République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Chaouch Chaima

Titre :

Equations différentielles stochastiques avec martingales de Teugels

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Abba abedelmajid	UMKB	Président
Dr.	Bougherara saliha	UMKB	Encadreur
Dr.	Benabba fadhila	UMKB	Examinateur

Juin **2021.**

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents, qui ont toujours été à là pour moi,

à l'homme, qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences,

à mon adorable mère, qui je dois ma vie et mon succès.

À mon cher frère : **Mamoun** ; **Fares** ;

À mes belles sœurs : **Sara** ; **Rabab** ; **aridj**.

À ma chère amie : **Asma Mebarki** ; **Rim Madani** ; **Mounira Maafi** ; **Mokrani Hasnia** ;

à mes collègues de la promotion 2021 de la spécialité Mathématiques,

pour leurs soutien moral et leur encouragement.

REMERCIEMENTS

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont

participé de près ou de loin au bon déroulement de ce mémoire,

en espérant n'avoir oublié personne...

D'abord à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à

bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur

‹‹**Dr. Bougherara saliha** ››

pour ses conseils et ses commentaires fort utiles qui ont fortement enrichi ma formation,

et pour son précieux encouragement tout au long de ce travail.

Je suis honoré de pouvoir remercier les membres de mon jury d'avoir évalué ce travail

‹‹**Dr. Abba abedelmajid** ›› et ‹‹**Dr. Benabba fadhila** ››**.**

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique

‹‹**Dr. Lakhdari imad eddine** ››,

et les enseignant qui ont participés à notre formation,

et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) sont un nouveau type d'équations différentielles stochastiques (EDS), qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes usuelles pour les EDS.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) ont été introduites pour la première fois en 1973 par J. M. Bismut [1] dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng [11] en 1990 dans le cas général (avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable). La preuve de ce résultat est basée sur le théorème de Théorème de représentation des martingales Browniennes et un argument de point fixe.

Dans ce mémoire, on s'interesse aux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dirigées par une famille de martingales de Teugels. Ce type de martingale est introduit premièrement dans Nualart et al. [9]. Ils ont construit une famille dénombrable de martingales de carrées intégrables, orthogonal est adaptées à la filtration engendrée par le processus de Lévy.

Nualart et al. [8] ont étudié une nouvelle classe des EDSR dirigées par une famille de martingales de Teugels a été introduite. Ils ont établi dans le cadre Lipschitzienne l'existence d'une solution unique pour ce type d'équations. Ensuite, Bahlali et al. [2] étudient l'existence et l'unicité de solutions pour les EDSR globalement ou lecalement Lipschitizienne dirigées par une famille de martingales de Teugels et un mouvement Brownien indépendant.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant les conditions habituelles. On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) dirigées par une famille de martingales de Teugels :

$$-dy_t = f\left(t, y_{t-}, z_t, Z_t\right) dt - z_t dW_t - \sum_{i=1}^{\infty} Z_t^{(i)} dH_t^{(i)},$$

où :

- La condition terminale $Y_T = \xi$, qui est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable.
- Le générateur $f = f\left(t, \omega, y, z, Z\right)$, qui est une fonction progressivement mesurable donnée.
- $H\left(t\right) = \left(H_t^{(i)}\right)_{i=1}^{\infty}$: des familles de martingales de Teugels.

Résoudre cette EDSR, c'est trouver un couple de processus $\left(Y_t, Z_t\right)_{t\geq 0}$ qui vérifie l'équation et qui est $\mathbb{F}$-adapté c'est-à-dire ne dépend que de l'information connu jusqu'à l'instant t.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

$\triangleleft$ Le premier chapitre est consacré aux généralités de base, processus stochastique, filtration, mesurabilité, adaptation, mouvement Brownien, martingale, intégrale stochastique, ...

$\triangleleft$ L'objectif de deuxième chapitre est de présenter un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas Lipschitz. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990.

$\triangleleft$ Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution pour l'EDSR dirigées par une famille de martingales de Teugels. Ce résultat a été obtenu par Bahlali et al. [2].

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Le processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, en biologie (évolution génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.

1.1 Processus stochastiques

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{A}_t$, c'est l'information à la date t .

Définition 1.1.1 *: (**Processus stochastique**) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble $\mathbb{T}$.*

- En général $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.
- Si $\mathbb{T}$ est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

Définition 1.1.2 : *Un processus dépend de deux paramètres, $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:*

i) *Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

ii) *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus X.*

Exemple 1.1.1 : *On considère une séquence infinie de tirage (pile ou face) de Bernoulli. Ces tirages sont supposés indépendants. L'ensemble des résultats possibles est :*

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, ...) : \omega_i = \begin{Bmatrix} P \\ F \end{Bmatrix} \right\},$$

où

$$\mathbb{P}(P) = p, \quad \mathbb{P}\left(F\right) = q = 1 - p, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit des variables aléatoires X_n comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n\left(\omega\right) = \begin{cases} 1 \quad si \quad \omega = P \\ 0 \quad si \quad \omega = F, \end{cases}$$

donc : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus défini par :

1. *$X_1, X_2, ...$ indépendantes.*
2. *$\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = q$, $p + q = 1$.*

Définition 1.1.3 : *Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :*

$$\forall n, \quad \forall t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \quad \textit{est une v.a.r. gaussienne.}$$

Définition 1.1.4 *: On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est continu (ou à trajectoires continues) si les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.5 *: Un processus est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout ω.*

Corollaire 1.1.1 *: Soit X et Y deux processus stochastiques càdlàg. Si X est une modification de Y, alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.1.6 *:*

i) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit à variation bornée sur $[0,t]$ si :*

$$\sup_{t_i}\sum_i \left|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right| \leq K,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

ii) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit à variation finie sur $[0,t]$ si :*

$$\sup_{t_i}\sum_i \left|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right| \leq \infty,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

