جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
علوم المادة

مذكرة ماستر

علوم المادة
فيزياء
فيزياء المواد

رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالب:
مكسح أمال

يوم: 26/04/2018

الدراسة الكمية لمعادلة كلاين غوردن لهزاز توافقي في فضاء مشوه في إطار ميكانيك الكم النسبي

لجنة المناقشة:

مومني مصطفى	أستاذ	جامعة محمد خيضر-بسكرة	رئيس
بلعمري جمال	أ.مح أ	جامعة محمد خيضر-بسكرة	مقرر
ايدير عليان	أ.مح ب	جامعة محمد خيضر-بسكرة	مناقش

السنة الجامعية : 2020-2021

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

إلى نفسي أنا

إلى من لم أنسى يوما فضلهما طيلة حياتي "والدتي حفظها الله ورعاها ووالدي رحمه الله وأسكنه الفردوس الأعلى"

إلى زوجي الغالي "فارس" الذي منحني القوة والإرادة لإكمال مشواري الدراسي حفظك الله من كل شر

إلى ابنتي العزيزة الكتكوتة "جوري" حفظك الله وإن شاء الله أراكي في أعلى المراتب.

إلى إخوتي الذين كانو سندا لي :"حمزة و عبد المجيد وحكيم "حفظكم الله ورعاكم

إلى خالتي العزيزة والغالية على قلبي "سميرة" حفظك الله وزوجك وأولادك

إلى ابنة عمي التي شاركتني أجمل ذكرياتي طوال خمس سنين"نسرين"حفظك الله

إلى صديقاتي "مسعودة ومريم و أسماء و نادية "وفقكم الله في حياتكم

وإلى كل الأحباب دون استثناء

إلى كل من كان لي الشرف بملاقاتهم والتعرف عليهم طيلة سنوات دراستي

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل بفائق التواضع ونسأل الله أن يوفقنا في تحقيق الأماني والنجاحات.

كلمة شكر

أشكر الله تعالى على فضله الكريم لمنح العون لي في إنجاز هذا العمل ،

فالحمد لله أولا وأخيرا

كما أتقدم بجزيل الشكر إلى أستاذي المحترم بلعمري جمال الذي تفضل بالإشراف على البحث وعلى كل ما قدمه لي من مساعدة ونصائح وتوجيهات،

كما أتقدم بشكر أيضا إلى أستاذي المحترم فالق مختار على مساعدته لي لإتمام هذا العمل

كما أتقدم بشكر خاص إلى لخضر الذي قدم لي يد العون وفقك الله في شهادة الدكتوراه.

كما أود شكر أعضاء لجنة المناقشة الذين بذلوا جهد مراجعة هذا العمل المتواضع،الأستاذ مومني مصطفى الذي ترأس اللجنة والأستاذ عليان ايدير الذي تشرف بالمناقشة

أخيرا، شكرا جزيلا لجميع أفراد عائلتنا وكل من هو قريب على قلوبنا.

الفهرس

مقدمة

مقدمة

مكانيك الكم هو مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت في القرن العشرين و خلقت مصطلح (موجة جسيم) ،والتي تتمثل في الخاصية الموجية و الخاصية الجسيمية، ظهرت لتفسير الظواهر على مستوى الذرة و الجسيمات دون الذرة ، و كذلك للبحث عن الحلول الدقيقة لمعادلات الموجة في الإطار النسبي وغير النسبي.

تعد مكانيك الكم على أنها النظرية التي نتعامل بها مع الأنظمة الذرية و النووية ، تطورت هذه النظرية من خلال الميكانيك الكلاسيكية و على وجه الخصوص ميكانيك نيوتن والنظرية الكهرومغناطيسية لماكسويل[13] .

في ميكانيك الكم ،يتم وصف الحالات الديناميكية لنظام الجسيمات بواسطة دوال تسمى "دوال الموجة"[7] .

يعد الهزاز التوافقي نموذجا فيزيائيا أساسيا يحتوي على حالات مرتبطة مع طاقة غير متبقية صفرية ، وهو ما يفسر تأثير الحبس الكموني في مجال الفيزياء النووية،هذا النظام يمتلك حل تحليلي لتطوير نموذج أكثر تعقيدا،خاصة لوصف ديناميكيات الكريستال والإهتزازات الداخلية للجزيئات [14] .

الهدف من هذا العمل هو دراسة مبسطة لحل معادلة كلاين-غوردن الشعاعية أحادية وثنائية وثلاثية الأبعاد لهزاز توافقي في فضاء متشوه ،حيث اعتمدنا في هذه الدراسة على خطة تستوفي شروط العمل بكل جزئياته ، إنطلاقا من مقدمة وثلاث فصول وخاتمة على النحو التالي :

الفصل الأول

بعنوان مدخل عام حول معادلة كلاين غوردن وقد تناولنا فيه جزئين : الأول معادلة كلاين غوردن،أما الثاني فكان بعنوان هندسة التشوه.

الفصل الثاني

جاء بعنوان حل معادلة كلاين غوردن في فضاء تبادلي خصصناه للتعريف بهذه المعادلة و كذا المفاهيم المرتبطة بها وقد تناولنا فيه ثلاثة أجزاء: الأول هزاز أحادي البعد أما الثاني فكان هزاز ثنائي البعد، والثالث كان هزاز ثلاثي الأبعاد.

الفصل الثالث

والذي انطوى تحت ثلاثة اجزاء ايضا تحت عنوان حل معادلة كلاين غوردن في فضاء متشوه ، حيث تطرقنا إلى تحديد الحلول الكمية لمستويات الطاقة لنظام نسبي يصف

حركة جسيم كلاين غوردن تحت تأثير الكمون المركزي ، و في الأخير خرجنا بخاتمة كحوصلة لنتائج عملنا هذا .

لحل معادلة كلاين-غوردن نستخدم طرق رياضية يمكننا تقسيمها إلى نوعين: تحليلية وعددية حيث:

التحليلية:

وهي طريقة فصل المتغيرات التي تتمثل في البحث عن الدوال الذاتية [15] .

العددية:

هي طريقة متغيرة شبه عكسية من خلالها نحسب الطاقات و دوال الموجة المقابلة الناتجة عن طريقة فصل المتغير[7] .

الفصل الأول

الفصل الاول

مدخل عام حول معادلة كلاين-غوردن

تمهيد:

من أجل الوصول إلى فهم حقيقي لطبيعة السبين والعزم المغناطيسي نلجأ إلى الميكانيك الكمي النسبي ، يتضمن هذا الأخير نظرية الحقول الكمية ، بحيث نتعرف من خلاله على توقعات وجود الجسيمات المضادة و نظرية الإحصاء للسبين وكيفية تواجد دالة الموجة (تناظرية أو ضد تناظرية).

في النسبية الخاصة نمتلك حالتين لدراسة الميكانيك الكمي :

الحالة الأولى: لا يكون فيها إنتاج الجسيمات ، بحيث أن جسيماتها نسبية و سرعاتها ليست فائقة النسبية.

الحالة الثانية: يكون فيها إنتاج للجسيمات،بحيث أن سرعاتها فائقة النسبية وطاقاتها العالية.

1-معادلة كلاين غوردن :

هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن ، بحيث نستطيع من خلالها وصف السعة الكمومية لإيجاد الجسيم النقطي ،هذا الاخير يمكنه الإنتشار على حد سواء ، وتكون دالته الموجية نسبية ، ويعتبرها البعض طبق الأصل عن معادلة شرودينغر لكن في الحالة النسبية .

تمتلك معادلة كلاين غوردن قيمتين أحدهما موجبة و الأخرى سالبة من تردد الموجة و ثابت الموجة ، للحصول على معادلة تصف دالة الموجة نقوم بفصل قيمتي التردد الموجبة و السالبة . من المعروف ان الهزاز التوافقي غير النسبي في الفضاء غير التبديلي له سلوك في مساحة تبديلية مشابه لسلوك لاندو Landau $[1-5]$:

في هذا الجزء ندرس هذه العلاقة في الحالة النسبية يمكن تحديد الهزاز التوافقي لكلاين غوردن في فضاء ثنائي الابعاد بالمعادلة التالية :

$$C^2(\vec{P}+im\omega\vec{r})(\vec{P}-im\omega\vec{r})\psi=(\mathrm{E}^2-\mathrm{m}^2\mathrm{c}^2)\psi \qquad 1.1$$

يتم اعطاء القيم الذاتية للطاقة بواسطة :

$$E_{n_x n_y}^2 = 2\mathrm{m}c^2\hbar\omega\left(\mathrm{n_x} + \mathrm{n_y} + 1\right) + m^2c^4 - 2\mathrm{m}c^2\hbar\omega \qquad 1.2$$

الحد غير النسبي للمعادلة 1.1 يعطى بواسطة :

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right]\psi = (\varepsilon + \hbar\omega)\psi; \varepsilon = \mathrm{E} - \mathrm{mc}^2 \qquad 1.3$$

في مساحة غير تبديلية يمكننا كتابة الهزاز التوافقي لكلاين -غوردن بالمعادلة التالية :

$$C^2\left(\vec{P} + im\omega\vec{r}\right)\left(\vec{P} - im\omega\vec{r}\right)\psi = (E^2 - m^2c^2)\psi \qquad 1.4$$

وهو ما يعادل المعادلة ادناه في مساحة تبادلية :

$$\left(\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k\right)$$

$$C^2\left[\vec{P} + im\omega\left(\vec{r} + \frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right].\left[\vec{P} - im\omega\left(\vec{r} + \frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right]\psi = (\mathrm{E}^2 - \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4) \quad 1.5$$

بعد حساب مباشر نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[\left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)\left(P_x^2 + P_y^2\right) + m^2\omega^2(x^2 + y^2) - \frac{m^2\omega^2}{\hbar}\theta L_z\right]\psi =$$

$$(E^2 - m^2c^4 + 2mc^2\hbar\omega)\Psi \qquad 1.6$$

يتم اعطاء القيم الذاتية للطاقة بواسطة :

$$E_{n_x n_y m_l}^2 = 2\mathrm{m}c^2\hbar\omega_1\left(n_x + n_y + 1\right) - \left(\frac{m^2\omega^2c^2}{\hbar}\theta\right)\theta m_l + m^2c^4 - 2\mathrm{m}c^2\hbar\omega_2 \quad 1.7$$

لدينا :

$$\omega_1 = \omega\sqrt{1 + \frac{m^2\theta^2\omega^2}{4\hbar^2}} \qquad 1.8$$

يتم اعطاء الحد غير النسبي للمعادلة 1.6بواسطة :

$$\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{m\omega^2\theta^2}{8\hbar^2}\right)\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2} - \frac{m\theta\omega^2}{2}L_z\right]\psi = (\varepsilon + \hbar\omega) \qquad 1.9$$

$$\varepsilon = \mathrm{E} - \mathrm{mc}^2$$

يمكن كتابة معادلة كلاين-غوردن لجسيم في مساحة تبادلية وفي مجال مغناطيسي ثابت كالتالي :

$$C^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right).\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi = (\omega^2 - \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)\psi \qquad 1.10$$

$$\mathrm{A} = \frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2} \qquad 1.11$$

بعد حساب مباشر في مقياس كولوم :

$$C^2\left[\left(P_x^2+P_y^2\right)+\left(\frac{e^2B^2}{4c^2}\right)(x^2+y^2)-\frac{eB}{c}L_z\right]\psi \;=(\omega^2-m^2c^4)\psi \quad 1.12$$

