour cela, nous avons besoin des résultats suivants.

Proposition 3.1.1 *Sous les hypothèses* ***(H1)–(H2)****, nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|y_t^{\varepsilon} - y_t^{q}\right|^2\right] = 0. \tag{3.4}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|Y_t^{\varepsilon} - Y_t^{q}\right|^2\right] = 0. \tag{3.5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_t^{\varepsilon} - Z_t^{q}\right\|^2 dt\right] = 0. \tag{3.6}$$

Preuve. Nous calculons $\mathbb{E}\left[\left|y_t^{\varepsilon} - y_t^{q}\right|^2\right]$ et en utilisant la définition de q_t^{ε} pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|y_t^{\varepsilon} - y_t^{q}\right|^2\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^t \int_{\boldsymbol{U}} \left| b\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right], u\right) q_s(du) - \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s(du) \right|^2 ds \\
&+ C\varepsilon^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left| \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right], u\right) \mu_s(du) - \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right], u\right) q_s(du) \right|^2 ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\left| \int_{\mathbf{0}}^t \sigma\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right]\right) - \sigma\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right]\right) \right|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Puisque b et σ sont uniformement Lipschitziennes et b est bornée, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^{\varepsilon} - y_t^{q}\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|y_s^{\varepsilon} - y_s^{q}\right|^2 ds\right] + C\varepsilon^2.$$

En appliquant le lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous obtenons 3.4. D'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $(Y_t^\varepsilon - Y_t^q)^2$, en prenant l'esperance et en appliquant l'inégalité de Young, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\| Z_s^\varepsilon - Z_s^q \right\| ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|h\left(y_T^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_T^\varepsilon\right]\right) - h\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right|^2\right] \\
&+ \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\varepsilon - y_s^q\right|^2 ds\right] + \theta\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon\right], Y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Y_s^\varepsilon\right], Z_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Z_s^\varepsilon\right], u\right) q_s^\varepsilon(du)\right.\right. \\
&\left.\left. - \int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^q, \mathbb{E}\left[y_s^q\right], Y_s^q, \mathbb{E}\left[Y_s^q\right], Z_s^q, \mathbb{E}\left[Z_s^q\right], u\right) q_s(du)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de q_t^ε, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\| Z_s^\varepsilon - Z_s^q \right\| ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|h\left(y_T^\varepsilon - \mathbb{E}\left[y_T^\varepsilon\right]\right) - h\left(y_T^q - \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right|^2\right] + \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\varepsilon - Y_s^q\right|^2 ds\right] \\
&+ C\theta\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon\right], Y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Y_s^\varepsilon\right], Z_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Z_s^\varepsilon\right], u\right) \mu_s(du)\right.\right. \\
&\left.\left. - \int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon\right], Y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Y_s^\varepsilon\right], Z_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Z_s^\varepsilon\right], u\right) q_s(du)\right|^2 ds\right] \\
&+ C\theta\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon\right], Y_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Y_s^\varepsilon\right], Z_s^\varepsilon, \mathbb{E}\left[Z_s^\varepsilon\right], u\right) q_s(du)\right.\right. \\
&\left.\left. - \int_{\boldsymbol{U}} f\left(s, y_s^q, \mathbb{E}\left[y_s^q\right], Y_s^q, \mathbb{E}\left[Y_s^q\right], Z_s^q, \mathbb{E}\left[Z_s^q\right], u\right) q_s(du)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Comme f et h sont uniformément Lipschitziennes, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s^\varepsilon - Z_s^q\right\|^2 ds\right] \leq \left(\frac{1}{\theta} + 2C\theta + 2C\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\varepsilon - Y_s^q\right|^2 ds\right] \tag{3.7}$$

$$+ 2C\theta\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s^\varepsilon - Z_s^q\right\|^2 ds\right] + \phi_t^\varepsilon.$$

où

$$\phi_t^\varepsilon = 2C\mathbb{E}\left[\left|y_T^\varepsilon - y_T^q\right|^2\right] + (2C\theta + 2C)\,\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\varepsilon - y_s^q\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\theta^2.$$

De 3.4 nous pouvons montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \phi_t^\varepsilon = 0. \tag{3.8}$$

Choisir $\theta = \frac{1}{4C} > 0$, donc $2C\theta = \frac{1}{2} < 1$, donc l'inégalité 3.7 devient :

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s^\varepsilon - Z_s^q\right\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\varepsilon - Y_s^q\right|^2 ds\right] + \phi_t^\varepsilon.$$

