جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة و الحياة
قسم علوم المادة

مذكرة ماستر

ميدان علوم المادة
فرع الفيزياء
تخصص فيزياء المواد

رقم:

إعداد الطالبين:

بلعمري زوهير غروي ناجي

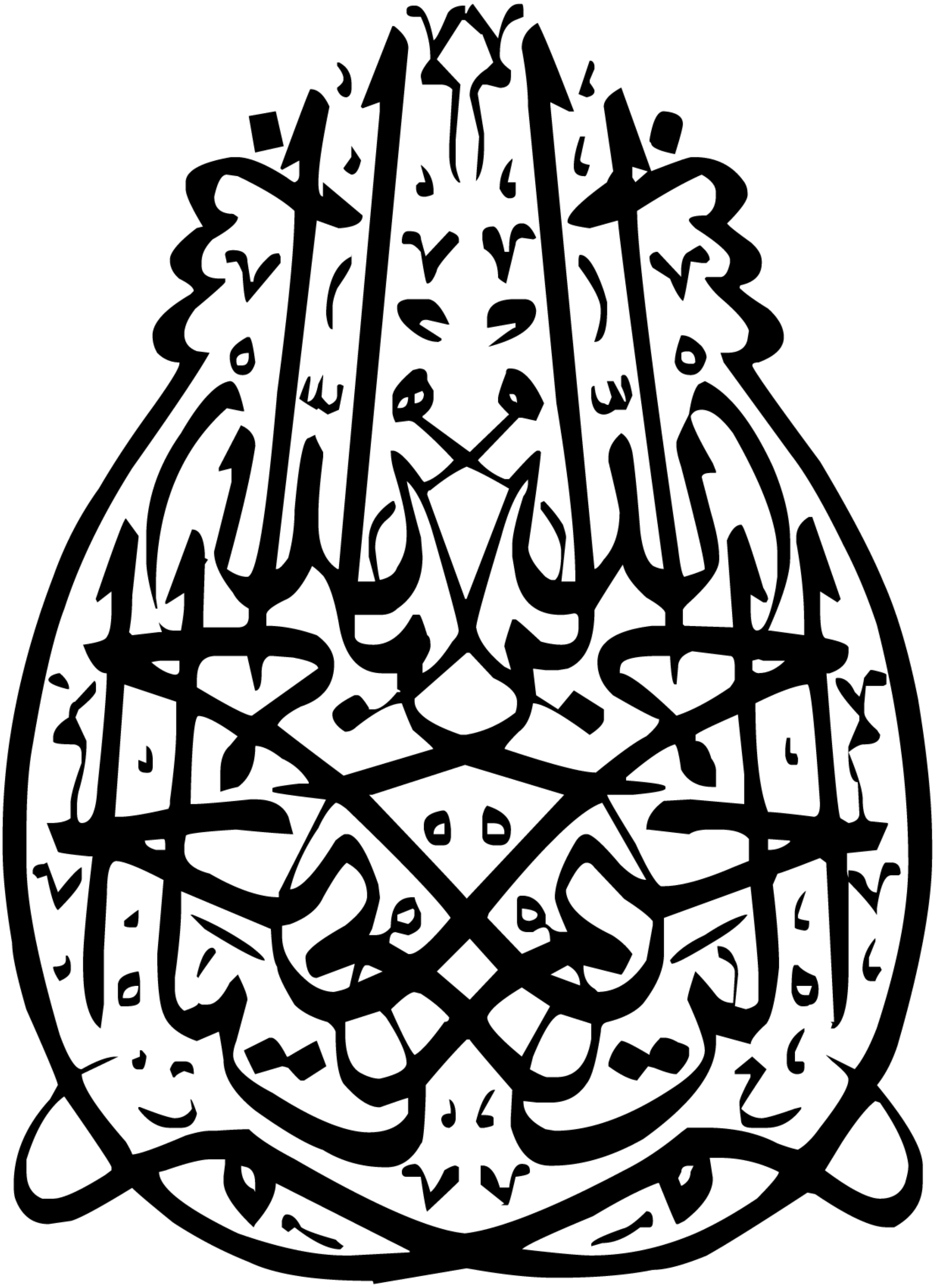
يوم:

دراسة كمومية نسبية لهزاز توافقي بوجود الحقل المغناطيسي في اطارالهندسة غير تبديلية

لجنة المناقشة:

فالق مختار	ا.محاضر	ج . بسكرة	مقرر
قرقب سعيدة	ا.مساعد	ج . بسكرة	مناقش
علمي كنزة	ا.محاضر	ج . بسكرة	مناقش

السنة الجامعية: 2020 / 2021 م


بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات

صدق الله العظيم

المجادلة (11)

إنا فتحنا لك فتحا مبينا

الفتح (1)

شكر و عرفان

الحمد والشكروالامتنان لله تعالى لما وفقنا إليه

من خيرفي مسيرة دراستنا وصولا إلى انجازهذا العمل

المتواضع.

لنا عظيم الشرف والتقديرأن نتقدم بالشكرالجزيل إلى:

طالب **الد كتوراه لخضر صك** على جميل صبره

معنا وعرفانا لما قدمه لنا من نصائح وتوجيهات

و على دعمه وتشجيعه لنا .

الاستاذ المشرف وأساتذتنا أعضاء لجنة المناقشة

على عنائهم في قراءة رسالتنا.

زميلنا عبد اللاوي علي و كافة أساتذة وطلبة علوم المادة.

فهرس

مقدمة عامة

ظهر علم ميكانيكا الكم في القرن العشرين، بما في ذلك بعض النظريات الفيزيائية المستخدمة لشرح ظواهر الجسيمات الذرية ودون الذرية، وجميع خصائص الجسيمات والموجات لإظهار مصطلح ازدواجية الموجة والجسيم، لذلك أصبح سببًا للتفسير الفيزيائي .يمكن أيضًا تطبيقه على المستوى الذري. عكس الميكانيكا الكلاسيكية، فإنه لا يظهر أي تأثير في هذا المستوى، لذا فإن ميكانيكا الكم هو تعميم للفيزياء الكلاسيكية التي يمكن تطبيقها على المستوى الذري والمستوى العادي .

يطلق عليه ميكانيكا الكم لأن الكم مهم جدًا في بنائه (مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمية من الطاقة يمكن تبادلها بين الجسيمات، ويشير إلى كمية معينة من الطاقة تنبعث بشكل متقطع . مستمر.) غالبًا ما تكون مصطلحات" فيزياء الكم "و" نظرية الكم "مرادفة لميكانيكا الكم, حيث تم اكتشافه عندما أراد الفيزيائيون وصف سلوك الذرات وتبادل الطاقة بين الضوء والمادة, على نقيض ميكانيكا نيوتن أو نسبية أينشتاين .

لم يتم إنشاء نظرية الكم كدراسة عميقة قام بها شخص واحد .لا يوجد حتى إجماع عام على ماهية مبادئها، أو كيف ينبغي تدريسها، أو حتى ما تعنيه حقًا. يمكن لأي فيزيائي متمرس دراسة ميكانيكا الكم، لكن الأفكار والمعاني تختلف عن بعضها البعض.

توسع ميكانيكا الكم ليشمل المجال النسبي، حيث طور **بول ديراك** المعادلة التي صاغها العالم النمساوي **إرفين شرودينغر**عام 1925 ، وذلك بإدخال مصفوفات باولي وسرعة الضوء فأصبحت تصف الجسيمات ذات نصف **سبين** وقادرة على وصف الجسيمات الميكروسكوبية.

حل معادلة ديراك لنظام فيزيائي له أهمية كبيرة من خلال معرفة عبارة الطاقة ودالة الموجة لأنه يحتوي على معلومات حول الخصائص الفيزيائية للنظام,اين يعتبر للهزازالتوافقي لديراك (Oscillators Dirac) بغياب ووجود حقل مغناطيسي, كمون مهم لكل من النظرية والتطبيق ، لأنه يوفر احد الامثلة القابلة للحل بدقة.

كانت هذه هي المرة الأولى التي درسها **إيتو** (Ito) وآخرون, لقد اعتبروا معادلة ديراك **(Dirac)** التي يتم فيها استبدال كمية الحركة $p \rightarrow p - i\beta m\omega r$ مع r هو شعاع الموضع، mكتلة الجسيم، ω تردد الهزاز.

الاهتمام بالمشكلة تم إحياءه بواسطة Moshinsky و Szczepaniak في عام 1989 حيث استدعت الدراسة الكثير من الاهتمام بسبب تنوعها الفيزيائي وأيضا من خلال الاهتمام الجوهري بالرياضيات و تطبيقاتها المادية المختلفة.

مقدمـة عامة :

ان الدراسة في الفضاءات غير تبديلية واثارها في الفيزياء هي دراسة بالغة الأهمية,(مجال البحث النشط) حيث قيل في مواقف مختلفة انه يجب اعتبار عدم التبديل سمة أساسية للزمكان بمقياس بلانك.

في هذا البحث سنقوم بدراسة معادلة ديراك(**Dirac**) لهزاز توافقي في غياب الحقل المغناطيسي ووجوده من اجل فضاء تبديلي(commutative) وفضاء غير تبديلي (Noncommutative).

هذه المذكرة مقسمة إلى اربعة فصول , مبنية كالآتي:

الفصل الاول : سنقوم بذكر بعض المفاهيم الأساسية لمعادلة ديراك, وتوضيح الفضاء غير تبديلي , بالإضافة إلى وضع الطريقة الحسابية **نيكيفوروف يوفاروف** (Nikiforov-Uvarov) . وهي طريقة رياضية مستخدمة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية من النوع فوق الهندسي (hypergeometric). والتي أظهرت مؤخرًا نجاحًا كبيرًا في المعالجة التحليلية للعديد من مشاكل الكم النسبي و غير النسبي.

الفصل الثاني : سنقوم بحل معادلة ديراك لهزاز توافقي في غياب و وجود حقل مغناطيسي في فضاء عادي باستعمال الطريقة الحسابية **نيكيفوروف يوفاروف**N-U لايجاد دالة الموجة على شكل كثير حدود و عبارة الطاقة الموافقة لها .

الفصل الثالث:وهو موضوع عملنا الرئيسي والذي سنحاول من خلاله حل معادلة ديراك في الفضاء غير تبديلي (Noncommutative) وذلك من اجل هزاز توافقي في غياب و وجود حقل مغناطيسي باستعمال الطريقة الحسابية **نيكيفوروف يوفاروف**N-U وتطبيقها لايجاد دالة الموجة و عبارة الطاقة الموافقة لها.

الفصل الرابع: نقوم بدراسة مدى تأثير معامل تشوه الفضاء على الخصائص الترموديناميكية للنظام المدروس .

الفصل الأول:

لمحة حول معادلة ديراك ومنهجية نيكيفوروف يوفاروف و الهندسة غير التبديلية.

1.1 . مقدمة :

قبل ظهور نظرية المجال الكمي حاول علماء الفيزياء صياغة معادلة شرودنغر لتوافق النسبية الخاصة , حيث وضعت اول معادلة موجية نسبية سميت بمعادلة كالين غوردن, لكنها تختص فقط بجسيمات عديمة سبين (spin-0) لهذا لا بد ان نرى معادلة أخرى تختص بجسيمات ذات نصف سبين (spin- 1/2) . وقد قدم ديراك معادلته الشهيرة لوصف هذه الجسيمات .

تعطى معادلة شرودنغر التي هي أساس ميكانيك الكم النسبي بالشكل التالي:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi \qquad (1.1)$$

Ψ : الدالة الموجية .

$\hbar$: ثابت بلانك المختزل .

i: عدد مركب (تخيلي)

من خلال استخدام المشتقات الفضائية , شكل ديراك هميلتوني خطي صيغته كالتالي :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}(\alpha_1\frac{\partial\Psi}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial\Psi}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial\Psi}{\partial x^3})+\beta mc^2\Psi=H\Psi \qquad (2.1)$$

بما ان المعادلة متغايرة ,اذن لا يمكن اخذ α_i و β معاملات عددية وعلى هذا المنظور وضع ديراك المعادلة على شكل مصفوفات واعتبر دالة الموجة تكتب بهذا الشكل :

$$\Psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ .\\ .\\ .\\ \psi_N\end{bmatrix}$$

حيث α_i و β مصفوفات مربعة من الشكل $N\times N$.

