

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la
VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse.**

Par

BRAHIMI Meriem

Titre :

**Principe de Comparaison pour Certaines
Equations Différentielles Fractionnaires**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	MENACER Tidjani	UMKB	Président
Pr.	BERBICHE Mohamed	UMKB	Encadreur
Dr.	GUIDAD Daradji	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce humble travail

*À ma mère **Akila** qui ma soutnus tout ou long de ma vie.*

*À mes chère frères **Ahmed Chams El Din ,Fares.***

*À ma chère soeurs **Chikha.***

*À tous mes fammille **Brahimi.***

*À mes amis **M. Chihab, L.Meriem, N.Abir.***

À toute la promotion de 2021 de 2 éme Master Mathématiques.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu tout puissant qui ma donné la force et la volonté pour entamer et terminer ce travail.

*J'exprime tout ma profond gratitude à mon encadreur **Pr. BERBICHE***

Mohamed qui ma proposé le sujet.

Je le remercie pour son aide, sa patience, ses conseils et pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail.

Je tiens à remercier aussi les membres de jury **Pr.MENACER Tidjani** et

Dr.GUIDAD Daradji de m'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Mon remerciement s'adresse également à tout mes professeurs.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Liste des tables	vi
Introduction	1
1 Notions Préliminaires	3
1.1 Fonctions importantes pour la dérivation fractionnaire	3
1.1.1 Fonction Gamma	5
1.1.2 Fonction Bêta	6
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler [7]	6
1.2 Intégrale et dérivée fractionnaire	7
1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville	7
1.2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Rieman-Liouville[1],[7]	8
1.2.3 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo[1]	9
1.2.4 Relation entre la dérivée de Rieman-Liouville et celle de Caputo[1],[18]	10

1.2.5	Dérivation fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov	10
2	Principes de comparaison pour EDF avec les dérivés de Caputo	12
2.1	Principe de comparaison avec des inégalités strictes	12
2.2	Existence local et solution extremes	16
2.3	Principes de comparaison avec des inégalités non strictes	21
3	Principe de comparaison et borne de solution des EDF	23
3.1	Principaux résultats	25
3.2	Simulation numérique	30
	Conclusion	35
	Bibliographie	36
	Annexe : Abréviations et Notations	39

Table des figures

1.1	Représentation de la fonction Gamma.	5
1.2	Représentation de la fonction Mittag-Leffler avec deux paramètres. . .	7
1.3	Mathématicien Georg Friedrich Bernhard Riemann né le (17-09-1826) .	8
1.4	Mathématicien Joseph Liouville né le (24-03-1809).	9

Liste des tableaux

- 3.1 Tableau représente résultats de bornitude du système de Lorenz fractionnaire avec ordres différents. 31
- 3.2 Tableau représente résultats de délimitation des systèmes fractionnaires de type Lorenz-like avec des ordres différents. 34

Introduction

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où **Newton** et **Leibniz** ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hospital en 1695, l'hospital a répondu. Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = 1$? Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hospital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction, a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'éclairer d'une façon générale le principe de comparaison pour EDF. La théorie des équations différentielles fractionnaires avec les dérivées de **Caputo** et le calcul fractionnaire en générale apparaissent automatiquement dans divers domaines scientifiques et de l'ingénierie tel que la physique, la chimie, ..., etc.. [14], [10].

La modélisation mathématique et la simulation des systèmes et de processus basés sur les dérivés fractionnaires de type **Caputo**. Le principe de comparaison joue un rôle important dans l'étude de la stabilité et des propriétés asymptotiques de ces EDO fractionnaires. De nombreux chercheurs ont étudié l'EDF par les dérivées de **Rieman-Liouville** d'ordre p ($0 < p < 1$) a présenté l'existence local et l'unicité

des solutions non linéaire et **Lakshmikantham -Vatsala**[12],[11] ont étudié des propriétés quantitatives des EDF's avec les dérivés de **Rieman-Liouville**. On divise l'étude en trois chapitres.

D'abord, on rappelle important de certaines fonctions auxiliaires et quelques définitions utilisées dans le calcul fractionnaire et des propriétés facilité notre calcul.

Puis on présente des définitions des intégrales et dérivées fractionnaire de **Rieman-Liouville** et de **Caputo** et le lien entre les deux notions.

En suite, dans le deuxième chapitre on parle pour les EDF's avec les dérivés de **Caputo** et on discute le principe de comparaison avec les inégalités strictes et non strictes des EDF's, également on montre l'existence local et solution extrme.

De plus, dans le troisième chapitre on parle du principe de comparaison et bornitude de solution des EDF's et la relation entre la différenciation et l'intégration fractionnaire.

En fin, on donne une application numérique et simulation, puis conclusion sur le système des EDF's.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions et définitions essentielles du calcul fractionnaire et des équations différentielles d'ordre non entier qui seront utiles pour la suite de cette étude.

1.1 Fonctions importantes pour la dérivation fractionnaire

Définition 1.1.1 Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon .$$

Définition 1.1.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est continue sur I lorsque

$$\forall a \in I, f \text{ continue en } a.$$

Définition 1.1.3 *On dit que f est uniformément continue sur I lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 *On dit que f est une fonction Lipschitzienne sur un intervalle I lorsque*

$$\exists k \geq 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

tel que

$$f \text{ Lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue}.$$

$$f \text{ Lipschitzienne} \Rightarrow f' \text{ bornée sur } I.$$

Définition 1.1.5 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que la suite (f_n) est équicontinue si :*

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.1 (Ascoli) *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I , à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, et*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| < M.$$

Alors on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f .