Nous dérivons de cette inégalité, deux inégalités

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\varepsilon - Y_s^q\right|^2 ds\right] + \phi_t^\varepsilon. \tag{3.9}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|Z_s^\varepsilon - Z_s^q\right\|^2 ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\varepsilon - Y_s^q\right|^2 ds\right] + \phi_t^\varepsilon. \tag{3.10}$$

Appliquant le lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy en 3.9 et en utilisant 3.4 et 3.8 on obtient 3.5. Enfin l'ingalité 3.6 est obtenue de 3.5, 3.8 et 3.10. ■

Proposition 3.1.2 *Soit* $\left(\hat{y}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right)$*, la solution des équations variationnelles suivantes :*

$$\begin{cases} d\hat{y}_t = \left(\int\limits_U b_y\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) q_t(du)\, \hat{y}_t + \mathbb{E}\left[\int\limits_U b_{y'}\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) q_t(du)\, \mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right] \right] \right) dt \\ \qquad + \left(\sigma_y\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right]\right) \hat{y}_t + \mathbb{E}\left[\sigma_{y'}\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]\right) dW_t \\ \qquad + \left(\int\limits_U b\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) q_t(du) - \int\limits_U b\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) \mu_t(du) \right) dt \\ d\hat{Y}_t = -\left(\int\limits_U f_y\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \hat{y}_t + \mathbb{E}\left[\int\limits_U f_{y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right] \right] \right. \\ \qquad + \int\limits_U f_Y\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \hat{Y}_t + \mathbb{E}\left[\int\limits_U f_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right] \right] \\ \qquad + \int\limits_U f_Z\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \hat{Z}_t + \mathbb{E}\left[\int\limits_U f_{Z'}\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du)\, \mathbb{E}\left[\hat{Z}_t\right] \right] \\ \qquad \left. - \left(\int\limits_U f\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t(du) - \int\limits_U f\left(t, \pi_t^q, u\right) \mu_t(du) \right) \right) dt + \hat{Z}_t dW_t \\ \hat{y}_0 = 0 \quad , \hat{Y}_T = h_y\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \hat{y}_T + \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_T\right]\right], \end{cases}$$

où $(t, \pi_t^q, u) := (t, , y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], Y_t^q, \mathbb{E}[Y_t^q], Z_t^q, \mathbb{E}[Z_t^q], u)$*. Nous avons les estimations suivantes :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left| \frac{1}{\varepsilon}\left(y_t^\varepsilon - y_t^q\right) - \hat{y}_t \right|^2 \right] = 0, \tag{3.11}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left| \frac{1}{\varepsilon}\left(Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right) - \hat{Y}_t \right|^2 \right] = 0, \tag{3.12}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left\| \frac{1}{\varepsilon}\left(Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right) - \hat{Z} \right\|_t^2 \right] = 0. \tag{3.13}$$

Preuve. Pour simplification, notons par

$$\Upsilon_t^\varepsilon = \tfrac{1}{\varepsilon}\left(y_t^\varepsilon - y_t^q\right) - \hat{y}_t \quad , \mathbb{Y}_t^\varepsilon = \tfrac{1}{\varepsilon}\left(Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right) - \hat{Y}_t \quad , \mathbb{Z}_t^\varepsilon = \tfrac{1}{\varepsilon}\left(Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right) - \hat{Z}_t. \tag{3.14}$$

Prouvons 2.11. D'après 3.1, 3.10 et les notations 3.14, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_t^{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right], u\right) q_s^{\varepsilon}(du) - \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s^{\varepsilon}(du)\right] ds \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s^{\varepsilon}(du) - \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s(du)\right] ds \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\sigma\left(s, y_s^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_s^{\varepsilon}\right]\right) - \sigma\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right]\right)\right] dW_s \\
&- \int_0^t \int_U b_y\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s(du)\, \hat{y}_s ds \\
&- \int_0^t \mathbb{E}\left[\int_U b_{y'}\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s(du)\, \mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right] ds \\
&- \int_0^t \left(\sigma_y\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right]\right) \hat{y}_s + \mathbb{E}\left[\sigma_{y'}\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right]\right) dW_s \\
&- \int_0^t \left(\int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) q_s(du) - \int_{\boldsymbol{U}} b\left(s, y_s^{q}, \mathbb{E}\left[y_s^{q}\right], u\right) \mu_s(du)\right) ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de q_s^{ε} et en prenant l'esperance, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\Upsilon_t^{\varepsilon}\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}&\left[\int_0^t \int_0^1 \int_U \left|b_y\left(s, \Lambda_s^{\varepsilon}, u\right) \Upsilon_t^{\varepsilon}\right|^2 q_s(du)\, d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \int_U \left|\mathbb{E}\left[b_{y'}\left(s, \Lambda_s^{\varepsilon}, u\right) \mathbb{E}\left[\Upsilon_t^{\varepsilon}\right]\right]\right|^2 q_s(du)\, d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \left|\sigma_y\left(s, \Lambda_s^{\varepsilon}\right) \Upsilon_t^{\varepsilon}\right|^2 d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \left|\mathbb{E}\left[\sigma_{y'}\left(s, \Lambda_s^{\varepsilon}\right) \mathbb{E}\left[\Upsilon_t^{\varepsilon}\right]\right]\right|^2 d\lambda ds\right] + C\mathbb{E}\left[\Gamma_t^{\varepsilon}\right],
\end{aligned}
$$