بالاعتماد على الخواص السابقة تؤول المعادلة (2.1) الى الشكل الاتي :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}\sum_{T=1}^{N}(\alpha_1\frac{\partial\Psi}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial\Psi}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial\Psi}{\partial x^3})_{\sigma t}\Psi_T+\sum_{T=1}^{N}\beta_{\sigma t}mc^2\Psi_T=H\Psi_T \qquad (3.1)$$

حيث T و N و σ دلائل .

اعتمد ديراك على علاقة انشتاين التي تربط بين الطاقة و كمية الحركة و كتلة الجسيم و سرعة الضوء التي تكتب بالشكل :

$$E=\pm\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$$

2.1. الصيغة المتغايرة لمعادلة ديراك :

من اجل العلاقة الصحيحة لطاقة الزخم المستنتجة من العلاقة يجب ان تكون الدالة الموجية متوافقة كما في معادلة غوردون ونكتب :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)\Psi_\sigma \qquad (4.1)$$

بعد تربيع العلاقة وجدنا :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i.j=1}^{3} \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{j=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2 c^4 \Psi \qquad (5.1)$$

حيث:

$$\begin{cases} \alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j = 2\delta_{ik} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$$

و بالتالي تصبح المعادلة :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i.j=1}^{3} \delta_{ik} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j} + m^2 c^2 \Psi \qquad (6.1)$$

من خلال رؤية ديراك للمصفوفات α_i و β ان تكون هرميتية لا تبادلية , وبالتالي الهاميلتوني في العلاقة يكون هرميتي . تعطى القيم الذاتية بالصيغة التالية :

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta = \pm 1 \\ \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \end{cases}$$

تعطى مصفوفة باولي α_i ومصفوفة الوحدة β و دالة الموجة بالصيغ التالية :

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \;,\; \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \;,\; \Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\vec{r}) \\ \psi_b(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

و منه نعطي الشكل الهرميتي المرافق للمعادلة (3.1) من اجل الجسيم الحرحسب المرجع [1] كالاتي :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta m c^2 \Psi \qquad (7.1)$$

3.1 . الفضاء غيرتبديلي :

من اجل معالجة بعض مشاكل الكم المشوهة في الفيزياء النظرية , نعتبر ان الهندسة غير التبديلية هي هندسة حيث احداثيات الزمان والمكان لا ينتقلان , والذي يمثل الشكل العام للمبدلات .

$$\left[\hat{x}_i,\hat{x}_j\right]\neq 0 \quad و \quad \left[\hat{p}_i,\hat{p}_j\right]\neq 0$$

و الجبر غير التبادلي مقدم بشكل عام من العلاقات التالية :

$$\left[\hat{x}_i,\hat{x}_j\right]=i\theta_{ij}$$

$$\left[\hat{p}_i,\hat{p}_j\right]=i\sigma_{ij}$$

$$\left[\hat{x}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$$

الموترات θ_{ij} و σ_{ij} هي معاملات حقيقية غير متماثلة و التي تعتمد على العوامل x و p .

$$\left[\hat{x}^{\mu},\hat{y}^{\nu}\right]=i\theta^{\mu\nu} \qquad (8.1)$$

حيث يرمز $\theta^{\mu\nu}$ إلى موتر ضد متناظر ويلعب نفس دور الثابت $\hbar$ في ميكانيكا الكم المالوفة. للحفاظ على واحدية النظرية وهو شرط أساسي في كل نظرية فيزيائية لا تعارض مبدأ السببية، نختار $\theta^{0\nu}=0$ ، مما يعني أن الزمن يبقى كمعامل وأن عدم التبديل يؤثر فقط على المؤثرات الفضائية فقط دون الزمنية.

في حالتناهذه، يعطى جداء أي دالتين مكافئًا لجداء مويال (Moyal) التالي:

$$(f*g)(x)=\exp[\frac{i}{2}\theta_{ab}\partial x_a\partial y_b]\, f(x)g(y)\big|_{x=y} \qquad (9.1)$$

حيث f و g دالتان كيفيتان ويفترض أنهما قابلتان للتفاضل بلا حدود.

يمكن التعبير عن مؤثري الانتقال والزخم في هذا النموذج بالتحويلين حسب المراجع [2-4] :

$$x_i\to x_i-\frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j \quad و \quad p_j\to p_i, i=\overline{1,3} \qquad (10.1)$$

نختار في دراستنا هذه موترا $\theta^{\mu\nu}$ ثابتا ونختار المعلم بحيث يكون لدينا:

$$\theta_{ij}=\varepsilon_{ijk}\theta_k \quad و \quad \theta_3=\theta \qquad (11.1)$$

يمكننا عندها إعادة كتابة التحويل (19)إلى الشكل المكثف التالي:

$$\theta_{12}=-\theta_{21}=\theta_3=\theta \quad و \quad \vec{r}\to\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar} \qquad (12.1)$$

4.1. الطريقة الرياضية نيكيفوروف يوفاروف:

تعتمد طريقة نيكيفوروف يوفاروف اساسا على تقليل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية الى معادلة من النوع الهندسي المفرط المعمم ,توفر هذه الطريقة حلولا من حيث الوظائف المتعامدة الخاصة بالاضافة الى القيم الذاتية المقابلة .في ميكانيك الكم النسبية وغير النسبية , يمكن حل المعادلة ذات الكمونات الحقيقية او المعقدة من خلال هذه الطريقة . هنا نستخدم هذه الطريقة لحل معادلة ديراك ذات الكمونات العددية المتساوية وكمونات الشعاع , مع تحويل تنسيقي مناسب $r \to s$ و $s = s(x)$ ويمكن اعادة كتابة هذه المعادلة على النحو التالي:

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\Psi(s) = 0 \qquad (13.1)$$

حيث $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ هما كثيرا حدود من الدرجة الثانية على الاكثر , $\tilde{\tau}(s)$ كثير الحدود من الدرجة الاولى و $\Psi(s)$ هي دالة فوق هندسية , نستخدم فصل المتغيرات مع التحويل التالي:

$$\Psi(s) = \phi(s) y_n(s) \qquad (14.1)$$

يتم اختصار المعادلة الى النموذج التالي :

$$y_n''(s) + y_n'(s)\left(2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\right) + y_n(s)\left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right) = 0 \qquad (15.1)$$

معامل $y_n(s)$ يؤخذ مع الصيغة $\tau(s)/\sigma(s)$, حيث $\tau(s)$ كثير حدود من الدرجة الاولى على الاكثر .

$$2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \qquad (16.1)$$

وهكذا يتم الحصول على الشكل الاكثر انتظاما على النحو التالي :

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \qquad (17.1)$$

بتحديد $\pi(s)$:

$$\pi(s) = \frac{1}{2}(\tau(s) - \tilde{\tau}(s)) \qquad (18.1)$$

المعامل الجديد $\pi(s)$ هو كثيرحدود من الدرجة الاولى على الاكثر . من المعادلة نحصل على :

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \qquad (19.1)$$

يتم ترتيب مصطلح $\phi''(s)/\phi(s)$ الذي يظهر في معامل $y(s)$ في المعادلة (15.1) على النحو التالي :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}=\left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)'+\left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)^2 \qquad (20.1)$$

في هذه الحالة , يمكن تحويل $y(s)$ الى شكل اكثر ملاءمة , عند استخدام المساواة التالية :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}+\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}=\left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)'+\left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)^2+\frac{\pi(s)\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)\sigma(s)}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}=\frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \qquad (21.1)$$

حيث:

$$\bar{\sigma}(s)=\tilde{\sigma}(s)+\pi(s)^2+\pi(s)[\tilde{\tau}(s)-\sigma'(s)]+\pi'(s)\sigma(s) \qquad (22.1)$$

بتعويض المعادلتين (11.1) و (16.1) في المعادلة (10.1) نجد :

$$y_n''(s)+\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}y_n'(s)+\frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}y_n(s)=0 \qquad (23.1)$$

يمكن اختزال هذه المعادلة الى معادلة من النوع الهندسي الفائق :

$$\sigma(s)y_n''(s)+\pi(s)y_n'(s)+\lambda y_n(s)=0 \qquad (24.1)$$

$$\bar{\sigma}(s)=\lambda\sigma(s) \qquad (25.1)$$

حيث λ ثابت .

لتحديد كثير الحدود $\pi(s)$, نجري مقارنة بسيطة بين المعادلة (25.1) و المعادلة (22.1) , حيث يتم الحصول على المعادلة التربيعية ل $\pi(s)$ على النحو التالي :

$$\pi(s)^2+\pi(s)[\tilde{\tau}(s)-\sigma'(s)]+\tilde{\sigma}(s)-k\sigma(s)=0 \qquad (26.1)$$

مع:

$$k=\lambda-\pi'(s) \qquad (27.1)$$

بحل المعادلة التربيعية ل $\pi(s)$ باستخدام المعادلة (23.1) , نجد :

$$\pi(s)=\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}(s)+k\sigma(s)} \qquad (28.1)$$

يمكن استخدام قيم k لحساب القيم الذاتية للطاقة , باستخدام المعادلة التالية :

$$\lambda=k+\pi'(s)=-n\tau'(s)-\frac{n-(n-1)}{2}\sigma''(s) \qquad \mathrm{n}=0,1,2... \qquad (29.1)$$

تعطى حلول الجزء الاول من دالة الموجة $\Psi(s)$ من خلال علاقة رودريغز(Rodrigues) :

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} (\frac{d}{ds})^n \left[\sigma^n(s) \rho(s) \right], \qquad \mathrm{n} = 0,1,2... \tag{30.1}$$

حيث B_n ثابت و $\rho(s)$ دالة .

$$\rho(s) = \frac{1}{\sigma(s)} \exp\left(\int \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} ds \right) \tag{31.1}$$

يتم اعطاء حل الجزء الثاني على النحو التالي :

$$\phi(s) = \exp\left(\int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} ds \right) \tag{32.1}$$

قمنا في هذا الفصل بمناقشة معادلة ديراك بصفة عامة، حيث نتطرق الى الشكل العام لهاته المعادلة وكيفية الحصول عليها ثم نقوم بشرح معنى الهندسة غير تبديلية ،و نتطرق أيضا الى توضيح الطريقة الرياضية نيكيفوروف يوفاروف.

الفصل الثاني:

حل معادلة ديراك لهزاز توافقي في غياب و وجود الحقل المغناطيسي في فضاء عادي.

1.2. مقدمة:

تعتبر معادلة ديراك نموذج لميكانيك الكم النسبي صاغها بول ديراك عام 1928 م وتُقَدِّمُ وصفاً للجسيمات الأولية ذات عزم مغزلي مساوٍ لنصف عدد صحيح، أي (s = 1/2) ، و بالتالي فهي تدمج بين نظرية النسبية ونظرية الكم بواسطة تعديلات للمعادلة الموجية التي اوجدها شرودينغر عام 1925.

وقد حظيت دراسة الهزازات التوافقية الكمية باهتمام كبير و من ثم فان توسيع نطاق النموذج ليشمل المجال النسبي هو امر ذو اهمية جوهرية , فعلى هذا السياغ نستكشف هزاز ديراك ثنائي البعد ونكشف عن بعض الميزات التي لا تعرضها انظمة احادي البعد المرجع.[5] .

2.2. حل معادلة ديراك لهزاز توافقي في غياب الحقل المغناطيسي:

يتم تعريف الهزاز التوافقي لديراك في فضاء تبديلي من خلال الاستبدال التالي , الذي اقترحه ايتو واخرون , اعتمادا على المرجع [6] انظر ايضا [7 - 10]

$$p_i \to p_i - i\beta m\omega x_i$$

تكتب معادلة ديراك لهزاز توافقي في غياب الحقل المغناطيسي على الشكل التالي :

$$[c\vec{\alpha}.(\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) + \beta mc^2]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (1.2)$$

c : سرعة الضوء في الخلاء

α : مصفوفة باولي

Ψ : دالة الموجة

m : كتلة الالكترون

p : كمية الحركة .

بعد نشر المعادلة (1.2) نجد :

$$[c\vec{\alpha}\vec{p} - im\omega c(\vec{\alpha}.\beta)\vec{r} + \beta mc^2]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (2.2)$$

حيث (ω تردد الهزاز التوافقي و $\omega\rangle 0$) و α و β مصفوفات 2×2 .