Définition 1.1.7 *: Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $X_0 = 0$ est à accroissements indépendants si pour tout suit fini $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables aléatoires :*

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Définition 1.1.8 *: Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement :*

$$X_{t+s} = X_t,$$

ne dépend pas de t, pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.1.9 *: (**Filtration**) Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, telle que :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \textit{pour tout} \quad s \leq t.$$

Définition 1.1.10 *: Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.11 *: (**Temps d'arrêt**) Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt si l'évènement :*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq t < \infty.$$

Définition 1.1.12 *: Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :*

i) $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$-*p.s.*

ii) $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les v.a* $\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ *sont indépendantes.*

Définition 1.1.13 *: Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si : $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$, tel que $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 : X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

Lemme 1.1.1 *: Soit $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ un processus à valeurs $\mathbb{R}^d$ tel que $X_0 = 0$. Alors X_t est un processus à accroissements indépendants (P.A.I) ssi pour tous $s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Si X_t est un **P.A.I**. et si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \leq s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ donc il est indépendant de $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ et de $\sigma(X_u, u \leq s)$.

$\Leftarrow$) Si, $\forall\ s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$, on a pour $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ et $f_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(f_n\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)\right)\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right) \\ &= ... \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

■

1.1.1 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.1.14 *: Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $M_t \in L^1$ est appelé :*

i) *Une martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.*

ii) *Une sur-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$.*

iii) *Une sous-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$.*

Exemple 1.1.2 *: Si X est un processus à accroissement indépendants avec $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Alors :*

$$(X_t - \mathbb{E}[X_t]),\ t \geq 0$$

est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale.

Théorème 1.1.1 *: Soit M sur-martingale continue à droite (resp. martingale), et soit S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S < T$. Alors M_S et M_T sont intégrables et :*

$$M_S \geq \mathbb{E}[M_T \mid M_S] \quad p.s. \quad (resp. =)$$

Proposition 1.1.1 *: (**Décomposition de Doob**) Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale $(M_t)_t$ et un processus $\mathcal{F}$-prévisible $(V_t)_t$, tels que : $M_0 = V_0 = 0$, et*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad pour\ tout \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.1.15 *: On dit qu'un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_t)_t$ telle que :*

$$T_t \to \infty, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

et le processus arrêté M^{T_t} est une martingale pour tout t.

Définition 1.1.16 *: Une semi-martingale est un processus*

$$X = X_0 + A + M,$$

où A est un processus à variation finie, X_0 est une variable $\mathcal{F}_0$-mesurable et M est une martingale locale, ces deux deniers processus étant issus de 0.

1.1.2 Mouvement Brownien (MB)

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Wiener** ou $(B_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Brown.**

On se met dans un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.17 *: On dit que $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien (réel, nul en 0), si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *Les trajectoires $t \mapsto B_t$ sont p.s. continues sur $\mathbb{R}_+$.*

ii) *$B_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.*

iii) *Pour tout $n \geq 2$, et*

tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ sont indépendantes.

iv) *Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

Proposition 1.1.2 *: **(Propriétés des trajectoires)** Si B un mouvement Brownien, alors presque sûrement, on a :*

a) $t \mapsto B_t(w)$ n'est dérivable en aucun point t.

b) $t \mapsto B_t(w)$ n'est pas à variation finie en aucun point t.

Proposition 1.1.3 *: Si B est un mouvement Brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements Browniens :*

a) *$X_t = -B_t$. (Symétrie).*

b) *$s \geq 0$, $X_t = B_{t+s} - B_s$.*

Preuve. D'après la définition (1.1.17) on a :

a) Posons : $X_t = -B_t$.

i) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega) = -B_t(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

ii) $X_0 = -B_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.

iii) Puisque $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_0} - B_{t_1}, B_{t_1} - B_{t_2}, ..., B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$$

sont indépendantes, ce qui implique que :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes.

iv) $\forall s, t \geq 0$, tel que $s < t$, $X_t - X_s = (B_s - B_t)$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$.

b) Posons : $X_t = B_{t+s} - B_s$.

i) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega) = B_{t+s}(\omega) - B_s(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

ii) $X_0 = B_{0+s} - B_s = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.

iii) Puisque

$$\begin{aligned} X_{t_k} - X_{t_{k-1}} &= (B_{t_k+s} - B_s) - \left(B_{t_{k-1}+s} - B_s\right) \\ &= B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}, \end{aligned}$$

et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1+s} - B_{t_0+s}, B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, ..., B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}$$

sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes.

iv) $\forall u, t \geq 0$, tel que : $u < t$,

$$\begin{aligned} X_t - X_u &= (B_{t+s} - B_s) - (B_{u+s} - B_s) \\ &= B_{t+s} - B_{u+s} \end{aligned}$$

est de distribution normale d'espérance 0 et de variance : $(t + s) - (u + s) = t - u$.

■

Proposition 1.1.4 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, alors :*

a) *B_t est une martingale.*

b) *$B_t^2 - t$ est une martingale.*

c) *Pour tout réel α, $\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$ est une martingale.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\displaystyle\int_0^t \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, s \leq t\right)$. L'objectif c'est définir l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \phi_s dB_s$ pour des processus ϕ :

◄ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$. Soit

$$\phi_s\left(\omega\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(\omega\right) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}\left(s\right).$$

On définit

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds \right].$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t} \right).$$

◀ **Cas général**

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2 (\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\phi_s^n - \phi_s^2 \right) ds \right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \displaystyle\int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s \right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right).$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi) \right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0$ cas $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ sont à accroissement indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_i\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_i\right)^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1) Linéairité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

2) Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq \mathbb{T}$

$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$

3) Propriétés de martingale : Pour tout processue ϕ les processus :

$$t \mapsto I_t\left(\phi\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t\left(\phi\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t(\phi) - I_s(\phi)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

4) Si $(X_t)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}\left(\int_0^T \mid X_s \mid^2 ds\right) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid X_s \mid^2 dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right].$$

5) Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (Processus d'Itô) *: Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifient les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s| \, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \| \theta_s \|^2 \, ds < +\infty,$$

où le coefficient φ et le drifter ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion. On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dB_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (Première formule d'Itô) *: Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 (Deuxième formule d'Itô) *: Soient X un processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à X, on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df\left(t, X\right) = \left[f_t'\left(t, X_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}''\left(t, X_t\right)\theta_t^2\right]dt + f_x'(t, X_t)dX_t.$$

Exemple 1.2.1 *: On a :*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ \\ X_0 = X. \end{cases}$$

On pose : $Y_t = \exp\left(-\mu t\right)X_t$, $\forall t \geq 0$ et $f(t, X_t) = \exp\left(-\mu t\right)X_t$, on a donc :

$$f_x'(t, X_t) = \exp\left(-\mu t\right), f_{xx}''\left(t, X_t\right) = 0,$$

$$et$$

$$f_t'\left(t, X_t\right) = -\mu X_t \exp\left(-\mu t\right).$$

Alors :

$$dY_t = \mu X_t \exp\left(-\mu t\right)dt + \exp\left(-\mu t\right)dX_t = \sigma Y_t dB_t,$$

ou encore :

$$Y_t = X + \int_0^t \sigma Y_s dB_s.$$

Application la formule d'Itô à $g(Y_t) = \ln(Y_t)$ *, on a donc :*

$$g'_{Y_t}(Y_t) = \frac{1}{Y_t}, \quad g''_{Y_tY_t}(Y_t) = -\frac{1}{Y_t^2}, \quad g'_t(Y_t) = 0$$
$$et \qquad d\langle Y, Y\rangle_s = \sigma^2 Y_t^2 dt.$$

La formule d'Itô s'applique :

$$\begin{aligned}
dg(Y_t) &= g(Y_0) + g'_t(Y_t)\,dt + g'_{Y_t}(Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2}g''_{Y_tY_t}(Y_t)\,d\langle Y, Y\rangle_s \\
&= 0 + 0dt + \frac{1}{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2 dt \\
&= \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt.
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$X_t = X \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{t}{2}\sigma^2\right).$$

Remarque 1.2.1 *: La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie* $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $B(t)$ *sont des matrices)*

$$\begin{aligned}
f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\varphi_s ds \\
+\frac{1}{2}tr\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\theta(s)\right] + \int_0^t f_x(s, X_s)\theta_s dB_s.
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *: Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.2.5 Formule d'Itô et semi-martingale

Théorème 1.2.3 *: Soit $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ une semimartingale et càdlàg, avec variation quadratique, notée $[X] = \{[X]_t : t \in [0,T]\}$ et soit $F \in C^2$ une fonction réelle. Alors : $F(X)$ est une semi-martingale et la formule suivante :*

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t F'(X_{s-})\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_{s-})\, d[X]_s^c \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\,\Delta X_s\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Exemple 1.2.2 *:*

- *Si $F(x) = x^2$, la formule (1.1) prend la forme*

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_{s-} dX_s + \int_0^t d[X]_s.$$

- *Si L et K sont semi-martingales et càdlàg, on a :*

$$L_tK_t = L_0K_0 + \int_0^t L_{s-} dK_s + \int_0^t K_{s-} dL_s + \int_0^t d[L,K]_s,$$

où $[L,K]$ covariation quadratique des processus L, K.

Chapitre 2

Equations différenetielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

Les équations différentielles rétrogrades (EDSR) sont des nouveaux types d'équations différentielles stochastiques (EDS) qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes usuelles pour les EDS.

2.1 Motivations et notations

Soit $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standard d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle de B.

On travaillera avec deux espaces de processus :

- $S^2(\mathbb{R}^k)$: L'espace vectoriel formé des processus progressivement mesurable Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tel que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

- $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$: L'espace vectoriel formé des processus progressivement mesurable Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que

$$\|Z\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}[\int_0^T \|Z_r\|^2\, dr] < \infty,$$

tel que $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$ et $\|z\|^2 = tr\,(zz^*)$, pour simplifie on note $|z|$.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) :

$$-dY_t = f\,(t, Y_t, Z_t)\,dt - Z_t dB_t, \quad Y_t = \xi,$$

ou d'une façon équivalente sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\,(r, Y_r, Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

Dans l'EDSR (2.1), les éléments de base sont les paramètres f et ξ appelés respectivement le générateur et la condition terminale, on dit souvent que l'EDSR est associée aux paramètres (f, ξ) qui vérifiant :

- $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$.
- $\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k\right)$.

Définition 2.1.1 *: Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple (Y, Z) de processus progressifs à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ vérifiant :*

i) $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|f\,(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right\} dr\right] < \infty.$

ii) $\mathbb{P}$-*p.s :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\,(r, Y_r, Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Définition 2.1.2 *: Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifianit Y et Z sont progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.*

i) $\mathbb{P}$-*ps,* $\int_t^T \left(|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right) dr < \infty.$

ii) $\mathbb{P}$-*ps, on a :* $Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r,\ 0 \leq t \leq T.$

La proposition suivante montre que sous une hypothèse relativement faible sur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1.1 *: Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ positif, appartenant à $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et une constante positive λ tels que :*

$$\forall\left(t,y,z\right)\in\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d},\quad \left|f\left(t,y,z\right)\right|\leq f_t+\lambda\left(\left|y\right|+\left\|z\right\|\right).$$

Si $\left\{(Y_t,Z_t)\right\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.1) telle que $Z\in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, alors Y appartient à S^2.