où $(s,\Lambda_s^\varepsilon,u) := \left(s, y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\Upsilon_s^\varepsilon + \hat{y}_s\right), \mathbb{E}\left[y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\Upsilon_s^\varepsilon + \hat{y}_s\right)\right], u\right)$, et

$$\begin{aligned}
\Gamma_t^\varepsilon &= \int_0^t\int_0^1\int_U b_y\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\left(y_s^\varepsilon - y_s^q\right)\mu_s(du)\,d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \mathbb{E}\left[b_{y'}\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon - y_s^q\right]\right]\mu_s(du)\,d\lambda ds \\
&- \int_0^t\int_0^1\int_U b_y\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\left(y_s^\varepsilon - y_s^q\right)q_s(du)\,d\lambda ds \\
&- \int_0^t\int_0^1\int_U \mathbb{E}\left[b_{y'}\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[y_s^\varepsilon - y_s^q\right]\right]q_s(du)\,d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \left(b_y\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\hat{y}_s + \mathbb{E}\left[\int_U b_{y'}\left(s,\Lambda_s^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right]\right)q_s(du)\,d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 \left(\sigma_y\left(s,\Lambda_s^\varepsilon\right)\hat{y}_s + \mathbb{E}\left[\sigma_{y'}\left(s,\Lambda_s^\varepsilon\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right]\right)d\lambda dW_s \\
&- \int_0^t\int_U b_y\left(s,y_s^q,\mathbb{E}\left[y_s^q\right],u\right)\hat{y}_s q_s(du)\,ds \\
&- \int_0^1\int_U \mathbb{E}\left[b_{y'}\left(s,y_s^q,\mathbb{E}\left[y_s^q\right],u\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right]q_s(du)\,ds \\
&- \int_0^t \left(\sigma_y\left(s,y_s^q,\mathbb{E}\left[y_s^q\right]\right)\hat{y}_s + \mathbb{E}\left[\sigma_{y'}\left(s,y_s^q,\mathbb{E}\left[y_s^q\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_s\right]\right]\right)dW_s,
\end{aligned}$$

puisque $b_y, b_{y'}, \sigma_y, \sigma_{y'}$ sont continus et bornées, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left|\Upsilon_t^\varepsilon\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\Upsilon_t^\varepsilon\right|^2 ds\right] + C\mathbb{E}\left[\Gamma_t^\varepsilon\right], \tag{3.15}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\Gamma_t^\varepsilon\right] = 0. \tag{3.16}$$

En utilisant 3.16, le lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-

Gundy en 3.15, on peut montrer 3.11.Provons 3.12 et 3.13, notons par

$$(s,\Delta_s^\varepsilon,u) := \Big(s, y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\Upsilon_s^\varepsilon + \hat{y}_s\right), \mathbb{E}\left[y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\Upsilon_s^\varepsilon + \hat{y}_s\right)\right], Y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_s^\varepsilon + \hat{Y}_s\right)$$
$$, \mathbb{E}\left[Y_s^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_s^\varepsilon + \hat{Y}_s\right)\right], Z_s^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Z}_s^\varepsilon + \hat{Z}_s\right), \mathbb{E}\left[Z_s^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Z}_s^\varepsilon + \hat{Z}_s\right)\right], u\Big).$$

D'après 3.1, 3.10 et 3.14, on a

$$\begin{cases} d\mathbb{Y}_t^\varepsilon = -\left(F_Y^\varepsilon \mathbb{Y}_t^\varepsilon + \mathbb{E}\left[F_{Y'}^\varepsilon \mathbb{E}\left[\mathbb{Y}_t^\varepsilon\right]\right] + F_Z^\varepsilon \mathbb{Z}_t^\varepsilon + \mathbb{E}\left[F_{Z'}^\varepsilon \mathbb{E}\left[\mathbb{Z}_t^\varepsilon\right]\right] + \theta_t^\varepsilon\right) dt \\ \qquad\qquad + \mathbb{Z}_t^\varepsilon dW_t \\ \mathbb{Y}_T^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(h\left(y_T^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_T^\varepsilon\right]\right) - h\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right) \\ \qquad - \left(h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\hat{y}_T + \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_T\right]\right]\right), \end{cases}$$

