République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Saouli Chahla

Titre :

EDS et contrôle optimal

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Labed Boubaker	UMKB	Président
Dr.	Tamer Lazhar	UMKB	Encadreur
Dr.	Labed Saloua	UMKB	Examinatrice

Septembre 2020

Dédicace

𝒜 mes très chers parents.

𝒜 mes frères et soeurs.

𝒜 toute ma famille.

𝒜 mes collègues.

𝒜 mes amis.

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce modeste travail, je tenais à remercier tout d'abord Dieu de m'avoir offert tout ce que je possède.

Je tiens à remercier en particulier :

Mon promoteur Docteur TAMER LAZHAR. Qui a pris tout le soin de m'orienter et de me faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribuer à l'élaboration de ce mémoire.

A touts les enseignants- du département MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation.

A toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de prés et de loin à la réalisation de ce travail par leurs d'encouragements.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Rappel sur le calcul stochastique **3**

1.1 Généralités sur les processus stochastiques 3

1.2 Mouvement Brownien 5

1.3 Martingales 6

1.4 Temps d'arrêt 8

1.5 Calcul d'Itô 9

1.5.1 **Intégrale stochastique** 9

1.5.2 **Processus d'Itô** 12

2 Equations différentielles stochastiques **17**

2.1 Définitions 17

2.2 lemma(LEMME DE GRONWALL) 18

2.3 Existence et Unicité forte 20

3 Contrôle Optimal **32**

3.0.1 Formulation du problème 32

3.0.2 Equation de Riccati 33

3.1 Lien entre le principe du maximum et le problème LQR 38

Bibliographie **44**

Annexe B : Abréviations et Notations **47**

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal de type linéaire quadratique ont été étudiés par beaucoup de chercheurs, dans ce genre de problème on cherche à minimiser une fonctionnelle de côut J donnée par :

$$J = \mathbb{E}\left\{ \int_0^T \frac{1}{2}\left[x'(t)\,Q(t)\,x(t) + u'(t)\,R(t)\,u(t)\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x'(T)\,H_x(T)\right\},$$

où $x(t)$ est la solution de l'eds linéaire suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = \left[A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\right]\mathrm{d}t + \left[C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\right]\mathrm{d}W(t), \\ x(0) = y. \end{cases}$$

$u(t)$ variable de contrôle qui prend leur valeurs dans un espace Euclidien . Dans ce mémoire on s'intéresse au cas où tous les coefficients de système sont aléatoires .

Pour les problèmes LQR , il est naturel d'étudier l'équation de Riccati associée qui est une équation différentielle stochastique rétrograde non linéaire. Notre problème de contrôle stochastique (LQR) est bien posé si l'equation de Riccati à une solutions et dans ce cas le contrôle optimal est de type feedback. Pour les problèmes déterministes (avec $R > 0$) , le principe de maximum peut caractériser complètement l'optimalité . Plus précisément , la solvabilité du système hamiltonien , qui se compose de l'équation d'état, l'équation adjointe et la condition de maximum est équivalente à la solvabilité du problème, et la solution du système hamiltonien donne le contrôle optimal.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans un premier chapitre on présente des généralités sur le calcul stochastique (filtration , processus adapté, formume d'Itô , . . . , etc).

Dans le deuxième chapitre on a présenté le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique non linéaire.

Dans le troisième chapitre on se consacre à l'étude d'un problème de contrôle de type linéaire-quadratique dont on donne la relation entre la solvabilité de ce problème et l'équation de Riccati associé.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

On s'intéresse à des phénomènes qui dépend du temps qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.

Définition 1.1.1 *Une filtration est une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$,c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour $t \leq s$.*

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.

On parle d'hypothèses habituelles si :

• Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

• La filtration est continue à droite au sens que $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0, +\infty[)$ définies sur le même espace de probabilité.

Définition 1.1.2 *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

On dit que le processus est à trajectoires continue (ou continue) si les applications

$t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Un processus est dit càdlàg (continue à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est-à-dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.

On utilise souvent des processus dit prévisibles. La définition précise est la suivante :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On appelle tribu des prévisibles la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme

$$]s, t] \times A, 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$$

Un processus est prévisible si et seulement si l'application $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles.

On dit que deux processes X et Y sont égaux à une modification prés si $X_t = Y_t$ P.s $\forall t$.

Deux processus sont égaux en loi $X =^{loi} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_2}) =^{loi} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$.

Définition 1.1.3 *Soit X un processus et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique. On dit que le processus et de Markov si pour toute fonction f borélienne bornée*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s), \forall t > s.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S avec $T > S$.

Proposition 1.1.1 ***(inégalité de Hölder)***

Soient p, q conjugués $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ avec $1 \leq p \leq \infty, X \in L^p, Y \in L^q$.

Alors : $XY \in L^1$ et

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_P \|Y\|_q .$$

Remarque 1.1.1 *Pour $p=q=2$ on obtient l'inégalité de **Cauchy-Schwarz :***

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(|X|^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(|Y|^2\right)}.$$

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 *Un vecteur de v.a $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur Gaussien si et seulement si tout combinison linéaire des X_i est Gaussienne (i.e. $\langle a, X\rangle$ est une v.a Gaussienne pour tout $a \in \mathbb{R}^n$).*

Définition 1.2.2 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus Guassien si pour tout n et tout $t_1, ..., t_n$ le vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est Gaussien.*

Un Mouvement Brownien de dimension d $\{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq +\infty\}$ est la donnée d'un processus mesurable B à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et d'une filtration, tels que B est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, est continu, et vérifier :

1 $B_0 = 0$ presque sûrement.

2 Pour $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendent de $\mathcal{F}_s$.

3 Pour $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ suit une loi normale centrée, de matrice de covarince $\sqrt{t-s}1_d$, où 1_d désinge la matrice identité de dimension d.

Définition 1.2.3 (Mouvement Brownien (MB))

Un Mouvement Brownien (standard) est un processus W vérifiant :

1 $W_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s.$

2 W est continue, i.e. $t \mapsto W_t(\omega)$ est C^0 pour presque tout ω,

3 W est à accroissemsnts indépandants :

$W_t - W_s$ est indépandant de $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_s, s \leq t)$

4 Les accroissements sont stationnaires, Gaussiens et pour $s \leq t$:

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$$

Théorème 1.2.1 ***(Caractérisation du Mouvement Brownien)***

Un processus W est un Mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussiens continue, centrée de fonction de covariance :

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t = \min(s,t).$$

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale si :*

1 Pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable,

2 Pour tout $t \geq 0$, M_t intégrable i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$,

3 Pour tout $t \geq s \geq 0$, $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.\mathbb{P} - p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] > M_s.P - p.s$$

Et sur-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] < M_s.P - p.s.\forall t \geq s \geq 0.$$

Proposition 1.3.1 *Le mouvement brownien standard* $(W_t, t \geq 0)$ *est une martigale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

Définition 1.3.2 *Soit* X *un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une martingale local s'il existe une suite de temps d'arrêt* T_n *croissant vers l'infini telle que pour tout* n *le processus arrêté* $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ *soit une martingale.*

Une semi-martigale continue est un processuse X que s'écrit $X = M + V$, ou M est une martingale locale continue et V est un processus continue adapté à variation bornée tel que $V_0 = 0$.