تعطى مركبات شعاعي كمية الحركة و الانتقال في فضاء ثنائي الابعاد بالشكل :

$$\begin{cases} \vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}) \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{cases}$$

بالاعتمادعلى العلاقات (*) نحسب كلا من الجداءات التالية : $\alpha' = \vec{\alpha}.\beta$ و $\alpha'.\vec{r}$ و $\alpha.\vec{p}$:

$$\alpha' = \vec{\alpha}.\beta = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(a)}$$

$$\alpha.\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} p_y \,, \alpha.\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b)}$$

$$\alpha'.\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma}.\vec{r} \\ \vec{\sigma}.\vec{r} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}$$

نعوض كلا من (a) و (b) و(c) في المعادلة (2.2) نجد:

$$c\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} - im\omega c\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma}.\vec{r} \\ \vec{\sigma}.\vec{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

حيث ψ_a و ψ_b هما مركبتا الدالة الموجية Ψ و التي تؤول الى الصفر في حد غير النسبية بالاعتماد على المرجع [11].

يؤدي الحساب المباشرللمعادلة (3.2) الى المعادلتين التاليتين :

$$c\vec{\sigma}.(\vec{p} + im\omega\vec{r}).\psi_b = (E - mc^2)\psi_a \quad (4.2)$$

$$c\vec{\sigma}.(\vec{p} - im\omega\vec{r}).\psi_a = (E + mc^2)\psi_b \quad (5.2)$$

من اجل حل نظام المعادلتين (4.2) و (5.2) نضرب طرفي المعادلة (4.2) في $(mc^2 + E)$ و بالاعتماد على المعادلة (5.2) وبعد التبسيط نجد :

$$c^2[\vec{\sigma}(\vec{p} + im\omega\vec{r}).\vec{\sigma}(\vec{p} - im\omega\vec{r})]\psi_a = (E^2 - m^2c^4)\psi_a \quad (6.2)$$

يمكن كتابة المعادلة (6.2) على الشكل :

$$c^2(\vec{\sigma}\pi_a.\vec{\sigma}\pi_b)\psi_a = (E^2 - m^2c^4)\psi_a \quad (7.2)$$

حيث:

$$\pi_a = (\vec{p} + im\omega\vec{r})$$
$$\pi_b = (\vec{p} - im\omega\vec{r})$$

بتطبيق العلاقة (**) الموالية الموجودة بالمرجع [12] , [14] نجد المعادلة (8.2) .

$$\vec{\sigma}\vec{A}.\vec{\sigma}\vec{B} = \vec{A}.\vec{B} + i\vec{\sigma}\vec{A}\times\vec{B} \quad (**)$$

$$c^2(\vec{\sigma}\pi_a.\vec{\sigma}\pi_b)\psi_a = (\pi_a.\pi_b + i\vec{\sigma}\pi_a \times \pi_b)c^2\psi_a = (E^2 - m^2c^4)\psi_a \qquad (8.2)$$

بحساب الجداء السلمي التالي :

$$\pi_a.\pi_b = [(p_x + im\omega x)\vec{i} + (p_y + im\omega y)\vec{j}][(p_x - im\omega x)\vec{i} + (p_y - im\omega y)\vec{j}]$$

بنشر العبارة نتحصل على :

$$\pi_a.\pi_b = p_x^2 + p_y^2 - im\omega(p_x x - xp_x) - im\omega(p_y y - yp_y) + m^2\omega^2(x^2 + y^2)$$

بالتبسيط نجد :

$$\pi_a.\pi_b = p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 2m\omega\hbar \qquad (9.2)$$

بحساب الجداء الشعاعي $\pi_a \times \pi_b$:

$$\pi_a \times \pi_b = (\vec{p} + im\omega\vec{r}) \times (\vec{p} - im\omega\vec{r})$$

باستعمال المحدد نتحصل على:

$$\pi_a \times \pi_b = [(p_x + im\omega x)(p_y - im\omega y) - (p_y + im\omega y)(p_x - im\omega x)]\vec{k}$$

بعد عملية النشر نتحصل على :

$$\pi_a \times \pi_b = (p_x p_y - p_y p_x) + (m^2\omega^2 xy - m^2\omega^2 xy) + im\omega[(xp_y - p_x y) + (xp_y - yp_x)]$$

بعد التبسيط نتحصل على:

$$\pi_a \times \pi_b = 2im\omega(xp_y - yp_x) = 2im\omega L_z \qquad (10.2)$$

نعوض العبارتين (9.2) و (10.2) في المعادلة (8.2) نجد :

$$c^2[p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 2m\omega\hbar - 2m\omega\sigma_z L_z]\psi_a = (E^2 - m^2c^4)\psi_a \qquad (11.2)$$

حيث :

$$xp_y - yp_x = L_z \quad , \quad (p_x x - xp_x) = (p_y y - yp_y) = -i\hbar$$

لدينا: $\psi_a \begin{pmatrix} \psi_a^+ \\ \psi_a^- \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ نعوضها في المعادلة (11.2) نجد :

$$c^2\left[p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 2m\omega\hbar - 2m\omega\sigma_z L_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_a^+ \\ \psi_a^- \end{pmatrix} = (E^2 - m^2c^4)\begin{pmatrix} \psi_a^+ \\ \psi_a^- \end{pmatrix} \qquad (12.2)$$

حيث ψ_a^- و ψ_a^+ تخص على الترتيب السبين $(-\frac{1}{2})$و $(+\frac{1}{2})$ و σ_z مصفوفة باولي.

بنشر المعادلة (12.2) نتحصل على المعادلتين :

$$\begin{cases} c^2[p^2+m^2\omega^2r^2-2m\omega\hbar-2m\omega L_z]\psi_a{}^+=(E^2-m^2c^4)\psi_a{}^+ \\ c^2[p^2+m^2\omega^2r^2-2m\omega\hbar+2m\omega L_z]\psi_a{}^-=(E^2-m^2c^4)\psi_a{}^- \end{cases} \qquad (13.2)$$

بوضع $\xi=\pm1$ نجد:

$$c^2[p^2+m^2\omega^2r^2-2m\omega\hbar-2m\omega\xi L_z]\psi_a{}^{\xi}=(E^2-m^2c^4)\psi_a{}^{\xi} \qquad (14.2)$$

بالعودة للمعادلة (11.2) وجعلها صفرية نتحصل على :

$$(p^2+m^2\omega^2r^2-2m\omega\sigma_zL_z-\varepsilon)\psi_a=0 \qquad (15.2)$$

حيث:

$$\varepsilon=\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}+2m\omega\hbar$$

ولحل المعادلة (15.2) نقوم بفصل المتغيرات وذلك بوضع :

$$\psi_a=e^{im_\ell\varphi}R(r)\chi$$

ولدينا من جهة اخرى :

$$\begin{cases} p^2=\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}-\dfrac{m_\ell{}^2}{r^2}\right)(-\hbar^2) \\ L_z=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ \sigma_z=\xi \\ m^2\omega^2=\eta \end{cases} \qquad (***)$$

بعد تعويض $\psi_a=e^{im_\ell\varphi}R(r)\chi$ و العبارة (***) في المعادلة (15.2) نتحصل على :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m_e{}^2}{r^2}\right)(-\hbar^2)+\eta r^2-2\omega m\xi\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\varepsilon\right]e^{im_\ell\varphi}R(r)\chi=0 \qquad (16.2)$$

بعد النشر و التبسيط نتحصل على:

$$e^{im_e\varphi}\left[\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m_e{}^2}{r^2}-\frac{\eta r^2}{\hbar^2}\right)R(r)+R(r)\left(\frac{2m\xi}{\hbar^2}\frac{\omega\hbar}{i}(im_e)+\frac{\varepsilon}{\hbar^2}\right)\right]\chi=0 \qquad (17.2)$$

بوضع : $\varepsilon' = \left(\frac{2m\xi}{\hbar} m_\ell \omega + \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\right)$ تصبح المعادلة (17.2) كما يلي :

$$\begin{cases} e^{im_\ell \varphi} \neq 0 \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m_\ell^2}{r^2} - \frac{\eta r^2}{\hbar^2} + \varepsilon'\right) R(r)\chi = 0 \end{cases} \tag{18.2}$$

حيث:

$$_\xi\chi_{-1}^T = (0,1) \text{ و } _\xi\chi_{+1}^T = (1,0)$$

لحل المعادلة (18.2) قمنا بتغيير شكل الدالة $R(r)$ حيث $R(\mathrm{r}) = \frac{1}{\sqrt{r}} g(r)$:

ومن جهة اخرى بحساب المشتقات نجد :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} R(\mathrm{r}) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{2r}\right] g(r) \\ \frac{d^2}{dr^2} R(\mathrm{r}) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{3}{4r^2}\right] g(r) \end{cases} \tag{19.2}$$

بتعويض العبارات (19.2) في المعادلة (18.2) نتحصل على :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{d^2}{dr^2}\right) + \frac{1}{4r^{5/2}} - \frac{m_\ell^2}{r^2} - \frac{\eta r^2}{\hbar^2} + \varepsilon'\right] g(r) = 0 \tag{20.2}$$

نستعمل التغيير التالي $r^2 = a^2 z$ و $a^4 = \frac{\hbar^2}{\eta}$ ومن جهة اخرى نحسب المشتق الثاني :

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{4\mathrm{z}}{a^2}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{a^2}\frac{d}{dz}$$

بالتعويض في المعادلة (20.2) نجد :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2z}\frac{d}{dz} + \frac{1}{(2\mathrm{z})^2}\left(-\mathrm{z}^2 + a^2\varepsilon' z + \left(\frac{1}{4} - m_\ell^2\right)\right)\right] \mathrm{g(z)} = 0 \tag{21.2}$$

لحل المعادلة (21.2) , نقارنها بالمعادلة فوق الهندسية (13.1) حيث نتحصل على كثيرات الحدود التالية :

$$\sigma(\mathrm{z}) = 2\mathrm{z}, \tilde{\tau} = 1, \tilde{\sigma}(\mathrm{z}) = -\mathrm{z}^2 + a^2\varepsilon' z + \left(\frac{1}{4} - m_\ell^2\right) \tag{22.2}$$

بتعويض كثيرات الحدود (22.2) في المعادلة (28.1) نتحصل على الدالة $\pi(z)$:

$$\pi(z)=\frac{1}{2}\pm\sqrt{z^2+(2k-a^2\varepsilon')z+m_\ell^2} \tag{23.2}$$

حسب الشرط السابق المشار اليه في منهجية طريقة (N -U) يجب ان يكون مميز الجذر التربيعي معدوما لان $\pi(z)$ هي على الاكثر , كثير حدود من الدرجة الاولى , من خلال ذلك يمكن تحديد قيم k :

$$\begin{cases} k_1=+m_\ell+\dfrac{a^2}{2}\varepsilon' \\ k_2=-m_\ell+\dfrac{a^2}{2}\varepsilon' \end{cases} \tag{24.2}$$

بتعويض قيمتي k في المعادلة (23.2) نتحصل على الاشكال الاربعة الممكنة ل $\pi(z)$:

من اجل k_1 نجد زوج من الحلول ل $\pi(z)$:

$$\pi_1=\frac{1}{2}+(z+m_\ell)$$

$$\pi_2=\frac{1}{2}-(z+m_\ell)$$

من اجل k_2 نجد زوج من الحلول ل $\pi(z)$:

$$\pi_3=\frac{1}{2}+(z-m_\ell)$$

$$\pi_4=\frac{1}{2}-(z-m_\ell)$$

بتطبيق العلاقة (29.1) نتحصل على عبارات الطاقة النهائية التالية :

من اجل k_1 و π_1:

$$E_1=\pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\xi)-\frac{2\hbar}{mc^2}(2n+m_\ell+1)\omega\right]^{1/2} \tag{25.2}$$

من اجل k_1 و π_2:

$$E_2=\pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\xi)+\frac{2\hbar}{mc^2}(2n-m_\ell+1)\omega\right]^{1/2} \tag{26.2}$$

من اجل k_2 و π_3:

$$E_3=\pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\xi)-\frac{2\hbar}{mc^2}(2n+m_\ell-1)\omega\right]^{1/2} \tag{27.2}$$

من اجل k_2 و π_4:

$$E_4 = \pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\xi)+\frac{2\hbar}{mc^2}(2n+m_\ell+1)\omega\right]^{1/2} \quad (28.2)$$