Preuve. On a pour tout $t\in[0,T]$:

$$Y_t=Y_s-\int_0^t f\left(r,Y_r,Z_r\right)dr-\int_0^t Z_r dB_r.$$

En utilisant l'hypothèse sur f, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|Y_t\right| &\leq \left|Y_s\right|+\int_0^t\left|f\left(r,Y_r,Z_r\right)\right|dr+\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|\\ &\leq \left|Y_s\right|+\int_0^T\left(f_r+\lambda\left\|Z_r\right\|\right)dr+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|+\lambda\int_0^t\left|Y_r\right|dr,\end{aligned}$$

posons :

$$\zeta=\left|Y_0\right|+\int_0^T\left(f_r+\lambda\left\|Z_r\right\|\right)dr+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable; il en est de même pour $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ et Y_0 est une constante, donc de carré intégrable, il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu qui vérifie :

$$\left|Y_t\right|\leq\zeta+\lambda\int_0^t\left|Y_r\right|dr.$$

Par le lemme de Gronwall, on aura : $\left|Y_t\right|\leq\zeta e^{\lambda t}$, et donc :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t\right|\leq\zeta e^{\lambda T},$$

comme est de carré intégrable, alors Y appartient à S^2. ■

Lemme 2.1.1 *: Si $Y \in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, alors :*

$$X_t = \left\{\int_0^t Y_s Z_s dB_s, t \in [0,T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

2.2 Cas lipschitzien

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques dont les coefficients sont globalement Lipchitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 ([11]) avec le générateur f non linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler :

Hypothèse (L1) :

Il existe une $\lambda > 0$, telle que $\mathbb{P}$-$p.s$,

1. Condition de Lipschitz en (y,z) pour tous $t, y, y\prime, z, z'$:

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda\left(|y-y'| + \|z-z'\|\right).$$

2. Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr\right] < \infty.$$

2.2.1 Cas où f ne dépend pas ni y ni z

Nous commençons par un cas trés simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne de carré intégrable et un processus $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ dans M^2 et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \le t \le T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *() : Soient $\xi \in L^2$, $\mathcal{F}_t$-mesurable et $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve.

Existence. Soit (Y, Z) une solution de (2.2) telle que $Z \in M^2$. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on a :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

car $\int_t^T Z_r dB_r$ est une martingale. Et Y est donc défini à l'aide de cette formule et il reste à trouver Z. On a $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ est de carré intégrable et $\left(\int_t^T F_r dr\right)_{r\in[0,T]}$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, car il est progressivement mesurable :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t - \int_0^t F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr \\ &= M_t - \int_0^t F_r dr, \end{aligned}$$

où $(M_t)_{t\ge 0}$ est une martingale Brownienne. On construit, à l'aide du théorème de représentation des martingales, un processus Z de M^2 tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r,$$

et donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr.$$

(Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.2) puisque comme $Y_t = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi \ &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr \right) \\ &= \left(\int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr \right) - \left(\int_0^T Z_r dB_r - \int_0^t Z_r dB_r \right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

Alors :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

Unicité. Si $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ est une autre solution :

$$\tilde{Y}_t = Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t \right),$$

d'où l'unicité de Y. En ce qui concerne l'unicité Z, elle est garantie par le théorème de représentation des martingales. ■

2.2.2 Cas où f dépend de y et z

Nous énonçons à présent le théorème d'existence de **Pardoux et Peng** :

Théorème 2.2.1 *: Sous l'hypothèse (**L1**), l'EDSR (2.2) possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (2.2) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$; on définit

$(Y,Z)=\Psi(U,V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t=\xi+\int_t^T f\left(r,U_r,V_r\right)dr-\int_t^T Z_r dB_r \quad ,0\leq t\leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.

En effet, posons $F_r=f(r,U_r,V_r)$ comme f est Lipschitz :

$$\left|f(s,U_s,V_s)-f(s,\overline{U}_s,\overline{V}_s)\right| \quad \leq\lambda(\left|U_s-\overline{U}_s\right|+\left\|V_s-\overline{V}_s\right\|.$$

Soit $\overline{U}_s=\overline{V}_s=0$, on trouve :

$$\left|f(s,U_s,V_s)\right|-\left|f(s,0,0)\right|\leq\left|f(s,U_s,V_s)-f(s,0,0)\right|\leq\lambda\left|U_s\right|+\lambda\left\|V_s\right\|,$$

alors :

$$\left|F_r\right|\leq\left|f\left(r,0,0\right)\right|+\lambda\left|U_r\right|+\left\|V_r\right\|,$$

et ces trois processus f, U et V sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (**2.2.1**) pour obtenir une unique solution (Y,Z) telle que $Z\in M^2$, de plus (Y,Z) appartient à $\mathcal{B}^2$: L'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la Proposition (**2.1.1**), on trouve Y appartient à S^2. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U,V) et $(\overline{U},\overline{V})$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et

$$(Y,Z)=\Psi(U,V) \quad \text{et} \quad (\overline{U},\overline{V}))=\Psi(\overline{U},\overline{V}).$$

Notons $y=Y-\overline{Y}$ et $z=Z-\overline{Z}$. On a $y_T=0$, et

$$dy_t=-\left\{f\left(t,U_t,V_t\right)-f\left(t,\overline{U}_t,\overline{V}_t\right)\right\}dt+z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2) &= \alpha e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 dt + 2e^{\alpha t} y_t dy_t + \frac{1}{2} 2e^{\alpha t}\left\langle dy\right\rangle_t \\ &= \alpha e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 dt + 2e^{\alpha t} y_t \left\{ f\left(t, U_t, V_t\right) - f\left(t, \overline{U}_t, \overline{V}_t\right)\right\} dt \\ & -2e^{\alpha t} y_t . z_t dB_t + e^{\alpha t}\left\|z_t\right\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} (e^{\alpha T}\left|y_T\right|^2) - (e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2) &= \int_t^T \alpha e^{\alpha s}\left|y_s\right|^2 ds + 2\int_t^T e^{\alpha s} y_s \left\{ f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, \overline{U}_s, \overline{V}_s\right)\right\} ds \\ & -2\int_t^T e^{\alpha s} y_s . z_s dB_s + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_s\right\|^2 ds &= +2\int_t^T e^{\alpha s} y_s \left\{ f\left(s, \overline{U}_s, \overline{V}_s\right) - f\left(s, U_s, V_s\right)\right\} ds \\ & +2\int_t^T e^{\alpha s} y_s . z_s dB_s - \int_t^T \alpha e^{\alpha s}\left|y_s\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha t}\left\|z_s\right\|^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|y_s\right|^2 + 2y_s \left\{ f\left(s, \overline{U}_s, \overline{V}_s\right) - f\left(s, U_s, V_s\right)\right\} ds\right) \\ & + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s . z_s dB_s, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $\overline{U} - U$ et $\overline{V} - V$ respectivement :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|y_s\right|^2 + 2\lambda\left|y_s\right|\left|u_s\right| + 2\lambda\left|y_s\right|\left\|v_s\right\|\right) ds \\ & + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s . z_s dB_s. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds \quad &\leq \int_t^T e^{\alpha s} \left(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}\right) \left|y_s\right|^2 ds + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s \\ &+\varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} \left(\left|u_s\right|^2 + \left\|v_s\right\|^2\right) ds, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on a, notant :