Soit X une martigale (ou une sous-martingale positive) continue à droite. Alors,

i $\forall p \geq 1, \forall a > 0, a^p P(\sup_t |X_t| \geq a) \leq \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p]$,

ii $\forall p > 1, E[\sup_t |X_t|^p] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p]$ *ou* $q = \frac{p}{p-1}$.

Théorème 1.3.1 ***(Inégalité. BDG)*** *Soit* $p \in]0; \infty[$.*Il exsite deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martigale continue* X, *nul en* 0.

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]$$

Remarque 1.3.1 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]$$

Théorème 1.3.2 *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *et soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, *alors il existe un unique processus adapté* H *tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s\right) < \infty$$

et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s \quad \mathbb{P}-p.s$$

1.4 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right)$.

Définition 1.4.1 *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{\tau \leq t\} \epsilon \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}$.

On associe à un temps d'arrêt τ la tribu $\mathcal{F}_\tau$ dite des événements antérieurs à τ,définie par $\mathcal{F}_\tau = \{A \epsilon \mathcal{F}_\infty \setminus A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Propriétés 1.4.1 • *Si* T *est un temps d'arrêt,* T *est* $\mathcal{F}_T$ *mesurable.*

• Si S et T sont des temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt. En particulier $T \wedge t$ est un temps d'arrêt.

• Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

• Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini. On définit X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

• Si un processus X est continu et adapté, X_t est $\mathcal{F}_T-$ mesurable.

Théorème 1.4.1 *Si* T *est un temps d'arrêt et* M *une* $(\mathcal{F}_t)-$*martingale, le processus* Z *défini par* $Z_t =^{déf} M_{t\wedge T}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martigale.*

En particulier, $\mathbb{E}(M_{t\wedge T}) = \mathbb{E}(M_0)$.

Théorème 1.4.2 *(théorème d'arrêt de Doob) Si* M *est une* $(\mathcal{F}_t)-$*martingale continue et si* S *et* T *sont deux temps d'arrêt tels que* $S \leq T \leq K$, K *étant une constante finie,* M_t *est intégrable et* $\mathbb{E}(M_T/\mathcal{F}_S) = M_S$.

Ce résultat s'étend à tous les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

si M est uniformément intégrable, on peut montrer que M_t converge $p.s$ et dans L^1

vers M_∞ quand $t \longrightarrow \infty$ et que $M_S = \mathbb{E}\left(M_\infty | \mathcal{F}_S\right)$.

Proposition 1.4.1 *si pour tout temps d'arrêt bornée* $\mathbb{E}\left(X_T\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right)$, *le processus* X *est une martingale.*

Définition 1.4.2 *un processus* M *adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts* τ_n *telle que* $\tau_n \longrightarrow \infty$ *et* $\left(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0\right)$ *est une martingale pour tout* n.

Une martingale local positive est une sur-martingale et une martingale local uniformément intégrable est une martingale.

1.5 Calcul d'Itô

1.5.1 Intégrale stochastique

Soit (B_t) un MB adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$

1 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, t \geq s$.

2 B_t est $\mathcal{F}_t-$adapté.

3 $\forall t \leq t_1 \leq ... \leq t_n, B_{t_1} - B_t, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Soit $\theta(t)$ un processus tel que :

i $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii $\forall T > 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T (\theta(t))^2 \, \mathrm{d}t\right)\right] < \infty$.

On veut défini l'intégrale stochastique d'Itô

$$\int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$$

Remarque 1.5.1 *Si f est une fonction dérivable alors :*

$$\int_0^t \theta(s)\,\mathrm{d}f(s) = \int_0^t \theta(s)\, f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Intégrale d'Itô pour un processus simple :

Soit $\eta = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ partition de $[0, T]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$, supposon que $\theta(t)$ est constant sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$. On définit :

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \theta(t_j)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) + \theta(t_k)\left(B_t - B_{t_k}\right), t_{k \leq t \leq t_{k+1}}.$$

1 $\forall t \geq 0$, $I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 Linéarité.

3 $(I(t))_t$ est une martingale.

Théorème 1.5.1 ***(Isométrie d'Itô)***

$$\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta^2(u)\,\mathrm{d}u\right].$$

Intégrale d'Itô pour un processus quelconque :

Soit $T > 0$ soit θ un processus :

i $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii $\forall T > 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (\theta(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$

Théorème 1.5.2 *Il existe une suite (θ_n) de processus simple tel que :*

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_n(s) - \theta(s))^2 \,\mathrm{d}s\right] = 0$$

On a défini

$$I_n(T) = \int_0^T \theta_n(u)\,\mathrm{d}B_u$$

On défini

$$I(T) = \int_0^T \theta(u)\,\mathrm{d}B_u =^{déf} \lim_n \int_0^T \theta_n(u)\,\mathrm{d}B_u.$$

Proposition 1.5.1 *(De l'intégrale stochastique)*

$I(t) = \int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s \ / \ \theta, \mathcal{F}_t-$adapté, $\theta \in L^2(\mathcal{F} \times [0,T])$

1 $\forall t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 $\theta \mapsto I(t)$ est linéaire.

3 $(I(t))_t$ est une martingale.

4 Continuté : $t \mapsto \int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$ est à trajéctoires continue.

5 Isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta(u)\,\mathrm{d}B_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta^2(u)\,\mathrm{d}u\right] \tag{1.1}$$

Proposition 1.5.2

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$$

Théorème 1.5.3 ***(Inégalité de Doob)***

Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :

$$\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2\right] \leq 4 \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] \tag{1.2}$$

1.5.2 Processus d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.5.1 *Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s, \forall t \leq T, \mathbb{P} - p.s.$$

Avec :

1 X_0 est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 $(K_s)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_s)_{0\leq t\leq T}$ des processus adapté à $\mathcal{F}_t$.