الحل المناسب هو القيمة E_2 حيث:

$$E_2 = \pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\xi)+\frac{2\hbar}{mc^2}(2n-m_\ell+1)\omega\right]^{1/2}$$

من خلال هذه الدراسة . نحاول الان ايجاد دالة الموجة $\phi(\mathrm{z})$ باتباع الخطوات التالية :

اولا : حساب $\phi(\mathrm{z})$ بتعويض كثير الحدود $\pi(\mathrm{z})$ و $\sigma(\mathrm{z})$ في العلاقة (30.1) نجد :

$$\phi(\mathrm{z}) = \exp\int\frac{-\mathrm{z}-m_\ell+1/2}{2z}dz \quad (29.2)$$

بعد حساب التكامل نتحصل على:

$$\phi(\mathrm{z}) = \mathrm{z}^{(1/4-m_\ell/2)}\exp(-\frac{1}{2}\mathrm{z}) \quad (30.2)$$

ثانيا :ايجاد كثير الحدود للدالة فوق الهندسية $Y_n(\mathrm{z})$ يعتمد على تحديد دالة $\rho(\mathrm{z})$ من خلال تطبيق العلاقة (29.1) نجد :

$$\rho(\mathrm{z}) = \frac{1}{2z}\exp\int\frac{-2\mathrm{z}-2m_\ell+2}{2z}dz \quad (31.2)$$

بحساب التكامل بالتجزئة نجد :

$$\rho(\mathrm{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{z}^{-m_\ell}.\exp(-\mathrm{z}) \quad (32.2)$$

بالتعويض في علاقة رودريغز(Rodrigues) نتحصل على الدالة الذاتية $Y_n(\mathrm{z})$ بالشكل التالي :

$$Y_n(\mathrm{z}) = 2\,\mathrm{Bz}^{m_\ell}.\exp(\mathrm{z})\frac{d^n}{dz^n}[(2\mathrm{z})^n\frac{1}{2}\mathrm{z}\exp(\mathrm{z}) \quad (33.2)$$

بعد التبسيط :

$$Y_n(\mathrm{z}) = 2^n\,\mathrm{Bz}^{m_\ell}.\exp(\mathrm{z})\frac{d^n}{dz^n}(\mathrm{z}^{n+m_\ell}\exp(\mathrm{z})) \quad (34.2)$$

يتم تعريف دالة Laguerre من خلال الصيغة التالية معطاة في المرجع [15].

$$L_n^j(x) = \frac{e^x x^{-j}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}.x^{n+j}) \quad (35.2)$$

بالمقارنة بين الدالتين (34.2) و (35.2) مع اعتبار $\mathrm{j}=-\mathrm{m}_\ell$ و $\mathrm{x}=\mathrm{z}$ و $Y_n(\mathrm{z}) = L_n^j(x)$

نتحصل على :

$$Y_n(z) = 2^n BL_n^{-m_\ell}(z) \qquad (36.2)$$

بعد تعويض العبارتين (30.2) و(36.2) في العبارة (11.1) نتحصل على الدالة فوق الهندسية $\Psi(z)$ بالصيغة التالية :

$$\Psi(z,\varphi) = Cz^{1/4-m_\ell/2}\exp(\frac{z}{2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi).\chi \qquad (37.2)$$

حسب الاستبدال $r^2 = a^2 z$ تكتب عبارة دالة الموجة بالشكل التالي:

$$\Psi(\vec{r},\varphi) = C(\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{4}-\frac{m_\ell}{2}}\exp(\frac{r^2}{2a^2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi).\chi$$

حيث C ثابت الاستنظام .

3.2. حل معادلة ديراك لهزاز توافقي في وجود حقل مغناطيسي :

يعطى هاميلتوني هزاز ديراك في وجود حقل مغناطيسي موحد خارجي بالابعاد (2+1) المرجع [13]

$$H = c\alpha.(\mathrm{p} - \frac{eA}{c} - im\omega\beta r) + \beta mc^2 \qquad (38.2)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} = \frac{B}{2}(-y,x,0)$$

حيث :

A : الشعاع الذي ينتجه الحقل المغناطيسي الخارجي .

e : شحنة الكترون .

تكتب معادلة ديراك في وجود حقل مغناطيسي على الشكل التالي :

$$[c\vec{\alpha}.(\vec{\mathrm{p}} - \frac{e\vec{A}}{c} - im\omega\beta\vec{r}) + \beta mc^2]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (39.2)$$

بالاعتماد على العبارة (*) وبالنشر نجد :

$$\mathrm{c}(\vec{\sigma}\vec{p} - \frac{e}{2c}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r}) + im\omega\vec{\sigma}\vec{r})\psi_b(\vec{r}) = (E - mc^2)\psi_a(\vec{r}) \qquad (40.2)$$

$$\mathrm{c}(\vec{\sigma}\vec{p} - \frac{e}{2c}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r}) - im\omega\vec{\sigma}\vec{r})\psi_a(\vec{r}) = (E + mc^2)\psi_b(\vec{r}) \qquad (41.2)$$

نضرب المعادلة (40.2) في $(E+mc^2)$ وبالاعتماد على المعادلة (41.2) نجد :

$$\begin{aligned}&\mathrm{c}(\vec{\sigma}\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})+im\omega\vec{\sigma}\vec{r})\,\mathrm{c}(\vec{\sigma}\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\\&-im\omega\vec{\sigma}\vec{r})\psi_a(\vec{r})=(E^2-m^2c^4)\psi_a(\vec{r})\end{aligned}\qquad(42.2)$$

نقوم بعملية النشر للمعادلة (42.2) نجد :

$$\begin{aligned}&\mathrm{c}^2[\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\vec{p}-im\omega\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\vec{r}+im\omega\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}\vec{p}+m^2\omega^2\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}\vec{r}-\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{p}\\&-\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})+\frac{e^2}{4c^2}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})+\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{r}\\&-\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})]\psi_a-(E^2-m^2c^4)\psi_a=0\end{aligned}\qquad(43.2)$$

نبسط المعادلة (43.2) باستعمال الاختصارات التالية :

$$\begin{cases}L=\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\vec{p}-im\omega\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\vec{r}+im\omega\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}\vec{p}+m^2\omega^2\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}\vec{r}\\ M=\dfrac{e^2}{4c^2}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})-\dfrac{e}{2c}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{p}-\dfrac{e}{2c}\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\\ N=\dfrac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{r}-\dfrac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}\vec{r}\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\end{cases}$$

نتحصل على المعادلة التالية :

$$(L+M+N)\psi_a=0\qquad(44.2)$$

العبارة L تم حسابها سابقا في المعادلة (15.2) اما العبارتين M و N فنطبق العلاقة (**) .

نحسب M و N بوضع :

$$M=M_1+M_2$$

$$N=N^++N^-$$

حيث :

$$M_1=\frac{e^2B}{4c^2}r^2$$

$$M_2=-\frac{e}{2c}(2B\sigma_z+2B\hbar)$$

من خلال تطبيق نفس العلاقة نحسب N :

$$N^{+}=\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{r}$$

$$N^{-}=-\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}\vec{r}(\vec{B}\times\vec{r})$$

بعد الحساب والتبسيط نجد :

$$\begin{aligned}N^{+}&=\frac{e}{2c}im\omega\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{\sigma}\vec{r}=\frac{e}{2c}im\omega\left[(\vec{B}\times\vec{r})\vec{r}+i\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})\times\vec{r}\right]\\&=\frac{eB}{2c}m\omega\sigma r^{2}\\N^{-}&=-\frac{e}{2c}im\omega[\vec{\sigma}\vec{r}.\vec{\sigma}(\vec{B}\times\vec{r})]=-\frac{e}{2c}im\omega[\vec{r}(\vec{B}\times\vec{r})+i\vec{\sigma}\vec{r}\times(\vec{B}\times\vec{r})]\\&=\frac{eB}{2c}m\omega\sigma r^{2}\end{aligned}$$

بعد التعويض ينتج :

$$\begin{aligned}L&=p^{2}+m^{2}\omega^{2}r^{2}-2m\omega\sigma_{z}L_{z}-\varepsilon\\M&=-\frac{e}{c}BL_{z}-\frac{eB}{c}\sigma_{z}\hbar+\frac{e^{2}B}{4c^{2}}r^{2}\\N&=\frac{eB}{c}m\omega\sigma_{z}r^{2}\end{aligned}$$

بتعويض كلا من L و M و N في العبارة (44.2) نجد :

$$[p^{2}+m^{2}\omega^{2}+(\frac{e^{2}B^{2}}{4c^{2}}+\frac{eB}{c}m\omega\sigma_{z})r^{2}-(\frac{eB}{c}+2m\omega\sigma_{z})L_{z}-\frac{2B}{c}\hbar\sigma_{z}-\varepsilon]\psi_{a}=0 \qquad (45.2)$$

نعوض العلاقة (***) في المعادلة (45.2) نجد :

$$\begin{cases}[\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m_{e}^{2}}{r^{2}}-\frac{\eta' r^{2}}{\hbar^{2}}+\frac{1}{\hbar^{2}}(\frac{eB}{c}+2m\omega\xi)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{\hbar^{2}}(\frac{eB}{c}\hbar\xi-\varepsilon)]R(r)e^{im_{e}\varphi}\chi=0\\ \eta'=\eta+(\frac{e^{2}B^{2}}{4c^{2}}+\frac{eB}{c}m\omega\sigma_{z})\end{cases} \qquad (46.2)$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m_e{}^2}{r^2}-\frac{\eta' r^2}{\hbar^2}+\varepsilon''\right)e^{im_e\varphi}R(r)\chi=0 \\ \varepsilon''=(\frac{eB}{c}+2m\omega\xi)\frac{m_\ell}{\hbar}+\frac{e\xi B}{c\hbar}+\frac{\varepsilon}{\hbar^2}) \\ e^{im_e\varphi}\neq 0 \end{cases} \quad (47.2)$$

بتعويض العلاقة (***) في (47.2) نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{r}}(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{4r^2}-\frac{m_e{}^2}{r^2}-\frac{\eta' r^2}{\hbar^2}+\varepsilon'')\mathrm{g}(r)=0 \quad (48.2)$$

ومنه :

$$\begin{cases} (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{4r^2}-\frac{m_e{}^2}{r^2}-\frac{\eta' r^2}{\hbar^2}+\varepsilon'')\mathrm{g}(r)=0 \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\neq 0 \end{cases} \quad (49.2)$$

نستعمل التغيير التالي $r^2=a^2z$ و $a^4=\frac{\hbar^2}{\eta}$ ومن جهة اخرى نحسب المشتق الثاني :

$$\frac{d^2}{dr^2}=\frac{4z}{a^2}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{2}{a^2}\frac{d}{dz}$$

نعوض في المعادلة (49.2) نجد :

$$[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}+\frac{1}{16z^2}(-4z^2+4a^2\varepsilon''z+(1-4m_e{}^2))]\mathrm{g(z)}=0 \quad (50.2)$$

بمقارنة العلاقة (50.2) مع العلاقة (13.1) نتحصل على النتائج التالية :

$$\sigma(s)=2z, \tilde{\tau}=1, \tilde{\sigma}=-z^2+a^2\varepsilon''z+(\frac{1}{4}-m_\ell^2) \quad (51.2)$$

نعوض (51.2) في المعادلة (28.1) نجد المعادلة $\pi(z)$.

$$\pi(\mathrm{z})=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\mathrm{z}^2+(2k-a^2\varepsilon'')\mathrm{z}+m_\ell^2} \quad (52.2)$$

يتم تحديد المعامل k كما هو مذكور في الفصل السابق ونحصل على قيمتين:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= +m_\ell + \frac{a^2}{2}\varepsilon'' \\
k_2 &= -m_\ell + \frac{a^2}{2}\varepsilon''
\end{aligned}
\tag{53.2}
$$

بالنسبة لـ $\pi(z)$, نحصل على الحلول التالية :

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{z^2 + (2m_\ell z + m_\ell^2)} \\
\pi_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{z^2 + (2m_\ell z + m_\ell^2)} \\
\pi_3 &= \frac{1}{2} + \sqrt{z^2 + (2m_\ell z - m_\ell^2)} \\
\pi_4 &= \frac{1}{2} - \sqrt{z^2 + (2m_\ell z - m_\ell^2)}
\end{aligned}
$$

حيث π_1 و π_2 مرتبطتان ب k_1 بينما π_3 و π_4 مرتبطتان ب k_2 .

$$E_1 = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1 + m_\ell\tau) - \frac{2\hbar}{mc^2}(2n + m_\ell + 1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau)} - (m_\ell + \tau)\tilde{\omega}\right]^{1/2}$$

$$E_2 = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1 + m_\ell\tau) + \frac{2\hbar}{mc^2}(2n + m_\ell + 1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau)} - (m_\ell + \tau)\tilde{\omega}\right]^{1/2}$$

$$E_3 = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1 + m_\ell\tau) - \frac{2\hbar}{mc^2}(2n + m_\ell - 1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau)} - (m_\ell + \tau)\tilde{\omega}\right]^{1/2}$$

$$E_4 = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1 + m_\ell\tau) - \frac{2\hbar}{mc^2}(2n + m_\ell + 1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau)} - (m_\ell + \tau)\tilde{\omega}\right]^{1/2}$$

الحل المناسب هو القيمة E_2 المناسبة, بحيث يكون لدينا:

$$E_2 = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1 + m_\ell\tau) + \frac{2\hbar}{mc^2}(2n + m_\ell + 1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau)} - (m_\ell + \tau)\tilde{\omega}\right]^{1/2}$$

لايجاد دالة الموجة نحسب كلا من $Y_n(z)$ و $\phi(z)$ ثم نعوض في العلاقة (14.1) .