وهو مشابه تماما للمعادلة 1.6،يمكننا توسيع هذا الفضاء الى فضاء ثلاثي الابعاد ويمكن تحديد الفضاء التبديلي من خلال المعادلة التالية :

$$C^2\left(\vec{P}+im\omega\vec{r}\right).\left(\vec{P}-im\omega\vec{r}\right)\psi=(E^2-m^2c^4)\psi \quad 1.13$$

يتم إعطاء القيم الذاتية للطاقة بواسطة :

$$E^2_{n_xn_yn_z}=2\mathrm{m}c^2\hbar\omega\left(\mathrm{n_x}+\mathrm{n_y}+\mathrm{n_z}+\frac{3}{2}\right)+m^2c^4\text{-}3\mathrm{m}c^2\hbar\omega \quad 1.14$$

في ثلاثي الابعاد ،يتم اعطاء الهزاز التوافقي لكلاين -غوردن في مساحة غير تبديلية بواسطة :

$$C^2\left(\vec{P}+im\omega\vec{r}\right).\left(\vec{P}-im\omega\vec{r}\right)\psi=(E^2-m^2c^4)\psi \quad 1.15$$

وهو ما يعادل المعادلة التالية في مساحة تبديلية :

$$C^2\left[\vec{P}+im\omega\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right].\left[\vec{P}-im\omega\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right]\psi$$
$$=(E^2-m^2c^4)\psi \quad 1.16$$

بعد حساب مباشر نتحصل على المعادلة التالية :

$$C^2\left[\left(1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)\left(P_x^2+P_y^2\right)+m^2\omega^2(x^2+y^2)-\frac{\theta m^2\omega^2}{\hbar}L_z\right]\psi=$$
$$[(\mathrm{E}^2-\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)-\mathrm{c}^2(\mathrm{P_z^2}+\mathrm{m}^2\omega^2\mathrm{z}^2-3\mathrm{m}\hbar\omega)]\Psi \quad 1.17$$

هذه المعادلة لها سلوك مشابه لديناميكيات جسيم عددي في مجال مغناطيسي ثابت في الاتجاه Zوالقيم الذاتية للطاقة يتم إعطاؤها بواسطة :

$$E^2_{n_xn_yn_zm_l}=2mc^2\hbar\omega_1\left(\mathrm{n_x}+\mathrm{n_y}+\mathrm{n_z}\right)+2\mathrm{m}c^2\hbar\omega\left(\mathrm{n_z}+\frac{1}{2}\right)-$$
$$\left(\frac{\theta\mathrm{m}^2\omega^2}{\hbar}\right)\mathrm{m_l}\hbar+\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4\text{-}3\mathrm{m}c^2\hbar\omega \quad 1.18$$

2-هندسة التشوه :

علاقات الميكانيك المشوهة:في فضاء ثلاثي البعد يتم تعريف مبدأ الشك لهايزنبارغ المشوه الذي يؤدي الى مبدأ الشك الممدد بواسطة علاقات تدعى بعلاقات التبديل،معرفة كالتالي :

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = 0 \\ [P_i, P_j] = i\hbar\tau\lambda\epsilon_{ijk}L_k \quad ,\tau = 1, +1 \\ [X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} - \tau\lambda X_i P_j) \end{cases} \qquad 1.19$$

λهو معامل التشوه وهو قيمة صغيرة جدا لانه ضمن اطار الجاذبية الكمية

يتم تعريف معامل التمدد على انه ثابت اساسي مرتبط بعامل قياس الكون الممتد ويتناسب مع الثوابت الكونية :

$$\Gamma = 3r\lambda = {}^{3r}/_{a^2} \qquad 1.20$$

هو نصف قطر دوسيتر a

L_kهو عنصر العزم الزاوي الذي يعبر عنه ب :

$$L_k = \epsilon_{ijk}X_i P_j$$

في ميكانيك الكم العادية،علاقة التبديل 1.19 تؤدي الى مبدأ عدم الشك أو عدم اليقين لهايزنبارغ:

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2}(1 - \tau\lambda(\Delta X_i)^2) \qquad 1.21$$

نضع:

$$\langle X_i \rangle = 0$$

من خلال قيمة τ نميز نوعين من جبر فضاء دوسيتر

نموذج ضد دوسيتر من أجل :

$$\tau = -1$$

يتميز هذا الجبر المشوه بوجود الحد الادنى من عدم اليقين للعزم من أجل التبسيط نفترض وجود عدم اليقين متماثل : $X_i = X$

وهذا يسمح لنا بكتابة الحد الأدنى من عدم اليقين للعزم في نموذج ضد دوسيتر:

نموذج دوسيتر من أجل : $\tau = +1$

العلاقة1.21 لا تمثل القيمة الدنيا غير صفرية من عدم اليقين المعاد قياسها في فضاء العزم.

X_i, P_iهي مؤثرات تبادلية تناسب الجبر المعادلة 1.19 مما تؤدي الى علاقة عدم اليقين المعاد قياسها في فضاء العزم1.21 ،من أجل دراسة الحلول الدقيقة لمعادلة كلاين-غوردن المشوهة.

نمثل المؤثرات التالية كدوال للمؤثر التي تفي بعلاقات التبديل العادية ويتم ذلك وفق التحويل التالي[6] :

$$\begin{cases} X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\lambda r^2}} \\ P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\partial x_i \end{cases} \qquad 1.22$$

الفصل الثاني

الفصل الثاني

حل معادلة كلاين -غوردن في فضاء عادي

تمهيد:

يعد الهزاز التوافقي ذو أهمية أساسية في الفيزياء حيث يصف تطور أي نظام فيزيائي بالقرب من موقع التوازن مما يجعله أداة تستخدم في العديد من المجالات كالكهرباء و الالكترونيات البصريات والمواد المكثفة [12] .

بينما في ميكانيك الكم ، نستطيع أن نعرف من خلال الهزاز التوافقي كيفية حل معادلة كلاين غوردن ، في هذا الفصل نقترح دراسة نظام هزاز توافقي لكلاين-غوردن أحادي البعد وثنائي البعد وثلاثي البعد في مجال ميكانيك الكم النسبية .

1-حل معادلة كلاين غوردن الشعاعية لهزاز توافقي أحادي البعد :

في هذا الجزء ، نحاول التعامل مع نظام هزاز توافقي نسبي أحادي البعد عن طريق حل معادلة كلاين-غوردن الشعاعية التي تصف حركة جسيم تحت تأثير جهد مركزي .

عبارة الكمون المركزي كالتالي :

$$V = m^2c^4 \qquad 2.1$$

معادلة كلاين غوردن للهزاز التوافقي تعطى بالشكل :

$$C^2(\vec{P} + im\omega\vec{r}).(\vec{P} - im\omega\vec{r})\Psi(r)=(E^2 - m^2c^4)\Psi \qquad 2.2$$

معادلة كلاين -غوردن لهزاز توافقي أحادي البعد تعطى بالشكل :

$$(P_x^2 + m^2\omega^2x^2)\Psi(x) = (E^2 - m^2c^4)\Psi(x) \qquad 2.3$$

لدينا :

$$P_x^2 = -\hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad 2.4$$

بالتعويض ونقل الطرف الثاني إلى الطرف الأول نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{C^2\hbar^2} + \frac{(E^2 - m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]\psi(\mathrm{x}) = 0 \qquad 2.5$$

باستخدام المختصرات التالية :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{c^2\hbar^2} \\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{cases} \qquad 2.6$$

ومنه تكتب معادلة كلاين -غوردن لأحادي البعد كالتالي :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^2}{a^4} + \alpha\right)\psi(x) = 0 \qquad 2.7$$

نقوم بتبسيط المعادلة 2.7 باستخدام التحويل التالي :

$$\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\mathrm{f}(\mathrm{x}) \qquad 2.8$$

مع المشتقات التالية :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - x\lambda f\right] \qquad 2.9$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\lambda x\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^2x^2f - \lambda f\right] \qquad 2.10$$

تتحول المعادلة 2.7 الى :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\lambda x\frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{a^4}\right)x^2 + (\alpha - \lambda)\right]f(x) = 0 \; 2.11$$

لتبسيط هذه المعادلة نقوم بتقليلها إلى فئة من المعادلات التفاضلية المعروفة بحل متعدد الحدود نهمل معامل x^2 وفقا للشروط التالية :

$$\lambda^2 - \frac{1}{a^4} = 0, \lambda = \frac{1}{\mathrm{a}^2} \quad , \lambda = \frac{\mathrm{m}\omega}{\hbar} \qquad 2.12$$

بعد تبسيط المعادلة2.11نتحصل على الشكل التالي :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{a^2}x\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha - \lambda)\right]\mathrm{f}(x) = 0 \qquad 2.13$$

نستبدل المتغير التالي :

$$\mathrm{x} = \mathrm{a}x_p, \partial\mathrm{x} = \mathrm{a}\,\partial\mathrm{x_p} \qquad 2.14$$

بالتعويض نجد :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_P^2} - 2x_p\frac{\partial}{\partial x_p} + (\alpha - \lambda)a^2\right]f(x_p) = 0 \qquad 2.15$$

لدينا :

$$\left(\alpha-\lambda\right)a^2=2n \qquad 2.16$$

ومنه نستطيع التعبير عن طيف الطاقة على الشكل التالي :

$$\mathrm{E_n}=\mathrm{mc^2}\left[1+\frac{\hbar}{\mathrm{mc^2}}(2\mathrm{n}+1)\omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 2.17$$

لدينا Polynome d′Hermite:

$$\mathrm{f}\left(x_p\right)=CH_n\left(x_p\right)=CH_n\left(\frac{x}{a}\right) \qquad 2.18$$

ومنه نستنتج دالة الموجة :

$$\psi(\mathrm{x})=\mathrm{C}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{H_n}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right) \qquad 2.19$$

. [7]C[facteur de legalisation]

2-حل معادلة كلاين -غوردن لهزاز توافقي ثنائي البعد:

معادلة كلاين-غوردن لثنائي البعد تكتب من الشكل :

$$C^2\left[\left((P_x+im\omega x)\vec{\imath}+\left(P_y+im\omega y\right)\vec{\jmath}\right).\left((P_x-im\omega x)\vec{\imath}+\left(P_y-im\omega y\right)\vec{\jmath}\right)\right]\psi(x,y)=(E^2-m^2c^4)\psi(\mathrm{x,y}) \qquad 2.20$$

بعد النشر والتبسيط نتحصل على الشكل التالي :

$$C^2\left[P_x^2+P_y^2+m^2\omega^2(x^2+y^2)-2m\omega\hbar\right]\psi(\mathrm{x,y})=(E^2-m^2c^4)\Psi(x,y) \qquad 2.21$$

لدينا :

$$P_x^2+P_y^2=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=-\hbar^2\Delta \qquad 2.22$$

لحل المعادلة 2.21 نستعمل الاحداثيات القطبية ومنه لدينا العلاقات التالية :

$$\begin{cases} x=\rho cos\varphi \\ y=\rho sin\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases} \qquad 2.23$$

مؤثر لابلاسيان في الاحداثيات القطبية يعطى من الشكل :

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad 2.24$$

بالتعويض 2.23و2.24 في2.21 نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2}+\frac{2m\omega}{\hbar}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]\psi(r,\varphi)=0 \qquad 2.25$$

لحل هذه المعادلة نستعمل طريقة فصل المتغيرات :

$$\psi(\rho,\varphi)=R(\rho)\phi(\varphi) \qquad 2.26$$

بالتعويض في 2.25 نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\rho^2\frac{1}{R(\rho)}\left(\frac{\partial^2R(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right)+\rho^2\left(\frac{2m\omega}{\hbar}-\frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right)=-\frac{1}{\phi(\varphi)}\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=m_l^2 \qquad 2.27$$

المعادلة الشعاعية في الطرف الاول ومعادلة الزاوية في الطرف الثاني .