3 $\int_0^t |K_s| \,\mathrm{d}s < +\infty$, $\mathbb{P} - p.s$

4 $\int_0^t |H_s|^2 \,\mathrm{d}s < +\infty$, $\mathbb{P} - p.s$

Proposition 1.5.3 *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s \mathrm{d}s,\ \mathbb{P} - p.s.\ avec \int_0^t |K_s| \,\mathrm{d}s < +\infty,$$

Alors :

$$M_t = 0,\ \forall t \leq T,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Ceci entraîne que :

i La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique. Ce qui signifie que si :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s \\ &= X'_0 + \int_0^t K'_s \mathrm{d}s + \int_0^t H'_s \mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} &X_0 = X'_0,\ \mathbb{P}-p.s. \\ &H_s = H'_s,\ \mathrm{d}s \times \mathbb{P}-p.p. \\ &K_s = K'_s,\ \mathrm{d}s \times \mathbb{P}-p.p. \end{aligned}$$

ii Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Alors

$$K_t = 0,\ \mathrm{d}t \times \mathbb{P}-p.p.$$

Théorème 1.5.4 *Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s .$$

Où par définition :

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s,$$

Et

$$\int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s = \int_0^t f'(X_s)\,K_s \mathrm{d}s + \int_0^t f'(X_s)\,H_s \mathrm{d}B_s.$$

De même si $(t,x) \longrightarrow f(t,x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) (on dit dans ce cas que f est de class $C^{1,2}$), on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f_x'(s, X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s .$$

Proposition 1.5.4 ***(Formule d'intégration par parties)***

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s' \mathrm{d}s + \int_0^t H_s' \mathrm{d}B_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \langle X, Y\rangle_t$$

Avec la convention

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H_s' \mathrm{d}s.$$

Théorème 1.5.5 *Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $i = 1, ..., n$*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t H_s^{i,k} \mathrm{d}B_s^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X_s) \mathrm{d}X_s^i$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \partial^2_{x_i, x_j} f(s, X_s) \mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s,$$

Avec

$$\mathrm{d}X_s^i = K_s^i \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{d} H_s^{i,k} \mathrm{d}B_s^k \text{ et } \mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s$$
$$= \sum_{k=1}^{d} H_s^{i,k} H_s^{i,k} \mathrm{d}s.$$

Le resultat est simple à retenir vectorielle. pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et B le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnées B^j. On introduit alors la matrice de taille $n \times d, H = (H^{i,j})$ $_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$.Avec ces notations,on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s,$$

Où $H_s dB_s$ est un produit matrice-vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \nabla f(s, X_s).\mathrm{d}X_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace\left(D^2 f(s, X_s) H_s H_s^*\right)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \left(\partial_s f(s, X_s) + \nabla f(s, X_s).K_s\right)\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace\left(D^2 f(s, X_s) H_s H_s^*\right)\mathrm{d}s + \int_0^t Df(s, X_s) H_s \mathrm{d}B_s. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

2.1 Définitions

Dans toute cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique,

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) \mathrm{d}B_t \\ X_0 = Z \end{cases} \tag{2.1}$$

où T est un réel strictement positif, $b\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ sont deux fonctions mesurables et où Z est une variable aléatoire quelconque, b est appelée coefficient dérive (drift) de l'E.D.S, et σ coefficient de diffusion de l'E.D.S

Définition 2.1.1 ***(solution fort d'une E.D.S)***

Un processus X est solution de cette E.D.S (2.1) si c'est un processus $F-$adapté (ou $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du $MB\ B$) satisfaisant,

$$\int_0^t |b(s,X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty, \forall t \in \mathbb{R}^+ \mathbb{P} - p.s$$

et qui vérifie ,

$$X_t = Z + \int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,\mathrm{d}B_s, \forall t \in \mathbb{R}^+ \mathbb{P} - p.s \tag{2.2}$$

Définition 2.1.2 ***(Unicité forte)***

On dit qu'il ya unicité fort pour l'E.D.S si,pour

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,\mathrm{d}B_s$$
$$Y_t = y + \int_0^t b(s,Y_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,Y_s)\,\mathrm{d}B_s$$

alors

$$x = y \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0,T]) = 1$$

Remarque 2.1.1 *si* X_t *et* Y_t *sont continue alors :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0,T]) = 1 \Leftrightarrow \forall t \in [0,T], \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

2.2 lemma(LEMME DE GRONWALL)

Lemme 2.2.1 *soit* $g : [0;T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que, pour*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s, a \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

alors, pour tout t,

$$g(t) \leq a \exp(bt)$$

Preuve. on pose

$$G(t) = a + b\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$$

alors

$$g(t) \leq G(t)$$

si g est continue, G est une fonction dérivable et

$$\begin{aligned}\left(e^{-bt}G(t)\right)' &= -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G'(t) \\ &= -be^{-bt}G(t) + be^{-bt}g(t) \leq 0\end{aligned}$$

donc

$$e^{-bt}g(t) \leq e^{-bt}G(t) \leq G(0) = a$$

si g est seulement mesurable bornée, G est continue et vérifie

$$G(t) = a + b\int_0^t g(s)\,ds \leq a + b\int_0^t G(s)\,ds$$

donc la même conclusion est vraie. ■

2.3 Existence et Unicité forte

Théorème 2.3.1 *On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0,T]\,, x, y$ dans $\mathbb{R}^n$:*

1.Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y| \tag{2.3}$$

2.Croissance linéaire :

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K\,(1+|x|) \tag{2.4}$$

3.$\mathbb{E}\,|Z|^2 < \infty$.

Alors l'E.D.S (2.1) possède une unique solution. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty$$

Preuve. 1.Unicite forte

Soit X_t et Y_t deux solution forte de l'E.D.S (2.1),comme

$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour tout $0 \leq t \leq r \leq T$,

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left| \int_0^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, \mathrm{d}B_s - \int_0^t b(s, Y_s)\, \mathrm{d}s - \int_0^t \sigma(s, Y_s)\, \mathrm{d}B_s \right|^2 \\
&= \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, \mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, \mathrm{d}B_s \right|^2 \\
&\leq 2 \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, \mathrm{d}s \right|^2 \\
&\quad + 2 \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, \mathrm{d}B_s \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 &\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, \mathrm{d}B_s \right|^2 \\
&\quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, \mathrm{d}s \right|^2
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Doob (1.2) et l'isométrie des l'intégrale stochastique (1.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, \mathrm{d}B_s \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, \mathrm{d}s \right|^2 \right] \\
&\leq 8\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, \mathrm{d}s \right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\left| \int_0^T (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, \mathrm{d}s \right|^2 \right]
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right] &\le 8\mathbb{E}\left[\int_0^T|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&+2T\mathbb{E}\left[\int_0^T|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\le(8\vee 2T)\,\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X_s)|^2\right.\right. \\
&+\left.\left.|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\right)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont lipschitz en espace, on obtient pour tout $r\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right] &\le(8\vee 2T)\,K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T|X_s-Y_s|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\le C(T,K)\,\mathbb{E}\left[\int_0^T|X_s-Y_s|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\le C(T,K)\int_0^T\mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]\mathrm{d}s \\
&\le C(T,K)\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{r\le s}|X_r-Y_r|^2\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right]\le C(T,K)\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{r\le s}|X_r-Y_r|^2\right]\mathrm{d}s$$

Utilisant le lemme(2.2),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] &\leq 0e^{C(T,K)T}=0\\
&\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]=0\\
&\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2=0\\
\forall t,|X_t-Y_t|^2 &= 0,\mathbb{P}-p.s \Leftrightarrow \forall t, X_t=Y_t \quad \mathbb{P}-p.s\\
&\Leftrightarrow \forall t,\mathbb{P}\left(X_t=Y_t\right)=1
\end{aligned}$$

Comme $t\longmapsto X_t$ et $t\longmapsto Y_t$.On en déduit que X_t et Y_t sont également indistinguables.