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1.6 La fonction **Gamma** est définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\alpha-1} dt \quad \text{pour } \alpha > 0 \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \quad \text{pour } \forall x \in \mathbb{R} \\ \Gamma(x) &= (x-1)! \quad \text{pour } x \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

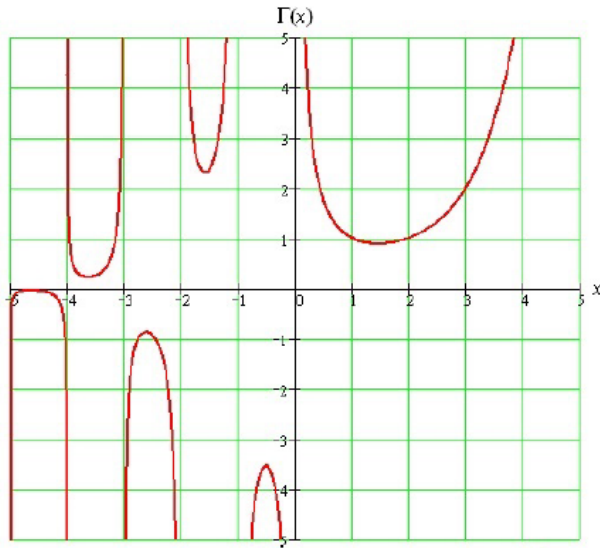


FIG. 1.1 – Représentation de la fonction Gamma.

Propriétés 1.1.1 quelques propriétés ,

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = \infty$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1, \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha\Gamma(\alpha)} < \frac{2}{\Gamma(\alpha)}$.
3. $\Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante au $0 < \alpha < 1$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.7 La fonction **Bêta** est définie par :

$$B(\alpha, w) = \int_0^1 (1 - \tau)^{w-1} \tau^{\alpha-1} d\tau, (Re(\alpha) > 0, Re(w) > 0).$$

Proposition 1.1.1 La relation entre la fonction **Gamma** et **Bêta** ;

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler [7]

Elle est utilisée dans l'expression des solutions d'ED d'ordre fractionnaire, est définie par :

$$E_{\alpha}(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha+1)} & \text{si } \alpha > 0 \\ \exp(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour deux paramètres on a :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \alpha, \beta > 0.$$

Dans les équations différentielles fractionnaires cette fonction joue le même rôle que la fonction exponentielle $\exp(x)$ joue dans les EDO. On remarque que $E_{1,1}(x) = \exp(x)$.

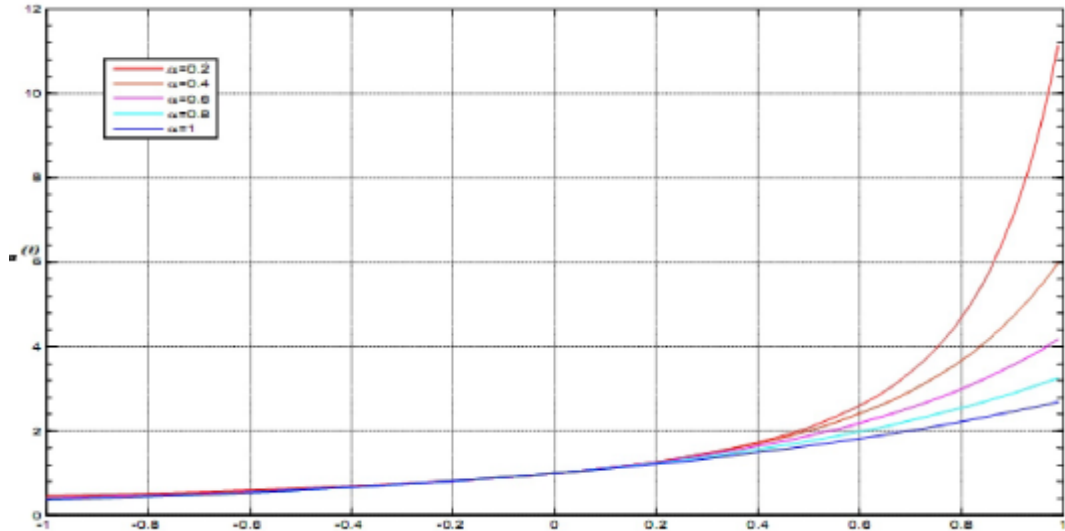


FIG. 1.2 – Représentation de la fonction Mittag-Leffler avec deux paramètres.

1.2 Intégrale et dérivée fractionnaire

1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$ une fonction continue. L'intégrale de Riemann-Liouville est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds & \text{si } \alpha > 0, \quad n \geq 0. \\ f(t) & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f. \quad \text{pour } \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Définition 1.2.2 Soit $f \in C^0([a, b])$, $\frac{d}{dt} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f$. pour $\alpha > 1$

$$\lim_{x \rightarrow a_+} (I_a^\alpha f)(x) = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0.$$



FIG. 1.3 – Mathématicien Georg Friedrich Bernhard Riemann né le (17-09-1826) .

1.2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Rieman-Liouville[1],[7]

Définition 1.2.3 La dérivation fractionnaire au sens de *Rieman-Liouville* est noté par ${}^R D_a^\alpha$ et est définie par : pour $f \in C[a, b]$ et $0 < \alpha < 1$

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_a^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \quad \text{pour } \alpha > 0, t > a.$$

Proposition 1.2.1 [1],[7]

1. La linéarité.
2. $\lim_{x \rightarrow \alpha} {}^R D_a^x = f^{(m-1)}$.
3. $\lim_{\alpha \rightarrow m} {}^R D_a^\alpha = f^{(m)}$.
4. ${}^R D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$.
5. $\alpha > 0, t > a, {}^R D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$, ie: ${}^R D_a^\alpha$ est un inverse gauche de I_a^α du même ordre α .
6. $\alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}, D = \frac{d}{dt}$, si ${}^R D_a^\alpha f(t), {}^R D_a^m f(t)$ sont existant alors, ${}^R D_a^m {}^R D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^{\alpha+m} f(t)$.

7. $I_a^{\alpha R} D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n [{}^R D_a^{\alpha-j} f(t)] \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$. En générale ${}^R D_a^\alpha f$ et $I_a^\alpha f$ de même ordre α ne commutent pas entre elles.



FIG. 1.4 – Mathématicien Joseph Liouville né le (24-03-1809).