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} \left(\left|u_s\right|^2 + \left\|v_s\right\|^2\right) ds,$$

et

$$e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds \leq R_\varepsilon + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s, \quad \forall s \in [0, T] .$$

On a :

$$e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 \leq R_\varepsilon + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s, \tag{2.3}$$

et

$$\int_t^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds \leq R_\varepsilon + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s, \tag{2.4}$$

D'après (2.4) et la martingale locale $\left\{\int_0^t 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0, puisque $Y, \overline{Y}$ appartiennent à S^2 et $Z, \overline{Z}$ appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.5}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), on applique l'inégalité de Doob et les inégalités BDG fournissent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha r}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_t^T e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|y_s\right|^2.\left\|z_s\right\|^2 dB_s \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2)+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right]-\frac{1}{2}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2) \quad \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds,$$

implique :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2)\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right),$$

alors :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2)\leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C^2\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds &= \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C^2\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right) \\
&= \left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].
\end{aligned}$$

Par suite, revenant à la définition de R_ε, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\
&=\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[\varepsilon\int_0^T \exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds\right]\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\left(\alpha s\right)\left|u_s\right|^2 ds+\int_0^T \exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2\int_0^T ds+\int_0^T \exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2 T+\int_0^T \exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\
&\leq\varepsilon\left(3+C^2\right)\left(1\vee T\right)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3+C^2\right)\left(1\vee T\right)=\dfrac{1}{2}$ de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme :

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$, Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans $\mathcal{B}^2$. ■

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la Proposition (**2.1.1** implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$.

Remarque 2.2.1 *: A/ partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z\in M^2$.*

2.3 Rôle de Z

Nous allons voir dans la proposition suivante que le rôle de Z plus précisément celui du terme $\int_0^t Z_r dB_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Supposons $(L1)$ vérifiée, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *: Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (2.1) et soit un temps d'arrêt majoré par T. On suppose que ε est $\mathcal{F}_t$ mesurable et que $f(0,y,z)=0$ dès que t. Alors : $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et*

$$Z_t = 0 \quad si \quad t \geq \tau.$$

Preuve. Soit $t \in [0,T]$. On a $\mathbb{P}$-$p.s$:

$$Y_t = \varepsilon + \int_t^T f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

et donc, pour $t=\tau$, comme $f(t,y,z)=0$ dés que $t \geq \tau$:

$$Y_t = \varepsilon + \int_\tau^T f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \varepsilon - \int_\tau^T Z_r dB_r.$$

on a alors :

$$Y_\tau = \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \xi,$$

et par suite : $\int_\tau^T Z_r dB_r = 0$. Ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = \int_\tau^T \|Z_r\|^2 d_r = 0,$$

et finalement $Z_r \mathrm{II}_{r>\tau} = 0$. Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse :

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = Y_t + 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve. Notons que dans le cas où et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, y_t, 0), \quad Y_T = 0.$$

■

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec Martingales de Teugels

L'objectif de ce chapitre est de présenter et montrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques avec Martingales de Teugels. Ce résultat a été obtenu par Bahlali et al. [2]).

3.1 Construction d'une martingale de Teugels

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant les conditions habituelles.

Définition 3.1.1 *: Un processus $(L_t)_{t \geq 0}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit être un processus de Lévy s'il possède les propriétés suivantes :*

i) *Les trajectoires de L sont $\mathbb{P}$-presque surement continue à droite avec limites à gauche ;*

ii) $\mathbb{P}(L_0 = 0) = 1$ *;*

iii) *Pour $0 \leq s \leq t$, $L_t - L_s$ est égal en distributions à L_{t-s} ;*

iv) *Pour* $0 \leq s \leq t$, $L_t - L_s$ *est indépendant de* $(L_u, u \leq s)$.

On définit les processus avec sauts de puissance :

$$\begin{cases} L_t^{(1)} = L_t, \\ \qquad \text{et} \\ L_t^{(i)} = \sum\limits_{0<s\leq t} (\triangle L_s)^{(i)} \quad \text{pour} \quad i \geq 2, \end{cases}$$

où $L_t^{(i)} = \left\{ L_t^{(i)}, t \geq 0 \right\}$, $i = 1, 2$, sont des processus de Lévy.