لحساب $Y_n(z)$ نحدد $\rho(z)$ اولا :

$$\rho(z) = \frac{1}{2z}\exp\int\frac{-2z - 2m_\ell + 2}{2z}dz \tag{54.2}$$

بحساب التكامل بالتجزئة نجد :

$$\rho(\mathrm{z})=\frac{1}{2}(\mathrm{z}^{m_\ell}.\exp(-\mathrm{z})) \tag{55.2}$$

بالتعويض في علاقة رودريغز(Rodrigues) نتحصل على الدالة الذاتية $Y_n(z)$ بالشكل التالي :

$$Y_n(z)=2\,\mathrm{B}\mathrm{z}^{m_\ell}.\exp(\mathrm{z})\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^n\frac{1}{2}\mathrm{z}\exp(\mathrm{z})] \tag{56.2}$$

بعد التبسيط نجد :

$$Y_n(z)=2^n\,\mathrm{B}\mathrm{z}^{m_\ell}.\exp(\mathrm{z})\frac{d^n}{dz^n}(\mathrm{z}^{n+m_\ell}\exp(\mathrm{z})) \tag{57.2}$$

بالمقارنة بين الدالتين (57.2) و (35.2) مع اعتبار $\mathrm{j}=-\mathrm{m}_\ell$ و $\mathrm{x}=\mathrm{z}$ و $Y_n(z)=L_n^j(x)$ نتحصل على :

$$Y_n(z)=2^n BL_n^{-m_\ell}(\mathrm{z}) \tag{58.2}$$

بحساب $\phi(\mathrm{z})$, من خلال تعويض كثير الحدود $\pi(\mathrm{z})$ و $\sigma(\mathrm{z})$ في العلاقة (29.1) نجد :

$$\phi(\mathrm{z})=\exp\int\frac{-\mathrm{z}-m_\ell+1/2}{2z}dz \tag{59.2}$$

بعد حساب التكامل نتحصل على :

$$\phi(\mathrm{z})=\mathrm{z}^{(1/4-m_\ell/2)}\exp(-\frac{1}{2}\mathrm{z}) \tag{60.2}$$

بعد تعويض العبارتين (58.2) و(60.2) في العبارة (14.1) نتحصل على الدالة فوق الهندسية $\Psi(\mathrm{z})$ بالصيغة التالية :

$$\Psi(z,\varphi)=Cz^{1/4-m_\ell/2}\exp(\frac{z}{2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi)\chi \tag{61.2}$$

حسب الاستبدال $r^2=a^2\mathrm{z}$ تكتب عبارة دالة الموجة بالشكل التالي:

$$\Psi(\vec{r},\varphi)=C(\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{4}-\frac{m_\ell}{2}}\exp(\frac{r^2}{2a^2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi)\chi$$

من اجل حساب كل من الطاقة ودالة الموجة في وجود حقل مغناطيسي فقط يمكننا الاستنتاج دون اعادة الحساب بوضع $\omega=0$.

$$E_2=mc^2\left[1+[(\frac{2\hbar}{mc^2}(2n+m_\ell+1)-(m_\ell+\tau)]\tilde{\omega}\right]^{1/2} \tag{62.2}$$

اما دالة الموجة فهي نفسها :

$$\Psi(z,\varphi) = Cz^{1/4-m_\ell/2}\exp(\frac{z}{2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi)\chi \qquad (63.2)$$

حسب الاستبدال $r^2 = a^2 z$ تكتب عبارة دالة الموجة بالشكل التالي :

$$\Psi(\vec{r},\varphi) = C(\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{4}-\frac{m_\ell}{2}}\exp(\frac{r^2}{2a^2})L_n^{-m_\ell}\exp(i\ell\varphi)\chi$$

4.2. الخلاصة :

إن دراستنا في هذا الفصل ترتبط بحل معادلة ديراك في الحالة العادية من اجل هزاز توافقي فقط وتحصلنا على عبارة الطاقة و دالة الموجة باستعمال الطريقة الرياضية **نيكيفوروف يوفاروف (N-U)**. وتطرقنا أيضا الى إيجاد عبارة الطاقة ودالة الموجة تحت تاثير الحقل المغناطيسي .

الفصل الثالث:

حل معادلة ديراك لهزاز توافقي في غياب و وجود الحقل المغناطيسي في فضاء غير تبديلي

1.3. مقدمة :

في السنوات الاخيرة، تمت دراسة العديد من مشاكل الكم النسبية على نطاق واسع في الفضاء غير التبديلي . مثل "هزاز كالين جوردون" الذي تم تطويره من هزاز ديراك (Dirac) الذي قدمه Moshinskyو Szczepaniak في عام 1989 , وصف باختلاف ديناميكيات جسيم واحد يتمتع بالدوران 0. spin - بالاضافة إلى ذلك، على نطاق مجهري عالي الطاقة العديد من النظريات مخصصة لدراسة الهندسة غير التبديلية التي تم اقتراح أي منها يجب أن تحتوي مخططات التوحيد للتفاعلات الاساسية في الفيزياء من حيث المبدأ . آثار عدم التبديل للفضاء الذي يصف الكمونات لظواهر الكم . الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو دراسة تأثير الهندسة غير تبديلية بشكل أساسي حول معادلة ديراك لهزاز توافقي في وجود حقل مغناطيسي منتظم .

2.3. حل معادلة ديراك المشوهة لهزاز توافقي في وجود حقل مغناطيسي منتظم :

ننطلق من المعادلة (2.2) من اجل فضاء مشوه نجري التعديلات التالية:

$$\left[c\vec{\alpha}.(\vec{\mathrm{p}}-\frac{eA}{c}-im\omega\beta\vec{r})+\beta mc^2\right]\Psi(\vec{r})=E\Psi(\vec{r}) \qquad (1.3)$$

من اجل فضاء مشوه عبارة كمية الحركة و الموضع كما يلي :

$$\begin{cases} \vec{p}\rightarrow\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{\beta}\times\vec{r}-im\omega\vec{\beta}\vec{r} \\ \vec{r}\rightarrow\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar} \end{cases}$$

بعد تعويض العلاقة اعلاه في (1.3) نتحصل على :

$$\left[c\left(\vec{\alpha}.\vec{\mathrm{p}}-\frac{e}{2c}\vec{\alpha}\vec{B}\times(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})-im\omega(\vec{\alpha}\beta)(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})\right)+\beta mc^2\right]\Psi(\vec{r})=E\Psi(\vec{r}) \qquad (2.3)$$

اعتمادا على العبارة (*)الموجودة في الفصل الثاني وباستعمال النشر نجد :

$$\mathrm{c}\left[\sigma\vec{p}.\psi_b(\vec{r})+(-\frac{e}{2c}\sigma\vec{B}\times(\vec{\mathrm{r}}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar}))-im\omega\sigma(\vec{\mathrm{r}}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})\right]\psi_b(\vec{r})=(E-mc^2)\psi_a(\vec{r}) \qquad (3.3)$$

$$\mathrm{c}\left[\sigma\vec{p}.\psi_a(\vec{r})+(-\frac{e}{2c}\sigma\vec{B}\times(\vec{\mathrm{r}}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar}))-im\omega\sigma(\vec{\mathrm{r}}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})\right]\psi_a(\vec{r})=(E+mc^2)\psi_b(\vec{r}) \qquad (4.3)$$

نضرب المعادلة (3.3) في$(E+mc^2)$ وبالاعتماد على المعادلة (4.3) نجد :

$$\left[c\vec{\sigma}\left(\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{\beta}\times(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})-im\omega(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})\right)\vec{\sigma}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{\beta}\times(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})-im\omega(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2\hbar})\right)\vec{\sigma}\right]\psi_a(\vec{r})=(E^2-m^2c^4)\psi_a(\vec{r}) \quad (5.3)$$

نطبق العلاقة $(**)$ نجد :

$$\left[[(1+\frac{eB\theta}{2c\hbar}+\frac{e^2B^2\theta^2}{16c^2\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2})+(\frac{m\omega\theta}{\hbar}+m\omega\frac{eB\theta^2}{4c\hbar^2})\sigma_z]p^2\right.$$
$$+(\frac{e^2B^2}{4c^2}+m^2\omega^2+\frac{eB}{c}m\omega\sigma_z)r^2 \quad (6.3)$$
$$-((\frac{eB}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar})+(2m\omega+m\omega\frac{eB\theta}{c\hbar})\sigma_z)L_Z$$
$$\left.-(\frac{eB\hbar}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2}+m^2\omega^2\theta)\sigma_z-\varepsilon\right]\psi_a(\vec{r})=0$$

نستعمل اختصارات لتبسيط العلاقة (6.3) نجد :

$$\left(p^2+\frac{1}{\delta}(\frac{e^2B^2}{4c^2}+m^2\omega^2+\frac{eB}{c}m\omega\sigma_z)r^2\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma}{\delta}L_Z\,\frac{1}{\delta}(\frac{eB\hbar}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2}+m^2\omega^2\theta)\sigma_z-\varepsilon'''\right)\psi_a(\vec{r})=0 \quad (7.3)$$

حيث :

$$\varepsilon'''=\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}+2m\omega\hbar+m\omega\frac{eB\theta}{c}$$
$$\delta=1+\frac{eB\theta}{2c\hbar}+\frac{e^2B^2\theta^2}{16c^2\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}+(\frac{m\omega\theta}{\hbar}+m\omega\frac{eB\theta}{c\hbar})\sigma_z$$
$$\gamma=\frac{eB}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}+(2m\omega+m\omega\frac{eB\theta}{c\hbar})\sigma_z$$

بتطبيق نفس الخطوات المطبقة في الفصل السابق نتحصل على العلاقة :

$$[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}+\frac{1}{(2z)^2}(-z^2+a^2\varepsilon'''z+(\frac{1}{4}-m_e{}^2))]\mathrm{g(z)}=0 \quad (8.3)$$

نقارن المعادلة التفاضلية (8.3) بالمعادلة (13.1) نتحصل على :

$$\sigma(s)=2z,\tilde{\tau}=1,\tilde{\sigma}=-z^2+a^2\varepsilon'''z+(\frac{1}{4}-m_e{}^2) \tag{9.3}$$

نعوض العبارات (9.3) في المعادلة (24.1) نتحصل على :

$$\pi(z)=\frac{1}{2}\pm\sqrt{z^2+(2k-a^2\varepsilon''')z+m_\ell^2}$$

حسب الشرط الموضح في الطريقة الرياضية (N.U) نتحصل على :

$$\begin{aligned} k_1&=+m_e+\frac{a^2}{2}\varepsilon''' \\ k_2&=-m_e+\frac{a^2}{2}\varepsilon''' \end{aligned} \tag{10.3}$$