2.Existence de la solution de l'E.D.S.(2.1)

On montrer l'existence de solution par la méthode de Picard, on définit une suite (X_t) par :

$$\left\{\begin{array}{c}
X_t^{n+1}=Z+\int_0^t\sigma\left(s,X_s\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,X_s\right)\mathrm{d}s,\forall n\geq 0\\
X_t^0=Z
\end{array}\right.$$

De X_t^0 on obtient

$$\begin{aligned}
X_t^1 &= Z+\int_0^t\sigma\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}s\\
&= Z+\int_0^t\sigma\left(s,Z\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,Z\right)\mathrm{d}s\\
X_t^2 &= Z+\int_0^t\sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Aussi, on peut déterminer (X_t^n) pour tout n on montre (X_t^n) converge vers X_t et X_t vérifiel'E.D.S.**(2.1).**

i) On suppose que σ et b vérifient la condition (2.4) on démontre que

$$\exists\, C\left(T,Z,K\right), \sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_T^n\right|^2\right]\leq C$$

On a : pose $\quad 0\leq t\leq r\leq T$

$$\left|X_t^1\right|^2=\left|Z+\int\limits_0^t\sigma\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}B_s+\int\limits_0^t b\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}s\right|^2$$

Comme $\;(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$,

$$\left|X_t^1\right|^2\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int\limits_0^t\sigma\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+\left|\int\limits_0^t b\left(s,X_s^0\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\left|X_t^1\right|^2\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int\limits_0^t\sigma\left(s,Z\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int\limits_0^t\left|b\left(s,Z\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]$$

$$\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2\leq 3\left[|Z|^2+\sup_{t\leq r\leq T}\left|\int\limits_0^t\sigma\left(s,Z\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int\limits_0^r\left|b\left(s,Z\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]\leq 3\left[|Z|^2+\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int\limits_0^t\sigma\left(s,Z\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right]+T\int\limits_0^r\left|b\left(s,Z\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]$$

Utilisant l'inégalité (1.2 et (1.1) et (2.4) de b et σ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] &\leq 3\left[|Z|^2+4\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t |\sigma(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]+T\int\limits_0^t |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\int\limits_0^r |\sigma(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s+T\int\limits_0^r |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\int\limits_0^r K^2\left(1+|Z|^2\right)\mathrm{d}s+T\int\limits_0^r K^2\left(1+|Z|\right)^2\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\int\limits_0^r C_1(K,Z)\,\mathrm{d}s+T\int\limits_0^r C_1(K,Z)\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4C_1(K,Z)\,r+TC_1(K,Z)\,r\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right]\leq 3\left[|Z|^2+C_2(K,T,Z)\,r\right]$$

De la même manière on trouve que :

$$
\begin{aligned}
\left|X_t^2\right|^2 &= \left|Z+\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}s\right|^2\\
&\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+\left|\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int_0^t \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\\
\sup_{t\leq r}\left|X_t^2\right|^2 &\leq 3\left[|Z|^2+\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\\
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3\left|Z\right|^2+3\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right]\\
&+3T\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|\sigma\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\right.\\
&\left.+T\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\mathbb{E}\left[\int_0^r K^2\left(1+\left|X_s^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right]\right.\\
&\left.+3T\mathbb{E}\left[\int_0^r K^2\left(1+\left|X_s^1\right|\right)^2\mathrm{d}s\right]\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+C_3\left(K,T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r \left(1+\left|X_s^1\right|\right)^2\mathrm{d}s\right]\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2+C_3\left(K,T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r 2\left(1+\left|X_s^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq 3\left[|Z|^2+2C_3(K,T)\left[T+\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1\right|^2\mathrm{d}s\right]\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2+2C_3(K,T)\left[T+\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq s}\left|X_u^1\right|^2\right]\mathrm{d}s\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2+2C_3(K,T)\left[T+\int_0^r 3\left(|Z|^2+C_2(K,T,Z)\,r\right)\mathrm{d}s\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2+2C_3(K,T)\left[T+3\left(|Z|^2 r+C_2(K,T,Z)\frac{r^2}{2}\right)\right]\right]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq r}|X_T^n|^2\right)&\leq C(T,Z,K)\sum_{i=0}^{n}\frac{r^i}{i!},\forall n\geq 1\\&\leq C(T,Z,K)\,e^r\\&\leq C(T,Z,K)\,e^T\end{aligned}$$

ii Montrons que la suite (X_T^n) converge $P-p.s$ uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X_T.

$$\begin{aligned}\left|X_t^2-X_t^1\right|^2&=\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\\&\leq 2\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\\&+2\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\leq r}\left|X_t^2-X_t^1\right|^2&=2\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\\&+2\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité (1.2), (1.1)l'inégalité de Cauchy Schawartz et la condition (**??**),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^2-X_t^1\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\leq 8\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^r\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\leq 8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&+2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq\left(8K^2+2TK^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq\left(8K^2+2TK^2\right)\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq s}\left|X_u^1-X_u^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq\left(8K^2+2TK^2\right)\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq s}\left|X_u^1-Z\right|^2\right]\mathrm{d}s \\
&\leq 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+\int_0^r\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}\left|X_u^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right] \\
&\leq 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+\int_0^r\left(C\left(K,T,Z\right)+C'\left(K,T,Z\right)s\right)\mathrm{d}s\right] \\
&\leq 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+C\left(K,T,Z\right)r+C'\left(K,T,Z\right)\frac{r^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int\limits_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right]$$
$$+2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int\limits_0^t\left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$

Utilisant l'inégalité, l'inégalité de Cauchy Schwartz et la condition

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 8\mathbb{E}\left[\int\limits_0^r\left|\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$+2\mathbb{E}\left[\left|\int\limits_0^r b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$
$$\leq 8K^2\mathbb{E}\left[\int\limits_0^r\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$+2TK^2\mathbb{E}\left[\int\limits_0^r\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\leq\left(8K^2+2TK^2\right)\int\limits_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]\mathrm{d}s$$
$$\leq C^n\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc la somme $\sum\limits_n\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]<\infty\Rightarrow\mathbb{P}.p.s$

X_t^n converge uniformément

$$\exists\ X_t,\text{tq}:\sup_t\left|X_t^n-X_t\right|^2\longrightarrow 0\ \mathbb{P}.p.s$$

iii X_t vérifier l'E.D.S (2.1).