معادلة الزاوية :

$$\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+m_l^2\phi(\varphi)=0 \qquad 2.28$$

m_l هو ثابت التفرقة

حل المعادلة 2.28 يعطى من الشكل :

$$\phi(\varphi)=Ae^{im_l\varphi} \qquad 2.29$$

حل المعادلة الشعاعية :

$$\frac{\partial^2R(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}+\left[\frac{2m\omega}{\hbar}-\frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]R(\rho)=\frac{l(l+1)}{\rho^2}R(\rho) \qquad 2.30$$

لدينا التحويلات التالية :

$$\begin{cases} R(\rho) = \frac{1}{\rho} f(\rho) \\ \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - \frac{f(\rho)}{\rho}\right) \\ \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \frac{2f(\rho)}{\rho^2}\right) \end{cases} \quad 2.31$$

بتعويض هذه التحويلات في 2.30 نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left[\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{l(l+1)}{4}\right] f(\rho) = 0 \quad 2.32$$

بحيث :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{c^2\hbar^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} \\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{cases} \quad 2.33$$

لحل المعادلة التفاضلية 2.32 نستخدم التحويل التالي :

$$\mathrm{f}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^k w(\rho) \quad 2.34$$

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^k \left[\frac{\partial w(\rho)}{\partial \rho} + \left(\frac{k}{\rho} - \frac{1}{2}\right) W(\rho)\right] \quad 2.35$$

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^k \left[\frac{\partial^2 w(\rho)}{\partial \rho^2} + \left(\frac{2k}{\rho} - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial w(\rho)}{\partial \rho} + \left(\frac{k^2 - k}{2} - \frac{k}{\rho} + \frac{1}{4}\right) w(\rho)\right] \quad 2.36$$

بتعويض 2.34و2.35و2.36 نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left[\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(2k - \rho + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{k}{2} - \frac{l(l+1)}{4}\right)\frac{1}{\rho} + n\right] w(\rho) = 0 \quad 2.37$$

بحيث :

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - k \quad 2.38$$

يمكننا تحديد قيمة الثابت :

k من خلال حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية المعرفة كالتالي :

$$4k^2 - 2k - l(l+1) = 0 \quad 2.39$$

حلها يعطينا الجذرين التاليين :

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1), k_2 = -\frac{l}{2} \quad 2.40$$

نختار القيمة الموجبة :

k_1

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{1}{2}(l+1) \qquad 2.41$$

ومنه يمكننا الحصول على عبارة طيف الطاقة كالتالي :

$$E_{n,l} = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + \frac{2\hbar}{mc^2}(2n+l+1)\omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 2.42$$

إيجاد دالة الموجة لدينا :

:Polynome hypergeometrique

$$\mathrm{w}(\rho) = c''\mathrm{F}\left(n, l, \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right) \qquad 2.43$$

ولدينا أيضا العبارتين التاليتين :

$$\mathrm{f}(r) = c''e^{-\frac{\rho^2}{2a^2}}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k}\mathrm{F}\left(n, l, \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right) \qquad 2.44$$

$$\mathrm{R}(r) = \frac{c''}{a^{2k}}e^{-\frac{\rho^2}{2a^2}}\rho^{(2k-1)}\mathrm{F}\left(n, l, \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right) \qquad 2.45$$

وفي الأخير نتحصل على دالة الموجة على الشكل التالي :

$$\psi(\mathrm{r},\varphi) = \frac{\mathrm{c}''}{\mathrm{a}^{2\mathrm{k}}}e^{-\frac{\rho^2}{2a^2}}\rho^{(2\mathrm{k}-1)}\mathrm{F}\left(n, l, \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\phi(\varphi) \qquad 2.46$$

1-2 حل معادلة كلاين غوردن في وجود حقل مغناطيسي :

معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي في وجود حقل مغناطيسي تعطى [11] :

$$C^2\left(P - \frac{e}{c}A + im\omega r\right).\left(P - \frac{e}{c}A - im\omega r\right)\psi(r) =$$

$$(E^2 - m^2c^4)\psi(r) \qquad 2.47$$

بحيث :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\times\mathrm{r} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \qquad 2.48$$

نستطيع كتابة المعادلة من الشكل :

$$C^2(P^+.P^-)\psi(r) = (E^2 - m^2c^4)\psi(r) \qquad 2.49$$

بحيث :

$$P^{\pm} = P' \pm \mathrm{i}m\omega, P' = \mathrm{P} - \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{c}}\mathrm{B}\times r \qquad 2.50$$

بعد حساب مباشر نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[P^2 + \left(m^2\omega^2 + \frac{e^2B^2}{4c^2}\right)r^2 - 2m\omega\hbar - \frac{eB}{c}l_z - \frac{(E^2 - m^2c^4)}{c^2}\right]\psi(r)$$
$$= 0 \qquad 2.51$$

للحصول على حل دقيق للمعادلة 2.51 نستخدم الاحداثيات القطبية في المساحة(r,φ)

ونكتب الحل في شكل منفصل يحتوي على الرقم الكمي l :

$$\psi(\mathrm{r},\varphi)=e^{il\varphi}\mathrm{R}(r), l = 0,1,2, \dots \dots . \qquad 2.52$$

ومنه تتحول المعادلة2.51 الى معادلة من الشكل :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(m^2\omega^2 + \frac{e^2B^2}{4c^2}\right)\frac{r^2}{\hbar^2} + \frac{(E^2-m^2c^4)}{\hbar^2c^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{eBl_z}{c\hbar}\right]R(r) = 0 \qquad 2.53$$

باستخدام المختصرات التالية نقوم بحل المعادلة 2.53 :

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = \sqrt{\left(\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{eB}{2mc\hbar}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} + \frac{e^2B^2}{4m^2c^2\hbar^2}} \\ \alpha = \frac{(E^2-m^2c^4)}{\hbar^2c^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{eBl}{c\hbar} \end{cases} \qquad 2.54$$

لدينا(من حل معادلة كلاين-غوردن لثنائي البعد) :

$$\mathrm{n} = \frac{\alpha\mathrm{a}^2}{4} - \mathrm{k} \qquad 2.55$$

بحل المعادلة التفاضلية التالية نقوم بتحديد قيمة الثابت k :

$$4\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{k} - \mathrm{l}(\mathrm{l} + 1) = 0 \qquad 2.56$$

حلها يعطينا الجذرين التاليين مع اختيار القيمة الموجبة لحل المعادلة 2.56 :

$$k_1=\frac{1}{2}(l + 1), k_2 = -\frac{k}{2} \qquad 2.57$$

بالتعويض في 2.55 نجد :

$$\mathrm{n} = \frac{\alpha}{4}\mathrm{a}^2 - \frac{1}{2}(l + 1) \qquad 2.58$$

ومنه يمكننا الحصول على عبارة طيف الطاقة لهزاز توافقي في وجود حقل مغناطيسي من الشكل التالي :

$$E_{n,l} = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + \frac{2\hbar}{mc^2}\left\{(2n + l + 1)\sqrt{\omega^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2c^2}} + \frac{eB}{2mc}l\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 2.59$$

نضع :

$$\varpi = \frac{\mathrm{eB}}{2\mathrm{mc}} \qquad 2.60$$

ومنه تصبح معادلة طيف الطاقة من الشكل :

$$E_{n,l} = \pm mc^2 \left[1 - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + \frac{2\hbar}{mc^2}\left\{(2n + l + 1)\sqrt{\omega^2 + \varpi^2} + \varpi l\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 2.61$$

إيجاد دالة الموجة :

صيغة Rodrigues :

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [(1 - s^2)^n \rho(s)] \qquad 2.62$$

كثيرحدود Jacobi :

$$y_n(s) = P_n^{(l,1)}(s) \qquad 2.63$$

و:

$$\mathrm{f(s)} = \mathrm{C_n}(1 - \mathrm{s})^{\frac{l}{2}} \mathrm{P_n^{(l,1)}} \qquad 2.64$$

ومنه عبارة دالة الموجة كالتالي :

$$\psi(\mathrm{r}, \varphi) = \mathrm{C_n} e^{\mathrm{il}\varphi} 2^{\frac{l}{2}} \mathrm{P_n^{(l,1)}} \qquad 2.65$$

بحيث :

$$C_n = \sqrt{\frac{\lambda\, n!\left(2n+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}{2^l \pi \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+l+1)}} \qquad 2.66$$

بالتعويض في 2.65 نتحصل على دالة الموجة [8] .

3-حل معادلة كلاين -غوردن لهزاز توافقي ثلاثي البعد :

نقوم بدراسة نظام هزاز توافقي ثلاثي الابعاد من خلال حل معادلة كلاين -غوردن التي تصف حركة جسيم خاضع لكمون مركزي .

معادلةكلاين-غوردن في فضاء ثلاثي الابعاد تكتب على الشكل :

$$C^2\Big[\{(P_x + im\omega x)\vec{\imath} + (P_y + im\omega y)\vec{\jmath} + (P_z + im\omega z)\vec{k}\}.\{(P_x - im\omega x)\vec{\imath} + (P_y - im\omega y)\vec{\jmath} + (P_z - im\omega z)\vec{k}\}\Big]\psi(x,y,z) = (E^2 - m^2c^4)\psi(x,y,z) \qquad 2.67$$

بعد حساب مبسط نتحصل على معادلة من الشكل :

$$C^2\left[P_x^2+P_y^2+P_z^2+m^2\omega^2(x^2+y^2+z^2)-3m\omega\hbar\right]\psi(x,y,z)=$$
$$(E^2-m^2c^4)\psi(x,y,z) \qquad 2.68$$

لدينا :

$$P_x^2+P_y^2+P_z^2=-\hbar^2\Delta \qquad 2.69$$

بالتعويض ونقل الطرف الثاني الى الطرف الاول نتحصل على المعادلة صفرية من الشكل :

$$\left[\Delta-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}+\frac{3m\omega}{\hbar}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]\psi(x,y,z)=0 \qquad 2.70$$

1-3:دراسة معادلة كلاين-غوردن في الإحداثيات الكروية :

من اجل تحديد دالة الموجة لجسيم يتحرك في حقل متماثل كروي يجب علينا حل معادلة كلاين غوردن التالية :

$$\left[\Delta-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}+\frac{3m\omega}{\hbar}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]\psi(x,y,z)=0 \qquad 2.71$$

$\hbar$هو ثابت بلانك

m هي كتلة الجسم

$v(r)=m^2c^4$ هي الطاقة الكامنة

Δ هو مؤثر لابلاسيان

نظرا لان كمون المعادلة 2.71 يعتمد فقط على المسافة هذا يشير الى انه يمكننا تمثيل الإحداثيات الكروية بدلا من الإحداثيات الديكارتية .