Remarque 1.2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle.

$${}^R D_a^\alpha C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R} .$$

1.2.3 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo[1]

Définition 1.2.4 $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $0 \leq n - 1 < \alpha \leq n$ la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de **Caputo** de la fonction f notée ${}^C D_a^\alpha f$ et définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

$f^{(n)}(t)$ dérivé de $f(t)$ d'ordre n .

Remarque 1.2.2 La dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** d'une fonction cons-

tante est nulle.

$${}^C D_a^\alpha C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 1.2.1 On a

1. ${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f] = f.$
2. ${}^C D_a^\alpha f = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j$ pour $C_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n-1, \alpha > 0.$
3. $I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$

1.2.4 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo[1],[18]

Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1, f$ possède $(n-1)$ dérivée en ${}^C D_a^\alpha f$ et ${}^R D_a^\alpha f$ existe alors

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^R D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] p.p. \text{ (presque partout).}$$

1.2.5 Dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La définition donnée par **Grünwald** et **Letnikov** pour la dérivée fractionnaire détermine l'inverse à gauche de l'intégrale $I_{-\infty}^\alpha$. Par conséquent c'est une autre façon de calculer l'intégrale de **Riemann-Liouville**.

Les formule de **Grünwald-Letnikov** pour représenter la dérivée fractionnaire font intervenir des limites de différences finies d'ordre fractionnaire.

Cette approche est importante pour la discrétisation de nos équations incluant des opérateurs d'ordre non entier. La différence finie d'ordre α et de pas h d'une fonction f sont,

$$(\nabla_h^\gamma f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(x - kh) \quad \text{pour } \alpha > 0$$

pour $f \in C^n$ (f de classe C^n), la dérivée première de la fonction f est donnée par

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

...

$$f^n(x) = \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^n}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh)$$

La dérivée fractionnaire au sens de **Grünwald-Letnikov** est une extension de cette formule, puisque pour tout nombre fractionnaire positif γ on a

$$\varsigma_{a,+}^{\gamma} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(x - kh) \quad \text{pour } a < x < b$$

tel que $\binom{\gamma}{\beta} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma-\beta+1)}$.

Théorème 1.2.1 [9] Soit $\Omega = [a, b]$, $\gamma \in C$ ($0 \leq \text{Re}(\gamma) < 1$), l'espace pondéré $C_{\gamma}[a, b]$ des fonctions sur $(a, b]$ définie par :

$$C_{\gamma}[a, b] = \left\{ f : \|f\|_{C_{\gamma}} = \|(t-a)^{\gamma} f(t)\|_C \right\}, \quad C_0[a, b] = C[a, b].$$

Définition 1.2.5 [9] Soit $f^{(n)}(t)$ la dérivée d'ordre n sur $(a, b]$, tel que $f^{(n)} \in C_{\gamma}[a, b]$, l'espace $C_{\gamma}^n[a, b]$ est donné par

$$C_{\gamma}^n[a, b] = \left\{ f : \|f\|_{C_{\gamma}^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_{\gamma}} < \infty \right\}, \quad C_{\gamma}^0[a, b] = C_{\gamma}[a, b].$$

Chapitre 2

Principes de comparaison pour EDF avec les dérivés de Caputo

Dans ce chapitre, on va étudier le principe de comparaison pour les équations différentielles fractionnaires de dérivées de **Caputo**. On compare les solutions avec des inégalités strictes pour les EDF's puis, on étudie l'existence de la solution extrême. Ensuite, on considère des résultats de comparaison entre les inégalités non strictes pour les EDF's et les dérivées de **Caputo**.

2.1 Principe de comparaison avec des inégalités strictes

Soit le problème de la valeur initiale (*PVI*) avec l'EDF de type **Caputo** ;

$$\begin{cases} {}^C D^P x(t) = f(t, x(t)) \\ x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $0 \leq n - 1 < p \leq n$ le (PVI) est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire de **Volterra** suivante :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x(s)) ds.$$

On utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 [22, p.4] Soit $m(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et localement Lipschtizienne, telle que :

$$\begin{aligned} m(t_1) &= 0 \quad \text{pour } t_1 \in (0, \infty) \\ m(t) &\leq 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ D_m^p(t_1) &\geq 0 \quad \text{pour } p \in (0, 1). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1 [22, p.4] On suppose que $f(t, x)$ et $F(t, x)$ deux fonctions continues définies sur $G = [0, T] \times \mathbb{R}$, vérifiant l'inégalité :

$$f(t, x) < F(t, x), (t, x) \in G. \quad (2.2)$$

On suppose que $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t)$ sont respectivement les solutions des problèmes à valeur initiale suivants, ($0 < p < 1$)

$${}^C D^p x = f(t, x), x(0) = x_0, \quad (E1)$$

$${}^C D^p x = F(t, x), x(0) = x_0, \quad (2.3)$$

alors, on a

$$\varphi(t) < \Phi(t) \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

Preuve. On not $\Psi(t) = \varphi(t) - \Phi(t), t \in [0, T]$.

$$\text{Pour } t = 0, \quad \Psi(0) = \varphi(0) - \Phi(0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D^P \Psi(0) &= {}^C D^P \varphi(0) - {}^C D^P \Phi(0) \\ &= f(0, x_0) - F(0, x_0) \\ &< 0 \\ &\Rightarrow {}^C D^P \Psi(t) = D^P \Psi(t). \end{aligned}$$

$$\exists \sigma > 0 \text{ pour } 0 < t < \sigma, \quad \Psi(t) < 0.$$

Par l'absurde on suppose que $\varphi(t) < \Phi(t)$ est faux.

$$\exists t_1, (t_1 > 0) \text{ tel que } \Psi(t_1) = 0$$

On note

$$\beta = \inf \{t, \Psi(t) = 0, t > 0\}$$

et

$$\Psi(\beta) = 0, \quad \Psi(t) < 0 \text{ pour } 0 < t < \beta$$

$${}^C D^P \Psi(t) = f(t, x) - F(t, x) \text{ pour } t \in [0, T].$$

Comme f et F sont continues sur G . Alors, $\Psi'(t)$ est une fonction localement bornée par définition .