بتعويض قيمتي k في المعادلة (28.1) نتحصل على نفس قيم $\pi(z)$ من خلال الاستعانة بالعلاقة (29.1) نستنتج قيمة الطاقة الممكنة :

$$\begin{aligned} E_2=mc^2\Bigg[1&-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+m_\ell\tau)+(\frac{1+m\tilde{\omega}\theta}{\hbar}) \\ &+\frac{2\hbar}{mc^2}[(2n+m_\ell+1)\sqrt{(\omega^2+\tilde{\omega}^2+2\omega\tilde{\omega}\tau)(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar})+m^2\frac{(\omega^2+\tilde{\omega})\theta^2}{4\hbar^2}-\frac{m\omega\tau}{\hbar}(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar})} \\ &-(m_\ell+\tau)(\tilde{\omega}+\frac{m(\omega^2+\tilde{\omega}^2)}{2\hbar^2})]\Bigg]^{1/2} \end{aligned} \tag{11.3}$$

من خلال العبارة الطاقوية (11.3) يمكننا ان نلاحظ انه في غياب الحقل المغناطيسي و تشوه الفضاء نتحصل على عبارة الطاقة في الحالة العادية الموجودة بالفصل السابق و الموجودة ايضا بالمرجع [16]

لما نضع $\theta=0$ و $B=0$ نجدعبارة الطاقة في الحالة العادية اعتمادا على المرجع [16]

$$\begin{aligned} E^{\tau}{}_{n,l}&=\pm mc^2\left[1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}+\frac{2\hbar}{mc^2}[(2n+1)\sqrt{(\omega^2)}]\right]^{1/2} \\ &=(m^2c^4-2\hbar\omega mc^2+4n\hbar\omega mc^2+2\hbar\omega mc^2)^{1/2} \\ &=(m^2c^4+4n\hbar\omega mc^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{11.3}$$

ايجاد دالة الموجة: حساب $\phi(z)$ من خلال تعويض كثير الحدود $\pi(z)$ و $\sigma(z)$ في العلاقة (28.1) وحساب التكامل نجد :

$$\phi(z) = z^{(1/4-m_\ell/2)} \exp(-\frac{1}{2}z) \tag{12.3}$$

حل كثير حدود الدالة فوق هندسية $Y_n(z)$ يعتمد على تحديد الدالة $\rho(z)$. نطبق العلاقة (31.1) نجد :

$$\rho(z) = \frac{1}{2z} \exp\int \frac{-2z-2m_\ell+2}{2z} dz \tag{13.3}$$

بحساب التكامل بالتجزئة نجد :

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(z^{-m_\ell} .\exp(-z)) \tag{14.3}$$

بالتعويض في علاقة رودريغز(Rodrigues) نتحصل على الدالة الذاتية $Y_n(z)$ بالشكل التالي :

$$Y_n(z) = 2\,Bz^{m_\ell} .\exp(z)\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^n \frac{1}{2} z\exp(z)] \tag{15.3}$$

بعد التبسيط :

$$Y_n(z) = 2^n\,Bz^{m_\ell} .\exp(z)\frac{d^n}{dz^n}(z^{n+m_\ell} \exp(z)) \tag{16.3}$$

بالمقارنة بين الدالتين (16.3) و (2. 35) مع اعتبار $j=-m_\ell$ و $x=z$ و $Y_n(z) = L_n^j(x)$

نتحصل على :

$$Y_n(z) = 2^n BL_n^{-m_\ell}(z) \tag{17.3}$$

بعد تعويض العبارتين (12.3) و(17.3) في العبارة (14.1) نتحصل على الدالة فوق الهندسية $\Psi(z)$ بالصيغة التالية :

$$\Psi(z,\varphi) = Cz^{1/4-m_\ell/2} \exp(\frac{z}{2})L_n^{-m_\ell} \exp(i\ell\varphi)\chi \tag{18.3}$$

حسب الاستبدال $r^2 = a^2 z$ تكتب عبارة دالة الموجة بالشكل التالي :

$$\Psi(\vec{r},\varphi) = C(\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{4}-\frac{m_\ell}{2}} \exp(\frac{r^2}{2a^2})L_n^{-m_\ell} \exp(i\ell\varphi)\chi$$

3.3. الخلاصة :

لقد رأينا في فصلنا هذ الحل الدقيق لمعادلة ديراك وتم التطبيق في فضاء مشوه من خلال إيجاد عبارة الطاقة ودالة الموجة في وجود هزاز توافقي وحقل مغناطيسي منتظم باستعمال الطريقة الرياضية نيكيفوروف يوفاروف.

ومن جهة أخرى استنتجنا عبارة الطاقة في الحالة العادية من اجل وجود هزاز توافقي فقط وذلك بوضع

$B=0$ و $\theta=0$.

الفصل الرابع:

الخصائص الديناميكا الحرارية لهزاز ديراك(D-O) في فضاء مشوه.

1.4 . مقدمة :

في هذا الفصل , نحاول فحص تأثير الهندسة غير التبديلية على الخصائص الديناميكية الحرارية مثل الطاقة الحرة , متوسط الطاقة ، السعة الحرارية ، إنتروبي الهزاز التوافقي لديراك في فضاء مشوه .

2.4. دراسة الخصائص الديناميكا الحرارية لهزاز ديراك (D- O) في فضاء مشوه:

كما سبق الذكرفي الفصل السابق ، القيم الذاتية لنسبية هاملتوني تتم كتابة الهزاز التوافقي ثنائي البعد في الفضاء غير التبديلي.

تكتب عبارة الطاقة من الشكل :

$$E^{\tau}{}_{n,l} = \pm mc^2\sqrt{\mu n+\lambda} \tag{1.4}$$

من خلال الفصل السابق تكتب عبارة الطاقة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} E^{\tau}{}_{n,l} = \pm mc^2 \Bigg[& 1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}(1+l\tau)(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar}) \\ & +\frac{2\hbar}{mc^2}[(2n+l+1)\sqrt{(\omega^2+\tilde{\omega}^2+2\omega\tilde{\omega}\tau)(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar})+m^2\frac{(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2}-\frac{m\omega\tau}{\hbar}(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar})\theta} \\ & -(l+\tau)(\tilde{\omega}+\frac{m(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar^2})]\Bigg]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

بمطابقة العلاقتين (4.1) و (4.2) نجد :

$$\mu = \frac{4\hbar}{mc^2}\left(\sqrt{(\omega^2+\tilde{\omega}^2)(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar}+m^2\frac{(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2})}-(\tilde{\omega}+\frac{m(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar^2})-\frac{m\omega\tilde{\omega}\theta}{\hbar}\right) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 1-\frac{2\hbar\omega}{mc^2}+\frac{2\hbar}{mc^2}(l+1)\Bigg(& \sqrt{(\omega^2+\tilde{\omega}^2)(1+\frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar}+m^2\frac{(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2})} \\ & -l(\tilde{\omega}+\frac{m(\omega^2+\tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar^2})-\frac{m\omega\tilde{\omega}\theta}{\hbar}\Bigg) \end{aligned} \tag{4.4}$$

جميع الخصائص الحرارية للهزاز التوافقي المشوه $(\ell=0,m_\ell)$ ممثلة بيانيا عند درجة حرارة عالية في المنحنيات (1.4) الموضحة ادناه كدالة لمتغير درجة الحرارة من اجل قيم مختلفة لمعامل التشوه. يعني $\theta=0$,0.1 و 0.4 حيث استخدمنا وحدات هارتري $(K_B=\hbar=m=c=1)$, ومن جهة اخرى $\omega=B=1$.

يمكن الحصول على جميع الكميات الديناميكية الحرارية من دالة التقسيم Z . نحسب اولا هذه الدالة للنظام التي تم تعريفها على أنها دالة لدرجة الحرارة T .

$$Z(V,T)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(E_n-E_0)} \tag{5.4}$$

حيث : $\beta=\frac{1}{K_BT}$, ثابت بولتزمان (Boltzmann) و E_0 هي طاقة الحالة الاساسية .

يمكن حساب متوسط الخصائص الديناميكية الحرارية للنظام الفيزيائي ، مثل الطاقة الحرة F ، الطاقة Uالحرارة النوعية C والانتروبي S من العبارات التالية :

$$F=-\frac{1}{\beta}\ln(Z) \tag{6.4}$$

$$U=-\frac{\partial\ln(Z)}{\partial\beta} \tag{7.4}$$

$$C=-K_B\beta^2\frac{\partial U}{\partial\beta} \tag{8.4}$$

$$S=K_B\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} \tag{9.4}$$

بالاضافة إلى ذلك ، بالنسبة لحالات الطاقة السالبة والاجابية ، دالة التقسيم Z لهزاز ديراك عند درجة حرارة محدودة T لها الشكل :

$$Z(V,T)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda}-\sqrt{\lambda})}=e^{-\beta mc^2\sqrt{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda})} \tag{10.4}$$

الان لتقييم هذه الدالة ، نستخدم صيغة أويلر-ماكلورين (Euler- Maclaurin) الموجودة في المرجع [17] .

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=\int_0^{\infty}e^{\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda})}dx \tag{11.4}$$

عند تحليلنا للديناميكا الحرارية ، ننظر إلى حالات الطاقة الموجبة والسالبة. ننتقل الان الى أهم اهتماماتنا عن طريق تعويض (4.1) في (5.4) نحصل على دالة التقسيم بالنسبة لهزاز ديراك في فضاء مشوه , كما يلي :

$$Z(V,T)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda}-\sqrt{\lambda}}=e^{\beta mc^2\sqrt{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda})} \tag{12.4}$$

لحساب العبارة (12.4) نستخدم صيغة أويلر-ماكلورين(Euler- Maclaurin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(0)+\int_0^{\infty} f(x)dx-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}B_{2p}f^{(2p-1)}(0) \tag{13.4}$$

مع B_{2p} هو عدد برنولي .

$$f(x)=e^{-\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda})} \tag{14.4}$$

ثم لدينا النتائج التالية حتى الترتيب B_4

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty} e^{-\beta mc^2(\sqrt{\mu n+\lambda}-\sqrt{\lambda})}dx=\frac{2}{\mu\beta^2m^2c^4}(\beta mc^2+\sqrt{\lambda}+1)e^{-\beta mc^2\sqrt{\lambda}} \tag{15.4}$$

$$f^{(1)}=-\frac{\mu\beta mc^2}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\beta mc^2(\sqrt{\lambda})} \tag{16.4}$$

$$f^{(3)}=-\frac{\mu\beta mc^2}{2\sqrt{\lambda}}\left[3\lambda^{5/2}+3\beta mc^2\lambda^{-2}+\beta(mc^2)^2\lambda^{-3/2}\right]e^{-\beta mc^2(\sqrt{\lambda})} \tag{17.4}$$

مع $B_2=16$, $B_4=-1/30$ عندما نعوض المعادلتين (16.4) و (17.4) في المعادلة (14.4)

نتحصل على دالة التقسيم Z عند درجة حرارة محدودة T مثل:

$$\begin{cases} Z=\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu}\tau+\frac{2}{\mu}\tau^2+(\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}}-\frac{\mu^3}{1920\lambda^2\sqrt{\lambda^5}})\frac{1}{\tau}-\frac{\mu^3}{1920\lambda^2}\frac{1}{\tau^2}-\frac{\mu^3}{5760\sqrt{\lambda^3}}\frac{1}{\tau^3} \\ \tau=\frac{1}{\beta mc^2}=\frac{K_BT}{mc^2} \end{cases} \tag{18.4}$$

في هذه المرحلة , نحاول وصف النتائج الرقمية الخاصة بنا في التقييم بايجاز الوضائف الديناميكية الحرارية عبر دالة التقسيم Z.

$$F=-mc^2\tau\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu}\tau+\frac{2}{\mu}\tau^2+(\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}}-\frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}})\frac{1}{\tau}-\frac{\mu^3}{1920\lambda^2}\frac{1}{\tau^2}-\frac{\mu^3}{5760\sqrt{\lambda^3}}\frac{1}{\tau^3}\right) \tag{19.4}$$

$$U=mc^2\left(\frac{\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu}+\frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^3}\tau^4}+\frac{\mu^3}{960\lambda^2\tau^3}-\frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}}-\frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau^2}+\frac{4\tau}{\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{\mu^3}{5760\sqrt{\lambda^3}\tau^3}-\frac{\mu^3}{1920\lambda^2\tau^2}+\frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}}-\frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau}+\frac{2\sqrt{\lambda}\tau}{\mu}+\frac{2\tau^2}{\mu}}\right)\times\tau^2 \tag{20.4}$$

$$C = 2K_B \left[\frac{\tau(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu} + \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^3}\tau^4} + \frac{\mu^3}{960\lambda^2\tau^3} - \frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau^2} + \frac{4\tau}{\mu})}{Z} \right]$$

$$- \left[\frac{\tau(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu} + \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^3}\tau^4} + \frac{\mu^3}{960\lambda^2\tau^3} - \frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau^2} + \frac{4\tau}{\mu})}{Z} \right]^2 \qquad (21.4)$$