où

$$F_\varpi^{\varepsilon,q} = \int_0^1 \int_U f_\varpi\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right) q_t\left(du\right) d\lambda, \text{ pour } \varpi = y, y', Y, Y', Z, Z',$$

$$\theta_t^\varepsilon = F_y^{\varepsilon,q}\Upsilon_t^\varepsilon + \mathbb{E}\left[F_{y'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[\Upsilon_t^\varepsilon\right]\right] + F_y^{\varepsilon,q}\hat{y}_t + \mathbb{E}\left[F_{y'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]$$

$$- \int_U f_y\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\hat{y}_t - \mathbb{E}\left[\int_U f_{y'}\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right] + F_y^{\varepsilon,q}\hat{Y}_t$$

$$\mathbb{E}\left[F_{Y'}^{\varepsilon,q}E\left[\hat{Y}_t\right]\right] - \int_U f_Y\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\hat{Y}_t - \mathbb{E}\left[\int_U f_{Y'}\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right]\right]$$

$$+ F_Z^{\varepsilon,q}\hat{Z}_t + \mathbb{E}\left[F_{Z'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[\hat{Z}_t\right]\right] - \int_U f_Z\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\hat{Z}_t$$

$$- \mathbb{E}\left[\int_U f_{Z'}\left(t,\pi_t^q,u\right)q_t\left(du\right)\mathbb{E}\left[\hat{Z}_t\right]\right]$$

$$+ F_y^{\varepsilon,\mu}\left(y_t^\varepsilon - y_t^q\right) + \mathbb{E}\left[F_{y'}^{\varepsilon,\mu}\mathbb{E}\left[y_t^\varepsilon - y_t^q\right]\right] + F_Y^{\varepsilon,\mu}\left(Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left[F_{Y'}^{\varepsilon,\mu}\mathbb{E}\left[Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right]\right] + F_Z^{\varepsilon,\mu}\left(Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right) + \mathbb{E}\left[F_{Z'}^{\varepsilon,\mu}\mathbb{E}\left[Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right]\right]$$

$$- \left(F_y^{\varepsilon,q}\left(y_t^\varepsilon - y_t^q\right) + \mathbb{E}\left[F_{y'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[y_t^\varepsilon - y_t^q\right]\right] + F_Y^{\varepsilon,q}\left(Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right)\right.$$

$$\left.+ \mathbb{E}\left[F_{Y'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[Y_t^\varepsilon - Y_t^q\right]\right] + F_Z^{\varepsilon,q}\left(Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right) + \mathbb{E}\left[F_{Z'}^{\varepsilon,q}\mathbb{E}\left[Z_t^\varepsilon - Z_t^q\right]\right]\right).$$

En utilisant le fait que les dérivés $f_y, f_{y'}, f_Y, f_{Y'}, f_Z, f_Z'$ sont continues et bornées et à partir de 3.4, 3.5 , 3.6 et 3.11 nous montrons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\theta_s^\varepsilon\right|^2 ds\right] = 0. \tag{3.17}$$

Appliquant la formule d'Itô à $|Y_t^\varepsilon|^2$ nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{Y}_t^\varepsilon\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\right\|^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{Y}_T^\varepsilon\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\langle \mathbb{Y}_s^\varepsilon, F_s^Y\mathbb{Y}_s^\varepsilon + \mathbb{E}\left[F_s^{Y'}\mathbb{E}\left[\mathbb{Y}_s^\varepsilon\right]\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + F_s^Z\mathbb{Z}_s^\varepsilon + \mathbb{E}\left[F_s^{Z'}\mathbb{E}\left[\mathbb{Z}_s^\varepsilon\right]\right] + \theta_s^\varepsilon\right\rangle ds\right].$$

Application de l'inégalité de Young et le fait que les dérivés $F_s^Y, F_s^{Y'}, F_s^Z, F_s^{Z'}$

sont bornées, on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_t^\varepsilon|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + \frac{1}{\theta_1}\mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] \\
&+ 5C\theta_1\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 + \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2\right] + \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\left[\|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2\right] + |\theta_s^\varepsilon|^2\right) ds\right] \\
&+ 3C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 + \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2\right]\right) ds\right].
\end{aligned}
$$