On définit la martingale normale $Y_t^{(i)}$:

$$\begin{aligned} Y_t^{(i)} &= L_t^{(i)} - \mathbb{E}\left[L_t^{(i)}\right] \quad ,i \geq 1 \\ &= L_t^{(i)} - t\mathbb{E}\left[L_1^{(i)}\right] \\ &= L_t^{(i)} - m_i t, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[L_t\right] = \mathbb{E}\left[L_t^{(1)}\right] = tm_1 < \infty, \text{ où } m_1 = \mathbb{E}\left[L_1\right], \\ \qquad \text{et} \\ \mathbb{E}\left[L_t^{(i)}\right] = \mathbb{E}\left[\sum\limits_{0<s\leq t} (\Delta L_s)^i\right] = t\int_{-\infty}^{+\infty} x^i \nu(dx) = m_i t < \infty \quad ,i \geq 2. \end{cases}$$

Procédure d'orthogonalisation peut être appliquée aux martingales $Y_t^{(i)}$ afin d'obtenir un ensemble de martingales fortement orthonormales $\left\{H_t^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ afin que chaque $H^{(i)}$ soit une combinaison linéaire de la $Y^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., i$. (see [9])

Puis la famille de martingales de Teugels $\left(H_t^{(i)}\right)_{i=1}^{\infty}$, est définie par :

$$H_t^{(i)} = a_{i,i}Y_t^{(i)} + a_{i,i-1}Y_t^{(i-1)} + a_{i,i-2}Y_t^{(i-2)} + ... + a_{i,1}Y_t^{(1)}.$$

Puis, on obtient :

$$\left[H^{(i)},Y^{(j)}\right]_t = a_{i,i}L_t^{(i+j)} + a_{i,i-1}L_t^{(i+j-1)} + a_{i,i-2}L_t^{(i+j-2)} + ... + a_{i,1}L_t^{(1+j)} + a_{i,1}\sigma^2 t\mathbf{1}_{\{j=1\}},$$

et

$$\mathbb{E}\left(\left[H^{(i)},Y^{(j)}\right]_t\right) = t(m_{i+j} + a_{i,i-1}m_{i+j-1} + ... + a_{i,1}m_{j+1} + a_{i,1}\sigma^2 t\mathbf{1}_{\{j=1\}}.$$

3.2 Conditions et le théorème

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, $T>0$ un temps fini fixé et $W=(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel..

On note par :

- $S^2\left[0.T\right]$: l'ensemble des processus mesurables, tels que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|y_t\right|^2\right] < \infty.$$

- $\mathcal{H}^2\left[0.T\right]^d$: L'ensemble des processus progressivement mesurables, tels

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_t\right|^2 dt\right] < \infty.$$

- P^2 : Le sous-espace de H^2 formé par les processus prévisibles.
- l^2 : l'espace de valeur réelle séquences $(x_n)_{n\ge0}$ telles que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ est fini.
- On désigne par $\mathcal{H}^2(l^2)$ et $\mathcal{P}^2\left(l^2\right)$ les espaces correspondant de l^2-processus valorisés équipés de la norme

$$\left\|\Phi\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\int_0^T \left|\Phi_t^{(i)}\right|^2_{\mathbb{R}^m}.$$

On suppose les conditions suivantes (A_1) :

- $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^m)$.
- $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times l^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est progressivement mesurabletel que :

(i) $f(.,0,0,0) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n)$.

(ii) f satisfait une condition lipschitz uniforme dans (y,Z), i.e. il existe une constante C, telle que

$$\left|f(t,\omega,y,z,Z) - f\left(t,\omega,\overline{y},\overline{z},\bar{Z}\right)\right| \leq C\left(|y-\overline{y}| + |z-\overline{z}| + \left\|Z-\bar{Z}\right\|_{l^2(\mathbb{R}^n)}\right),$$

pour $\forall (y,z,Z), \left(\overline{y},\overline{z},\bar{Z}\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times l^2(\mathbb{R}^n), (t,\omega) \in [0,T]\times\Omega.$

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) dirigées par une famille de martingales de Teugels

$$-dy_t = f(t, y_{t-}, z_t, Z_t)\,dt - z_t dW_t - \sum_{i=1}^{\infty} Z_t^{(i)} dH_t^{(i)}, \tag{3.1}$$

tel que :

$$(y(.), z(.), Z(.)) \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^m) \times l^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbb{R}^n).$$

Théorème 3.2.1 *: Sous les hypothèses (A_1), il existe une solution unique $(y(.), z(.), Z(.))$ de l'EDSR (3.1).*

Preuve. Unicité. Soient $(y(.), z(.), Z(.))$ et $\left(\overline{y}(.), \overline{z}(.), \overline{Z}(.)\right)$ sont deux solutions d'équation (3.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} y_t - \overline{y}_t &= \int_t^T \left(f(t, y_{t-}, z_t, Z_t) - f\left(t, \overline{y}_{t-}, \overline{z}_t, \overline{Z}_t\right)\right) dt - (z_t - \bar{z}_t)\, dW_t \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} (Z_t^{(i)} - \bar{Z}_t^{(i)}) dH_t^{(i)}. \end{aligned}$$

On utilise la formule d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned} d\left|y_t-\overline{y}_t\right|^2 &= 2\left(y_{t-}-\overline{y}_{t-}\right)\left[f\left(t,y_{t-},z_t,Z_t\right)-f\left(t,\overline{y}_{t-},\overline{z}_t,\overline{Z}_t\right)\right]dt \\ &-2\left(y_{t-}-\overline{y}_{t-}\right)\left(z_t-\overline{z}_t\right)dW_t-2\sum_{i=1}^{\infty}\left(y_{t-}-\overline{y}_{t-}\right)(Z_t^{(i)}-\bar{Z}_t^{(i)})dH_t^{(i)} \\ &-\left|z_t-\bar{z}_t\right|^2 dt-\left\|Z_t-\overline{Z}_t\right\|^2 dt. \end{aligned}$$

On prend l'espérance et intégrant entre t et T, on trouve :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|y_t-\overline{y}_t\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|z_s-\overline{z}_s\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_t^T\left\|Z_s-\overline{Z}_s\right\|^2 ds \\ &=2\mathbb{E}\int_t^T\left(y_{s-}-\overline{y}_{s-}\right)\left[f\left(s,y_{s-},z_s,Z_s\right)-f\left(s,\overline{y}_{s-},\overline{z}_s,\overline{Z}_s\right)\right]ds. \end{aligned}$$

car :

$$\mathbb{E}\int_t^T\left(y_{s-}-\overline{y}_{s-}\right)\left(z_s-\overline{z}_s\right)dW_s=0,$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\int_t^T\left(y_{s-}-\overline{y}_{s-}\right)(Z_s^{(i)}-\bar{Z}_s^{(i)})dH_s^{(i)}=0.$$