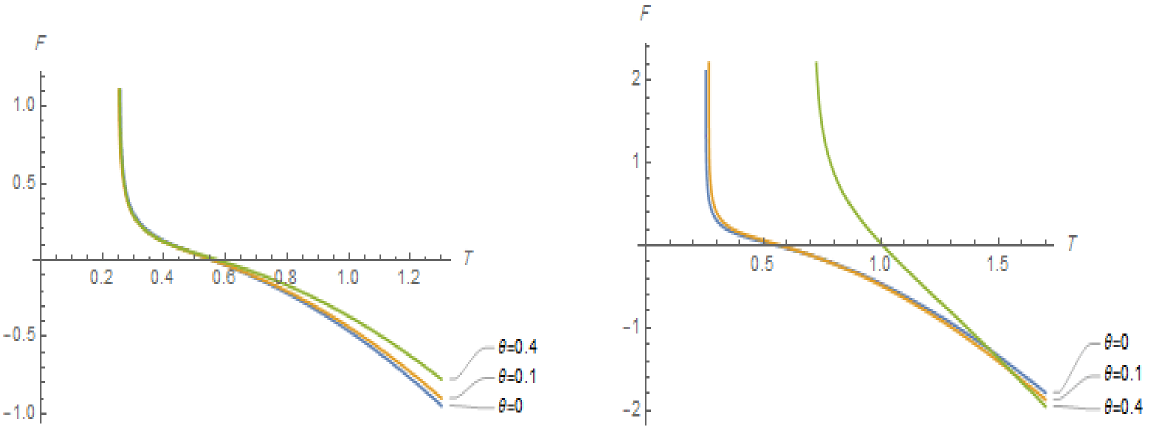
$$+ \frac{(\frac{4}{\mu} - \frac{\mu^3}{480\sqrt{\lambda^3}\tau^5} - \frac{\mu^3}{320\lambda^2\tau^4} + \frac{2(\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}})}{\tau^3})\tau^2}{Z}$$

$$S = \frac{K_B T(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\mu} + \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^3}\tau^4} + \frac{\mu^3}{960\lambda^2\tau^3} - \frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau^2} + \frac{4\tau}{\mu})}{\frac{1}{2} - \frac{\mu^3}{5760\sqrt{\lambda^3}\tau^3} - \frac{\mu^3}{1920\lambda^2\tau^2} + \frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau} + \frac{2\sqrt{\lambda}\tau}{\mu} + \frac{2\tau^2}{\mu}} + K_B Log[\frac{1}{2} \qquad (22.4)$$

$$- \frac{\mu^3}{5760\sqrt{\lambda^3}\tau^3} - \frac{\mu^3}{1920\lambda^2\tau^2} + \frac{\frac{\mu}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\mu^3}{1920\sqrt{\lambda^5}}}{\tau} + \frac{2\sqrt{\lambda}\tau}{\mu} + \frac{2\tau^2}{\mu}]$$

حيث استخدمنا التعاريف (6.4),(7.4),(8.4) , (9.4) .

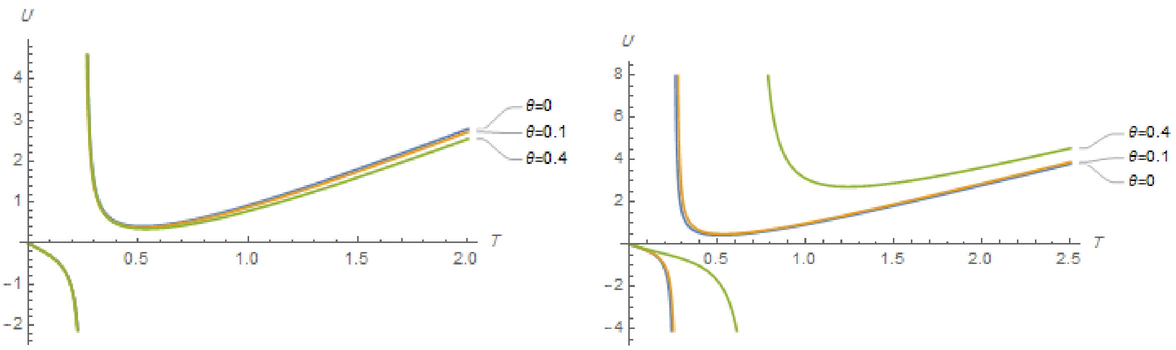
في ما يلي نوضح جميع الخصائص الترموديناميكية كدالة لدرجة الحرارة عند قيم مختلفة من التشوه θ .



$s=+\frac{1}{2}$ $\qquad$ $s=-\frac{1}{2}$

الشكل الأول : دالة الطاقة الحرةF وفقًا لـ T لقيم مختلفة للتشوه.

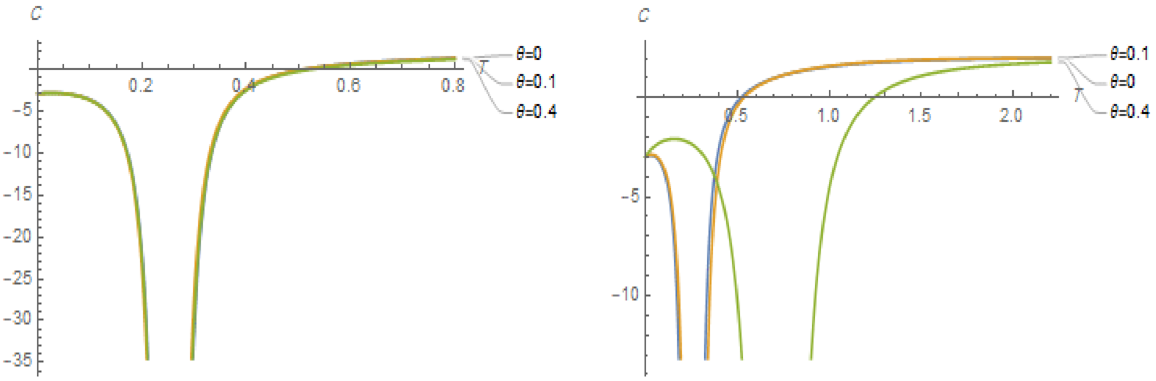
من خلال الشكل يمكن ملاحظة ان الطاقة الحرة في انخفاض في كلتا الحالتين وكذلك ان بزيادة قيمة معامل التشوه في الشكل يكون زيادة طفيفة في الطاقة الحرة على عكس الشكل وهذا من اجل قيمة معينة ل T.



$s=+\frac{1}{2}$ $\qquad$ $s=-\frac{1}{2}$

الشكل الثاني: الطاقة الداخلية U وفقًا لـ T للقيم المختلفة لقيم التشوه.

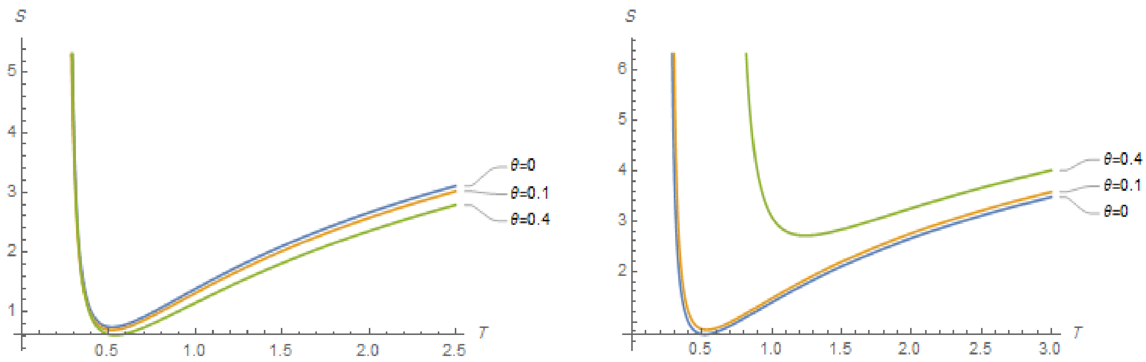
الشكل الثاني: نلاحظ ان هناك عدم استمرارية في الطاقة المتوسطة من اجل قيمة. بعدها تتزايد نسبيا كالحالة العادية للحالتين $S=\pm\frac{1}{2}$



$s=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $s=+\dfrac{1}{2}$

الشكل الثالث :دالة الحرارةالنوعيةC وفقًا لـ T للقيم المختلفة لقيم التشوه.

من خلال الشكل الثالث نلاحظ انخفاض في السعة الحرارية ثم زيادة لتثبت بعدها كالحالة العادية من اجل $\theta = 0$ أي $(C = 2k_B)$



$s=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $s=+\dfrac{1}{2}$

الشكل الرابع :الانتروبي S وفقًا لـ T للقيم المختلفة لقيم التشوه في كلتا الحالتين.

3.4. الخلاصة :

ندرس في هذا الفصل مدى تاثير هندسة غير تبديلية للفضاء على الخصائص التارموديناميكية للنظام المدروس مع إعطاء منحنيات هذه الخصائص و من خلالها نستنتج انه هناك تاثير لمعامل التشوه لهذه الدراسة.

خاتمة

في هذه المذكرة , قمنا بحل معادلة ديراك في فضاء تبادلي و غير تبادلي في مجال ميكانيك الكم النسبي باستعمال الطريقة الرياضية نيكيفورو ف -يوفاروف[U-N],إضافة الى دراسة لبعض الخصائص الديناميكية الحرارية وتاثير التشوه عليها حيث قدمنا : في الفصل الاول تذكير حول ما قام به ديراك لتحويل معادلة شرودنغر[Schrödinger]الى معادلته العامة وذلك لربط ميكانيك الكم مع النسبية الخاصة. مع توضيح منهجية الطريقة المستعملة نيكيفورو ف -يوفاروف [U-N] وشرح معنى الفضاء غير تبديلي.

في الفصل الثاني , دراستنا تتمثل في الوصول الى الحل الدقيق للمعادلة ثنائية البعد لهزاز ديراك التوافقي في غياب و وجود حقل مغناطيسي موحد من خلال إيجاد عبارة الطاقة ودالة الموجة باستعمال طريقة نيكيفورو ف -يوفاروف [U-N] .الدراسة تمت في فضاء تبديلي.

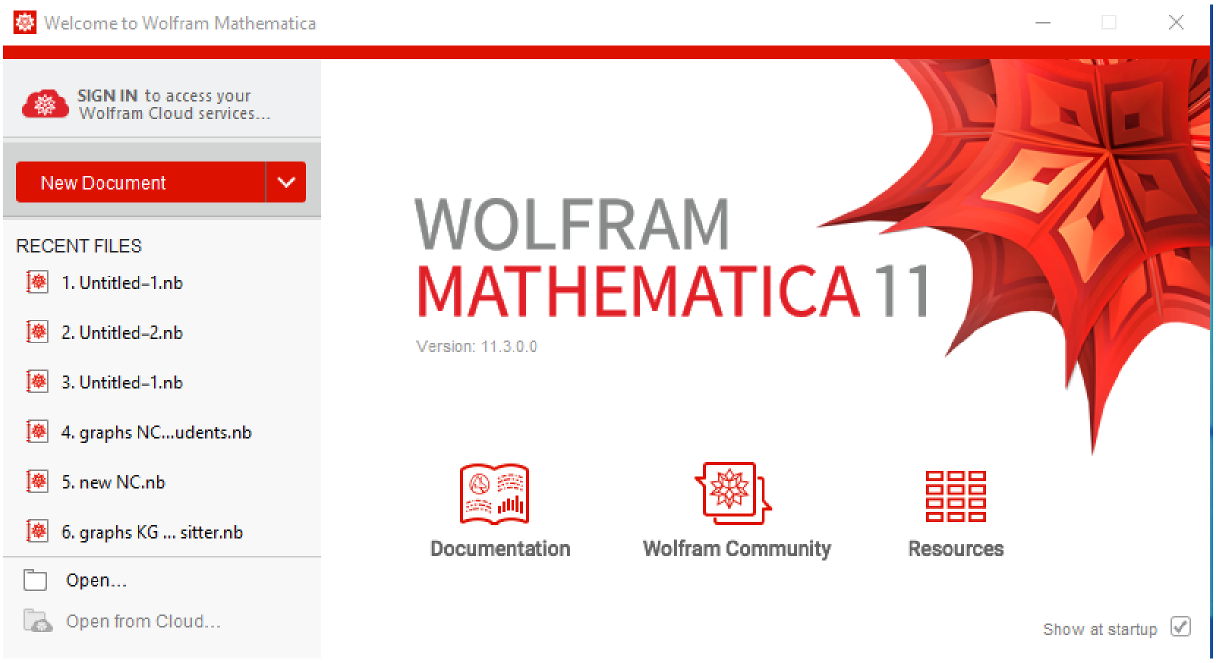
استنتاج عبارة الطاقة ودالة الموجة من اجل وجود حقل مغناطيسي فقط بوضع $\omega = 0$

في الفصل الثالث , قمنا بدراسة تحليلية لمعادلة هزاز ديراك التوافقي بوجود تأثير حقل مغناطيسي موحد في الحالة غير العادية (هندسة غير تبديلية) ، استعملنا الطريقة الرياضية نيكيفروف- يوفاروف ونحدد عبارة الطاقة ودالة الموجة . ومن جهة اخرى نستنتج دالة الموجة وعبارة الطاقة من اجل وجود حقل مغناطيسي فقط بوضع $\omega = 0$ من اجل $\tilde{\omega} = 0$ نتحصل على حلول معادلة ديراك لهزاز توافقي فقط .