Appliquant à nouveau l'inégalité de Young

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_t^\varepsilon|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + \frac{1}{\theta_1}\mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] \\
&+ 5C\theta_1\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 + \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2\right] + \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\left[\|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2\right] + |\theta_s^\varepsilon|^2\right) ds\right] \\
&+ 3C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 + \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2\right]\right) ds\right].
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_t^\varepsilon|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] \qquad (3.18)\\
&\leq \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + \left(\frac{1}{\theta_1} + 10C\theta_1 + 6C\right) \mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] \\
&+ (10C\theta_1)\, \mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] + 5C\theta_1 \mathbb{E}\left[\int_t^T |\theta_s^\varepsilon|^2 \, ds\right],
\end{aligned}$$

nous choisissons

$$\theta_1 = \tfrac{1}{20C} \quad , \theta_2 = \tfrac{1}{14C} > 0.$$

ainsi

$$10C\theta_1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Puis l'inégalité 3.18 devient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_t^\varepsilon|^2\right] + K_1 \mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + K_2 \mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] \qquad (3.19)\\
&+ K_3 \mathbb{E}\left[\int_t^T |\theta_s^\varepsilon|^2 \, ds\right],
\end{aligned}$$

avec $K_1 = \frac{1}{6} > 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$.

Nous tirons de 3.19 deux inégalités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_t^\varepsilon|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + K_2 \mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] \qquad (3.20)\\
&+ K_3 \mathbb{E}\left[\int_t^T |\theta_s^\varepsilon|^2 \, ds\right],
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \|\mathbb{Z}_s^\varepsilon\|^2 \, ds\right] \leq \frac{1}{K_1}\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] + \frac{K_2}{K_1}\mathbb{E}\left[\int_t^T |\mathbb{Y}_s^\varepsilon|^2 \, ds\right] + \frac{K_3}{K_1}\mathbb{E}\left[\int_t^T |\theta_s^\varepsilon|^2 \, ds\right]. \tag{3.21}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] &= \mathbb{E}\Bigg[\Bigg|\frac{1}{\varepsilon}\left(h\left(y_T^\varepsilon, \mathbb{E}\left[y_T^\varepsilon\right]\right) - h\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right) \\
&\quad - \left(h_y\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\hat{y}_T + \mathbb{E}\left[h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_T\right]\right]\right)\Bigg|^2\Bigg] \\
&\leq 4\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 h_y\left(\Lambda_T^\varepsilon\right) d\lambda - h_y\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right|^2 . \left|\hat{y}_T\right|^2\right] \\
&\quad + 4\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 h_{y'}\left(\Lambda_T^\varepsilon\right) d\lambda - h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right|^2\right] .\mathbb{E}\left[\left|\hat{y}_T\right|^2\right]\right] \\
&\quad + 4\mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\left|h_y\left(\Lambda_T^\varepsilon\right)\right|^2 . \left|\Upsilon_T^\varepsilon\right|^2 + \mathbb{E}\left[\left|h_{y'}\left(\Lambda_T^\varepsilon\right)\right|^2\right] .\mathbb{E}\left[\left|\Upsilon_T^\varepsilon\right|^2\right]\right) d\lambda\right].
\end{aligned}$$

Comme $h_y, h_{y'}$ are continues et bornées, utilisant 3.11, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[|\mathbb{Y}_T^\varepsilon|^2\right] = 0. \tag{3.22}$$

Maintenant, en appliquant le lemme de Gronwall dans 3.20 et en utilisant 3.17 et 3.22 pour obtenir 3.12 et d'après 3.12, 3.17 et 3.22 nous obtenons 3.13. ■

Proposition 3.1.3 *(inégalité variationnelle). Sous* ***(H1)–(H2)****, soit q un contrôle relaxé optimal avec des trajectoires associées (X_t^q, Y_t^q, Z_t^q). Ensuite, pour tout élément*

μ de $\mathcal{R}$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\alpha_y\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \hat{y}_T+\mathbb{E}\left[\alpha_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_T\right]\right]\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\beta_Y\left(Y_0^q, \mathbb{E}\left[Y_0^q\right]\right) \hat{Y}_0+\mathbb{E}\left[\beta_{Y'}\left(Y_0^q, \mathbb{E}\left[Y_0^q\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{Y}_0\right]\right]\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U \left(l_y\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{y}_t-\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]\right.\right. \\
& +l_Y\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{Y}_t-\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right]\right] \\
& \left.\left.+l_Z\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{Z}_t-\mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{Z}_t\right]\right]\right) q_t(du)\, dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) \mu_t(du)\right.\right. \\
& \left.\left.-\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) q_t(du)\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

Preuve. D'après l'optimalité de q nous avons :