On pose

$$X_t^k=Z+\int\limits_0^t b\left(s,X^{k-1}\right)\mathrm{d}s+\int\limits_0^t\sigma\left(s,X^{k-1}\right)\mathrm{d}B_s \tag{2.5}$$

il reste a montrer que (X_t) est solution de (2.1) ; pour cela, on remarque que $\left(X^k\right)$ converge dans $L^2(P)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|X_t^m - X_t^n\|_{L^2} &= \left\|\sum_{k=n}^{m-1} X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{L^2}, m > n \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(C_k \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Si on note X_t la limite L^2 de $\left(X_t^k\right)$, on sait qu'il existe une sous-suite que converge $p.s$, donc nécessairement vers Y_t. En conséquence $X_t = Y_t \;\; p.s.$ On voudrait maintenant passer à la limite dans (2.5), comme $\left(X_t^k\right)$ converge dans $L^2(P)$, le lemme de fatou donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - X_t^n|^2 \, \mathrm{d}t\right] \leq \liminf_{m\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^m - X_t^n|^2 \, \mathrm{d}t\right] \longrightarrow_{m\to+\infty} 0$$

La condition (2.3), l'inégalité de Cauchy Schwartz implique que

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s\right)\right) \mathrm{d}s\right|^2\right] \leq tK^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^n - X_s|^2 \, \mathrm{d}s\right] \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

Alors

$$\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) \mathrm{d}s \longrightarrow_{n\to+\infty}^{L^{2}(P)} \int_0^t b\left(s, X_s\right) \mathrm{d}s$$

De même manière en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s\right)\right) \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \leq 4K^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^n - X_s|^2 \, \mathrm{d}s\right] \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

Alors
$$\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) \mathrm{d}B_s \longrightarrow_{n\to+\infty}^{L^2(P)} \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) \mathrm{d}B_s$$

Tout converge dans (2.5). En passant à la limite, on en déduit que (X_t) est solution de (2.1).

■

Chapitre 3

Contrôle Optimal

3.0.1 Formulation du problème

Dans cette section on considère un problème de contrôle optimal dont l'équation d'état est linéaire de type Ito définit comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x\left(t\right) & = \left[A\left(t\right)x\left(t\right) + B\left(t\right)u\left(t\right)\right]\mathrm{d}t + \left[C\left(t\right)x\left(t\right) + D\left(t\right)u\left(t\right)\right]\mathrm{d}W\left(t\right), \\ x\left(s\right) & = y, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ sont le temps initial et l'état initial, respectivement, $W(t)$ est un mouvement brownien unidimensionnel, et $u(.)$ le contrôle qui est un processus mesurable $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans $U = \mathbb{R}^m$, on note par U_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles.

Pour tout $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ et $u(.) \in U_{ad}$, la fonction de coût associé est donnée comme suit :

$$J\left(s,y;u\left(.\right)\right) = \mathbb{E}^s\left\{\int_0^T \frac{1}{2}\left[x'\left(t\right)Q\left(t\right)x\left(t\right) + u'\left(t\right)R\left(t\right)u\left(t\right)\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x'\left(T\right)H_x\left(T\right)\right\}, \tag{3.2}$$

Où $\mathbb{E}^s \equiv \mathbb{E}\left(.\backslash\mathcal{F}_s\right)$, la solution $x(.)$ de l' eds est appelée la réponse du contrôle

$u(.) \in U_{ad}$, et $(x(.), u(.))$ est appelée un paire admissible.L'objectif du problème de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût $J(s, y; u(.))$ sur l'ensemble $u(.) \in U_{ad}$. Pour tout $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ la fonction de valeur est définie comme :

$$V(s, y) = \inf_{u(.) \in U_{ad}} J(s, y; u(.)) .$$

Notons que pour tout y fixé, V est un processus $\mathcal{F}_s-$adapté. Un pair admissible $(x^*(.), u^*(.))$ est appelée optimale pour $C_{s,y}$ si l'Infimum de $J(s, y; u(.))$ est atteint au $u^*(.)$. Le problème d'optimisation est bien posé si $V(s, y) > -\infty$, $\mathbb{P} - a.s$, pour tous $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$.

Pour la suite on suppose que :

$$\begin{aligned}
A, C &\in L^\infty_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^{n\times n}\right) \cap L^2\left(\Omega; C\left(0, T; \mathbb{R}^{n\times n}\right)\right), \\
B, D &\in L^\infty_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^{n\times m}\right) \cap L^2\left(\Omega; C\left(0, T; \mathbb{R}^{n\times m}\right)\right), \\
Q &\in L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; S^n_+\right) \cap L^2\left(\Omega; C\left(0, T; S^n_+\right)\right), \\
R &\in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; S^m) \cap L^2(\Omega; C(0, T; S^m)), \\
H &\in L^2\left(\Omega; \mathcal{F}_t; S^n_+\right).
\end{aligned}$$

3.0.2 Equation de Riccati

Dans cette section nous introduisons l'équation stochastique de Riccati qui vérifier l'edsr non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}P(t) = \{-(P(t)A(t) + A'(t)P(t) + C'(t)P(t)C(t) + \Lambda(t)C(t) + C'(t)\Lambda(t) + Q(t)) \\ +(P(t)B(t) + C'(t)P(t)D(t) + \Lambda(t)D(t))(R(t) + D'(t)P(t)D(t))^{-1}(B'(t)P(t) \\ +D'(t)P(t)C(t) + D'(t)\Lambda(t))\}\mathrm{d}t + \Lambda(t)\mathrm{d}W(t), \\ P(T) = H, \\ K(t) \equiv R(t) + D'(t)P(t)D(t) > 0, \mathbb{P} - a.s., \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Un couple $(\mathbb{P}, \Lambda) \in [L^2_{\mathcal{F}}(0,T;S^n) \cap (\Omega; C(0,T;S^n))] \times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;S^n)$ $\mathcal{F}_t-$adaptée est appelé une solution de cette équation de Riccati si elle satisfait toutes les contraintes de (3.3).

Théorème 3.0.2 *Si l'équation stochastique de Riccati admet une solution, alors le problème LQR stochastique est bien posé.*

Preuve. Soit $\mathbb{P} \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;S^n) \cap L^2(\Omega; C(0,T;S^n))$ une semi-martingale avec la décomposition suivante :

$$\mathrm{d}\mathbb{P}(t) = \Gamma(t)\,\mathrm{d}t + \Lambda(t)\,\mathrm{d}W(t), t \in [0,T],$$

et soit $(x(.), u(.))$ un paire admissible. En appliquant la formule d'Ito, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x'Px) = \{ & x'(\Gamma + PA + A'P + C'PC + \Lambda C + C'\Lambda)x \\ & + 2u'(B'P + D'PC + D'\Lambda)x + u'D'PDu\}\mathrm{d}t \\ & + \{...\}\mathrm{d}W(t). \end{aligned}$$

Intégrons de s à T, et prenant l'espérence conditionnelle E^s des deux côtés, par suite divisant par 2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\left[x'(T)P(T)x(T)\right]-\frac{1}{2}y'P(s)y\\
&=\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^T\{x'(\Gamma+PA+A'P+C'PC+\Lambda C+C'\Lambda)x\\
&+2u'(B'P+D'PC+D'\Lambda)x+u'D'PDu\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