$$\psi(r)\longrightarrow\psi(x,y,z)\longrightarrow\psi(r,\theta,\varphi) \qquad 2.72$$

لهذا نقوم بالتذكير بالعلاقة بين التمثيلين من خلال التعريفات التالية :

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ 0\le r\le\infty \\ \varphi=tan^{-1}\left({}^{y}/_{x}\right);\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ \theta=cos^{-1}\left({}^{2}/_{r}\right);\ 0\le\theta\le\pi \end{cases} \qquad 2.73$$

يأخذ لابلاسيان في الإحداثيات الكروية الشكل التالي :

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad 2.74$$

نعوض 2.74 في 2.71 نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi)+$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\left[3m\omega\hbar-m^2\omega^2r^2+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi)=0 \qquad 2.75$$

1.1.4:طريقة فصل المتغيرات1

باستعمال طريقة فصل المتغيرات نقوم بحل المعادلة 2.75 :

كتابة دالة الموجة على الشكل التالي :

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Upsilon(\theta,\varphi) \qquad 2.76$$

نعوض دالة الموجة الجديدة نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left[\Upsilon(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]R(r)+$$

$$R(r)\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Upsilon(\theta,\varphi)+\left[\frac{1}{\hbar^2}\left\{3m\omega\hbar-m^2\omega^2r^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right\}\right]R(r)\Upsilon(\theta,\varphi)=0 \qquad 2.77$$

بتبسيط المعادلة 2.75 نتحصل على الشكل التالي :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{\hbar^2}\left[3m\omega\hbar-m^2\omega^2r^2+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right]=$$

$$-\frac{1}{\Upsilon(\theta,\varphi)sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Upsilon(\theta,\varphi) \qquad 2.78$$

الطرف الايسر يعتمد على(r) والطرف الايمن يعتمد على(θ,φ) ومنه نستطيع ان نعرف الطرفان بثابت :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\left[\frac{r^2}{\hbar^2}\left\{3m\omega\hbar-m^2\omega^2r^2+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right\}\right]R(r)=$$

$$l(l+1)R(r) \qquad 2.79$$

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Upsilon(\theta,\varphi)=\lambda^2 \qquad 2.80$$

نسمي المعادلة 2.79 بالمعادلة الشعاعية ونسمي المعادلة 2.80 بمعادلة الزاوية بحيث نلاحظ ان حل المعادلة الشعاعية يعتمد على اختيار الكمون المركزي بينما معادلة الزاوية هي معادلة عالمية صالحة لجميع الكمون المركزي .

عند تبسيط المعادلة 2.79 نتحصل على :

$$\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\frac{3m\omega\hbar+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0 \qquad 2.81$$

لتبسيط شكل المعادلة 2.79 نستعمل التحويلات التالية :

$$\begin{cases} R(r) = \frac{1}{r} f(r) \\ \frac{\partial R(r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{f(r)}{r}\right) \\ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{2f(r)}{r^2}\right) \end{cases} \quad 2.82$$

بتعويض 2.82 في 2.81 نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left\{\frac{3m\omega\hbar + \frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}}{\hbar^2}\right\} - \frac{m^2\omega^2 r^2}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f(r) = 0 \quad 2.83$$

نقوم بوضع المتغير التالي :

$$\rho = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad 2.84$$

وباستخدام المختصرات التالية :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\hbar^2}\left\{3m\omega\hbar + \frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right\} \\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{cases} \quad 2.85$$

وبتعويض التحويلات التالية :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{2r}{a^2} f(\rho) + \frac{r^2}{a^2}\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} = \frac{2}{r^2}\left(2\rho\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \end{cases} \quad 2.86$$

تصبح المعادلة 2.83 من الشكل :

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{l(l+1)}{4\rho} - \frac{\rho}{4}\right] f(\rho) = 0 \quad 2.87$$

لحل هذه المعادلة التفاضلية نستخدم التحويل التالي :

$$\begin{gathered} f(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k w(\rho) \\ \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k\left[\frac{\partial w(\rho)}{\partial \rho} + \left(\frac{k}{\rho} - \frac{1}{2}\right) w(\rho)\right] \\ \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k\left[\frac{\partial^2 w(\rho)}{\partial \rho^2} + \left(\frac{2k}{\rho} - 1\right)\frac{\partial w(\rho)}{\partial \rho} + \left(\frac{k^2-k}{2} - \frac{k}{\rho} + \frac{1}{4}\right) w(\rho)\right] \end{gathered} \quad 2.88$$

بتعويض هذه التحويلات نجد :

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(2k - \rho + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{k}{2} - \frac{l(l+1)}{4}\right)\frac{1}{\rho} + n\right] w(\rho) = 0 \quad 2.89$$

بحيث :

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - k - \frac{1}{4} \quad 2.90$$

من خلال حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية التالية يمكننا تحديد قيمة الثابت k :

$$4k^2 - 2k - l(l+1) = 0 \qquad 2.91$$

حلها يعطينا الجذرين التاليين :

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1), \qquad k_2 = -\frac{l}{2} \qquad 2.92$$

نختار القيمة الموجبة وبالتعويض في 2.90 نجد :

$$n = \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{1}{2}(l+1) - \frac{1}{4} \qquad 2.93$$

ومنه يمكننا الحصول على عبارة طيف الطاقة كالتالي :

$$E_{n,l} = \pm[2m\omega\hbar c^2(2n+l) + m^2c^4]^{\frac{1}{2}} \qquad 2.94$$

الان يمكننا حل المعادلة 2.89 رياضيا باستخدام كثير حدود التالي يعطي لنا حل دقيق من الشكل:
Polynome hypergeometrique

$$w(\rho) = c'F(n, l, \rho) \qquad 2.95$$

من خلال هاته المعادلة يمكننا إعادة كتابة المعادلة 2.88 على الشكل التالي :

$$f(r) = c'e^{-\frac{r^2}{2a^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} F\left(n, l, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \qquad 2.96$$

بتعويض هاته المعادلة الأخيرة في 2.82 نتحصل على عبارة دالة الموجة الشعاعية النهائية من الشكل التالي :

$$R(r) = \frac{c'}{a^{2k}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{(2k-1)} F\left(n, l, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \qquad 2.97$$

في الاخير نجد دالة الموجة على الشكل التالي :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{c'}{a^{2k}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{(2k-1)} F\left(n, l, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \Upsilon(\theta, \varphi) \qquad 2.98$$

حل معادلة الزاوية :

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \lambda^2\right]\Upsilon(\theta, \varphi) = 0 \qquad 2.99$$

لحل هاته المعادلة نستخدم طريقة فصل المتغيرات :

$$\Upsilon(\theta, \varphi) = T(\theta)F(\varphi) \qquad 2.100$$

بتعويض 2.98 في 2.97 نتحصل على المعادلة التالية :

$$F(\varphi)\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{T(\theta)}{F(\varphi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} + \lambda^2 T(\theta)F(\varphi) = 0 \qquad 2.101$$

عند التبسيط نجد :

$$\frac{sin^2\theta}{T(\theta)}\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2 sin^2\theta = -\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} \qquad 2.102$$

يعتمد الطرف الايسر علىθ والطرف الايمن يعتمد علىφ ومنه نستطيع ان نعرف الطرفان بثابت يدعى بثابت التفرقة :

$$\varphi\begin{cases}\frac{sin^2\theta}{T(\theta)}\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2 sin^2\theta = m^2 \\ -\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} = m^2\end{cases} \qquad 2.103$$

بتبسيط المعادلتين نتحصل على :

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m^2}{sin^2\theta}+\lambda^2\right)T(\theta)=0 & 2.104\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+m^2\right)F(\varphi)=0 & 2.105\end{cases}$$

نقترح حلا للمعادلة 2.105 من الشكل التالي :

$$\mathrm{F}(\varphi)=\mathrm{A}e^{-im\varphi}$$

2.106

حل المعادلة الأخيرة من الشكل :

$$\mathrm{T}(\theta)=\mathrm{AP}_l^m(\cos\theta)$$

2.107

P_l^mهي معادلة

Le gendre associee

lهو عدد صحيح

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|}P_l(x) \qquad 2.108$$

P_l Le gendre يتم تعريفه بواسطة صيغة Rodrigues

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l \qquad 2.109$$

في الأخير نستطيع أن نسمي الجزء الزاوي لدالة الموجة بالتوافقيات الكروية .

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=AP_l^m(cos\theta)e^{im\varphi} \qquad 2.110$$

نفرض شرط التنظيم لايجاد A :

$$\iint_0^\pi sin\theta d\theta|Y_l^m(\theta,\varphi)|^2=1 \qquad 2.111$$

$$\mathrm{A}=\epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} \qquad 2.112$$

ومنه :

$$P_l^m(\theta,\varphi)=\epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(cos\theta)e^{im\varphi} \qquad 2.113$$

مع :

$$\begin{cases}(-1)^m & m\geq 0\\ 1 & m\leq 0\end{cases} \qquad 2.114$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث

حل معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي مشوه

تمهيد :

في هذا الفصل ندرس تأثير الفضاء المشوه على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية في إطار ميكانيك الكم النسبية ، في حالة معادلة كلاين -غوردن الشعاعية لهزاز توافقي في فضاء أحادي البعد وثنائي البعد وثلاثي الابعاد .

1-حل معادلة كلاين-غوردن الشعاعية لهزاز توافقي أحادي البعد :

معادلة كلاين -غوردن للهزاز التوافقي تعطى بالشكل :

$$c^2\{(\widehat{P_x}+im\omega\hat{x})(\widehat{P_x}-im\omega\hat{x})\}\psi(x)=(E^2-m^2c^4)\psi(x) \qquad 3.1$$

باستخدام التحول الكموني التالي :

$$\begin{cases} \widehat{x_i}=\frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda\zeta^2}} \\ \widehat{P_i}=-i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda\zeta^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases} \qquad 3.2$$

حلول فضاء ضد دوسيتر من اجل :

$$\tau=-1$$

$$\begin{cases} \widehat{x_i}=\frac{x_i}{\sqrt{1-\lambda x^2}} \\ \widehat{P_i}=-i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases} \qquad 3.3$$

نجد :

$$\begin{cases} x^2=x.x=\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda x^2}}\right).\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda x^2}}\right) \\ P^2=P.P=\left(-i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right).\left(-i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \end{cases} \qquad 3.4$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{(1-\lambda x^2)} \\ P^2 = \lambda x\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} - \hbar^2(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases} \qquad 3.5$$

ومنه :

$$c^2\{P_x^2 + m^2\omega^2 x^2 + m^2c^2\}\psi(x) = E^2\psi(x) \qquad 3.6$$

نعوض 3.5 في 3.6 نجد [16] :

$$c^2\left\{\lambda x\hbar^2\frac{\partial}{\partial x} - \hbar^2(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\omega^2\left(\frac{x^2}{1-\lambda x^2}\right) + m^2c^2\right\}\psi(x) = E^2\psi(x) \qquad 3.7$$

$$\left\{\lambda x\hbar^2\frac{\partial}{\partial x} - \hbar^2(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\omega^2\left(\frac{x^2}{1-\lambda x^2}\right) + m^2c^2\right\}\psi(x) = \frac{E^2}{c^2}\psi(x) \qquad 3.8$$

$$\left\{(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\lambda}\left(\frac{\lambda x^2}{1-\lambda x^2}\right) - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)\right\}\psi(x) = 0 \qquad 3.9$$