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\alpha\left(y_T^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_T^{\varepsilon}\right]\right)-\alpha\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\right]+\mathbb{E}\left[\beta\left(Y_0^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[Y_0^{\varepsilon}\right]\right)-\beta\left(Y_0^q, \mathbb{E}\left[Y_0^q\right]\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t, y_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_t^{\varepsilon}\right], Y_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[Y_t^{\varepsilon}\right], Z_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[Z_t^{\varepsilon}\right], u\right) q_t^{\varepsilon}(du)\right.\right. \\
& \left.\left.-\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) q_t^{\varepsilon}(du)\right) dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t, y_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[y_t^{\varepsilon}\right], Y_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[Y_t^{\varepsilon}\right], Z_t^{\varepsilon}, \mathbb{E}\left[Z_t^{\varepsilon}\right], u\right) q_t^{\varepsilon}(du)\right.\right. \\
& \left.\left.-\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) q_t(du)\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

Divisons cette inégalité par ε et en utilisant la définition de q_t^{ε} et la notation 3.14, nous avons :

$$
\begin{aligned}
0 \leq\; & \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\alpha_y\left(\Lambda_T^{\varepsilon}\right)\hat{y}_T + \mathbb{E}\left[\alpha_{y'}\left(\Lambda_T^{\varepsilon}\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_T\right]\right]\right)d\lambda\right] \qquad (3.23)\\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\beta_Y\left(Y_0^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^{\varepsilon} + \hat{Y}_0\right), \mathbb{E}\left[Y_0^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^{\varepsilon} + \hat{Y}_s\right)\right]\right)\hat{Y}_0\right.\right.\\
& \left.\left. + \mathbb{E}\left[\beta_{Y'}\left(Y_0^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^{\varepsilon} + \hat{Y}_0\right), \mathbb{E}\left[Y_0^q + \lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^{\varepsilon} + \hat{Y}_s\right)\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{Y}_0\right]\right]\right)d\lambda\right]\\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_y\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\hat{y}_t,\ \mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]\right.\right.\\
& + l_Y\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\hat{Y}_t, \mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right]\right]\\
& \left.\left. l_Z\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\hat{Y}_t, \mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t, \Delta_t^{\varepsilon}, u\right)\mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right]\right]\right)q_t(du)\,d\lambda dt\right]\\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right)\mu_t(du)\right.\right.\\
& \left.\left. - \int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right)q_t(du)\right)dt\right] + \nabla_t^{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

où ∇_t^ε est donné par :

$$\nabla_t^\varepsilon = \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\alpha_y\left(\Lambda_T^\varepsilon\right)\Upsilon_T^\varepsilon + \mathbb{E}\left[\alpha_{y'}\left(\Lambda_T^\varepsilon\right)\mathbb{E}\left[\Upsilon_T^\varepsilon\right]\right]\right)d\lambda\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\beta_{Y'}\left(Y_0^q+\lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^\varepsilon+\hat{Y}_0\right),\mathbb{E}\left[Y_0^q+\lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^\varepsilon+\hat{Y}_s\right)\right]\right)\mathbb{Y}_0^\varepsilon\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathbb{E}\left[\beta_{Y''}\left(Y_0^q+\lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^\varepsilon+\hat{Y}_0\right),\mathbb{E}\left[Y_0^q+\lambda\varepsilon\left(\mathbb{Y}_0^\varepsilon+\hat{Y}_s\right)\right]\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{Y}_0\right]\right]\right)d\lambda\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(y_t^\varepsilon-y_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[y_t^\varepsilon-y_t^q\right]\right]\right.\right.$$

$$+l_Y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(Y_t^\varepsilon-Y_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[Y_t^\varepsilon-Y_t^q\right]\right]$$

$$\left.\left.+l_Z\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(Z_t^\varepsilon-Z_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[Z_t^\varepsilon-Z_t^q\right]\right]\right)\mu_t\left(du\right)d\lambda dt\right]$$

$$-\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(y_t^\varepsilon-y_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[y_t^\varepsilon-y_t^q\right]\right]\right.\right.$$

$$+l_Y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(Y_t^\varepsilon-Y_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[Y_t^\varepsilon-Y_t^q\right]\right]$$

$$\left.\left.+l_Z\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\left(Z_t^\varepsilon-Z_t^q\right)+\mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[Z_t^\varepsilon-Z_t^q\right]\right]\right)q_t\left(du\right)d\lambda dt\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\Upsilon_t^\varepsilon+\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[\Upsilon_t^\varepsilon\right]\right]\right.\right.$$

$$+l_Y\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{Y}_t^\varepsilon+\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{Y}_t^\varepsilon\right]\right]$$

$$\left.\left.+l_Z\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{Z}_t^\varepsilon+\mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t,\Delta_t^\varepsilon,u\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{Z}_t^\varepsilon\right]\right]\right)q_t\left(du\right)d\lambda dt\right].$$