Comme f Lipschitz, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|y_t-\overline{y}_t\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|z_s-\overline{z}_s\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_t^T\left\|Z_s-\overline{Z}_s\right\|^2 ds \\ &\leq 2C\mathbb{E}\int_t^T\left(y_{s-}-\overline{y}_{s-}\right)\left(\left|y_s-\overline{y}_s\right|+\left|z_s-\overline{z}_s\right|+\left\|Z_s-\bar{Z}_s\right\|_{l^2(\mathbb{R}^n)}\right)ds. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|y_t-\overline{y}_t\right|^2 &+\left(1-\frac{2L}{\beta^2}\right)\mathbb{E}\int_t^T\left|z_s-\overline{z}_s\right|^2 ds+\left(1-\frac{2L}{\beta^2}\right)\mathbb{E}\int_t^T\left\|Z_s-\overline{Z}_s\right\|^2 ds \\ &\leq L\left(\beta^2+2\right)\mathbb{E}\int_t^T\left|y_s-\overline{y}_s\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Par suite, comme $2xy \leq \beta^2 x^2 + \dfrac{y^2}{\beta^2}$ et si on prend $\dfrac{2L}{\beta^2} = \dfrac{1}{2}$, alors nous avons :

$$\mathbb{E}\left|y_t - \overline{y}_t\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left|z_s - \overline{z}_s\right|^2 ds + \mathbb{E}\int_t^T \left\|Z_s - \overline{Z}_s\right\|^2 ds \leq C\mathbb{E}\int_t^T \left|y_s - \overline{y}_s\right|^2 ds.$$

Et on applique le lemme de Gronwall, nous pouvons suivre l'unicité.

Existence. Nous pouvons prouver que l'EDSR suivante

$$y_t = \xi + \int_t^T f\left(s,0,0,0\right) ds - \int_t^T z_s dW_s - \int_t^T \left\langle Z_s, dH_s\right\rangle,$$

est une solution (en utilisant le théorème de représentation martingale).

On définit (y^n, z^n, Z^n) comme suit :

1) $y^0 = z^0 = Z^0 = 0$,

2) $(y^{n+1}, z^{n+1}, Z^{n+1})$ est la solution unique d'une EDSR :

$$y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f\left(s, y_{s-}^n, z_s^n, Z_s^n\right) ds - \int_t^T z_s^{n+1} dW_s - \int_t^T \left\langle Z_s^{n+1}, dH_s\right\rangle.$$

Maintenant, nous sommes allés pour prouver que (y^n, z^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{E}$. Pour simplifier les notations, nous avons :

$$\overline{y}_s^{n,m} := y_s^n - y_s^m \quad , \overline{z}_s^{n,m} := z_s^n - z_s^m \quad , \overline{Z}_s^{n,m} := Z_s^n - Z_s^m,$$

et

$$\overline{f}_s^{n,m} := f\left(s, y_{s-}^n, z_s^n, Z_s^n\right) - f\left(s, y_{s-}^m, z_s^m, Z_s^m\right).$$

On utilise la formule d'Itô, pour chaque $n < m$, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|\overline{y}_t^{n+1,m+1}\right|^2 & +\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{z}_s^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & +\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\overline{Z}_s^{n+1,m+1}\right\|^2 ds+\alpha\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & =2\int_t^T e^{\alpha s}\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\overline{f}_s^{n,m}ds-2\int_t^T e^{\alpha s}\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\overline{z}_s^{n,m}dW_s \\ & -2\int_t^T e^{\alpha s}\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\left\langle\overline{Z}_s^{n,m},dH_s\right\rangle-\left(N_T-N_t\right), \end{aligned}$$

où $\{N_t : t\in[0,T]\}$ est une martingale, donnée par

$$N_t=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{\alpha s}\overline{Z}_s^{n+1,m+1,(i)}\overline{Z}_s^{n+1,m+1,(j)}\left(d\left[H^{(i)},H^{(j)}\right]_s-d\left\langle H^{(i)},H^{(j)}\right\rangle_s\right).$$

Par la formule $\left\langle H^{(i)},H^{(j)}\right\rangle=\delta_{i,j}t$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\alpha t}\left|\overline{y}_t^{n+1,m+1}\right|^2 & +\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{z}_s^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & +\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\overline{Z}_s^{n+1,m+1}\right\|^2 ds+\alpha\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & =2\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\overline{f}_s^{n,m}ds. \end{aligned}$$

Puisque f est L-Lipschitz, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\mathbb{E}\left|\overline{y}_t^{n+1,m+1}\right|^2 & +\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{z}_s^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & +\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left\|\overline{Z}_s^{n+1,m+1}\right\|^2 ds+\alpha\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\ & \leq 2L\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|\left[\left|\overline{y}_{s-}^{n,m}\right|+\left|\overline{z}_s^{n,m}\right|+\left\|\overline{Z}_s^{n,m}\right\|\right] ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t}\mathbb{E}\left|\overline{y}_t^{n+1,m+1}\right|^2 & +\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{z}_s^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\
& +\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left\|\overline{Z}_s^{n+1,m+1}\right\|^2 ds \\
& +(\alpha - L^2\beta^2)\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|^2 ds \\
& \leq \frac{3}{\beta^2}\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|\left[\left|\overline{y}_{s-}^{n,m}\right|^2+\left|\overline{z}_s^{n,m}\right|^2+\left\|\overline{Z}_s^{n,m}\right\|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Si on prend $\dfrac{3}{\beta^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\alpha - 6L^2 = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t}\mathbb{E}\left|\overline{y}_t^{n+1,m+1}\right|^2 & +\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{z}_s^{n+1,m+1}\right|^2 ds+\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left\|\overline{Z}_s^{n+1,m+1}\right\|^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}\left|\overline{y}_{s-}^{n+1,m+1}\right|\left[\left|\overline{y}_{s-}^{n,m}\right|^2+\left|\overline{z}_s^{n,m}\right|^2+\left\|\overline{Z}_s^{n,m}\right\|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique, pour tous $m > n$, que

$$e^{\alpha t}\mathbb{E}\left|\overline{y}_t^{n,m}\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{z}_s^{n,m}\right|^2 ds+\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left\|\overline{Z}_s^{n,m}\right\|^2 ds \leq \frac{C}{2^n}.$$