Pour cela $\Psi(t)$ est localement Lipschitzienne continue sur $0 \leq t \leq T$, implique

$$D^P \Psi(\beta) \geq 0.$$

D'autre part, puisque $\Psi(\beta) = 0$ on not $\gamma = \varphi(\beta) = \Phi(\beta)$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq D^P \Psi(\beta) \\ &= {}^C D^P \varphi(\beta) - {}^C D^P \Phi(\beta) \\ &= f(\beta, \gamma) - F(\beta, \gamma). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. D'où le résultat souhaité. ■

Remarque 2.1.1 *Pour $p = 1$, le théorème 2.1.1 précédent est vrai généralement et s'appelle théorème d'EDO avec condition initiale.*

Théorème 2.1.2 [22, p.5] *Sous l'hypothèse (2.2), on suppose que $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t)$ sont respectivement les solutions des problèmes à valeur initiale suivants, ($1 \leq n - 1 < p \leq n$),*

$${}^C D^P x = f(t, x), x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots; n - 1, \quad (2.4)$$

$${}^C D^P x = F(t, x), x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots; n - 1. \quad (2.5)$$

Alors

$$\varphi(t) < \Phi(t) \text{ pour } t \in (0, T].$$

Remarque 2.1.2 *Certains chercheurs [6],[20] ont tenté de donner des principes de comparaison similaires pour les EDF's avec les dérivées de **Caputo** par la méthode du théorème de la valeur moyenne intégrale qui cependant ne garantit pas la bonne réponse de leur preuves. Yu et al [21] présentés des théorèmes de copmaraison pour des EDF's impliquant des dérivées de **Rieman-Liouville** et **Caputo** d'ordre ($0 < p < 1$) avec condition de **Lipschitz**.*

$$f(t, u) - f(t, v) \leq L(u - v) \text{ pour } L \geq 0, u > v.$$

2.2 Existence local et solution extremes

Dans cette section on étudie l'existence et les solutions extrêmes pour la (PVI) (2.1)

Théorème 2.2.1 [22, p.6] On suppose que $f \in C[R_1, R]$ tel que ;

$$R_1 = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T \left| x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq k \right\}$$

et $\exists M > 0$ tel que $|f(t, x)| \leq M$ dans R_1 . Alors, il existe au moins une solution pour (PVI) (2.1).

Preuve. Soit $\delta > 0$ et $x_0(t)$ une fonction continue dans $[-\delta, 0]$ tel que ;

$$x_0^{(k)}(0) = x_k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

et

$$\begin{aligned} \left| x_0(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| &\leq k \quad \text{pour } t \in [-\delta, 0] \quad \text{et} \quad |{}^C D^p x_0(t)| \leq M \\ x_\eta(t) &= x_0(t) \quad \text{pour } 0 \leq \eta \leq \delta \quad \text{dans } [-\delta, 0] \end{aligned}$$

$$x_\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds. \quad (2.6)$$

pour $t \in [0, \alpha_1]$, $\alpha_1 = \min\{\alpha, \eta\}$ et $\alpha = \min\left(\left[\frac{k}{M}\Gamma(p+1)\right]^{\frac{1}{p}}, T\right)$.

On observe que ${}^C D^p x_\eta(t)$ existe.

$$\begin{aligned}
 \left| x_\eta(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left| \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s, x_\eta(s-\eta))| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s, x_0(s-\eta))| ds \dots \text{car } (x_\eta(t) = x_0(t)). \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds = \frac{Mt^p}{\Gamma(p+1)} \\
 &\leq k.
 \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 < \alpha$ alors, on peut employer

$$x_\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds.$$

Pour étendre $x_\eta(t)$ fonction différentiable continuellement fractionnaire sur $[0, \alpha_2]$ tel que $\alpha_2 = \min(\alpha, 2\eta)$, continuer ce processus on peut définir $x_\eta(t)$ sur $[0, \alpha]$ pour que ;

$$\left| x_\eta(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq k \quad \text{pour } t \in [0, \alpha]$$

D'autre part, pour $0 \leq t_1 < t_2 \leq \alpha$,

$$\begin{aligned}
 x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{p-1} - (t_2-s)^{p-1}] f(s, x_\eta(s-\eta)) ds \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds.
 \end{aligned}$$

$\exists M_1 > 0$ tel que ;

$$\begin{aligned} |x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2)| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} \right| + \frac{M}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{p-1} - (t_2 - s)^{p-1}] ds \\ &\quad + \frac{M}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{p-1} ds \\ &\leq M_1 [(t_2 - t_1) + (t_2^p - t_1^p) + 2(t_2 - t_1)^p] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Prouvé que $|t_2 - t_1| < \delta_1 = \min \left\{ \delta'_1, \frac{\varepsilon}{3M_1}, \left[\frac{\varepsilon}{6M_1} \right]^{\frac{1}{p}} \right\}$, où $\delta'_1 > 0$ est tel que, $|t_2^p - t_1^p| < \frac{\varepsilon}{3M_1}$, pour $|t_2 - t_1| < \delta'_1$, puisque $g(t) = t^p, t \in [0, \alpha]$, est uniformément continue.

Alors, on trouve que la famille $\{x_\eta(t)\}$ consiste d'une série de fonctions équicontinue et uniformément bornées.

Le théorème d'**Ascoli-Arzela** montre l'existence d'une suite $\{\eta_m\}$ telque ;

$\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_m, \eta_m \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$ et $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{\eta_m}(t - \eta_m)$ existe uniformément dans $[0, \alpha]$ tel que ; $f(t, x)$ est continue.

On obtient

$$f(t, x_{\eta_m}(t, \eta_m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(t, x(t)).$$

D'ou les opérations terme par terme de (2.6) avec $\eta = \eta_m$ et $\alpha_1 = \alpha_m$ donne

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x(s)) ds \quad \text{pour } t \in [0, \alpha]$$

Donc, $x(t)$ est un solution de (PVI)(2.1) pour $t \in [0, \alpha]$.