En additionnant ceci avec (3.2), et utilisant le fait que $K\equiv R+D'PD>0$, alors

$$\begin{aligned}
&J(s,y;u(.))\\
&=\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^T\{x'(\Gamma+PA+A'P+C'PC+\Lambda C+C'\Lambda+Q)x\\
&+2u'(B'P+D'PC+D'\Lambda)x\\
&+u'(R+D'PD)u\}dt+\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\left[x'(T)(H-P(T))x(T)\right]+\frac{1}{2}y'P(s)y\\
&=\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^T\{x'\left(\Gamma+PA+A'P+C'PC+\Lambda C+C'\Lambda+Q-L'K^{-1}L\right)x\\
&+\left(u+K^{-1}Lx\right)'K\left(u+K^{-1}Lx\right)\}\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\left[x'(T)(H-P(T))x(T)\right]+\frac{1}{2}y'P(s)y,
\end{aligned}$$

où $L=B'P+D'PC+D'\Lambda$. Maintenant, si $(\mathbb{P},\Lambda)$ satisfait l'équation de Riccati, i.e.,

$$\Gamma=-\left(PA+A'P+C'PC+\Lambda C+C'\Lambda+Q-L'K^{-1}L\right),$$

Avec $K=R+D'PD>0$ et $P(T)=H$, alors

$$\begin{aligned}
&J(s,y;u(.))\\
&=\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^T\left(u+K^{-1}Lx\right)'K\left(u+K^{-1}Lx\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}y'P(s)y\\
&>\frac{1}{2}y'P(s)y>-\infty,\mathbb{P}-a.s.
\end{aligned}$$

Par conséquent, notre problème de contôle (LQR) stochastique est bien posé. ■

Remarque 3.0.1 *En remarque que si l'équation de Riccati admet une solution* $(\mathbb{P}, \Lambda)$*, alors le contrôle optimal de feedback est définit comme suit :*

$$\begin{aligned} u(t) &= -K^{-1}(t)\, L(t)\, x(t) \\ &= -\left(R(t) + D'(t)\, P(t)\, D(t)\right)^{-1} \left(B'(t)\, P(t)\, C(t) + D'(t)\, \Lambda(t)\right) x(t)\,. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction de valeur $V(t,x) = \frac{1}{2} x' P(t)\, x$ et le système associé au contrôle optimal est définit comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = \left[A(t) - B(t)\, K^{-1}(t)\, L(t)\right] x(t)\, \mathrm{d}t + \left[C(t) - D(t)\, K^{-1}(t)\, L(t)\right] x(t)\, \mathrm{d}W(t)\,, \\ x(s) = y. \end{cases}$$

Comme on à mentionné précédemment la solution de l'équation de Riccati est un couple $(\mathbb{P}, \Lambda)$, la présence de Λ est nécessaire lorsque les coefficients A, B, C, D, Q, R, H de l'équation sont aléatoires afin d'obtenir une solution $\mathcal{F}_t-$adaptée.Toutefois, si tous les coefficients sont déterministe, alors nous pouvons avoir une équation de Riccati déterministe comme suit :

$$\begin{aligned} & P + PA + A'P + C'PC - (PB + C'PD)\,(R + D'PD)^{-1}\,(B'P + D'PC) + Q = 0 \\ & P(T) = H \\ & K = R + D'PD > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Théorème 3.0.3 *Supposons que tous les coefficients* A, B, C, D, Q, R, H *sont déterministes. Alors le théorème précédent reste vrai avec l'équation de Riccati (3.4). De plus, le contrôle optimal est donné par :*

$$u(t) = -\left(R(t) + D'(t)\, P(t)\, D(t)\right)^{-1} \left(B'(t)\, P(t) + D'(t)\, P(t)\, C(t)\right) x(t)\,.$$

Exemple 3.0.1 *On considère le problème suivant :*

$$\min J = \min \mathbb{E}^s \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} r u^2(t)\, dt + \frac{1}{2} x^2(1) \right\}$$

Où

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = u(t)\,\mathrm{d}t + u(t)\,\mathrm{d}W(t), \\ x(s) = y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ici r est une constante donnée (déterministe). Nous allons montrer que le problème est bien posé si

$$-1 \leq r \leq 0, \qquad \ln(-r) + 2 + r < 0 \, (\textit{où } -0.1586 < r < 0 \textit{ environ}).$$

L'équation de Riccati correspondante est donnée comme suit :

$$\begin{cases} P(t) = \frac{P^2(t)}{r+P(t)}, \\ P(1) = 1, \\ r + P(t) > 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Si $r < -1$, alors l'équation ci-dessus n'est pas solvable. En effet, dans ce cas, $P(t) > -r > 1$, de sorte que la condition terminale de soit violée. L'équation (3.6) est équivalente à

$$\begin{cases} \ln P(t) - \frac{r}{P(t)} = t - 1 - r, \\ r + P(t) > 0. \end{cases}$$

Soit

$$f^t(p) = \ln p - \frac{r}{p} - t + 1 + r, p \in (0, +\infty),$$

puisque

$$f^t(-r) = \ln(-r) + 2 - t + r < 0$$
$$f^t(1) = 1 - t > 0,$$

on conclu qu'il existe $P(t) \in (-r, 1)$ ($i.e., r + P(t) > 0$) de telle sorte que $f^t(P(t)) = 0$ pour $t \in [0, 1)$. De plus,

$$f^t(p) = \frac{p+r}{p^2} \begin{cases} < 0, & \text{si } p < -r, \\ > 0, & \text{si } p > -r, \\ = 0 & \text{si } p = -r, \end{cases}$$

Ainsi $P(t)$ satisfait $f^t(P(t)) = 0$ et $r + P(t) > 0$ est unique. Enfin, $f^1(1) = 0$ implique que $P(1) = 1$. Par conséquent (3.5) admet une solution. Dans ce cas, le contrôle optimal est prend la forme :

$$u(t) = -\frac{P(t)}{r + P(t)} x(t).$$

3.1 Lien entre le principe du maximum et le problème LQR

Dans cette section on donne le lien entre le principe de maximum de Peng [5], qui donne les conditions nécessaires d'optimalité et la solvabilité du problème LQR.

Principe du maximum de Peng

Dans cette partie on donne le principe du maximum de Peng [5] pour un systèmes non linéaires et puis nous spécialisons le cas du modèle LQR.