Puisque les dérivées $\alpha_y,\alpha_{y'},\beta_y,\beta_{y'},l_y,l_{y'},l_Y,l_Y,l_Z,l_{Z'}$ sont continues et bornées, en utilisantt 3.4, 3.5, 3.6, 3.11, 3.12, 3.13 et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous montrons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\left|\nabla_t^\varepsilon\right|^2\right]=0.$$

Ensuite, si ε tend vers 0 dans 3.23, nous obtenons l'inégalité variationnelle. ∎

3.1.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Définition 3.1.1 *le hamiltonien H défini de*

$$[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{m\times d}\times U\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m\times l}\times\mathbb{R}^{n\times d},$$

à $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} H\left(t,y,y',Y,Y',Z,Z',\mu,\Phi,\Psi,\Sigma\right) := {} & \Phi\int_U b\left(t,y,y',u\right)\mu\left(du\right)+\Sigma\sigma\left(t,y,y'\right) \\ & +\Psi\int_U f\left(t,y,y',Y,Y',Z,Z',u\right)\mu\left(du\right) \\ & +\int_U l\left(t,y,y',Y,Y',Z,Z',u\right)\mu\left(du\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Théorème 3.1.1 *(Conditions nécessaires optimalité pour un contrôle relaxè) Supposons que **(H1)–(H2)** sont vérifiées. Soit $q\in\mathcal{R}$ un contrôle relaxé optimal. Soit (y^q,Y^q,Z^q) la solution de l'EDSPR 3.1 associée à q_t. Alors, il existe une solution unique $(\Phi^q,\psi^q,\sum^q)$ des équations adjointes suivantes :*

$$\begin{cases} d\Phi_t^q = -\left(H_y\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)+\mathbb{E}\left[H_{y'}\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)\right]\right)dt+\Sigma_t^q dW_t, \\ d\Psi_t^q = \left(H_Y\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)+\mathbb{E}\left[H_{Y'}\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)\right]\right)dt \\ \qquad +\left(H_Z\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)+\mathbb{E}\left[H_{Z'}\left(t,\zeta_t^q,q_t,\varkappa_t^q\right)\right]\right)dW_t \\ \\ \Psi_0^q = \beta_Y\left(Y_0^q,\mathbb{E}\left[Y_0^q\right]\right)+\mathbb{E}\left[\beta_{y'}\left(Y_0^q,\mathbb{E}\left[Y_0^q\right]\right)\right], \\ \Phi_T^q = \alpha_Y\left(Y_T^q,\mathbb{E}\left[Y_T^q\right]\right)+\mathbb{E}\left[\alpha_{y'}\left(Y_T^q,\mathbb{E}\left[Y_T^q\right]\right)\right] \\ +h_y\left(y_T^q,\mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\Psi_T^q+\mathbb{E}\left[h_{y'}\left(y_T^q,\mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right)\mathbb{E}\left[\Psi_T^q\right]\right], \end{cases} \tag{3.25}$$

telle que

$$
\begin{aligned}
& H\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], q_t, \Phi_t^q, \Psi_t^q, \Sigma_t^q\right) \qquad (3.26)\\
& \leq H\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], \mu_t, \Phi_t^q, \Psi_t^q, \Sigma_t^q\right)
\end{aligned}
$$

$, a, e, t, P-a, s., \ \forall \mu \in P(\boldsymbol{U}),$

où $\left(t, \zeta_t^q, q_t, \varkappa_t^q\right)=\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], q_t, \Phi_t^q, \Psi_t^q, \Sigma_t^q, \Pi_t^q\right).$

Preuve. D"après 3.25, l'inégalité variationnelle devient

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\left\langle\Phi_T^q, \hat{y}_T\right\rangle\right]-\mathbb{E}\left[h_y\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \Psi_T^q+\mathbb{E}\left[h_{y'}\left(y_T^q, \mathbb{E}\left[y_T^q\right]\right) \mathbb{E}\left[\Psi_T^q\right]\right]\right] \qquad (3.27)\\
& +\mathbb{E}\left[\left\langle\Psi_0^q, \hat{Y}_0\right\rangle\right]+\mathbb{E}\left[\int_O^T \int_U\left(l_y\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{y}_t-\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]\right.\right. \\
& +l_Y\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{Y}_t-\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{Y}_t\right]\right] \\
& \left.\left.+l_Z\left(t, \pi_t^q, u\right) \hat{Z}_t-\mathbb{E}\left[l_{y'}\left(t, \pi_t^q, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{Z}_t\right]\right]\right) q_t(d u)\, d t\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_O^T\left(\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) \mu_t(d u)\right.\right. \\
& \left.\left.-\int_U l\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], u\right) q_t(d u)\right) d t\right].
\end{aligned}
$$