Par la méthode d'extension

$$x_\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x_\eta(s-\eta)) ds.$$

Il exist au moins une solution pour (PVI)(2.1) dans un intervalle $[0, T]$.

Donc, le théorème est prouvé. ■

Théorème 2.2.2 [22, p.8] *Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, il existe solution extrême de (PVI) sur l'intervale $t \in [0, T]$.*

Preuve. On considère l'EDF avec les conditions de valeur initiale ;

$${}^C D^p x = f(t, x) + \varepsilon_m, x^{(k)}(0) = x_k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots; n-1, \quad (2.7)$$

où $\varepsilon_m > 0$ ($m = 1, 2, \dots$) et $\varepsilon_m \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.

Alors par le théorème 2.1.1, il existe au moins un solution $x = \varphi_m(t)$ pour (PVI) (E_m) pour $t \in [0, T]$:

$$\varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds.$$

En outre, $\exists M_2 > 0$ tel que $\varphi_m(t)$ satisfait ;

$$\begin{aligned} |\varphi_m(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| + \frac{2M}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| + \frac{2Mt^p}{\Gamma(p+1)} \\ &\leq M_2. \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, T]$, pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$; on a

$$\begin{aligned}
 \varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{p-1} [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds. \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{p-1} - (t_2 - s)^{p-1}] [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{p-1} [f(s, \varphi_m(s)) + \varepsilon_m] ds.
 \end{aligned}$$

En suite $\exists M_3 > 0$ tel que ;

$$\begin{aligned}
 |\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k (t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} \right| + \frac{2M}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{p-1} - (t_2 - s)^{p-1}] ds \\
 &\quad + \frac{2M}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{p-1} ds \\
 &\leq M_3 [(t_2 - t_1) + (t_2^p - t_1^p) + 2(t_2 - t_1)^p]. \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

prouver que $|t_2 - t_1| < \delta_2 = \min \left\{ \delta'_2, \frac{1}{3M_3}, \left[\frac{\varepsilon}{6M_3} \right]^{\frac{1}{p}} \right\}$, où $\delta'_2 > 0$ tel que ; $|t_2^p - t_1^p| < \frac{\varepsilon}{3M_2}$.

Pour $|t_2 - t_1| < \delta'_2$, puisque $g(t) = t^p, t \in [0, \alpha]$ est uniformément continue .

Ainsi la famille $\{\varphi_m(t)\}$ est une suite de fonctions équicontinues et uniformément bornées sur $t \in [0, T]$. Donc grace au théorème d'**Ascoli-Arzela**, la suite $\{\varphi_m(t)\}$ a une sous-suite $\{\varphi_{m_k}(t)\}$ uniformément convergente.

On note par $\Phi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}(t)$, donc $\Phi(t)$ est une solution de (PVI) (2.1) dans $t \in [0, T]$.

D'autre part, puisque $\varepsilon_m > 0$ et $f(t, x(t)) < f(t, x(t)) + \varepsilon_m$, $\Phi(t)$ est la solution maximale de (PVI) (2.1) dans $t \in [0, T]$ par le théorème 2.1.2.

De la même manière, il suffit de remplacer ε_m avec $-\varepsilon_m$, on observe qu'il existe une solution minimale de (PVI)(2.1) dans $t \in [0, T]$. Donc la preuve est terminée. ■

2.3 Principes de comparaison avec des inégalités non strictes

On présente le principe de comparaison avec une condition de l'inégalité non stricte pour l'EDF avec des dérivées de **Caputo** ($1 \leq n - 1 < p \leq n$).

Théorème 2.3.1 [22, p.9] *On suppose que $f(t, x)$ et $F(t, x)$ deux fonctions continues définies sur $G = [0, T] \times \mathbb{R}$ et vérifient l'inégalité*

$$f(t, x) \leq F(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in G.$$

On suppose que $x = \Phi(t), \Phi_m(t), \Phi_M(t)$ sont les solutions minimale et maximale respectivement de (PVI) (2.4), et $x(t) = \Psi(t), \Psi_m(t), \Psi_M(t)$ sont les solutions minimale et maximale respectivement de (PVI) (2.5), alors $\Phi(t) \leq \Phi_M(t)$ et $\Phi_m(t) \leq \Psi(t)$, pour $t \in [0, T]$.

Preuve. On considère le (PVI);

$$(E_\varepsilon) : {}^C D^p x = F(t, x) + \varepsilon, x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.8)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit nombre positif.

Par théorème 2.2.1 le (PVI) (2.8) a au moins une solution, l'on note par $\Psi(t, \varepsilon)$, puisque;

$$f(t, x) \leq F(t, x) \leq F(t, x) + \varepsilon, t \in [0, T].$$

Du théorème 2.1.2 on a $\Phi(t) < \Psi(t, \varepsilon)$, pour $t \in (0, T]$, puisque ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(t, \varepsilon) = \Psi_M(t)$$

uniformément sur $t \in [0, T]$, on obtient

$$\Phi(t) \leq \Psi_M(t) \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

Un simple remplacement de ε par $-\varepsilon$ l'autre inégalité est prouvé de la même manière.