Etant donné $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$:

$$Minimiser \qquad J\left(s,y;u\left(.\right)\right)=\mathbb{E}\left[\int_{s}^{T}l\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+h\left(x\left(1\right)\right)\right].$$

$$Sachant\ que \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\mathrm{d}W\left(t\right), \\ x\left(s\right)=y. \end{cases}$$

Le principe de Peng est donneé comme suit : Si $\left(x^{*}\left(.\right),u^{*}\left(.\right)\right)$ un couple optimal alors

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}tr\left\{\left[\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u\right)-\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u^{*}\left(t\right)\right)\right]'P_{0}\left(t\right)\left[\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u\right)-\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u^{*}\left(t\right)\right)\right]\right\} \\ +P'\left(t\right)\left[f\left(t,x^{*}\left(t\right),u\right)-f\left(t,x^{*}\left(t\right),u^{*}\left(t\right)\right)\right]+q'\left(t\right)\left[\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u\right)-\sigma\left(t,x^{*}\left(t\right),u^{*}\left(t\right)\right)\right] \\ +l\left(t,x^{*}\left(t\right),u\right)-l\left(t,x^{*}\left(t\right),u^{*}\left(t\right)\right)\geq 0,\forall u\in U,P-a.s.,a.e.t\in\left[s,T\right], \end{gathered}$$

où $\left(p\left(.\right),q\left(.\right)\right)$ est la solution de l'équation adjoint du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}p\left(t\right)=-\left[f_{x}^{*}\left(t\right)'p\left(t\right)+\sigma_{x}^{*}\left(t\right)'q\left(t\right)+l_{x}^{*}\left(t\right)\right]\mathrm{d}t+q\left(t\right)\mathrm{d}B\left(t\right), \\ p\left(T\right)=h_{x}\left(x^{*}\left(T\right)\right), \end{cases} \tag{3.7}$$

et $\left(P_{0}\left(t\right),\Lambda_{0}\left(t\right)\right)$ est la solution de l'équation adjoint du deuxième ordre suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_{0}\left(t\right)=[-f_{x}^{*}\left(t\right)P_{0}\left(t\right)+P_{0}\left(t\right)f_{x}^{*}\left(t\right)+\sigma_{x}^{*}\left(t\right)'P_{0}\left(t\right)\sigma_{x}^{*}\left(t\right) \\ +\sigma_{x}^{*}\left(t\right)'\Lambda_{0}\left(t\right)+\Lambda_{0}\left(t\right)\sigma_{x}^{*}\left(t\right)+\Phi\left(t\right)]\mathrm{d}t+\Lambda_{0}\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right), \\ P_{0}\left(T\right)=h_{xx}\left(x^{*}\left(T\right)\right), \end{cases} \tag{3.8}$$

Avec

$$\Phi\left(t\right)=l_{xx}^{*}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}\left\{p^{i}\left(t\right)f_{xx}^{i*}\left(t\right)+q^{i}\left(t\right)\sigma_{xx}^{i*}\left(t\right)\right\}$$

.

Le hamiltonien généralisé est la fonction H correspondant aux paire optimale $\left(x^{*}\left(.\right),u^{*}\left(.\right)\right)$

sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} &G(t,x,u,p,S) = -\tfrac{1}{2}tr\left(\sigma(t,x,u)' S\sigma(t,x,u)\right) - p'f(t,x,u) - l(t,x,u), \\ &H(t,x,u) = G(t,x,u,p(t),P_0(t)) - \sigma(t,x,u)'\left[q(t) - P_0(t)\sigma(t,x^*(t),u^*(t))\right], \end{aligned}$$

$(t,x,u,p,S) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times S^n$.

Pour tout $(t,x,u) \in [s,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $(p(t), q(t))$, $P_0(t)$ les solutions des équations adjoints. Alors notre condition de maximum est la suivante :

$$H(t,x^*(t),u^*(t)) = \max_{u \in U} H(t,x^*(t),u), \quad \mathbb{P}-a.s.; a.e.t \in [s,T].$$

En appliquant le principe du maximum ci-dessus au modèle LQR, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *Si* $(x^*(.), u^*(.))$ *un couple optimale pour* $C_{x,y}$*. Alors, il existent* (p,q) , (P_0, Λ_0) *satisfaisant :*

$$\begin{cases} \mathrm{d}p(t) = -\left(A'(t)p(t) + Q(t)x^*(t) + C'(t)q(t)\right)\mathrm{d}t + q(t)\mathrm{d}W(t), \\ p(T) = Hx^*(T), \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P_0(t) &= -\left(A'(t)P_0(t) + P_0(t)A(t) + C'(t)P_0(t)C(t) + \Lambda_0(t)C(t) + C'(t)\Lambda_0(t) + Q(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\quad + \Lambda_0(t)\mathrm{d}W(t), \\ P_0(T) &= H, \end{aligned} \tag{3.10}$$

tel que

$$R(t)u^*(t) + B'(t)p(t) + D'(t)q(t) = 0, \tag{3.11}$$

$$R(t) + D'(t)P_0(t)D(t) \geq 0, \quad \mathbb{P}-a.s., a.e.t \in [s,T]. \tag{3.12}$$

Preuve. Tout d'abord, il est clair que les équations adjoints du premier et du deuxième ordre dans le cas LQR sont données respectivement dans (3.9) et (3.10). En outre $H(t, x^*(t), u)$ est une fonction quadratique dans u, qui atteint son maximum à $u^*(t)$ par la condition de maximum. Par conséquent, il est facile de vérifier que (3.11),(3.12) ni autre que les conditions du premier et du deuxième ordre, respectivement, du point $u^*(t)$ qui maximize la fonction quadratique $H(t, x^*(t), .)$.
■

On note que l'équation adjoint du deuxième ordre est similaire de l'équation stochastique

de Riccati mais avec un terme non linéaire supplementaire dans le coefficient de drift. La relation entre $P_0(t)$ et $P(t)$ est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.1 *Si le problème LQR est bien posé, alors*

$$P_0(t) \geq P(t), \mathbb{P} - a.s., \quad \forall t \in [0, T].$$

Preuve. Soit $(x^*(t), u^*(t))$ un paire optimal pour le problème $C_{0,y}$, par [7] :

$$P_0(t) \geq V_{xx}(t, x^*(t)), \mathbb{P} - a.s., \quad \forall t \in [0, T],$$

ou $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, alors si le problème LQR est bien posé, $V(s, y) = \frac{1}{2} x' P(t) x$, qui est suffisamment regulière avec $V_{xx}(t, x^*(t)) = P(t)$ d'ou le résultat. ■

Pour les problèmes LQR déterministes, il est bien connu que le système hamiltonien caractérise complètement le contrôle optimal i.e, une solution du système Hamiltonian

est un paire optimale du problème LQR et vice versa. Dans ce sens, le principe maximum et la solvabilité du problème LQR sont équivalents. Il est alors naturel de s'attendre au cas stochastique, la solvabilité du système hamiltonien implique la solvabilté du problème LQR. Malheureusement, ce n'est pas vrai.