Appliquant maintenant la formule d'Itô pour calculer $\left\langle\Phi_t^q, \hat{y}_t\right\rangle$ et $\left\langle\Psi_T^q, \hat{Y}_t\right\rangle$ on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\langle\Phi_T^q, \hat{y}_T\right\rangle\right]=&-\mathbb{E}\left[\int_O^T\left\langle\Psi_t^q \int_U\left(f_Y\left(t, \pi_t^q, u\right)-\mathbb{E}\left[f_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right)\right]\right) q_t(d u)\right.\right. \\
& \left.\left.+\int_U\left(l_Y\left(t, \pi_t^q, u\right)+\mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right)\right]\right) q_t(d u), \hat{y}_t\right\rangle d t\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_O^T \Phi_t^q\left(\int_U b\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) q_t(d u)-\int_U b\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], u\right) \mu_t(d u)\right) d t\right],
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\langle \Psi_0^q, \hat{Y}_0 \right\rangle\right] &= \mathbb{E}\left[\left\langle \Psi_T^q, \hat{Y}_T \right\rangle\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_O^T \left\langle \Psi_t^q, \int_U \left(f_y\left(t, \pi_t^q, u\right)\hat{y}_t - \mathbb{E}\left[f_{y'}\left(t, \pi_t^q, u\right)\mathbb{E}\left[\hat{y}_t\right]\right]\right) q_t\left(du\right) \right\rangle dt\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_O^T \left\langle \int_U \left(l_Y\left(t, \pi_t^q, u\right) + \mathbb{E}\left[l_{Y'}\left(t, \pi_t^q, u\right)\right]\right) q_t\left(du\right), \hat{Y}_t \right\rangle dt\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_O^T \left\langle \int_U \left(l_Z\left(t, \pi_t^q, u\right) + \mathbb{E}\left[l_{Z'}\left(t, \pi_t^q, u\right)\right]\right) q_t\left(du\right), \hat{Z}_t \right\rangle dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_O^T \Psi_t^q \left(\int_U f\left(t, \pi_t^q, u\right) q_t\left(du\right) - \int_U f\left(t, \pi_t^q, u\right) \mu_t\left(du\right)\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Remplaçant les deux égalités ci-dessus dans l'inégalité 3.27 pour obtenir, pour chaque $\mu \in \mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\Bigg[\int_0^T & \left(H\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], q_t, \Phi_t^q, \Psi_t^q, \Sigma_t^q\right)\right. \\
& \left. -H\left(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], Y_t^q, \mathbb{E}\left[Y_t^q\right], Z_t^q, \mathbb{E}\left[Z_t^q\right], \mu_t, \Phi_t^q, \Psi_t^q, \Sigma_t^q\right)\right) dt\Bigg].
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité 3.26 suit par un argument standard[4]. ■

Conclusion

On a établi dans ce mémoire les conditions necessaires d'optimalité satisfaites par un contrôle relaxé optimal, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives et rétrogrades non linéaires de type champ moyen (EDSPR-CM). Ici les coefficients dépendent des processus d'état ainsi que de leur distribution. De plus, la fonctionnelle de coût est également de type champ moyen. Comme l'ensemble des contrôle relaxés est convexe, donc la methode de démonstration est basée sur la méthode classique pour le cas non linéaire où on a utiliser une perturbation convexe (faible).

Le probléme de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_t(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point qu'est le contrôle strict $v_t \in \boldsymbol{U}$, alors nous obtenons que le problème de contrôle strict est un cas particulier du problème de contrôle relaxé.

Bibliographie

[1] S. Bahlali, Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems. SIAM. J. Control. Optimal., Vol. 47, pp. 2078-2095.(2008).

[2] J.M. Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2) ; 384 –404. (1973).

[3] J. Francois Le Gall, Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique.Springer, 2013.

[4] B. Gherbal, Optimal control problems for linear backward doubly stochastic differential equations. Random Oper. Stoc. Equ., 22, no. 3, 129-138, (2014).

[5] M. Jeanblanc, Cours de Cacul stochastique.Master 2 IF EVRY, 2006.

[6] A. Ninouh, Some results on the stochastic control of backward doubly stochastic differential equations, thèse de Doctorat, université Mohamed Khider de Biskra 2021.

Annexe : Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F})_{t\geq 0}$	Filtration.
B_t	Mouvement Brownien.
$EDSPR_S$	Equation différentielle stochastique progressive rétrograde.
$\sup$	Supérieur.
$\lim$	limit.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$B(\mathbb{R})$	tribu borélienne.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathbb{E}$	Espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
$J(.)$	La fonction de coût à minimiser.
μ	Contrôle relaxé.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
H	Hamiltonien.