Ansì, la preuve est terminée. ■

Chapitre 3

Principe de comparaison et borne de solution des EDF

Dans ce chapitre, on présente et vérifie les principaux résultats de la comparaison et on donne simulation numérique avec des exemples

Lemme 3.0.1 [9, théorème 3.1] Soit $p > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $G \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L(a, b)$, $\forall x \in G$. Si $x(t) \in L(a, b)$, $x(t)$ vérifie

$$\begin{cases} {}^R D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & \text{pour } \alpha > 0, \quad a \leq x \leq b. \\ \{ {}^R D_t^{\alpha-j} x(t) \}_{t=a} = b_k & \text{pour } b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

si et seulement si $x(t)$ vérifie l'équation intégrale de **Volterra** suivante

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j (t-a)^{\alpha-j}}{(\alpha-j)!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad \text{pour } \alpha \in (0, 1].$$

Lemme 3.0.2 [9, théorème 3.24] Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $G \in \mathbb{C}$, $f : (a, b) \times G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, tel que

$$\forall x \in G, \quad f(t, x) \in C_\gamma[a, b] \quad \text{pour } 0 < \gamma < 1 \quad \text{et } \gamma \leq \alpha.$$

$$\begin{aligned} r &= n && \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}. \\ r &= n - 1 && \text{pour } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si $x(t)$ satisfait

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & \text{pour } \alpha > 0, \quad a \leq x \leq b \\ x^{(k)}(a) = b_k & \text{pour } b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Si seulement si $x(t)$ vérifie l'équation intégrale de **Volterra** ;

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(t-a)^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad \text{pour } \alpha > 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution du probleme de **Cauchy** pour EDF avec les dérivées de **Rieman-Liouville** et **Caputo** voir [9]. La condition de **Lipschitz** joue un rôle important dans la preuve de l'unicité.

Lemme 3.0.3 [23] Soit $t > 0, \alpha \in (0, 1]$

(i) Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $g(\alpha, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ est continue monotone et positive.

(ii) Si $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, $g(\alpha, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ est continue monotone et positive

pour $t > \max \left\{ \exp \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}$

Preuve. La fonction $g(\alpha)$ est positive. Comme, $\Gamma(\alpha)$ est monotone décroissante sur $(0, \frac{3}{2}]$, et monotone croissante sur $[\frac{3}{2}, \infty)$, on peut facilement vérifier que ;

$\Gamma(\alpha+1)$ est monotone décroissante sur $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ et monotone croissante sur $(\frac{1}{2}, 1]$, de sorte que $\frac{d\Gamma(\alpha+1)}{d\alpha} < 0$ tient sur $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Il est facilement voir que ;

$$\frac{\partial g(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha+1) \ln t - t^\alpha \Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} > 0 \quad \text{pour } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \quad t > 1.$$

Donc, ceci complète la preuve de (i)

Maintenant nous commençons à prouver (ii)

On a

$$\frac{\partial g(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \ln t - t^\alpha \Gamma'(\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)}.$$

Où

$$t^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \ln t - t^\alpha \Gamma'(\alpha + 1) > 0,$$

ce qui implique que

$$t > \exp\left(\frac{\Gamma'(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}\right).$$

Ainsi en sélectionnant $t^* = \max\left\{\exp\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}, 1\right\}$, $\frac{\partial g(\alpha, t)}{\partial \alpha} > 0$ tient quand $t > t^*$.

Ceci complète la preuve de l'énoncé (ii). D'où le lemme est prouvé. ■

3.1 Principaux résultats

Théorème 3.1.1 [23] Soit $0 < \alpha < 1$, G un ouvert de \mathbb{R} , $f : (0, \infty] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$f(t, x) \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour } \forall x \in G,$$

et $F : (0, \infty] \times G \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que,

$$F(t, x) \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour } \forall x \in G.$$

On suppose que $f(t, x(t))$, $F(t, x(t))$ vérifient la condition de **Lipschitz** par rapport à x tels que,

$$\forall x_1, x_2 \in G, \exists L_f, L_F \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|$$

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L_F |x_1 - x_2|$$

la solution de (PVI)

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

et

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = F(t, x(t)), \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

On note $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t)$, $t \in (0, \infty)$ sont respectivement les solutions de (3.1) et (3.2). Si

$$f(t, x) < F(t, x) \quad \text{pour } \forall (t, x) \in (0, \infty) \times G.$$

Alors

$$\varphi(t) < \Phi(t) \quad \text{pour } \forall t \in (0, \infty).$$

Preuve. D'après le lemme 3.0.1 les equation (3.1) et (3.2) sont equivalentes à

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \alpha \in (0, 1]. \quad (3.3)$$

et

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau, \alpha \in (0, 1]. \quad (3.4)$$

respectivement, selon [16, théorème3.1] les deux equations (3.3),(3.4) ont une solution unique.

Puis, en appliquant le théorème de la valeur moyenne, il existe une constante $s^* \in (0, t)$ tel que,

$$\begin{aligned}\Phi(t) - \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (F(s, \Phi(s)) - f(s, \varphi(s))) ds. \\ &= [F(s^*, \Phi(s^*)) - f(s^*, \varphi(s^*))] \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} > 0.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\varphi(t) < \Phi(t) \quad \text{pour } \forall t \in (0, \infty).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 3.1.2 [23] Soit $0 < \alpha < 1$, $G \subset \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que,

$$f(t, x) \in L^1[0, \infty) \quad \text{pour } \forall x \in G$$

et $F : [0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction telle que,

$$F(t, x) \in L^1[0, \infty) \quad \text{pour } \forall x \in G.$$

On suppose que $f(t, x(t))$, $F(t, x(t))$ vérifient la condition de **Lipschitz** par rapport à x tel que ;

$$\forall x_1, x_2 \in G, \exists L_f, L_F$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|$$

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L_F |x_1 - x_2|,$$

la solution de (PVI)

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{pour } \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = F(t, x(t)) \text{ pour } t > 0, \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On note $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t), t \in [0, \infty)$, si

$$f(t, x) \leq F(t, x) \text{ pour } \forall (t, x) \in [0, \infty) \times G.$$

Alors

$$\varphi(t) \leq \Phi(t) \text{ pour } \forall t \in [0, \infty).$$

Théorème 3.1.3 [23] Soit $G \subset \mathbb{R}$, $f : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction tel que, $f(t, x) \in L(0, \infty), \forall x \in G$. Suppose que $f(t, x(t))$ vérifie la condition de **Lipschitz** par rapport à x . tel que

$$\forall x_1, x_2 \in G, \exists L,$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

la solution de (PVI)

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

et

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\beta} x(t) = f(t, x(t)), \beta \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}. \quad (3.6)$$

On note $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t), t \in (1, \infty)$.

$$\text{Si } 0 < \alpha < \beta \leq 1 \text{ alors } |\varphi(t)| < |\Phi(t)|, \forall t \in (1, \infty).$$

Preuve. D'après le lemme(3.0.1), les equations (3.5) et(3.6) sont équivalentes à on

a

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \quad \text{pour } \alpha \in (0, 1]$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \quad \text{pour } \beta \in (0, 1]$$

respectivement, pour $\forall t \in (1, \infty)$.