Exemple 3.1.1 *On considère le problème suivant :*

$$\textit{Minimiser} \qquad J = \mathbb{E}^s \left\{ \int_s^1 -\frac{1}{2} u^2(t)\, dt + \frac{1}{2} x^2(1) \right\}$$

$$\textit{Sachant} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x(t) = \left(C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t)\right) \mathrm{d}W(t), \\ x(s) = y, \end{cases}$$

Où C et D sont des fonctions déterministes bornées satisfaisant :

$$\exp\left[-\int_0^1 C^2(r)\,\mathrm{d}r\right] < 1, \qquad D(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^1 C^2(r)\,\mathrm{d}r\right]. \tag{3.13}$$

Le système hamiltonien est donné comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^*(t) = \left(C(t)\, x^*(t) + D(t)\, u^*(t)\right) \mathrm{d}W(t), \qquad x(s) = y, \\ \mathrm{d}p(t) = -C(t)\, q(t)\,\mathrm{d}t + q(t)\,\mathrm{d}W(t), \qquad p(1) = x^*(1), \\ \mathrm{d}P_0(t) = -C^2(t)\, P_0(t)\,\mathrm{d}t, \qquad P_0(1) = 1, \\ -u^*(t) + D(t)\, q(t) = 0, \\ -1 + D^2(t)\, P_0(t) \geq 0. \end{cases}$$

Puisque $P_0(t) = \exp\left[\int_t^1 C^2(r)\,\mathrm{d}r\right]$, la dernière inégalité dans le système ci-dessus est satisfaite. Par conséquent le système est réduit à

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^*(t) = \left(C(t)\, x^*(t) + D^2(t)\, q(t)\right) \mathrm{d}W(t), \qquad x^*(s) = y, \\ \mathrm{d}p(t) = -C(t)\, q(t)\,\mathrm{d}t + q(t)\,\mathrm{d}W(t), \qquad p(1) = x^*(1). \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation différentielle stochastique progressif – rétrograde qui admet une solution unique $(x^*(.), p(.), q(.))$ si $1-s>0$.

Maintenant, on va montrer que notre problème de contrôle LQR n'est pas solvable. Fixons s et $y \neq 0$. En utilise la formule Ito, on obtient

$$\mathrm{d}x^2(t) = 2x(t)(C(t)x(t) + D(t)u(t))\,\mathrm{d}W(t) + (C(t)x(t) + D(t)u(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$J(s,y;u(.)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^1 \left[-u^2(t) + (C(t)x(t) + D(t)u(t))^2\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}y^2.$$

Par (3.13), pour $\varepsilon_0 > 0$, suffisamment petit, on peut trouver $\delta_0 > 0$ tel que

$$1 - D^2(t) \geq \varepsilon_0, \qquad \forall t \in [s, 1-\delta_0].$$

Pour un entier $k > 0$, définissons un contrôle de feedback comme suit :

$$u_k(t) = \begin{cases} kC(t)x(t), & s \leq t \leq 1-\delta_0, \\ -D^{-1}(t)C(t)x(t), & 1-\delta_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Il découle que

$$\begin{aligned} J(s,y;u_k(.)) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^{1-\delta_0} \left[-k^2 + (1+kD(t))^2\right]|C(t)x(t)|^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_{1-\delta_0}^1 u_k^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_s^{1-\delta_0}\left[\left(1-D^2(t)\right)\left(k - \frac{D(t)}{1-D^2(t)}\right)^2 - \frac{1}{1-D^2(t)}\right]|C(t)x(t)|^2\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbb{E}^s\int_{1-\delta_0}^1 u_k^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Notons que

$$\mathbb{E}^s x^2(t) = \exp\int_s^t (1+D(t)k)^2 C^2(t)\,\mathrm{d}t.y^2 > 0,$$

alors $J(s, y; u_k(.)) \longrightarrow -\infty$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$ donc notre problème de contrôle n'est pas solvable.

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1986). Current results and issues in stochastic control. Stochastic Differential Systems, 36-88.

[2] Chen, S., Li, X., & Zhou, X. Y. (1998). Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. SIAM Journal on Control and Optimization, 36(5), 1685-1702.

[3] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc

[4] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[5] Peng, S. (1990). A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Journal on control and optimization, 28(4), 966-979.

[6] Wonham, W. M. (1968). On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM Journal on Control, 6(4), 681-697.

[7] Xun yu, Z. (1991). A unified treatment of maximum principle and dynamic programming in stochastic controls. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 36(3-4), 137-161.

[8] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

[9] Zhou, X. Y. (1996). Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(8), 1176-1179.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\mathcal{F}_t)$	:	filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$	:	espace de probabilité filtré.
L^∞	:	$= \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \lvert f\rvert < M \ P.p\}$.
MB	:	Mouvement Brownien.
M'	:	le transpose de tout vecteur ou matrice M.
M^j	:	l'entrée jth de tout vecteur M.
$\lvert M\rvert$	:	$= \sqrt{\sum_{i,j} m_{i,j}^2}$ pour toute matrice ou tout vecteur $M = (m_{i,j})$.
S^n	:	l'espace de toutes les matrices $n \times n$ symétrique,
S_+^n	:	le sous-espace de toutes les matrices définies non négatives de S^n,
$\hat{S}_+^n$	:	le sous-espace de toutes les matrices positives définies de S^n.
$C(0, T; X)$	:	l'espace Banach des fonctions continues évaluées en X sur $[0, T]$ doté
ρ_{xx}	:	la Hesse d'une fonction scalaire ρ par rapport à la variable x.
$L_{\mathcal{F}}^p(a, b; X)$	:	$= \{\phi(.) = \{\phi(t, \omega) : a \leq t \leq b\} \backslash \phi(.)$ est un $\mathcal{F}_t -$ adapté , $X -$ value mesurable sur $[a, b]$, et $E\int_a^b \lVert\phi(t, \omega)\rVert_X^p dt < \infty\Big\}$. $\lVert\phi(.)\rVert_{\mathcal{F},p} = \left(E\int_a^b \lVert\phi(t, \omega)\rVert_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Résumé

Dans notre mémoire on s'intéresse à l'étude d'un problème de contrôle optimal de type linéaire quadratique et l'équation de Riccati associée, plus précisément si l'équation différentielle stochastique rétrograde de Riccati admet une solution alors notre problème de contrôle est solvable, un contrôle optimal de feedback est donné, ensuite on donne le lien entre le principe du maximum de Peng et l'équation de Riccati.

Abstract

In our memory we are interested in the study of an linear -quadratic optimal control problem and the associated Riccati equation, more precisely if the stochastic backward equation of Riccati admits a solution then our control problem is solvable, an optimal feedback control is given, after we also provide the relationship between the maximum principle of Peng and the Riccati equation is given.

الملخص

في هذه المذكرة سوف نهتم بدراسة مشكلة التحكم الامثل لنموذج خطي تربيعي ومعادلة ريكاتي المرافقة له إذ نبين أنه يمكن حل مشكلة التحكم يعني أن الحل الأمثل الموجود إذا كانت لهذه المعادلة الأخيرة حلول وفي الأخير نعطي العلاقة الموجودة بين مبدأ بينغ ومعادلة ريكاتي.