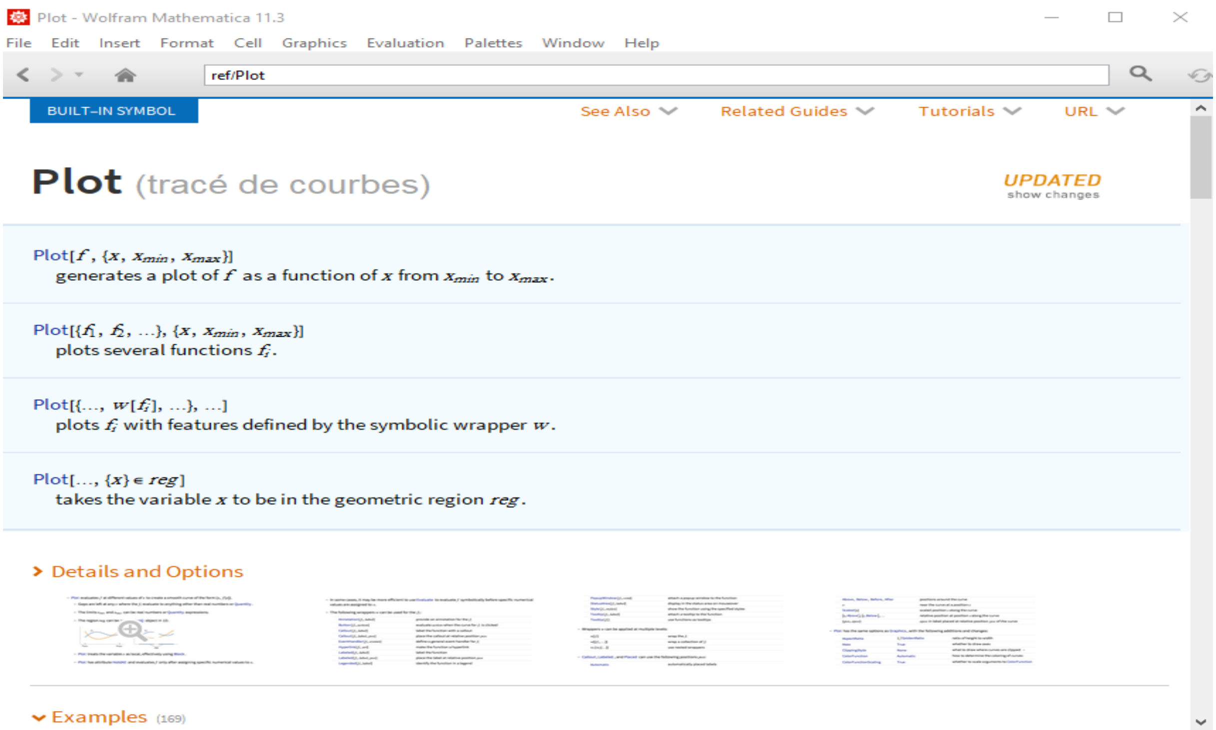
في الفصل الرابع, ندرس تأثير الهندسة غير تبديلية على الخصائص الديناميكا الحرارية للهزاز التوافقي في الفضاء غير التبديلي.، حيث نستخدم برنامج (Mathematica) لرسم المنحنيات وتم مناقشة النتائج على تقييم الدوال الديناميكية الحرارية من خلال دالة التقسيم Z .

ملحق

برنامج ماتيماتيكا 11.3 المستعمل في رسم منحنيات الدوال :



واجهة برنامج ماتيماتيكا 11.3 لرسم منحنيات الدوال



graphs NC master students.nb * - Wolfram Mathematica 11.3

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[2]:= Plot[(tracé de courbes)

$$\Bigg\{-T\,\mathrm{Log}\Bigg[\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{\left(1-2+2\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)}}{4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)}\times T+\frac{2}{4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)}\times T^2+$$

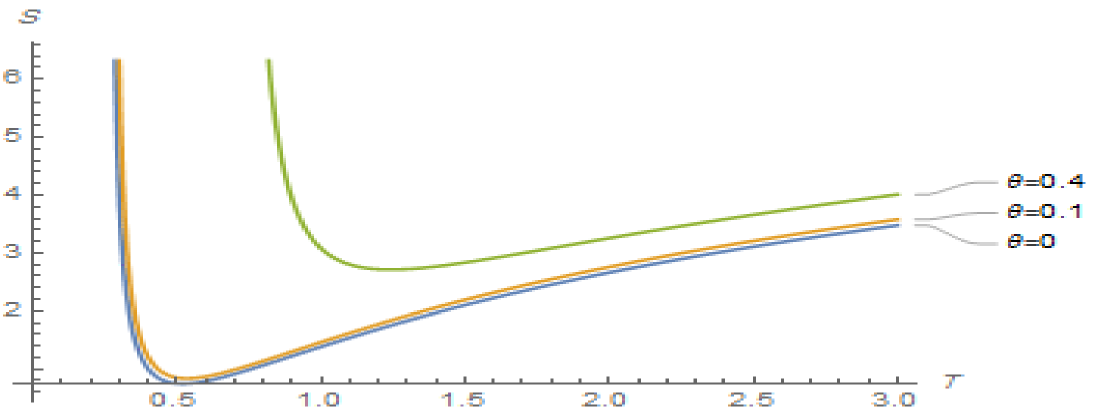
$$\left(\frac{4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)}{24\sqrt{\left(1-2+2\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)}}-\frac{\left(4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^3}{1920\sqrt{\left(1-2+2\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^5}}\right)\times\frac{1}{T}-$$

$$\frac{\left(4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^3}{1920\left(1-2+2\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^2}\times\frac{1}{T^2}-\frac{\left(4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^3}{5760\sqrt{\left(1-2+2\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{4\times137}+\frac{2\,(1)}{2\sqrt{137}}\right)(1)}-(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{137}}\right)\right)\right)^3}}\times\frac{1}{T^3}\Bigg]\Bigg]\Bigg\},\ \{T,\,0,\,1.7\},$$

(logarithme)

PlotLabels → {"θ=0"}, AxesLabel → {T, F}]
(étiquettes de tracé) (titre d'axe)

دالة مكتوبة بالبرنامج



منحنيات لدالة الانتروبي مرسومة بالبرنامج

قائمة المراجع

[1] شاء الله ,رجاء ,مفتاح, & محمد الطيب . ذرة الهيدروجين والذرات الشبيهة بها في معادلة ديراك Doctoral dissertation)

[2]. S. Jing, F. Zuo and T. Heng, Deformation quantization of noncommutative quantum mechanics, JHEP 0410 (2004) 049.

[3]. J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J.C. Rojas, Noncommutative Quantum Mechanics: The Two-Dimensional Central Field,Int. J. Mod. Phys. A 17, 2555 (2002)

[4]. J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J.C. Rojas,The Landau problem and noncommutative quantum mechanics, Mod. Phys. Lett. A 16, 2075 (2001)

[5] Rao, N. A., & Kagali, B. A. (2004). EIGENFUNCTIONS OF THE TWODIMENSIONAL MOSHINSKY–SZCZEPANIAK OSCILLATOR. *Modern Physics Letters A*, *19*(28), 2147- 2153

[6] D. Ito, K. Mori and E. Carrieri. (1967). Nuovo Cimento 51A, 1119

[7] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A. Math. Gen. 22 (1989) L817-L819.

[8] M. Moreno and A. Zentella, J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989) L821-L825.

[9] J. Benitez et al, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 14-1643.

[10] P. Strange, Relativistic Quantum Mechanics, (1998) Camb. Univ. Press.

[11] Stetsko, M. M. (2015). Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder-de SITter algebra. *Journal*. *of Mathematical Physics*, *56*(1), 012101

[12] Quesne, C., & Tkachuk, V. M. (2005). Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *38*(8), 1747.

[13] Mandal, B. P., & Rai, S. K. (2012). Noncommutative Dirac oscillator

in an external magnetic field. *Physics Letters A*, *376*(36), 2467-2470.

[14] Mirza, B., Narimani, R., & Zare, S. (2011). Relativistic Oscillators in a Noncommutative Space and in a Magnetic Field. *Communications in Theoretical Physics*, *55*(3), 405.

[15] I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products ~Academic, San Diego, (1994)

[16] Haouam, I. Dirac Oscillator in Dynamical Noncommutative Space. Preprints 2021, 202102007

[17] -I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products (Academic, New York, 1980).

الملخص

في هذا العمل ، درسنا نظام ثنائي الأبعاد هزاز ديراك التوافقي ، بدون ومع وجود حقل مغناطيسي خارجي في إطار ميكانيكا الكم النسبية غير التبديلية. أولاً ، لقد قمنا بحل النظام السابق في حالة ميكانيكا الكم العادية ، حيث تم تحديد دالة الموجة وأطياف الطاقة المرافقة لها في كل حالة. بعد ذلك، قمنا بتعميم نفس الدراسة في فضاء غير تبديلي ، حيث حددنا الحلول الدقيقة وأطياف الطاقة المرافقة لها.

أخيرًا ، درسنا تأثير التشوه المكاني للهندسة غير التبديلية على الخصائص الديناميكية الحرارية لهزاز ديراك التوافقي تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي.

كلمات مفتاحية :ميكانيك الكم النسبي ، معادلة ديراك ، هزاز توافقي ، فضاء غير تبديلي .

Abstract :

In this work, we studied the two-dimensional system of Dirac's harmonic oscillator, with and without a magnetic field external within the framework of non-commutative relativistic quantum mechanics. First, we have solved the system in question in the case of ordinary quantum mechanics, where the corresponding wave functions and energy spectra have been determined in each case. Then, we generalized the same study in a noncommutative space, where we determined the exact solutions and the corresponding energy spectra.

Finally, we examined the effect of the spatial deformation of non-commutative geometry on the thermodynamic properties of a harmonic oscillator under the influence of an external magnetic field.

Keywords: Relativistic quantum mechanics, Dirac equation, Harmonic oscillator, non commutative space

Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié le système bidimensionnel de l'oscillateur harmonique de Dirac, avec et sans champ magnétique externe dans le cadre de la mécanique quantique relativiste non commutative. Premièrement, nous avons résolu le système en question dans le cas de la mécanique quantique ordinaire, où les fonctions d'onde et les spectres d'énergie correspondants ont été déterminés dans chaque cas. Ensuite, nous avons généralisé la même étude dans un espace non commutatif, où nous avons déterminé les solutions exactes et les spectres d'énergie correspondants.
Enfin, nous avons examiné l'effet de la déformation spatiale de la géométrie non commutative sur les propriétés thermodynamiques d'un oscillateur harmonique sous l'influence d'un champ magnétique externe.

Mots-clés : Mécanique quantique relativiste, équation de Dirac, oscillateur harmonique, espace non commutatif