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| - |\Phi(t)| &\leq \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \max_{0 \leq s \leq t} |f(s, x(s))| \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right\}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.0.3 implique que, pour $0 < \alpha < \beta \leq 1$

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} < 0.$$

pour cela

$$|\varphi(t)| - |\Phi(t)| < 0.$$

Ce qui implique que

$$|\varphi(t)| < |\Phi(t)| \quad \text{pour } t \in (1, \infty).$$

■

Théorème 3.1.4 [23] Soit $G \subset \mathbb{R}$, $f : (0, \infty] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction tel que, $f(t, x) \in L(0, \infty)$, $\forall x \in G$. Suppose que $f(t, x(t))$ vérifie la condition de **Lipschitz** par rapport à x . On note $x = \varphi(t)$ et $x = \Phi(t)$, $t \in (1, \infty)$ les solutions des problèmes à valeurs initiale suivants telles que

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{pour } t > 0, \alpha \in (0, 1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\beta} x(t) = f(t, x(t)) \text{ pour } t > 0, \beta \in (0, 1] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ alors $|\varphi(t)| \leq |\Phi(t)|, \forall t \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

3.2 Simulation numérique

On présente deux exemples ci-dessous, la variété de bornitude des variables partage l'ordre des dérivés fractionnaires est montré numériquement ,ce qui vérifie nos conclusions intuitivement .

Exemple 3.2.1 On considère le système fractionnaire de **Lorenz**

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) &= 10(y(t) - x(t)) \\ {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) &= 28x(t) - x(t)z(t) - y(t) \\ {}^C D_{0+}^{\alpha} z(t) &= x(t)y(t) - \frac{8}{3}z(t) \end{aligned}$$

Où $\alpha \in (0, 1]$. En utilisant Matlab, bornitude de la solution résulte de l'ordre fractionnaire α sont indiqués dans le table1 suivant :

On peut voir que lorsque $\alpha = 1$,les résultats bornitudes sont ici coïncident avec eux de[19].

Table1 : résultats de délimitation du système de **Lorenz** fractionnaire avec ordres différents.

ordre fractionnaire α	résultate de bornitude		
	$\max \{ x \}$	$\max \{ y \}$	$\max \{ z \}$
1.00	19.6809	27.1320	47.8623
0.99	19.4995	26.9680	47.1978
0.95	18.7455	26.3393	44.5579
0.90	17.8611	25.5505	41.4630
0.80	16.2534	24.0579	35.9832

TAB. 3.1 – Tableau représente résultats de bornitude du système de Lorenz fractionnaire avec ordres différents.

Exemple 3.2.2

On considère les systèmes fractionnaires de Lorenz suivants comme

.S1 Système Chen

$${}^C D_{0+}^{\alpha} x = a(y - x,)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha} y = (c - a)x + cy - xz,$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha} z = -bz + xy,$$

avec

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 28.$$

.S2 système Liu

$${}^C D_{0+}^{\alpha} x = a(y - x,)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha} y = bx - xz$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha} z = -cz + hx^2$$

avec

$$a = 10, b = 40, c = 2.5 \text{ et } d = 4.$$

.S3 Système Rossler

$${}^C D_{0+}^\alpha x = -y - z,$$

$${}^C D_{0+}^\alpha y = x + ay$$

$${}^C D_{0+}^\alpha z = b + z(x - c)$$

où

$$a = 0.2, b = 0.2 \text{ et } c = 5.7.$$

.S4 Système Rikitake

$${}^C D_{0+}^\alpha x = -\mu x + yz$$

$${}^C D_{0+}^\alpha y = -\mu y + (z - a)x$$

$${}^C D_{0+}^\alpha z = 1 - xy$$

avec

$$a = 2, \mu = 5.$$

.S5 Système Lü

$${}^C D_{0+}^\alpha x = a(y - x)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha y = cy - xz$$

$${}^C D_{0+}^\alpha z = -bz + xy$$

avec

$$a = 36, b = 3 \text{ et } c = 15.5.$$

.S6 Système Genesio-Tesi

$${}^C D_{0+}^\alpha x = y$$

$${}^C D_{0+}^\alpha y = z$$

$${}^C D_{0+}^\alpha z = ax + by + cz + x^2$$

avec

$$a = -6, b = -2.92 \text{ et } c = -1.2.$$

Tous les systèmes ci-dessus avec des dérivés classiques peuvent être trouvés dans [3] ici, on peut clairement voir que toutes les limites les résultats coïncident avec le principe de comparaison que nous avons obtenu. Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau 2. Dans les simulation ,la méthode de **Grünwald-Letnikov** [13],[5] est utilisée pour les calcul.Toutes les conditions initiales du différentiel fractionnaire les systèmes du tableau2 sont $[x_0, y_0, z_0] = [0.9, 0.1, 0.6]$ et la taille de pas est choisie comme $h = 0.005$.

Table2 : Résultats de délimitation des systèmes fractionnaires de type **Lorenz-like** avec des ordres différents.