On peut suivre qu'il existe une constante universelle C, on utilise la formule d'Itô et l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq T}\left|\overline{y}_t^{n,m}\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left|\overline{z}_s^{n,m}\right|^2 ds+\int_t^T e^{\alpha s}\mathbb{E}\left\|\overline{Z}_s^{n,m}\right\|^2 ds \leq \frac{C}{2^n}.$$

Finement, (y^n, z^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace Banach $\mathcal{E}$. On peut montrer que

$$(y,z,Z)=\lim_{n\to\infty}(y^n,z^n,Z^n),$$

■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'exposer deux résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR.

- Le premier résultat est établi par E. Pardoux et S. Peng en 1990.
- Le deuxième résultat, traite le problème de l'existence et l'unicité des solutions pour l'EDSR dirigées par une famille de martingales de Teugels et un mouvement Brownien indépendant, tel que les Martingales de Tougels est une famille dénombrable de martingales de carrées intégrables, orthogonal est adaptées à la filtration engendrée par le processus de Lévy.

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. , (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2), 384-404.

[2] Bahlali, K., Eddahbi, M., Essaky, E. (2003). BSDE associated with Lévy processes and application to PDIE. International Journal of Stochastic Analysis, 16(1), 1-17.

[3] Breton, J. C. (2019). Processus stochastique. Université de Rennes 1.

[4] El Karoui, N. Peng, S. and Quenez, M.-C. Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1–71.

[5] Guiol, H. Calcul stochastique avancé. TIMB-TIMC-IMAG 2005.

[6] J. Jacob. Mouvement brownien et calcul stochastique. Université Pierre et Marie Curie 2007-2008.

[7] Lapeyre, B., Lemberton, D. Introduction au calcul stochastique appliqué a la finance. Université Paris-Est, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France, Université Paris-Est,Professeur à l'École des Ponts ParisTech,France. 2012 Pages 53-54.

[8] Nualart, D., Schoutens, W. (2001). Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes, with applications in finance. Bernoulli, 7(5), 761-776.

[9] Nualart, D., Schoutens, W. (2000). Chaotic and predictable representations for Lévy processes. Stochastic processes and their applications, 90(1), 109-122.

[10] Protter, P. E. (2004). Stochastic integration and differential equations. Springer, Berlin, Heidelbe.

[11] Pardoux, E. and Peng, S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55–61.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres naturelles réels respectivement.
E, Ω	:	Ensemble quelconque, une ensemble fondamental.
L^2	:	Ensemble des fonctions mesurables de carré intégrables.
i.i.d.	:	Indépendante identiquement distribuées..
$p.s.$	:	Presque sur
$\mathbb{P}$-p.s	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
lim	:	Limite.
PAIS	:	Processus accroissements indépendant stationnaires.
v.a.	:	Variable aléatoire.
$X \sim \mathcal{N}(0, t)$	:	Variable X suit la loi normale centrée et de variance t.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$	:	la filtration naturelle du MB.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétograd

Annexe B : Rappel

Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG) Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue $X = (X_t)_{t \geq 0}$, nul en 0 :

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 3.2.1 : *En particulier, si $T \geq 0$*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{p}{2}}\right].$$

Théorème du point fixe Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$ tel que : $\varphi(a) = a$.

Théorème de représentation des martingales Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle du mouvement brownien standard $\{W(t) : t \in [0, T]\}$.

Soit X une martingale de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Alors il existe un processus adapté H tel que :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty,$$

et, pour tout $t \in [0, T]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW(s) \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Inégalité de Young Soit M une martingale réelle continue à doite(ou sous-martingale positive) de carré intégrale. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid M_s \mid^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\mid M_t \mid^2\right] \quad \forall t \geq 0.$$

Lemme de Ganwall Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélien borné tell que pour a, $b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a \exp{(bt)} \quad \forall t \in [0,T].$$

Inégalite de Doob Soit M une martingale réelle continue à doite(ou sous-martingale positive) de carré intégrale. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid M_s \mid^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\mid M_t \mid^2\right] \quad \forall t \geq 0.$$

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de montrer d'existence et d'unicité de la solution des EDSR globalement ou localement Lipchitzienne dirigées par une famille de martingales de Teugels et un mouvement Brownien indépendant. Ce résultat a été obtenu par Bahlali, Eddahbi et Essaky.

Mots clés. Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Martingales de Teugels. Existence et unicité.

Abstract

The objective of this work, we will show of existence and uniqueness of the solution for BSDE driven by Teugels martingales and an independent Brownian motion in both globally and locally Lipschitz. This result is due to Bahlali, Eddahbi and Essaky.

Key words. Backward stochastic differential equation. Teugels martigales. Existence and uniqueness.

الملخص

الهدف من هذا الفصل هو برهنة وجود وتفرد حل بالنسبة للمعادلات التفاضلية و العشوائية التراجعية بقيادة عائلة مارتينغال توقالس و الحركة البراونية المستقلان. وتحت شرط الليبشيز. هذه النتيجة حصل عليها بهلالي، الذهبي والساكيب.

الكلمات المفتاحية. المعادلات التفاضلية و العشوائية التراجعية مارتينغال توقالس. الوجود و الوحدانية .