من اجل حل 3.9 نستخدم التغير التالي :

$$\sqrt{\lambda x} = sin(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}sin(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \rho} = cos(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{cos(\sqrt{\lambda}\rho)} \qquad 3.10$$

ولدينا المشتقات التالية :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{cos(\sqrt{\lambda}\rho)}.\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \qquad 3.11$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{cos^2(\sqrt{\lambda}\rho)}\left[\sqrt{\lambda}tan(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right] \qquad 3.12$$

بتعويض 3.11و3.12 في 3.9 نتحصل على معادلة صفرية من الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\lambda}tan^2(\sqrt{\lambda}\rho)\psi+\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)\psi=0 \qquad 3.13$$

الان نستخدم المتغيرات التالية :

$$\begin{cases}U=sin(\sqrt{\lambda}\rho)\\V=cos(\sqrt{\lambda}\rho)\end{cases} \qquad 3.14$$

مع المشتقات التالية :

$$\begin{cases}\partial U=\sqrt{\lambda}cos(\sqrt{\lambda}\rho)\partial\rho\\\partial V=-\sqrt{\lambda}sin(\sqrt{\lambda}\rho)\partial\rho\end{cases} \qquad 3.15$$

لتبسيط المعادلة 3.13 نستخدم التحويل التالي :

$$\psi(\rho)=V^s f(u) \qquad 3.16$$

والمشتقات التالية :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\sqrt{\lambda}V^s\left[V\frac{\partial f}{\partial U}-S\frac{U}{V}f\right] \qquad 3.17$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}=\lambda V^s\left[V^2\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}-(2s+1)U\frac{\partial f}{\partial U}+s(s-1)\frac{U^2}{V^2}f-sf\right] \qquad 3.18$$

بتعويض المعادلة 3.18 في 3.13 نجد :

$$\lambda V^s\left[V^2\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}-(2s+1)U\frac{\partial f}{\partial U}+s(s-1)\frac{U^2}{V^2}f-sf-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}.\frac{U^2}{V^2}f+\left(\frac{1}{\lambda\hbar^2}\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)-s\right)\right]=0 \qquad 3.19$$

مع:

$$\Rightarrow V^2\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}-(2s+1)U\frac{\partial f}{\partial U}+\left[s(s-1)-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}\right]\frac{U^2}{V^2}f+\left[\frac{1}{\lambda\hbar^2}\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)-s\right]f=0 \qquad 3.20$$

ومن جهة أخرى لدينا كثير حدود : polynome de Gegenbaues

$$(1-U^2)\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}-(2s+1)U\frac{\partial f}{\partial U}+n(n+2s)f=0 \qquad 3.21$$

بمطابقة المعادلة 3.20 و 3.21 نجد :

$$\left[\frac{1}{\lambda\hbar^2}\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)-s\right]=n(n+2s) \qquad 3.22$$

$\frac{U^2}{V^2}$هو كثير حدود

$$\Rightarrow\left[s(s-1)-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}\right]f=0\Rightarrow s^2-s-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}=0 \qquad 3.23$$

يمكننا تحديد قيمة الثابت :

sمن خلال حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية 3.23 بحيث حلها يعطينا الجذرين التاليين:

$$\begin{cases} s_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} \\ s_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} \end{cases} \qquad 3.24$$

من المعادلة 3.22 نجد:

$$E=\pm\sqrt{\lambda c^2\hbar^2[n^2+2ns+s]+m^2c^4} \qquad 3.25$$

بتعويض قيمتي S_1, S_2 نتحصل على :

$$E^2 = \lambda c^2\hbar^2\left[n^2 + n \pm n\sqrt{1 + 4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}}\right] + m^2c^4 \qquad 3.26$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}^2 = \left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)[\hbar^4\lambda^2\mathrm{c}^4 + 4\hbar^2\mathrm{c}^4\mathrm{m}^2\omega^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda\mathrm{c}^2\hbar^2\left[\left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4 \qquad 3.27$$

ومنه نتحصل على عبارة طيف الطاقة لهزاز توافقي مشوه أحادي البعد كالتالي :

$$.E_n = mc^2\left[1 + \frac{\hbar}{mc^2}\left\{(2n+1)\sqrt{\left(\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2} + \frac{\lambda\hbar}{2m}\left[2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2m}\right]\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 3.28$$

وفي الأخير الحل الدقيق لمعادلة كلاين-غوردن الشعاعية لهزاز توافقي يمكن التعبير عنه بواسطة كثير حدود Gegenbauer :

$$\psi(\rho) = \mathrm{V}^s\mathrm{f}(\mathrm{U}) \Rightarrow \psi(\rho) = (1 - \mathrm{U}^2)^{\frac{s}{2}}\mathrm{f}(\mathrm{U}) \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{U}) = \mathrm{c}_\mathrm{n}^{(s)}(\mathrm{v}) \qquad 3.29$$

ومنه نستنتج عبارة دالة الموجة كالتالي :

$$\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{NV}^s\mathrm{f}(\mathrm{U}) = \mathrm{NV}^s\mathrm{c}_\mathrm{n}^{(s)}(\mathrm{v}) \qquad 3.30$$

$$\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{N}(1 - \mathrm{U}^2)^{\frac{s}{2}}\mathrm{c}_\mathrm{n}^{(s)}(\mathrm{v}) \qquad 3.31$$

N هو التقنيين

facteur de legalisation

مع :

$$C_0^{(s)}(v) = 1, C_1^{(s)}(v) = 2sv \qquad 3.32$$

$$C_n^{(s)}(v) = \frac{1}{n}\left[2v(n+s-1)C_{n-1}^{(s)}(v) - (n+2s-2)C_{n-2}^{(s)}(v)\right] \qquad 3.33$$

2-حل معادلة كلاين-غوردن الشعاعية لهزاز توافقي ثنائي الابعاد :

معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي ثنائي الابعاد في فضاء عادي :

$$C^2[P^2 + m^2\omega^2 r^2 - 2m\omega\hbar]\psi(\mathrm{r}) = (\mathrm{E}^2 - \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)\psi(\mathrm{r}) \qquad 3.34$$

حلول فضاء ضد دوسيتر من أجل :

$$\tau = -1$$

$$\begin{cases} X^2 = \frac{r^2}{1-\lambda r^2} \\ P^2 = -\hbar^2\Delta(1-\lambda r^2) \end{cases} \qquad 3.35$$

بتعويض 3.35 في 3.34 نجد :

$$\left[-\hbar^2\Delta(1-\lambda r^2) + \frac{1}{a^4}\frac{r^2}{1-\lambda r^2} + i\hbar\lambda(r.p) - \alpha\right]\psi(r) = 0 \qquad 3.36$$

باستخدام المختصرات التالية :

$$\begin{cases} \frac{1}{a^4} = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} - \frac{\lambda m\omega}{\hbar} \\ \alpha = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{\hbar^2c^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} \end{cases} \qquad 3.37$$

للحصول على حل دقيق للمعادلة 3.36 نستخدم الاحداثيات القطبية في المساحة

(r,φ)ونكتب الحل في شكل منفصل يحتوي على الرقم الكمي

l

$$\psi(\mathrm{r},\varphi) = e^{-il\varphi}\mathrm{R}(\mathrm{r}), \mathrm{l} = 0,1,2,\ldots \qquad 3.38$$

ومنه تتحول المعادلة 3.36 الى الشكل التالي :

$$\left[(1-\lambda r^2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\lambda r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}(1-\lambda r^2)-\frac{1}{a^4}\frac{r^2}{\hbar^2(1-\lambda r^2)}+\alpha\right]R(r)=0 \qquad 3.39$$

لحل هذه المعادلة 3.39 نستخدم التغيير التالي :

$$R(\rho)=\rho^{\mu}g(\rho), \rho=\sqrt{1-\lambda r^2} \qquad 3.40$$

ومنه تتحول المعادلة 3.39 الى الشكل التالي :

$$\left[(1-\rho^2)\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+2\left(\frac{\mu}{\rho}-(\mu+1)\rho\right)\frac{\partial}{\partial \rho}-\frac{l(l+1)\rho^2}{(1-\rho^2)}+\frac{\alpha}{\lambda}-2\mu\right]g(\rho)=0 \qquad 3.41$$

لدينا المعادلة التالية :

$$\mu(\mu-1)-\frac{1}{a^4\lambda^2\hbar^2}=0 \qquad 3.42$$

حل هاته المعادلة يعطى بواسطة :

$$\mu=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a^4\lambda^2\hbar^2}} \qquad 3.43$$

نضع: $\rho=0,1,-1$

ومن جهة أخرى لدينا كثير الحدود التالي jacobi :

$$\left\{(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+[(b-a)-(a+b+2)z]\frac{\partial}{\partial z}+n(n+a+b+1)\right\}f=0 \qquad 3.44$$

يعطي الحل الدقيق التالي :

$$g(z) = P_n^{(a,b)}(z) \tag{3.45}$$

بمطابقة كثير الحدود مع المعادلة 3.41 نجد :

$$\begin{cases} b - a = \frac{\mu}{2\rho} \\ a + b + 2 = \mu + 1 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4\rho} - \frac{1}{2} \\ b = \frac{\mu}{4\rho} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.46}$$

$$n(n + a + b + 1) = \frac{\alpha}{\lambda} - 2\mu$$

3.47

$$n\left(n + \mu + l + \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{4} - \frac{l}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right) - \frac{l}{2}$$

3.48

بتعويض عبارتي a و α و عبارة μ في المعادلة الأخيرة نتحصل على عبارة طيف الطاقة لهزاز توافقي مشوه ثنائي البعد :

$$E_{n,l} = \pm mc^2\left[1 - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + \frac{2\hbar}{mc^2}\left\{(2n + l + 1)\sqrt{\left(\omega - \frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2} + \frac{\lambda\hbar}{2m}(4n(n + l + 1) + 2l + 1)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

3.49

إيجاد دالة الموجة :

لدينا العلاقة التالية :

$$\phi(s) = (1 - s)^{\frac{1}{2}} \tag{3.50}$$

صيغة Rodrigues :

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[(1 - s^2)^n\rho(s)] \tag{3.51}$$

ومن جهة أخرى لدينا كثير حدود Jacobi :

$$y_n(s) \equiv P_n^{(l,\mu-1/2)}(s) \qquad 3.52$$

بحيث :

$$\rho(s) = (1+s)^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}(1-s)^{l} \qquad 3.53$$

عبارة $f(s)$

$$f(s) = C_n(1-s)^{\frac{l}{2}} P_n^{(l,\mu-1/2)}(s) \qquad 3.54$$

ومنه عبارة دالة الموجة كالتالي :

$$\psi(r,\varphi) = C_n 2^{\frac{l}{2}} e^{il\varphi}(1-\lambda r^2)^{\frac{\mu}{2}}\left(\lambda r^2\right)^{\frac{l}{2}} P_n^{(l,\mu-1/2)}(1-2\lambda r^2) \qquad 3.55$$

بحيث :

$$C_n = \sqrt{\frac{\lambda}{2^l\pi}\frac{n!\left(2n+\mu+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\mu+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+l+1)}} \qquad 3.56$$

بتعويض 3.56 في 3.55 نتحصل على دالة الموجة [9]

2-1حل معادلة كلاين -غوردن لهزاز توافقي مشوه في وجود حقل مغناطيسي :

معادلة كلاين- غوردن في فضاء عادي تعطى[10]:

$$C^2\left(P-\frac{e}{c}A+im\omega r\right).\left(P-\frac{e}{c}A-im\omega r\right)\psi(r) = (E^2-m^2c^4)\psi(r)$$

3.57

بحيث :

$$A = \frac{1}{2} B \times r = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \qquad 3.58$$

نستطيع كتابة المعادلة من الشكل :

$$C^2(P^+ . P^-)\psi(r) = (E^2 - m^2c^4)\psi(r) \qquad 3.59$$

حلول فضاء ضد دوسيتر من أجل :

$$\tau = -1$$

$$P^{\pm} = P' \pm im\omega \frac{r}{\sqrt{1-\lambda r^2}}, P' = \sqrt{1-\lambda r^2} P - \frac{e}{c} B \times \frac{r}{\sqrt{1-\lambda r^2}} \qquad 3.60$$

بعد حساب مبسط نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[(1-\lambda r^2)P^2 + \frac{1}{a^4}\frac{r^2}{1-\lambda r^2} + i\hbar\lambda(r.P) - \frac{eB}{c}L_z - \alpha\right]\psi(r) = 0 \qquad 3.61$$

باستخدام المختصرات التالية :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} \\ \frac{1}{a^4} = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} + \frac{e^2B^2}{4c^2\hbar^2} - \frac{\lambda m\omega}{\hbar} \end{cases} \qquad 3.62$$

للحصول على حل دقيق للمعادلة 3.61 نستخدم الاحداثيات القطبية في المساحة

ونكتب الحل في شكل منفصل يحتوي على الرقم الكمي (r, φ)

l

$$\psi(r, \varphi) = e^{il\varphi} R(r), l = 0,1,2, \ldots . \qquad 3.63$$

ومنه تتحول المعادلة 3.61 الى معادلة من الشكل :

$$\left[(1-\lambda r^2)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\lambda r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}(1-\lambda r^2) - \frac{1}{a^4}\frac{r^2}{\hbar^2(1-\lambda r^2)} + \epsilon\right]R(r) = 0 \qquad 3.64$$

بحيث :

$$\epsilon = \alpha + \frac{eBl}{c\hbar} \qquad 3.65$$

لحل المعادلة 3.64 نستخدم التغيير التالي :

$$R(\rho) = \rho^{\mu} g(\rho), \rho = \sqrt{1 - \lambda r^2} \qquad 3.66$$

تصبح المعادلة 3.64 من الشكل :

$$\left[(1-\rho^2)\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\left(\frac{\mu}{\rho} - (\mu+1)\rho\right)\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l(l+1)\rho^2}{(1-\rho^2)} + \frac{\epsilon}{\lambda} - 2\mu\right] g(\rho) = 0 \quad 3.67$$

لدينا المعادلة التالية :

$$\mu(\mu - 1) - \frac{1}{a^4\lambda^2\hbar^2} = 0 \qquad 3.68$$

حل هاته المعادلة يعطى من الشكل :

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{a^4\lambda^2\hbar^2}} \qquad 3.69$$

نضع

$$\rho = 0,1,-1 \qquad 3.70$$

ومن جهة أخرى لدينا كثير الحدود Jacobi

$$\left\{(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial Z^2} + [(b-a) - (a+b+2)z]\frac{\partial}{\partial z} + n(n+a+b+1)\right\} f = 0 \qquad 3.71$$

يعطي الحل الدقيق التالي :

$$g(z) = P_n^{(a,b)}(z) \qquad 3.72$$

بمطابقة 3.67 و3.71 نجد :

$$\begin{cases} b - a = \frac{\mu}{2\rho} \\ a + b + 2 = \mu + 1 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4\rho} - \frac{1}{2} \\ b = \frac{\mu}{4\rho} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 3.73$$

$$n(n + a + b + 1) = \frac{\epsilon}{\lambda} - 2\mu \qquad 3.74$$

$$\mathrm{n}\left(\mathrm{n}+\mu+\mathrm{l}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\epsilon}{4}-\frac{\mathrm{l}}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)-\frac{\mathrm{l}}{2} \qquad 3.75$$

بتعويض 3.63 و3.69 في 3.75 نتحصل على عبارة طيف الطاقة لهزاز توافقي مشوه في وجود حقل مغناطيسي :

$$E_{n,l}=\pm mc^2\left[1-\frac{2\omega\hbar}{mc^2}+\frac{2\hbar}{mc^2}\left\{(2n+l+1)\sqrt{\left(\omega-\frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2+\widetilde{\omega}^2}+\frac{\lambda\hbar}{2m}(4n(n+l+1)+2l+1)-\widetilde{\omega}l\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 3.76$$

بحيث

$$\widetilde{\omega}=\frac{eB}{2mc} \qquad 3.77$$

إيجاد دالة الموجة

لدينا العلاقة التالية :

$$\phi(\mathrm{s})=(1-\mathrm{s})^{\mathrm{l}/2} \qquad 3.78$$

صيغة Rodrigues

$$y_n(s)=\frac{C_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[(1-s^2)^n\rho(s)] \qquad 3.79$$

كثير حدود jacobi

$$y_n(s)\equiv P_n^{(l,\mu-1/2)}(s) \qquad 3.80$$

بحيث

$$\rho(\mathrm{s})=(1+\mathrm{s})^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}(1-\mathrm{s})^{\mathrm{l}} \qquad 3.81$$

علاقة f(s)

$$f(s) = C_n(1-s)^{\frac{l}{2}}P_n^{(l,\mu-1/2)}(s) \qquad 3.82$$

ومنه عبارة دالة الموجة كالتالي :

$$\psi(r,\varphi) = C_n 2^{\frac{l}{2}} e^{il\varphi}(1-\lambda r^2)^{\frac{\mu}{2}}(\lambda r^2)^{\frac{l}{2}}P_n^{(l,\mu-1/2)}(1-2\lambda r^2) \qquad 3.83$$

بحيث :

$$C_n = \sqrt{\frac{\lambda}{2^{l}\pi}\frac{n!\left(2n+\mu+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\mu+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+l+1)}} \qquad 3.84$$

بتعويض 3.84 في 3.83 نتحصل على دالة الموجة [9] .

3-حل معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي مشوه ثلاثي الابعاد :

معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي ثلاثي الابعاد في فضاء عادي :

$$C^2[P^2 + m^2\omega^2 r^2 - 3m\omega\hbar]\psi(r) = (E^2 - m^2c^4)\psi(r) \qquad 3.85$$

باستخدام التحويل الكموني التالي :

$$\begin{cases} X^2 = \frac{r^2}{1+\tau\lambda^2 r^2} \\ P^2 = -\hbar^2\left[(1+\tau\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \end{cases} \qquad 3.86$$

حلول فضاء دوسيتر من أجل :

$$\tau = +1$$

$$\begin{cases} X^2 = \frac{r^2}{1+\lambda^2 r^2} \\ P^2 = -\hbar^2\left[(1+\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 r \frac{\partial}{\partial r}\right] \end{cases} \qquad 3.87$$

بتعويض 3.86 و3.87 نتحصل على معادلة صفرية من الشكل :

$$\left\{-\hbar^2\left[(1+\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 r\frac{\partial}{\partial r}\right] + m^2\omega^2\left(\frac{r^2}{1+\lambda^2 r^2}\right) - 3m\omega\hbar - \frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2}\right\}\psi = 0 \qquad 3.88$$

ومنه معادلة كلاين-غوردن لهزاز توافقي ثلاثي الابعاد في فضاء مشوه كالتالي :

$$\left[(1+\lambda^2 r^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{D-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L^2}{r^2}\right)+\lambda^2 r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(\frac{r^2}{1+\lambda^2 r^2}\right)+\frac{3m\omega}{\hbar}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{\hbar^2 c^2}\right]\psi=0 \quad 3.89$$

لحل هاته المعادلة نستخدم التغيير التالي :

$$\mathrm{y}=\sqrt{1+\lambda^2\mathrm{r}^2} \quad 3.90$$

مع المشتقات التالية :

$$\begin{cases}\lambda r\partial r=y\partial y\\ \dfrac{\partial R}{\partial r}=\dfrac{\partial R}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\lambda^2 r}{y}\dfrac{\partial R}{\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial r^2}=\dfrac{\lambda^4 r^2}{y^2}\dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\lambda^2}{y}-\dfrac{\lambda^4 r^2}{y^3}\right)\dfrac{\partial R}{\partial y}\end{cases} \quad 3.91$$

بالتعويض نجد :

$$\left\{y^2\left[\frac{\lambda^2 r^2}{y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\lambda^2}{y}-\frac{\lambda^4 r^2}{y^3}\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{D-1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda^2}{y}-\frac{L^2}{r^2}\right]+\lambda^2 r\frac{\lambda^2 r}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{r^2}{y^2}+\frac{(E^2-m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right\}R(r)=0 \quad 3.92$$

بتبسيط هاته المعادلة نجد :

$$\left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-Dy\frac{\partial}{\partial y}-\frac{L^2y^2}{(1-y^2)}-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2y^2}+\left(\frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}-\frac{(E^2-m^2c^4)}{\lambda^2c^2\hbar^2}\right)\right\}R(y)=0 \quad 3.93$$

لحل هاته المعادلة نستخدم التحويل التالي :

$$\begin{cases}R(y)=y^s f(y)\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=y^s\left(\dfrac{s}{y}+\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(y)\\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2}=y^s\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{2s}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{s(s-1)}{y^2}\right)f(y)\end{cases} \quad 3.94$$

بالتعويض نجد :

$$\left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left[\frac{2s}{y}-(2s+D)y\right]\frac{\partial}{\partial y}-\frac{L^2y^2}{(1-y^2)}+\varepsilon-Ds-s(s-1)+\right.$$
$$\left.\left[s(s-1)-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}\right]\frac{1}{y^2}\right\}f(y)=0 \quad 3.95$$

لدينا :

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{m}^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}-\frac{(\mathrm{E}^2-\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)}{\lambda^2\mathrm{c}^2\hbar^2} \quad 3.96$$

$$\mathrm{s}(\mathrm{s}-1)-\frac{\mathrm{m}^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}=0\Rightarrow \mathrm{s}(\mathrm{s}-1)=\frac{\mathrm{m}^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2} \quad 3.97$$

الآن نضع المتغير التالي :

$$\begin{cases} f(y)=(1-y^2)^{\sigma}g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=(1-y^2)^{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2\sigma y}{1-y^2}\right)g(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(1-y^2)^{\sigma}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{4\sigma y}{(1-y^2)}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{4y^2}{(1-y^2)^2}\sigma(\sigma-1)-\frac{2\sigma}{1-y^2}\right]g(y) \end{cases} \quad 3.98$$

بعد التعويض والتبسيط نتحصل على معادلة من الشكل :

$$\left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left[\frac{2s}{y}-(4\sigma+2s+D)y\right]\frac{\partial}{\partial y}-\frac{(E^2-m^2c^4)}{\lambda^2c^2\hbar^2}-2\sigma(2s+1)-\right.$$
$$\left.Ds\right\}g=0 \quad 3.99$$

لحل هاته المعادلة نستخدم المتغير التالي :

$$\begin{cases} z=2y^2-1\Rightarrow 1-y^2=\frac{1}{2}(1-z) \\ \frac{\partial}{\partial y}=4y\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}=8(z+1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+4\frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad 3.100$$

بالتعويض نجد :

$$\left\{4(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2[(2s-4\sigma-D+1)-(4\sigma+2s+D+1)z]\frac{\partial}{\partial z}-\right.$$
$$\left.\frac{(E^2-m^2c^4)}{\lambda^2c^2\hbar^2}-2\sigma(2s+1)-Ds\right\}g(z)=0 \quad 3.101$$

من جهة أخرى لدينا كثير الحدود «Jacobi»

$$\left\{(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+[(b-a)-(a+b+2)z]\frac{\partial}{\partial z}+n(n+a+b+1)\right\}f$$
$$=0 \qquad 3.102$$

بمطابقة 3.105 و 3.106 نجد :

$$\begin{cases} b-a=\frac{1}{2}(2s-4\sigma-D+1) \\ a+b+2=\frac{1}{2}(4\sigma+2s+D+1)\end{cases} \begin{cases} a=2\sigma+\frac{D}{2}-1 \\ b=s-\frac{1}{2}\end{cases} \qquad 3.103$$

$$\mathrm{n(n+a+b+1)}=-\frac{(\mathrm{E}^2-\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4)}{\lambda^2\mathrm{c}^2\hbar^2}-2\sigma(2s+1)-\mathrm{D}s \qquad 3.104$$

ومنه نستنتج عبارة طيف الطاقة لهزاز توافقي مشوه ثلاثي الابعاد كالتالي :

$$\mathrm{E}=\left\{\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4+\lambda^2\mathrm{c}^2\hbar^2\left[\mathrm{n}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{n}-2\sigma-\frac{\mathrm{D}}{2}-\mathrm{s}\right)-2\sigma(2\mathrm{s}+1)-\mathrm{Ds}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

3.105

$$E_{n,l}=\pm mc^2\left[1-\frac{3\omega\hbar}{mc^2}+\frac{3\hbar}{mc^2}\left\{(2n+l+1)\sqrt{\left(\omega+\frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2}+\frac{\lambda\hbar}{2m}(4n(n+l+1)+2l+1)\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 3.106$$

إيجاد دالة الموجة :

الحل الدقيق يمكن التعبير عنه بواسطة كثير حدود «Jacobi»

$$\mathrm{g(y)}=\mathrm{P}_\mathrm{n}^{(\mathrm{a,b})}(2\mathrm{y}^2-1) \qquad 3.107$$

كما :

$$\mathrm{f(y)}=(1-\mathrm{y}^2)^\sigma\mathrm{P}_\mathrm{n}^{(\mathrm{a,b})}(2\mathrm{y}^2-1) \qquad 3.108$$

من جهة أخرى لدينا العبارة التالية :

$$\mathrm{R(y)}=\mathrm{y}^\mathrm{S}(1-\mathrm{y}^2)^\sigma\mathrm{P}_\mathrm{n}^{(\mathrm{a,b})}(2\mathrm{y}^2-1) \qquad 3.109$$

ومنه نستطيع كتابة دالة الموجة الشعاعية لهزاز توافقي على النحو التالي :

$$R(r) = N(1+\lambda^2 r^2)^{\frac{s}{2}}(\lambda^2 r^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2\lambda^2 r^2+1) \qquad 3.110$$

ومنه عبارة دالة الموجة لهزاز توافقي ثلاثي الابعاد في فضاء مشوه :

$$\psi(r) = N(1+\lambda^2 r^2)^{\frac{s}{2}}(\lambda^2 r^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2\lambda^2 r^2+1) Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad 3.111$$

الخصائص الديناميكية والحرارية :

لدينا العبارة التالية [17] :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\sqrt{\alpha_1+\alpha_2 n+\alpha_3 n^2}\right) \qquad 3.112$$

k_Bهو ثابت بولتزمان

بحيث :

$$\alpha_1 = 1+\frac{2\hbar}{mc^2}\left((l+1)\sqrt{\left(\omega-\frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2}+\frac{\lambda\hbar}{2m}(2l+1)-\tilde{\omega}l-\omega\right) \qquad 3.113$$

$$\alpha_2 = \frac{4\hbar}{mc^2}\left(\sqrt{\left(\omega-\frac{\lambda\hbar}{2m}\right)^2+\widetilde{\omega^2}}+\frac{\lambda\hbar}{m}(l+1)\right), \alpha_3 = \frac{4\lambda\hbar^2}{m^2c^2} \qquad 3.114$$

لحساب Z نستعمل نشر تايلور $[Euler - Maclaurin]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0)+\int f(x)\,dx-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}B_{2p}f^{(2p-1)}(0) \qquad 3.115$$

لدينا الدالة التالية :

$$f(n) = \exp\left(-b\sqrt{\alpha_1+\alpha_2 n+\alpha_3 n^2}\right) =$$

$$\exp\left(-b\sqrt{\alpha_1}\sqrt{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2}\right) = \exp\left(-\chi\sqrt{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2}\right) \qquad 3.116$$

$$\int_0^{\infty} f(n)\,dn = \int_0^{\infty} exp\left(-\chi\sqrt{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2}\right)dn \qquad 3.117$$

بحيث :

$$y = \sqrt{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2} = \left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 3.118$$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n}{\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx = \frac{1}{2}\frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n}{y}dn \qquad 3.119$$

$$dn = \frac{2ydy}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n} \qquad 3.120$$

حساب n

$$y^2 = 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}n\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}n + 1 - y^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 - 4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(1-y^2)$$

$$n = \frac{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\sqrt{\Delta}}{2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}} \qquad 3.121$$

ومنه نستنتج :

$$dn = \frac{2ydy}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}n} = \frac{2ydy}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\left(\frac{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\sqrt{\Delta}}{2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}\right)} = \frac{2ydy}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\sqrt{\Delta}} = \frac{2ydy}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2ydy}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(1-y^2)}}$$

3.122

يصبح لدينا :

$$I = \int_0^\infty f(n)dn = \int_0^\infty \exp(-\chi y)dn = \int_1^\infty \exp(-\chi y)\frac{2ydy}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(1-y^2)}} =$$

$$\int_1^\infty \exp(-\chi y)\frac{ydy}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}+4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-4\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}}\int_1^\infty \exp(-\chi y)\frac{ydy}{\sqrt{1+\frac{1}{\frac{\alpha_1}{4\alpha_3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-1}y^2}}$$

3.123

ومنه نستنتج ما يلي :

$$I=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2-4\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_1^2}}}\int_1^{\infty}\exp(-\chi y)\frac{ydy}{\sqrt{1-\frac{4\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}y^2}}=$$

$$\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\int_1^{\infty}\exp(-\chi y)\frac{ydy}{\sqrt{1-\frac{4\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}}}=\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\int_1^{\infty}\exp(-\chi y)\left(1-\frac{4\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}ydy \qquad 3.124$$

باستعمال نشر تايلور نتحصل على ما يلي :

$$\left(1-\frac{4\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}y^2}}=1+q_1y^2+q_2y^4+\ldots \qquad 3.125$$

بحيث :

$$q_1=\frac{2\alpha_3\alpha_1}{4\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2},\ q_2=6\alpha_1^2\frac{\alpha_3^2}{\left(\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1\right)^2} \qquad 3.126$$

بالتعويض في عبارة I تصبح العبارة من الشكل التالي :

$$I=\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\int_1^{\infty}\exp(-\chi y)\left(1+\frac{2\alpha_3\alpha_1}{4\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2}y^2\right)ydy \qquad 3.127$$

ومنه عبارة Z كالتالي :

$$Z\simeq I=\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\int_1^{\infty}\exp(-\chi y)\left(1+\frac{2\alpha_3\alpha_1}{4\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2}y^2\right)ydy \qquad 3.128$$

باستعمال نشر تايلور $[Euler-Maclaurin]$

بحيث رقم برنولي B_{2p} $[nombre\ de\ Bernouli]$ و

$f^{(p-1)}$هو مشتق من

$(2p-1)$ومنه التكامل يصبح من الشكل

$$Z=I=\frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\Gamma(2n+2)}{\chi^{2n+2}}\left(\frac{4\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}\right)^n=$$

$$\frac{2\alpha_1}{\chi^2\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Gamma(2n+2)\left(\frac{4\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1)\chi^2}\right)^n=$$

$$\frac{2\alpha_1}{\chi^2\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Gamma(2n+2)\sigma^n \qquad 3.129$$

بحيث

$$\chi=\sqrt{\alpha_1}\frac{mc^2}{kT} \qquad 3.130$$

$$\sigma=\frac{4\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1)\chi^2}=\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2\frac{4\alpha_3}{(\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1)} \qquad 3.131$$

ومنه تصبح العبارة كالتالي :

$$Z=\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2\frac{2}{\sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_3\alpha_1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Gamma(2n+2)\sigma^n \qquad 3.132$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\exp(-t)t^{z-1}dt \qquad 3.133$$

$$\begin{cases} n=0\Rightarrow\Gamma(2)=1\\ n=1\Rightarrow\Gamma(4)=6\end{cases} \qquad 3.134$$

بتعويض :

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ نتحصل على عبارة من الشكل

$$Z\simeq\frac{(k_BT)^2}{2\hbar mc^2\sqrt{\tilde{\omega}^2+\omega^2}}-\frac{3(k_BT)^4\lambda}{2\hbar m^3c^4(\tilde{\omega}^2+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{mc^2(2\hbar\tilde{\omega}l+mc^2+\hbar\omega)}{6(k_BT)^2}\right) \qquad 3.135$$

نضع تقريبا

$$\left(1-\frac{mc^2(2\hbar\tilde{\omega}l+mc^2+\hbar\omega)}{6(k_BT)^2}\right)\simeq 1 \qquad 3.136$$

ومنه تصبح العبارة 3.135 نجد :

$$Z\simeq\frac{(k_BT)^2}{2\hbar mc^2\sqrt{\tilde{\omega}^2+\omega^2}}\left(1-\frac{3(k_BT)^2\lambda}{m^2c^2(\tilde{\omega}^2+\omega^2)}\right) \qquad 3.137$$

نضع :

$$\theta=\frac{3\lambda}{m^2c^2(\tilde{\omega}^2+\omega^2)} \qquad 3.138$$

وأخيرا نستطيع كتابة الخصائص الديناميكية والحرارية :

$$F=-k_BT\ln Z,\ U=k_BT^2\frac{\partial\ln Z}{\partial T},\ C=\frac{\partial U}{\partial T},\ S=-\frac{\partial F}{\partial T} \qquad 3.139$$

بعد حساب مبسط نتحصل على العبارات التالية[11] :

بحيث :

F هي الطاقة الحرة

U هي الطاقة الداخلية

C هي السعة الحرارية

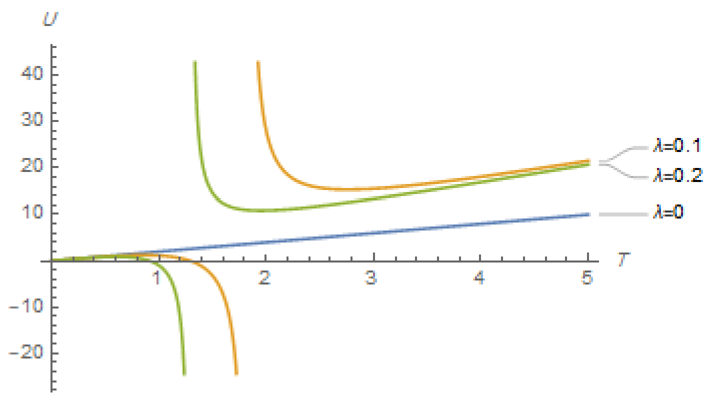
S هي الانتروبي

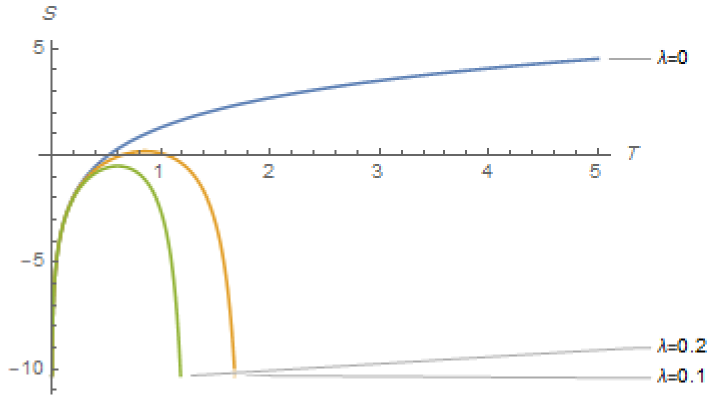
$$F = -k_B T \ln\left(\frac{(k_B T)^2}{2\hbar m c^2\sqrt{\tilde{\omega}^2+\omega^2}}\left(1-\theta(k_B T)^2\right)\right) \quad 3.140$$

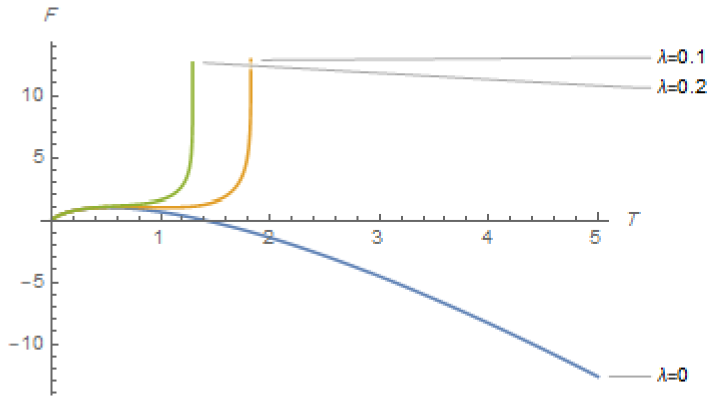
$$U = 4k_B T\left[1-\frac{1}{2(1-\theta(k_B T)^2)}\right] \quad 3.141$$

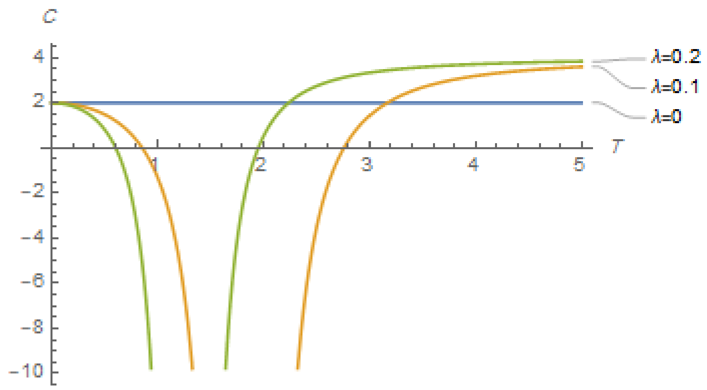
$$C = 4k_B\left[1-\frac{1+\theta(k_B T)^2}{2(1-\theta(k_B T)^2)^2}\right] \quad 3.142$$

$$S = k_B\left[\frac{2-4\theta(k_B T)^2}{1-\theta(k_B T)^2}+\ln\left(\frac{(k_B T)^2}{2\hbar m c^2\sqrt{\tilde{\omega}^2+\omega^2}}\left(1-\theta(k_B T)^2\right)\right)\right] \quad 3.143$$




S
T
λ=0
λ=0.2
λ=0.1


F
T
λ=0.1
λ=0.2
λ=0


C
T
λ=0.2
λ=0.1
λ=0

خاتمة

خاتمة

في عملنا هذا تطرقنا للدراسة الكمية لمعادلة كلاين غوردن موصوفة بكمونات مركزية من النوع هزاز توافقي مشوه ضمن إطار ميكانيك الكم النسبي حيث قمنا بإعطاء لمحة عامة حول معادلة كلاين غوردن الثابتة حيث استخدمنا طريقة رياضية سمحت لنا بكتابة هذه المعادلة إلى معادلتين إحداهما شعاعية و الأخرى زاوية تدعى هذه الطريقة بفصل المتغيرات تمكنا من خلالها من إيجاد الدوال الذاتية وهذا ماورد في الفصل الأول والفصل الثاني من خلال تطبيقنا لطريقة رياضية تمثلت في سلسلة عددية من تغي المتغيرات ووضع المشتقات على الجزء الشعاعي لمعادلة كلاين-غوردن للهزاز التوافقي وباستعمالنا لأكثر من كثير حدود :

polynome de Jacobi , Polynome Gegenbauers,

Polynome D′Hermite,Polynome Hypergéométrique ,

تمكنا من إيجاد طيف الطاقة ودوال الموجة المقابلة لها في حالة فضاء عادي وأيضا فضاء مشوه أحادي وثنائي و ثلاثي الأبعاد هذا ما يبينه الفصل الثاني و الثالث الأن نستطيع القول بأن تأثير تشوه الفضاء على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية في ميكانيك الكم النسبي أدى إلى وجود تغيير كبير في قيم نتائجنا مقارنة بالحالة العادية .

وفي الأخير ، إن الدراسة الكمية ضمن إطار الفضاء المشوه تبقى محل إنتباه من طرف الكثير من الباحثين لتسليط الضوء عليه والبحث فيه من جديد .

قائمة المراجع والمصادر

قائمة المراجع و المصادر

[1] «non commutative quantum mechanics » ; Gamboa, J.; Loewe, M.; Rojas, J. C; Physical Review D Volume: 64 Issues: 6 067901-- (2001).

[2] « Two phases of the non commutative quantum mechanics »; Stefano Bellucci; Armen Nersessian; Corneliu Sochichiu; Physics Letters B Volume: 522 Issues: 3-4 345—349 (2001).

[3] « NON COMMUTATIVE QUANTUM MECHANICS: THE TWO-DIMENSIONAL CENTRAL FIELD »; GAMBOA, J.; MÉNDEZ, F.; LOEWE, M.; ROJAS, J. C; International Journal of Modern Physics A Volume: 17 Issues: 19 2555—2565 (2002).

[4] « THE LANDAU PROBLEM AND NONCOMMUTATIVE QUANTUM MECANICS »; GAMBOA, J.; MÉNDEZ, F.; LOEWE, M.; ROJAS, J. C; Modern Physics Letters A Volume: 16 Issues: 32 2075--2078 (2001).

[5] « Non commutative oscillators and the commutative limit »; Muthukumar, B.; Mitra, P ; Physical Review D Volume: 66 Issues: 2 027701--(2002).

[6] « Exact solution of SchrÃ¶dinger equation in (anti-)de Sitter spaces for hydrogen atom »; Falek, Mokhtar; Belghar, Noureddine; Moumni, Mustafa The European Physical Journal Plus Volume: 135 Issues: 3 335--(2020).

[7] « Etude de l'oscillateur harmonique relativiste avec un principe d'intertitude généralisé » ;-B.Houda ;mémoire de master ,Université Biskra ,(2016-2017).

[8] « Calcul des éléments de matrice dipolaires dans une géométrie non commutative » ;-B.Mohamed ;,mémoire de magister ,Université D'EL oued,(2013).

[9] « 2D relativistic oscillators with a uniform magnetic field in anti-de Sitter space »; Lakhdar Sek, Mokhtar Falek and Mustafa Moumni ; International Journal of Modern PhysicsAOnlineReady.

[10] « Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations || Klein's Paradox » ; Greiner, Walter, (2000).

[11] « One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath; M.H Pacheco; R.R Landim; C.A.S Almeida »; Physics Letters A Volume: 311 Issues: 2-3 93-96, (2003).

[12] « De L'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau vers son Analogue relativiste » ;-T.Louiza,mémoire de master ,Université a.Mira-Béjaia,(2015).

[13] -بي.تي.ماثيوز:« مقدمة في ميكانيك الكم »،تر:أسامة زيد إبراهيم ناجي،الدار الدولية للنشر والتوزيع د. ط ،القاهرة مصر ،ص 15.

[14] « mécanique quantique Tome 1 » ;-C.Cohen.Tannodji,B.Diu,F.Laioe ,(21 octobre 1997) 480-486.

[15] « The discrete variable–finite basis approach to quantum scattering »; Lill, J. V.; Parker, Gregory A.; Light, John C; The Journal of Chemical Physics Volume: 85 Issues: 2 900--,(1986)

[16] « Dirac and klein-gordon oscillators on anti-de sitter space »;B.Hamil and M.Merad;European physical J.Plus volume:133 Issues:174, (2018).

[17] « Exact solutions of D.dimensional klein-gordon oscillator with snyder-de sitter algebra »;Z.Hemame,M.Falek and M.Moumni;Mathematical physics volume:61 Issues:102301-,(2020).

الملخص

الملخص

في هذا المذكرة قمنا بدراسة الخصائص الكمية لجملة فيزيائية موصوفة بكمون مركزي غير متعلق بالزمن من خلال معالجة نظام هزاز توافقي في إطار ميكانيك الكم النسبي ، حيث قمنا أولا بحل معادلة كلاين غوردن في الحالة العادية لبعد واحد وثنائي البعد و ثلاثي الأبعاد . بعد ذلك تطرقنا إلى حل هذه المعادلة في الحالة المشوهة حيث تم تحديد طيف الطاقة ودالة الموجة في كل حالة .

الكلمات المفتاحية :

ميكانيك الكم النسبي ،معادلة كلاين غوردن،هزاز توافقي ،فضاء مشوه .

Résumé

Dans ce mémoire , on a essayé d'étudier les caractéristiques d'un corps physique décrit par un potentiel central non lié avec le temps, par le traitement du système d'un oscillateur harmonique dans contexte de la mécanique relativiste , d'abord on a essayé de résoudre l'équation de klein gordon dans le cas d'une seule dimension et à deux dimension et à trois dimension , ensuite nous avons aborder une solution à cette équation dans l'espace déformé , ou nous avons déterminé le spectere d'énergie et la fonction d'onde dans chacun des cas .

les Mots clés: Mécanique quantique relativiste , Equation de klein gordon , Oscillateur harmonique, Espace déformé .

Abstract

In this thesis we tried to study the quantum characteristics of a physical body described by treating the system of a harmonic oscillator in the context of relative quantum Mechanics . First ,we tried to solve the klein gordon equation in the case of only one dimension and two dimension and three dimension , then we approached a solution to this equation in the deformed space where we determined the energy spectrum and the wave function in each case.

Key Words : relative quantum mechanics ,The klein gordon equation ,Harmonic oscillator, deformed space.