	Stabilité	Résultat de délimitation			
		α	$\max \{ x \}$	$\max \{ y \}$	$\max \{ z \}$
S1	instable	0.99	28.4555	32.7231	49.6263
	instable	0.95	27.0727	31.3872	46.0954
	instable	0.90	25.4431	29.7724	42.0155
	stable	0.80	22.5577	26.6153	35.2495
S2	instable	0.99	588.780	1406.00	142.701
	instable	0.95	566.419	1170.46	122.819
	instable	0.90	540.959	927.932	111.472
	instable	0.80	502.322	849.176	94.8312
S3	instable	0.99	9.41108	8.69060	7.13496
	instable	0.95	1.39681	1.39800	0.60000
	stable	0.90	0.90000	0.45738	0.60000
	stable	0.80	0.90000	0.23777	0.60000
S4	instable	0.99	5.08552	4.34246	10.3061
	stable	0.90	3.59630	3.04730	9.25893
	stable	0.80	2.64461	2.23361	8.63003
	stable	0.80	0.90000	0.23777	0.60000
S5	instable	0.99	20.1493	21.7556	33.2010
	instable	0.95	19.4178	21.1942	31.1303
	stable	0.90	18.6082	20.5098	28.8645
	stable	0.80	17.2961	19.4706	25.1949
S6	instable	0.99	5.28135	7.24617	12.4570
	stable	0.95	3.20717	5.03004	9.46551
	stable	0.90	0.90000	0.75240	1.28571
	stable	0.80	0.90000	0.37647	0.61184

TAB. 3.2 – Tableau représente résultats de délimitation des systèmes fractionnaires de type Lorenz-like avec des ordres différents.

Conclusion

En conclusion, Ce mémoire donne une idée générale sur le principe de comparaison pour l'EDF avec les dérivées de Caputo d'ordre p $0 \leq n - 1 < p \leq n$. Dans cette mémoire, on a obtenu des principes de comparaison pour les équations différentielles fractionnaires avec les dérivées de Caputo d'ordre p ($0 \leq n - 1 < p \leq n$) sous inégalités strictes et non strictes, puis l'existence locale et les solutions extrêmes d'EDF impliquant les dérivés de **Caputo** ont été proposés. Les résultats présentés dans cette mémoire peuvent être appliqués pour une étude plus approfondie des propriétés quantitatives des EDF avec dérivés Caputo.

D'où, on a étudié le principe de comparaison de EDF avec différentes conditions, et obtenu différents principes de comparaison liés à la fonction et l'ordre des dérivés fractionnaires, respectivement avec l'aide du principe de comparaison et des résultats de bornage de système de **Lorenz**, dans [19] nous avons étudié la bornage de la fracturation système de **Lorenz**.

Des simulations numériques sont effectuées qui illustrent notre analyse théorique. Parallèlement, via la simulation numérique, la stabilité des systèmes différentiels fractionnaires ci-dessus est également obtenue de l'examen des portraits de phase en utilisant la stabilité critère dans [15].

Bibliographie

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 204, (2006).
- [2] Agrawal, O. P., and Xu, Y., 2015, "Generalized vector calculus on convex domain," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 23, pp. 129–140.
- [3] Dias, F. S., Mello, L. F., and Zhang, J. G., 2010, "Nonlinear analysis in a Lorenz-like system," *Nonlinear Anal.*, 11, pp. 3491–3500.
- [4] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential*, *Lecture Notes in Mathematics V. 2004*, Springer-Verlag, Berlin (2010).
- [5] Gorenflo, R., and Abdel-Rehim, E. A., 2007, "Convergence of the Grünwald-Letnikov scheme for time-fractional diffusion," *J. Comput. Appl. Math.*, 205(2), pp. 871–881
- [6] Hu, T., Qian, D., Li, C. : Comparison theorem of fractional differential equations. *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.* 23,97–103 (2009)
- [7] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, 198 (1999).
- [8] Kilbas, A. A. A. Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Edvan Mill, Amsterdam, (2006). *Equations*, Springer. (2004).

- [9] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, Chap. 1–8.
- [10] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Application of Fractional Differential Equation. Elsevier,,Amsterdam (2006)
- [11] Lakshmikantham, V., Vatsala, A.S. : Basic theory of fractional differential equations. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 69, 2677–2682 (2008)
- [12] Lakshmikantham, V., Vatsala, A.S. : Theory of fractional differential inequalities and applications. Commun. Appl. Anal.11, 395–402 (2007)
- [13] Momani, S., and Odibat, Z., 2007, “Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order,” Chaos Soliton Fractal., 31(5), pp. 1248–1255.
- [14] Oldham, K.B., Spanier, J. : The Fractional Calculus. Academic Press, New York (1974)
- [15] Petras, I., 2011, Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis, and Simulation, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg,Chap. 4–5.7 Copyright © 2015
- [16] Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, Chap. 1–7.
- [17] Samko, S. G. Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Fractional Integrals and Derivatives; Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).43
- [18] S.G. Samko,A.A.Kilbas,O.I.Marichev,FractionalIntegralsandDerivatives,Theory andApplications; GordonandBreach,Yverdon, (1993).
- [19] Sun, Y. J., 2009, “Solution bounds of generalized Lorenz chaotic systems,” Chaos Soliton Fractal., 40, pp. 691–696.

- [20] Xu, Y. : Comparison principle and solution bound of fractional differential equations. In : Proceedings of the ASME IDET-CIE Conference Boston, Massachusetts, USA (2015)
- [21] Yu, H., Bao, S., Liu, X. : A new comparison theorem of fractional differential equations. *Math. Pract. Theory* 46, 1–8 (2016)
- [22] Ziqiang Lu and Yuanguo Zhu, Comparison principles for fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Advances in Difference Equations* (2018) 2018-237.
- [23] Yufeng Xu, 2-5, 2015, Boston, Massachusetts, USA

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

\mathbb{R}	: l'ensemble des nombres réels
\mathbb{N}	: l'ensemble des nombres naturels.
$C([a; b]; R)$: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R}
$ \cdot $: valeur absolue ou module
$\Gamma(\cdot)$: fonction Gamma
$B(\cdot, \cdot)$: fonction Béta
∇_h^γ	: différence finie
I^α	: intégrale fractionnaire
${}^R D^\alpha$: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
${}^C D^\alpha$: Dérivée fractionnaire de Caputo
EDF	: Equation différentielle fractionnaire
$\varsigma_{a,+}^\gamma f$: dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov