



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Energétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
RAOUANE Maammar

Le : samedi 26 juin 2021

Etude numérique du transfert de chaleur et de masse entre deux plaques parallèles

Jury :

Pr.	BENCHABANE Adel	Prof	Université de Biskra	Président
Dr	GUERBAAI Salah	MCA	Université de Biskra	Rapporteur
M.	ZELLOUF Miloud	MAA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2020 - 2021

DEDICACE

Je dédie ce présent mémoire

A mes chers parents qui ont toujours veillés sur moi,

A la famille RAOUANE.

&

A tous mes amis

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour

l'achèvement de ce modeste travail.

Remerciements

Avant tout, je dois remercier Dieu le tout puissant qui m'a

Donné la force pour réaliser ce travail.

Le grand merci à mon encadreur Dr. Guerbaai Salah

Pour son aide durant la résolution de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres du jury

Pr. BENCHABANE Adel et M. ZELLOUF Miloud pour l'honneur

Qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants du département de

Génie Mécanique, qui ont contribué à ma formation.

Table des Matières

Dédicace.....	I
Remerciement.....	II
Table des matières.....	III
Liste de tableaux.....	V
Liste de figures.....	VI
Nomenclature.....	VIII
Introduction générale.....	1
Chapitre I-GENERALITES SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE	
I-1 Notions fondamentales sur le transfert thermique	2
I-1-1- Introduction.....	2
I-1-2-Les différents modes de transfert de la chaleur.....	2
I-1-2-1- Conduction.....	3
I-1-2-2- Rayonnement.....	4
I-1-2-3- Convection.....	4
I-2 Notions fondamentales sur le transfert massique	5
I-2-1 Transfert de masse par diffusion.....	5
I-2-1-1- Loi de Fick.....	5
I-2-1-2- Calcul convectif.....	6
Chapitre II- FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME	
II-1 Présentation du problème.....	8
II-1-1-Modèle physique.....	8
II-1-2-Hypothèse simplificatrices.....	8
II-2- Equations générales de transport.....	9
II-2-1- Equations gouvernantes sous forme dimensionnelle.....	10
II-2-2-Equations gouvernantes sous forme adimensionnelle.....	11
II-3- Les conditions aux limite.....	11
II-4- Les grandeurs caractéristiques.....	12
II-4-1- Le nombre Nusselt.....	12
II-4-2- Fonction du courant.....	12
II-4-3- Le nombre de Sherwood.....	13
Chapitre III- RESOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME	
III-1. Introduction.....	14
III -2. Méthode numérique.....	14
III 3. Le principe de la méthode des volumes finis.....	14

III -4. Le maillage.....	14
III -5. Forme générale de l'équation de transport	15
III-6. La discrétisation des équations.....	17
III-7. Les schémas de discrétisation.....	20
III-8. Algorithme SIMPLE.....	23

Chapitre VI- RESULTATS ET DISCUSSION

VI- Résultats et discussion.....	27
VI.2. Validation du code de calcul.....	27
VI.3. Résultats et discussion.....	29
VI.3.1. Effet du nombre de Richardson	29
VI.3.2. Effet du nombre de Lewis	35
VI.3.3. Effet du Rapport de flottabilité N	39
Conclusion	43
Références bibliographiques	44

Liste de tableaux

Tableau III -1 : les différents termes de l'équation de transport.....	17
Tableau (III -2) : Les coefficients pour différents schémas.....	20

Liste de figures

Figure (I-1) : Schéma du principe de la diffusion massique.....	5
Figure (I-2) : Schéma du principe de la convection massique.....	6
Figure (II-1) Modèle physique.....	8
Figure (III-1) : Volume de contrôle bidimensionnel.....	15
Figure (III-2) : Volume de contrôle typique.....	15
Figure (III-3) : Volume de contrôle décalé vers la droite.....	16
Figure (III-4) : Volume de contrôle décalé vers le haut.....	16
Figure (III-5) : Algorithme simple.....	26
Figure (VI-1) Le maillage utilisé.....	27
Figure(VI- 2) : comparaison entre les résultats du présent travail et celui de G.Desrayeud [4]Variation de la vitesse axiale	28
Figure(VI- 3) : comparaison entre les résultats du présent travail et celui de G. Desrayeud [4]Variation de la température	26
Figure (VI- 4) Les lignes de courant pour différents valeurs du nombre de Richardson (Du droite à gauche $Ri=0.1$, $Ri=0.5$, $Ri=1$, $Ri=1.5$).....	29
Figure (VI-5) Les isothermes pour différents valeurs du nombre de Richardson (Du droite à gauche $Ri=0.1$, $Ri=0.5$, $Ri=1$, $Ri=1.5$).....	30
Figure (VI-6) Variation du coefficient de frottement pour différents valeurs du nombre de Richardson.....	31
Figure (VI-7) Variation du nombre de Nusselt et du nombre de Scherwood pour différentes valeurs du nombre de Richardson.....	31
Figure (VI-8) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du nombre de Richardson.....	32
Figure (VI-9) Variation de la température au milieu du canal pour différents	

valeurs du nombre de Richardson.....	32
Figure (VI-10) Variation de la température moyenne du fluide pour différents valeurs du nombre de Richardson.....	33
Figure (VI-11) Profil de la vitesse longitudinale à des différents positions pour $Ri=1$	33
Figure (VI-12) Profil de la température à des différents positions pour $Ri=1$	34
Figure (VI-13) Les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations pour différentes valeurs du nombre de Lewis (a- $Le= 1$, b- $Le=5$).....	34
Figure (VI-13) Les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations pour différents valeurs du nombre de Lewis (c- $Le= 10$, d- $Le=15$) (suite).....	36
Figure (VI-14) Variation du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre Le	37
Figure (VI-15) Variation du nombre Sherwood pour différents valeurs du nombre Le	37
Figure (VI-16) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du nombre Lewis.....	38
Figure (VI-17) Les lignes de courant et les isothermes pour différents valeurs du Rapport N (a- $N= 0$, b- $N=5$, c- $N= 10$, d- $N=-1$)	39
Figure (VI-17) Les lignes de courant et les isothermes pour différents valeurs du Rapport N (e- $N= -1.5$) (suite)	40
Figure (VI-18) Variation du nombre de Nusselt et du nombre de Scherwood pour différents valeurs du rapport N	40
Figure (VI-19) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du rapport N	41
Figure (VI-20) Variation de la température au milieu du canal pour différents valeurs du rapport N	41

Nomenclature

Lettre Latine

T	La température	K
C	La concentration massique	kg/m^3
C_p	Capacité thermique	J/kg K
D	La diffusivité massique	m^2/s
h_m	Coefficient d'échange massique	
\bar{h}	Coefficient moyen d'échange thermique	

Lettre Grec

λ	La Conductivités thermique	W/m K
a	La diffusivité thermique de fluide	m^2/s
β	Coefficient de dilatation thermique du fluide	$1/\text{K}$
θ	La température adimensionnelle	/
ν	La Viscosité cinématique de fluide	m^2/s
φ	La densité thermique	W
ϕ	La dissipation visqueuse	
ρ	La masse volumique	kg/m^3

Nombres adimensionnels

Nu	Nombre de Nusselt	/
Pr	Nombre de Prandtl	/
Sh	Nombre de Scherwood	/
Le	Nombre de Lewis	/
Ri	Nombre de Richardson	/
Re	Nombre de Reynolds	/
Gr	Nombre de Grashof	/
Pe	Nombre de Péclet	/
N	La rapport de flottabilité	/

INTRODUCTION GENERALE :

Les phénomènes de transfert de chaleur et de masse sont d'un intérêt considérable dans le domaine d'ingénierie. Cet intérêt se traduit par de nombreuses applications comme le dessalement d'eau de mer, la distillation, la climatisation, le séchage du bois, le refroidissement des composantes électroniques, la fabrication du verre flotté etc....

Dans ce travail, nous procédons à une étude numérique du transfert de chaleur et de masse entre deux plaques parallèles et verticales. L'étude a pour objet de déterminer l'influence de différents paramètres tels que le nombre de Richardson, le rapport de flottabilité et le nombre de Lewis sur le transfert de chaleur et de masse lorsque le fluide est en mouvement.

Le présent document s'organise en plusieurs chapitres présentés dans la suite :

Nous présentons dans le premier chapitre des généralités sur le transfert de chaleur et de masse. Le modèle physique choisi, à savoir les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le contenu du deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre, on présente la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations. Les systèmes d'équations algébriques obtenus associés aux conditions aux limites sont résolus par l'utilisation de l'algorithme TDMA.

On rassemble dans le quatrième chapitre la validation de notre code de calcul ainsi que les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés.

Enfin, on termine par une conclusion générale dans laquelle sont signalées les particularités des résultats obtenus dans cette étude et les perspectives qu'elles offrent.

Chapitre I-

***GENERALITES SUR LE
TRANSFERT DE CHALEUR ET DE
MASSE***

-GENERALITES SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE

I-1 Notions fondamentales sur le transfert thermique :

I-1-1- Introduction :

La science du transfert de chaleur (du transfert thermique) a pour objectif d'analyser les taux de transfert thermique ayant lieu dans un système. L'énergie transférée par transfert de chaleur n'est pas directement mesurable mais peut être appréciée par une quantité mesurable appelée température. On a constaté par expérience que lorsqu'il y a une différence de température dans un système, un flux de chaleur (flux thermique) apparaît et il est orienté de la région à haute température vers la région à basse température. Lorsqu'il y a un flux thermique dans un système, un gradient de température y est présent également. La connaissance de la distribution de la température dans un système est nécessaire dans l'étude du transfert thermique.

Les problèmes de transfert thermique jouent un grand rôle dans les applications techniques, soit que les échanges doivent être importants et rapides, soit que, au contraire, on cherche à obtenir un excellent isolement thermique.

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

Le premier phénomène, la conduction, a lieu dans les solides. La convection se rencontre spécialement dans les fluides. L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu dans tous les milieux transparents aux ondes électromagnétiques. En réalité la distribution de la température, dans un milieu, est la conséquence des effets de ces trois modes de transfert thermique ; il est impossible d'isoler un mode de transfert thermique d'un autre mode. Pourtant, pour la simplicité de l'étude, on considère ces modes de transfert thermique séparément. Par exemple, on peut étudier la conduction couplée avec la convection et on néglige le rayonnement. Une grandeur souvent utilisée dans l'étude du transfert thermique est la densité du flux thermique qui représente la chaleur traversant l'unité de surface et par unité de temps.

I-1-2-Les différents modes de transfert de la chaleur :

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé.

Comme l'énergie thermique d'un milieu matériau correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement (molécules, atome, électrons libres ...), ceux-ci pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c'est à dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique soit par interaction directe avec les particules voisines (choc de molécule par exemple) ce qui correspond à la *conduction*. Soit par absorption ou émission de radiation électromagnétique, ce qui correspond au *rayonnement*.

Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transferts de chaleur appelé *convection*, les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

I-1-2-1- Conduction :

La conduction thermique est le phénomène de transport de la chaleur mis en jeu dans les solides ; elle est également présente dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz. Le phénomène microscopique (à l'échelle atomique) intervenant dans la conduction thermique est la propagation de l'agitation thermique des particules des zones plus chaudes vers celles des zones plus froides. Le mécanisme microscopique consiste dans la vibration moléculaire ou atomique (liquides, gaz) et la vibration cristalline ainsi que dans le déplacement des électrons libres (métaux). La conduction thermique est donc le phénomène par lequel l'énergie est transférée des zones à haute température vers des zones à basse température.

La loi correspondant à ce processus particulier de diffusion de la chaleur est telle que la densité $\vec{\varphi}$ du « courant » de chaleur en un point appelée encore densité du flux, est une fonction linéaire du gradient de température en ce point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (I - 1)$$

λ : définit la conductivité thermique milieu au point considéré est un tenseur symétrique du second ordre, pour un milieu isotrope, la conductivité thermique se caractérise simplement

par un scalaire unique λ qui dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.) ; il se mesure en $W.m^2.K^{-1}$ et il est toujours positif.

La relation ci-dessus dit loi de FOURIER, se démontre à partir des lois de la mécanique statistique appliquées aux atomes, molécule ou électron libre du milieu considéré.

La conduction est le seul mode de transferts thermique intervenant au sein des milieux solides opaques.

I-1-2-2- Rayonnement :

Tous les corps émettent de l'énergie à cause de leur température et cette énergie émise s'appelle le rayonnement thermique. L'énergie rayonnée par un corps est émise dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétiques selon la théorie de Maxwell (la théorie classique des ondes électromagnétique) ou sous forme discrète de photons selon les hypothèses de Planck. Les deux concepts ont été utilisés pour l'étude du transfert thermique par rayonnement. On peut donner des exemples de rayonnement : le rayonnement solaire, le rayonnement d'un radiateur infrarouge, d'un filament d'une lampe à incandescence, le rayonnement de l'arc électrique, etc.

La relation de base est celle de STEFAN BOLTEZMAN selon laquelle la puissance M^0 du rayonnement thermique émis par unité de surface d'un corps noir (corps idéal émettant le maximum d'énergie par rayonnement thermique à une température donnée) est directement proportionnelle à la puissance quatrième de la température absolue

$$M^0 = \sigma T^4 \quad (I - 2)$$

Le rayonnement thermique comme toutes les radiations électromagnétiques, n'exigeant pas de support matériel pour se propager, représente de ce fait la seule possibilité d'échange thermique entre des corps distants placés dans le vide.

I-1-2-3- Convection :

Les transferts thermiques interviennent évidemment quel que soit l'état du milieu considéré, solide, liquide ou gazeux, dans ces deux derniers cas, la possibilité de déformation importante aux différentes parties de ces milieux fluides permet aux fluides d'avoir à l'échelle

microscopique, une liberté de mouvement importante et par suite de transporter une quantité de chaleur directement liée à leur capacité calorifique

On distingue la convection forcée dans laquelle le mouvement du fluide est produit par une action extérieure (pompe, ventilateur,...), la convection libre (ou naturelle), dans laquelle ce mouvement résulte simplement de la différence de densité entre les parties chaudes et froides du fluide et la convection mixte qui est la combinaison de ces deux derniers modes.

I-2 Notions fondamentales sur le transfert massique :

Le transfert de masse se réfère spécifiquement au mouvement relatif des espèces dans un mélange en raison des gradients de concentration. Dans de nombreuses applications techniques, les processus de transfert de chaleur se déroulent simultanément avec le processus de transfert de masse.

I-2-1 Transfert de masse par diffusion :

Le transfert de masse par diffusion est similaire au transfert de chaleur par conduction. Considérons deux espèces A et B à la même température T et la même pression P initialement séparés par une paroi. La diffusion dans le sens de concentration faible induit le transport net des molécules A vers la droite et les molécules B vers la gauche. Après un certain temps, les concentrations A et B deviennent uniforme dans tout le milieu.

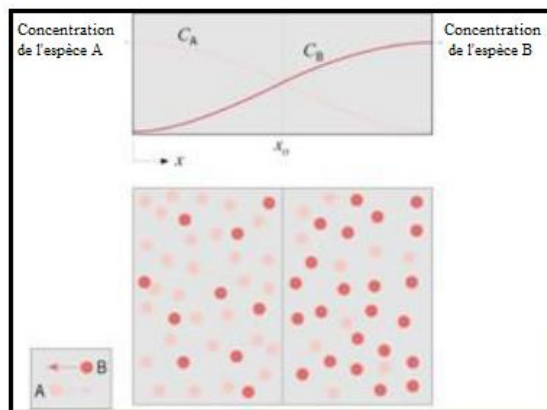


Figure (I-1) : Schéma du principe de la diffusion massique

I-2-1-1- Loi de Fick :

Les mesures expérimentales indiquent que dans le cas de la diffusion le flux massique et molaire de l'espèce A sont proportionnels au gradient de la concentration

$$j = -\rho D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \left[\frac{kg}{m^2s} \right] \quad (I-3)$$

Avec :

ρ : est la densité du mélange.

D_{AB} : coefficient de diffusion.

$C_A = \rho_A/\rho$: concentration massique du composant A.

I-2-1-2- Calcul convectif :

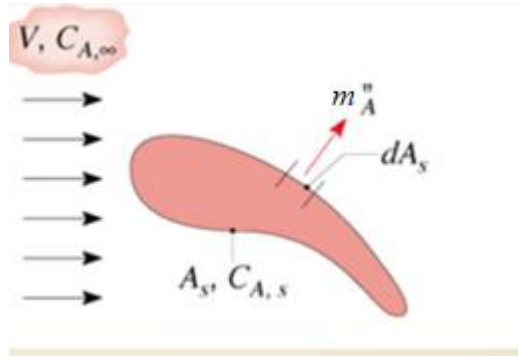


Figure (I-2) : Schéma du principe de la convection massique

La densité flux molaire d'une espèce s'écrit :

$$m_{A,s}'' = h_m (C_{A,s} - C_{A,\infty}) \quad (\text{I-4})$$

Le flux d'une espèce s'écrit :

$$m_{A,s} = \bar{h}_m A_s (C_{A,s} - C_{A,\infty}) \quad (\text{I-5})$$

h_m : coefficient d'échange massique.

Une analogie avec le transfert thermique donne :

- Convection thermique :

$$m_{A,s} = \bar{h}_m A_s (C_{A,s} - C_{A,\infty}) \quad (\text{I-6})$$

- Convection thermique :

$$Q_{conv} = \bar{h} A_s (T_s - T_\infty) \quad (\text{I-7})$$

\bar{h} : coefficient moyen d'échange thermique

On définit le nombre adimensionnel de Lewis qui caractérise le rapport entre la diffusion thermique et la diffusion massique par :

$$Le = \frac{\alpha}{D_{A,B}} \quad (\text{I-8})$$

α : la diffusivité thermique.

Chapitre II-
***FORMULATION MATHÉMATIQUE
DU PROBLÈME***

II-1 présentation du problème :

II-1-1-Modèle physique :

le modèle physique considéré est un conduit verticale constituée de deux plaques distantes de b , les deux plaques sont maintenues à une température constante T_w supérieure à la température T_0 , le fluide de travail est de l'air dont le nombre de Prandtl $Pr=0.7$ et considéré comme fluide incompressible.

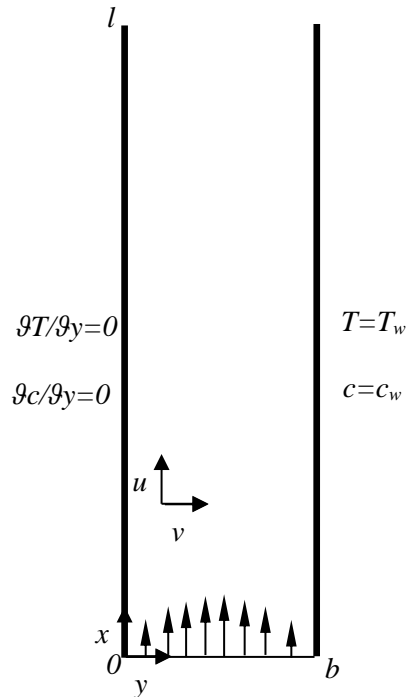


Figure (II-1) Modèle physique

L'écoulement du fluide est laminaire, dissipation visqueuse est négligeable et les propriétés du fluide sont considérées constantes sauf la densité qui obéit à l'approximation de Boussinesq.

II -1-2-Hypothèse simplificatrices :

Ces hypothèses sont largement utilisées pour l'étude des phénomènes de convection mixte, pour but de simplifier la formulation mathématique des équations de conservation : masse quantité de mouvement et de l'énergie et de concentration ; ces dernières sont établies sur la base des hypothèses suivantes :

- 1- Régime laminaire.
- 2- La dissipation visqueuse est négligeable.
- 3- L'écoulement est supposé bidimensionnel.
- 4- Fluide Newtonien et incompressible.

5- Le régime est permanent ;

6- Le transfert de chaleur par rayonnement et les effets de Dufour et Soret sont négligeables

7- l'approximation de Bousinesq est adopté pour l'étude de la convection mixte (les propriétés du fluide restent constantes, excepté la densité qui est variable dans le terme de gravité ($\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0) - \beta_s(c - c_0))$))

II-2- Equations générales de transport :

Le système d'équation gouvernant les phénomènes de la convection mixte est régi par les équations générales de conservation de la masse, de quantités de mouvement, de l'énergie et de conservation de l'espèce.

•Equation de continuité :

Elle déduit le principe de la conservation de masse.

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \text{ avec } j = 1,2,3 \dots \quad (\text{II-1})$$

•Equation de quantité de mouvement :

D'après la deuxième loi fondamentale de la dynamique, l'équation de conservation de quantité de mouvement d'un fluide incompressible, stationnaire et visqueuse est :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t}}_a + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}}_b = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x_j}}_c + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right]}_d + \underbrace{F_i}_e \quad (\text{II-2})$$

ij : 1,2,3 indice de sommation.

a : taux de la quantité de mouvement.

b : taux de transport de quantité de mouvement

c : Représente les forces due à la pression.

d : Représente les forces de viscosité.

e : Représente les forces du volume.

•Equation de l'énergie :

Elle est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation pour un fluide Newtonien incompressible, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(Tu_j)}{\partial X_j} = a \frac{\partial^2 T}{\partial X_j^2} + \phi \quad \text{avec } a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{II-3})$$

a : Diffusivité thermique.

λ : Conductivité thermique.

c_p : Chaleur spécifique à pression constante.

ϕ : La dissipation visqueuse.

• **Equation de concentration :**

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cu_j)}{\partial X_j} = D \frac{\partial^2 c}{\partial X_j^2} + \phi \quad (\text{II-4})$$

D : diffusivité massique

II-2-1- Equations gouvernantes sous forme dimensionnelle :

D'après des hypothèses simplification nous obtenons le système d'équations suivant :

.Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-5})$$

. Equation de quantité de mouvement :

suivant x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{II-6})$$

Suivant y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g(\beta(T - T_0) - \beta_s(c - c_0)) \quad (\text{II-7})$$

. Equation d'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-8})$$

. Equation de concentration :

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = a \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-9})$$

II-2-2-Equations gouvernantes sous forme adimensionnelle :

Les paramètres non dimensionnels choisis sont :

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{u}{u_0}, V = \frac{v}{u_0}, P = \frac{p}{\rho u_0^2}, \theta = \frac{T-T_c}{T_h-T_c}, C = \frac{c-c_c}{c_h-c_c} \quad (\text{II-10})$$

En introduisant les variables adimensionnelles précédentes dans les équations différentielles. on obtient les équations adimensionnelles suivantes :

•Equation de conservation de la quantité de mouvement :

Suivant X :

$$\frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial VU}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] + \frac{\partial P}{\partial X} \quad (\text{II-11})$$

Suivant Y :

$$\frac{\partial UV}{\partial X} + \frac{\partial VV}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{Re^2} (\theta + NC) \quad (\text{II-12})$$

•Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial U\theta}{\partial X} + \frac{\partial V\theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-13})$$

•Equation de conservation de concentration :

$$\frac{\partial UC}{\partial X} + \frac{\partial VC}{\partial y} = \frac{1}{LeRePr} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II-14})$$

Le rapport de flottabilité N qui apparaît dans Equation (II-11) et (II-12) représente le rapport des forces de flottabilité massique (concentration) et thermique

$$N = \frac{Gr_m}{Gr} \quad (\text{II-15})$$

II-3- Les conditions aux limites :

La résolution de ces équations différentielles aux dérivées partielles nécessite des conditions aux limites.

Les conditions aux limites illustrées à la figure 1 sont les suivantes.

Sur les parois $u=v=0$ et $T=T_h$ et $c=c_h$

À l'entrée $u = 6u_0 \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right), v = 0, T = T_0 = c = c_0$

À la sortie , $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0$

Les conditions aux limites adimensionnelles s'écrivent :

Sur les parois $U=V=0$ et $\theta = 1$ et $C = 1$

À l'entrée $U = 6(Y - Y^2)$, $V = 0$, $\theta = \theta_0 = C = C_0$

À la sortie , $\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial C}{\partial X} = 0$

II-4- Les grandeurs caractéristiques

II-4-1- Le nombre Nusselt :

En assimilant le transfert de chaleur par convection au transfert de chaleur par conduction le long du mur chaud :

$$h\Delta T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{II-16})$$

L'introduction des variables adimensionnelles, définies dans les équations (II-10), dans l'équation (II-16), donne :

$$Nu = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} \quad (\text{II-17})$$

Le nombre moyen de Nusselt est obtenu en intégrant le nombre de Nusselt local le long de la plaque chaude verticale :

$$Nu_{moy} = - \frac{1}{A} \int_0^A \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} \quad (\text{II-18})$$

II-4-2- Fonction du courant :

La fonction du courant est calculée à partir de

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad \text{Ou} \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{II-19})$$

II-4-3- Le nombre de Sherwood :

En assimilant le transfert de masse extrait par convection à la valeur ajoutée du transfert de masse :

$$h_s \Delta c = -D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{II-20})$$

L'introduction des variables sans dimension, définies dans l'équation (II-10), dans l'équation (II-20), donne :

$$Sh = - \left(\frac{\partial c}{\partial X} \right)_{X=0} \quad (\text{II-21})$$

Le nombre moyen de Sherwood est obtenu en intégrant le nombre Sherwood local sur la plaque chaude verticale :

$$Sh_{moy} = - \frac{1}{A} \int_0^A \left(\frac{\partial C}{\partial X} \right)_{x=0} \quad (\text{II-22})$$

Chapitre III-
RESOLUTION NUMERIQUE
DU PROBLE

III-1.Introduction :

L'augmentation rapide de la puissance des calculateurs a rendu possible le développement de codes commerciaux traitant les problèmes de transport dans les fluides. Les codes actuels utilisent 3 grandes familles de discrétisation :

- Les éléments finis.
- Les différences finis.
- Les volumes finis.

III-2.Méthode numérique:

Pour résoudre le système d'équations présenté dans le chapitre précédent, nous avons choisi la procédure des volumes finis, puisque elle se distingue par sa fiabilité aux résultats, son adaptation au problème physique, sa possibilité de traiter des géométries complexe, sa garantie pour conservation de masse et quantité de mouvement et tout scalaire transportable sur chaque volume de contrôle, dans tout le domaine de calcul ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numérique. La méthode volume finis a été décrite pour première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar ; Cette méthode largement utilisée en mécanique des fluides. Elle est utilisée en thermique surtout lorsqu'il y a un couplage fort entre les champs des températures et champs de vitesse.

III 3. Le principe de la méthode des volumes finis :

Le principe de la méthode des volumes finis, consiste à partager le domaine de calcul en un ensemble de petits volumes élémentaires. Chaque volume de contrôle contient un nœud central de telle sorte que l'ensemble de ces nœuds forme une grille. Pour deux nœuds consécutifs, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un coté commun appelé interface et de manière a ce que la réunion de tous les volumes forme le domaine de calcul. Ceci va mettre en évidence la conservation des flux locaux et globaux au sein du volume de contrôle et du domaine. L'idée principale de cette méthode est d'intégrer les équations différentielles dans le volume de contrôle, afin d'aboutir a une équation algébrique.

L'assemblage de toutes les équations, relatives aux différents volumes du domaine, se traduit par un système d'équations algébriques qu'il faudra ensuite résoudre par des méthodes adéquates.

III -4. Le maillage :

Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes de contrôles, chaque point du domaine est localisé à l'aide des indices (i, j).

Chaque volume de contrôle de dimension $\Delta x \Delta y$ doit stocker les grandeurs scalaires P et T dans le nœud du maillage qui se situe au centre du volume de contrôle (Figure III-1) et les grandeurs vectorielles U et V au milieu des segments reliant les deux nœuds adjacents . Les quatre faces sont repérées à l'aide des quatre points cardinaux (e,w, n,s) et les centres des volumes adjacents par E, W , N , S . Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volumes de contrôle typique (Figure III-2) et pour l'expression des grandeurs vectorielles, le volume de contrôle décalé vers la droite (Figure III-3) et décaler vers le haut (Figure III-4)

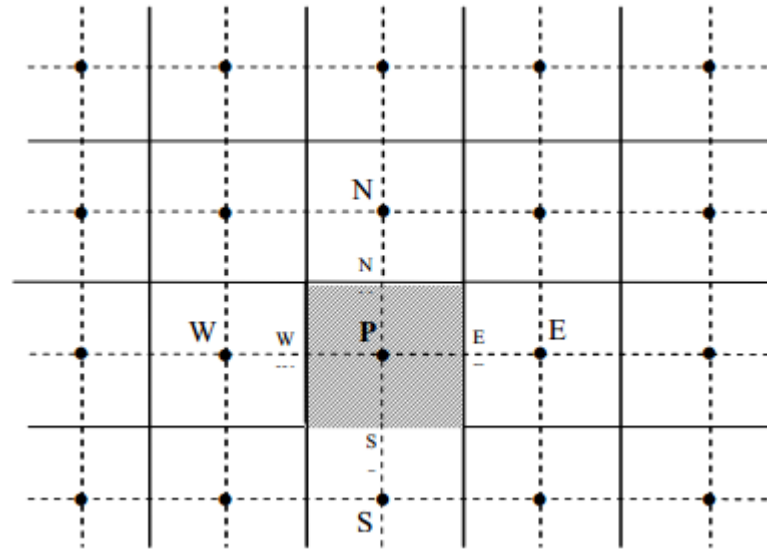


Figure (III-1) : Volume de contrôle bidimensionnel

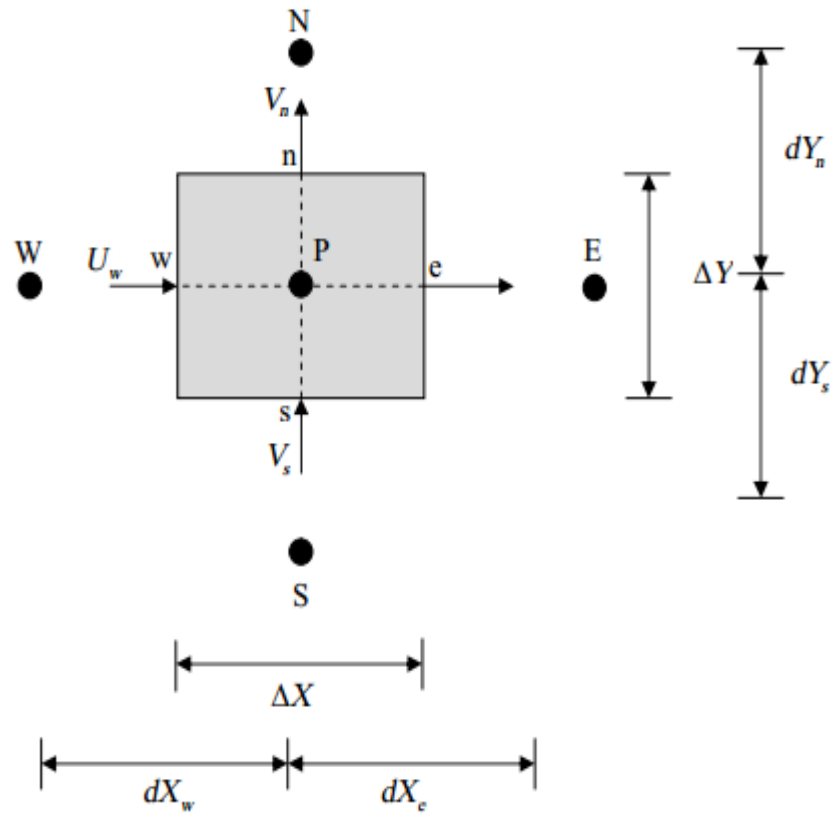


Figure (III-2) : Volume de contrôle typique.

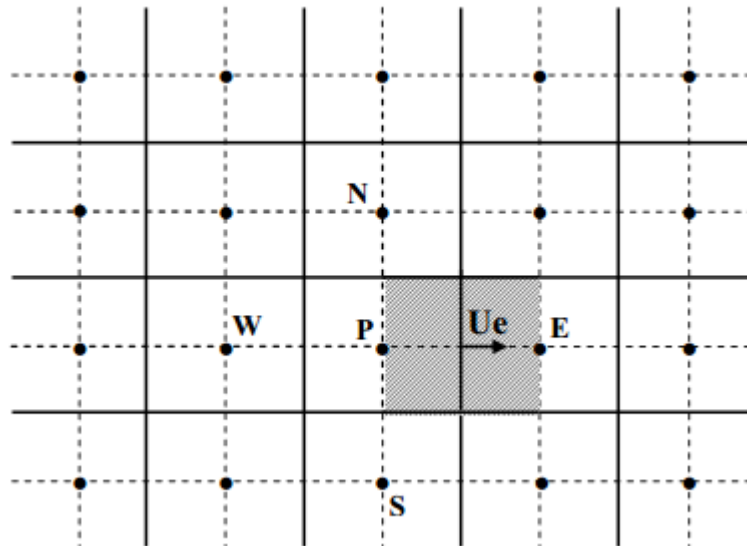


Figure (III-3) : Volume de contrôle décalé vers la droite

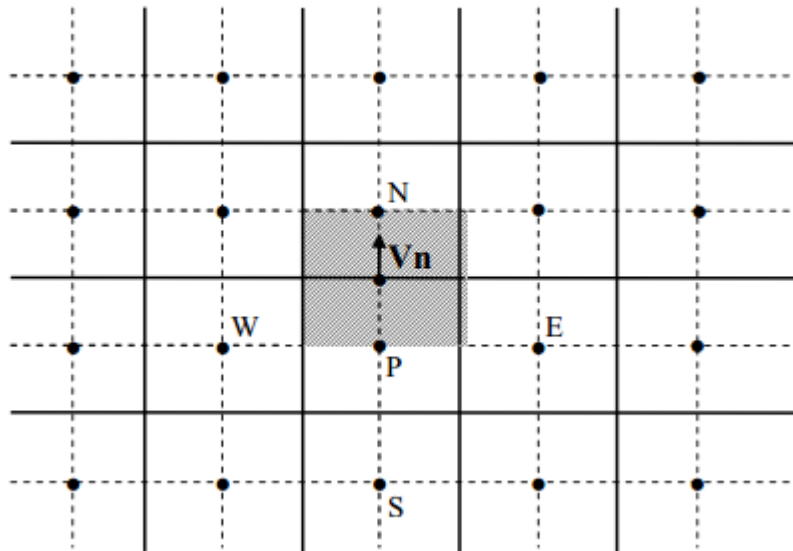


Figure (III-4) : Volume de contrôle décalé vers le haut

III -5. Forme générale de l'équation de transport :

L'équation de transport d'une entité physique quelconque f peut être exprimée d'une façon générale par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} (U \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right] + S\phi \quad (\text{III-1})$$

Dans le système cartésien (X, Y) et pour un écoulement permanent incompressible, l'équation générale de transport s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial(U\phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y}}_A = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right]}_B + \underbrace{S\phi}_C \quad (\text{III-2})$$

Où :

A : Terme de transport par convection.

B : Terme de transport par diffusion.

C : Terme source.

ϕ : Variable généralisée.

Γ : Diffusivité.

Le tableau suivant rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent le

Phénomène considéré dans cette étude.

Equation	Variable	Coefficient de Diffusion	Terme source
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement selon X	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Quantité de mouvement selon Y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Gr}{Re^2}(\theta + NC)$
Energie	θ	$\frac{1}{RePr}$	0
Concentration	C	$\frac{1}{RePrLe}$	0

Tableau III -1 : les différents termes de l'équation de transport

III-6. La discrétisation des équations:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial U\phi}{\partial X} dXdY + \frac{\partial U\phi}{\partial x} dXdY = \int_w^e \int_s^n \Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) dXdY + \int_w^e \int_s^n S_\phi dx dy \quad (III-3)$$

Intégration du terme convectif :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial U\phi}{\partial X} dXdY + \frac{\partial U\phi}{\partial x} dXdY = ((U\phi)_e - (U\phi)_w)\Delta Y + ((V\phi)_n - (V\phi)_s)\Delta X \quad (III-4)$$

Intégration du terme diffusif :

$$\int_w^e \int_s^n \Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) dXdY = \Gamma \left[\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e + \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right) \Delta Y + \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right) \Delta X \right] \quad (III-5)$$

Alors l'équation (III-3) devient :

$$((U\phi)_e - (U\phi)_w)\Delta Y + ((V\phi)_n - (V\phi)_s)\Delta X = \Gamma \left[\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e + \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right) \Delta Y + \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right) \Delta X \right] + \int_w^e \int_s^n S_\phi dx dy \quad (III-6)$$

Pour évaluer $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$ nous choisissons une interpolation entre les nœuds voisins, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\phi_e &= \frac{\phi_E + \phi_P}{2} ; \\ \phi_w &= \frac{\phi_W + \phi_P}{2} ; \\ \phi_n &= \frac{\phi_N + \phi_P}{2} ; \\ \phi_s &= \frac{\phi_S + \phi_P}{2} ;\end{aligned}\tag{III-7}$$

De la même manière, pour les gradients :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X_e} ; \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X_w} ; \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta Y_n} ; \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta Y_s} ;\end{aligned}\tag{III-8}$$

La relation (III -6) en tenant compte des relations (III -7) et (III -8) devient :

$$\begin{aligned}\phi_P \left[\frac{U_e \Delta y}{2} - \frac{U_w \Delta y}{2} + \frac{V_n \Delta y}{2} - \frac{V_s \Delta y}{2} + \frac{\Gamma_E \Delta y}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_W \Delta y}{\delta x_w} + \frac{\Gamma_N \Delta x}{\delta y_n} + \frac{\Gamma_S \Delta x}{\delta y_s} \right] &= \phi_E \left[\frac{\Gamma_E \Delta y}{\delta x_e} - \frac{U_e \Delta y}{2} \right] + \phi_W \left[\frac{\Gamma_W \Delta y}{\delta x_w} - \frac{U_w \Delta y}{2} \right] + \\ \phi_N \left[\frac{\Gamma_N \Delta x}{\delta y_n} - \frac{V_n \Delta y}{2} \right] + \phi_S \left[\frac{\Gamma_S \Delta x}{\delta y_s} - \frac{V_s \Delta y}{2} \right] + \int_w^e \int_s^n S_\phi dx dy &\tag{III-9}\end{aligned}$$

L'intégration du terme source sur tout le volume de contrôle se crée comme suit :

$$\int_w^e \int_s^n S_\phi dx dy = \int_w^e \left[\int_s^n S_\phi dx \right] dy = \bar{S}_\phi \Delta x \Delta y \tag{III-10}$$

$$\bar{S}_\phi = S_C + S_P \phi_P$$

Où S_C est la partie constante, qui ne dépend pas explicitement de S_P . S_P est la pente de ϕ_P .

Finalement, on obtient une équation discrétisée pour la variable sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + \phi_W \phi_W + b \tag{III-11}$$

Et

$$b = S_C \Delta x \Delta y$$

Et le coefficient du nœud central P :

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N + F_e - F_w + F_n - F_s$$

Avec :

$$a_E = -\frac{1}{2}F_e + D_E ;$$

$$a_W = -\frac{1}{2}F_w + D_W ; \text{(III-12)}$$

$$a_N = -\frac{1}{2}F_n + D_N ;$$

$$a_S = -\frac{1}{2}F_s + D_S ;$$

Les coefficients de l'équation (III -11) comportent un assemblage entre le diffusif D et les flux convectif F aux interfaces des volumes de contrôle. Les valeurs de F et D pour chaque interface e, w, n et s du volume de contrôle sont données par les relations suivants :

$$F_e = u_e \Delta y ;$$

$$F_w = u_w \Delta y ; \quad \text{(III-13)}$$

$$F_n = v_n \Delta y ;$$

$$F_s = v_s \Delta y ;$$

Et :

$$D_E = \frac{\Gamma_E \Delta y}{\delta x_e} ;$$

$$D_W = \frac{\Gamma_W \Delta y}{\delta x_w} ; \quad \text{(III-14)}$$

$$D_N = \frac{\Gamma_N \Delta y}{\delta x_n} ;$$

$$D_S = \frac{\Gamma_S \Delta y}{\delta x_s} ;$$

III-7. Les schémas de discrétisation :

Nous choisissons le schéma de discrétisation en tenant compte de plusieurs facteurs (le problème à traiter, la concordance de ces résultats avec les résultats physique, et la stabilité numérique).

Les différents schémas les plus utilisés sont :

- Schémas des différences centrées.
- Schémas décentrées amont (upwind premier et second ordres).
- schémas hybride.

- schémas power-law (lois puissance).

Schéma	a_E	a_W
Centré	$a_E = -\frac{1}{2}F_e + D_E$	$a_W = \frac{1}{2}F_e + D_E$
Upwind	$a_E = D_E + [-F_e, 0]$	$a_W = D_W + [-F_w, 0]$
Exponentiel	$a_E = \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1}$	$a_W = \frac{F_w \exp(P_w)}{\exp(P_w) - 1}$
Hybride	$a_E = [-F_e, -\frac{1}{2}F_e + D_E, 0]$	$a_W = [-F_w, \frac{1}{2}F_w + D_W, 0]$
Power-law	$a_E = D_E \left[0, \left(1 - \frac{0.1 F_e }{D_E} \right)^5 \right] + [0, -F_e]$	$a_W = D_W \left[0, \left(1 - \frac{0.1 F_w }{D_W} \right)^5 \right] + [0, F_w]$

Tableau (III -2) : Les coefficients pour différents schémas

Dans ce travail, nous avons utilisé : le schéma power-Law, ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection diffusion, les expressions de loi de puissance ne sont pas particulièrement coûteuses à calculer, ainsi que les formules de loi de puissance fournissent une très bonne représentation de comportement exponentiel.

Les termes convectifs :

Les équations de la vitesse u :

$$F_e = 0.5 * (u_{i,j} + u_{i+1,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_w = 0.5 * (u_{i,j} + u_{i-1,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_n = 0.5 * (v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}) * \Delta x(i);$$

$$F_s = 0.5 * (v_{i,j} + v_{i-1,j}) * \Delta x(i);$$

On propose : $\Gamma_E = \Gamma_W = \Gamma_N = \Gamma_S = \frac{1}{Re}$

$$D_E = \frac{1}{Re} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_e(i)};$$

$$D_W = \frac{1}{Re} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_w(i)};$$

$$D_N = \frac{1}{Re} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_n(j)};$$

$$D_S = \frac{1}{Re} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_s(j)};$$

$$a_E = D_E * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_E} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_e, 0];$$

$$a_W = D_W * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_W} \right| \right)^5 \right] + \max[F_w, 0];$$

$$a_N = D_N * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_N} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_n, 0];$$

$$a_S = D_S * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_S} \right| \right)^5 \right] + \max[F_s, 0];$$

Les équations de la vitesse v :

$$F_e = 0.5 * (u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) * \Delta y(j);$$

$$F_w = 0.5 * (u_{i,j} + u_{i,j-1}) * \Delta y(j);$$

$$F_n = 0.5 * (v_{i,j} + v_{i,j+1}) * \Delta x(i);$$

$$F_s = 0.5 * (v_{i,j} + v_{i,j-1}) * \Delta x(i);$$

$$D_E = \frac{1}{Re} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_e(i)};$$

$$D_W = \frac{1}{Re} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_w(i)};$$

$$D_N = \frac{1}{Re} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_n(j)};$$

$$D_S = \frac{1}{Re} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_s(j)};$$

$$a_E = D_E * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_E} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_e, 0];$$

$$a_W = D_W * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_W} \right| \right)^5 \right] + \max[F_w, 0];$$

$$a_N = D_N * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_N} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_n, 0];$$

$$a_S = D_S * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_S} \right| \right)^5 \right] + \max[F_s, 0];$$

Les équations de la température T :

$$F_e = (u_{i+1,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_w = (u_{i,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_n = (v_{i,j+1}) * \Delta x(i);$$

$$F_s = (v_{i,j}) * \Delta x(i);$$

On propose :

$$\Gamma_E = \Gamma_W = \Gamma_N = \Gamma_S = \frac{1}{RePr}$$

$$D_E = \frac{1}{RePr} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_e(i)};$$

$$D_W = \frac{1}{RePr} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_w(i)};$$

$$D_N = \frac{1}{RePr} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_n(j)};$$

$$D_S = \frac{1}{RePr} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_s(j)};$$

$$a_E = D_E * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_E} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_e, 0];$$

$$a_W = D_W * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_W} \right| \right)^5 \right] + \max[F_w, 0];$$

$$a_N = D_N * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_N} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_n, 0];$$

$$a_S = D_S * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_S} \right| \right)^5 \right] + \max[F_s, 0];$$

Les équations de la C :

$$F_e = (u_{i+1,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_w = (u_{i,j}) * \Delta y(j);$$

$$F_n = (v_{i,j+1}) * \Delta x(i);$$

$$F_s = (v_{i,j}) * \Delta x(i);$$

On propose :

$$\Gamma_E = \Gamma_W = \Gamma_N = \Gamma_S = \frac{1}{RePrLe}$$

$$D_E = \frac{1}{RePrLe} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_e(i)};$$

$$D_W = \frac{1}{RePrLe} \frac{\Delta y(j)}{\delta x_w(i)};$$

$$D_N = \frac{1}{RePrLe} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_n(j)};$$

$$D_S = \frac{1}{RePrLe} \frac{\Delta x(i)}{\delta y_s(j)};$$

$$a_E = D_E * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_E} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_e, 0];$$

$$a_W = D_W * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_W} \right| \right)^5 \right] + \max[F_w, 0];$$

$$a_N = D_N * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_N} \right| \right)^5 \right] + \max[-F_n, 0];$$

$$a_S = D_S * \max \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_S} \right| \right)^5 \right] + \max[F_s, 0];$$

III-8. Algorithme SIMPLE :

L'algorithme SIMPLE (semi-Implicit Method for pressure-Linked Equations) a été créé par Patankar et Spalding (1972), l'idée générale de cet algorithme est de prédire et corriger la pression et les vitesses, dans un procédé itératif, jusqu'à ce que ces dernières vérifient les équations du phénomène.

Pour formuler SIMPLE, on prend l'équation de discrétisation de l'équation de quantité de mouvement :

$$a_{i,j}u_{i,j} = \Sigma a_{nb}u_{nb} + (P_{i-1,j} - P_{i,j})A_{i,j} + b_{i,j} \text{ (III-15)}$$

$$a_{i,j}v_{i,j} = \Sigma a_{nb}v_{nb} + (P_{i-1,j} - P_{i,j})A_{i,j} + b_{i,j} \text{ (III-16)}$$

$A_{i,j}$: les surfaces

$$\begin{cases} A_{i,j} = \frac{\Delta V_u}{\delta x_u} \text{ et } b_{i,j} = \bar{S}\Delta V_u \\ A_{i,j} = \frac{\Delta V_v}{\delta x_v} \text{ et } b_{i,j} = \bar{S}\Delta V_v \end{cases}$$

La première étape consiste à estimer ou prédire un champ de pression P^* pour obtenir des valeurs approximatives de la vitesse u^* et v^* à partir des équations suivantes :

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \Sigma a_{nb}u_{nb}^* + (P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \text{ (III-17)}$$

$$a_{i,j}v_{i,j}^* = \Sigma a_{nb}v_{nb}^* + (P_{i,j-1}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \text{ (III-18)}$$

On définit la correction de la pression P' comme la différence entre la pression correcte et la pression estimée P^* :

$$P = P^* + P' \quad (\text{III-19})$$

De façon similaire on définit la correction des vitesses u', v' comme la différence entre les vitesses correctes et les vitesses estimée u^*, v^* :

$$u = u^* + u' \quad (\text{III-20})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{III-21})$$

La soustraction des équations (III -17) et (III -18) des équations (III -15) et (III -16) respectivement, donne :

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \Sigma a_{VS}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(P_{i-1,j} - P_{i-1,j}^*) - (P_{i,j} - P_{i,j}^*)]A_{i,j} \quad (\text{III-22})$$

$$a_{i,j}(v_{i,j} - v_{i,j}^*) = \Sigma a_{VS}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(P_{i,j-1} - P_{i,j-1}^*) - (P_{i,j} - P_{i,j}^*)]A_{i,j} \quad (\text{III-23})$$

En utilisant les formules de correction (III -19), (III -20) et (III -21) les équations (III -22)et (III -23) peuvent être réécrites ainsi :

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \Sigma a_{nb}u'_{nb} + (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})A_{i,j} \quad (\text{III-24})$$

$$a_{i,j}v'_{i,j} = \Sigma a_{nb}v'_{nb} + (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})A_{i,j} \quad (\text{III-25})$$

A ce moment une approximation est introduite : les termes $\Sigma a_{nb}u'_{nb}$ et $\Sigma a_{nb}v'_{nb}$ sont négligés pour simplifier les équations (III -24) et (III -25).

L'omission de ces termes est la principale approximation de l'algorithme SIMPLE. On obtient :

$$u'_{i,j} = (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})d_{i,j} \quad (\text{III-26})$$

$$v'_{i,j} = (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})d_{i,j} \quad (\text{III-27})$$

$$\text{Avec : } d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$$

Les équations (III -26) et (III -27) décrivent les correction, qui doivent être appliquées aux vitesses à travers les formules (III -20) et (III -21) ce qui donne :

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})d_{i,j} \quad (\text{III-28})$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})d_{i,j} \quad (\text{III-29})$$

Des expressions similaires existent pour $u_{i+1,j}$ et $v_{i,j+1}$:

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + (P'_{i,j} - P'_{i+1,j})d_{i+1,j} \quad (\text{III-30})$$

$$v_{i,j+1} = v_{i,j+1}^* + (P'_{i,j} - P'_{i,j+1})d_{i,j+1} \quad (\text{III-31})$$

L'équation de continuité discrétisée, obtenue par l'intégration sur le volume contrôle, donnée est par la formule suivante :

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho u A)_{i,j+1} - (\rho u A)_{i,j}] = 0 \quad (\text{III-32})$$

En remplaçant les vitesses des équations (III -28) et (III -29) dans l'équation de la continuité discrétisée (III -32)

$$a_{i,j}P'_{i,j} = a_{i+1,j}P'_{i+1,j} + a_{i-1,j}P'_{i-1,j} + a_{i,j+1}P'_{i,j+1} + a_{i,j-1}P'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (\text{III-33})$$

$$\text{Avec } a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (\text{III-34})$$

$$a_{i+1,j} = (APd)_{i+1,j}$$

$$a_{i-1,j} = (APd)_{i-1,j} \quad (\text{III-35})$$

$$a_{i,j+1} = (APd)_{i,j+1}$$

$$a_{i,j-1} = (APd)_{i,j-1}$$

$$b'_{i,j} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j} + (\rho v^* A)_{i,j+1} \quad (\text{III-36})$$

L'algorithme SIMPLE est itératif et doit être exécuté séquentiellement.

La séquence des étapes dans l'algorithme SIMPLE est présentée sur la Figure (III-4)

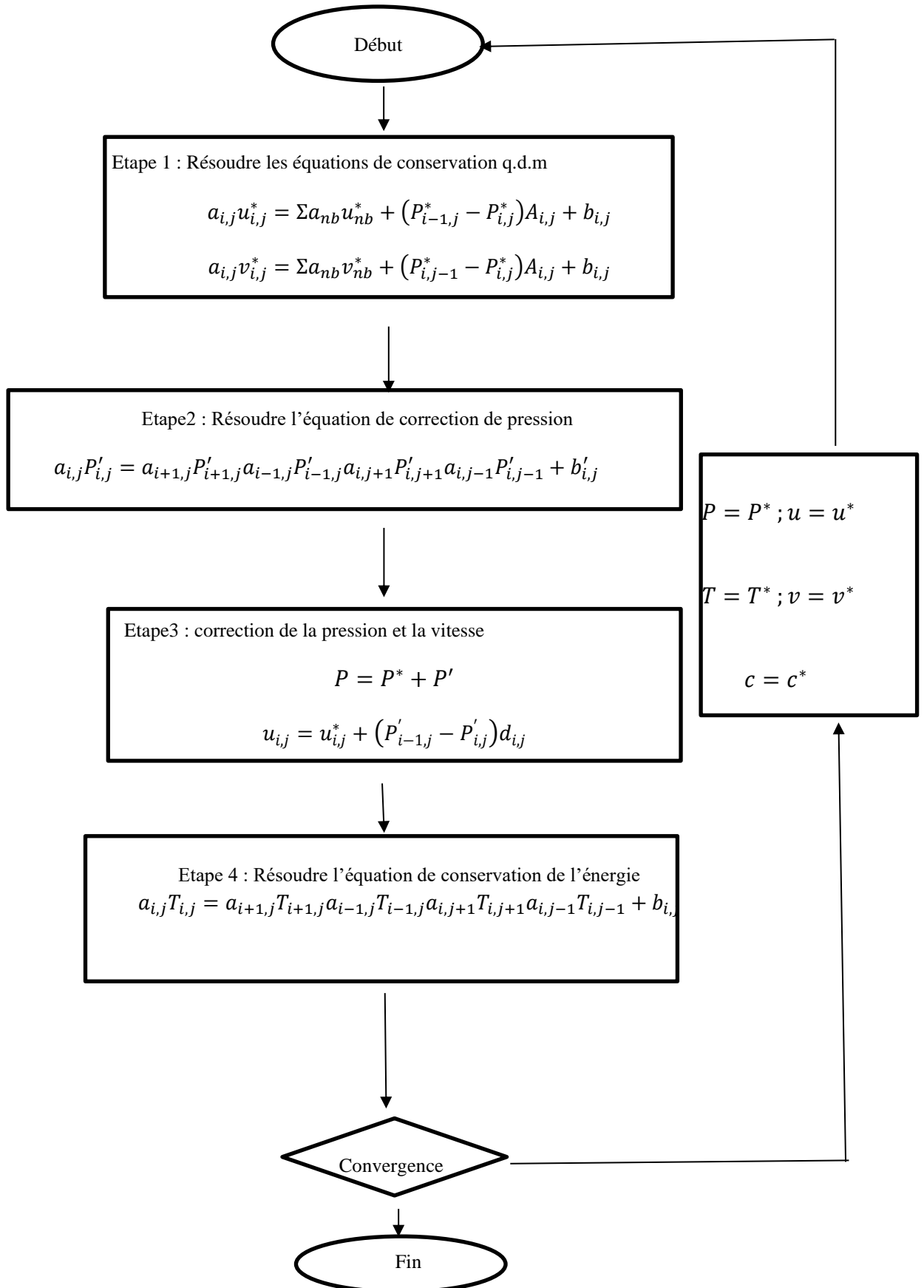


Figure (III-5) : Algorithme simple

Chapitre VI-
RESULTAS ET DISCUSSION

IV.1. Introduction:

Après avoir écrit le programme de calcul en langage Fortran, les principaux résultats obtenus reflétant les effets des différents paramètres sur la structure de l'écoulement et sur les champs thermiques et massiques pour la configuration considérée. La restitution de ces champs a été réalisée en utilisant le logiciel de visualisation Tecplot 360 quant aux courbes, elles ont été réalisées en utilisant le logiciel Origin Pro 2019b.

Le maillage utilisé est un maillage uniforme (200x50) comme le montre la figure (VI-1)

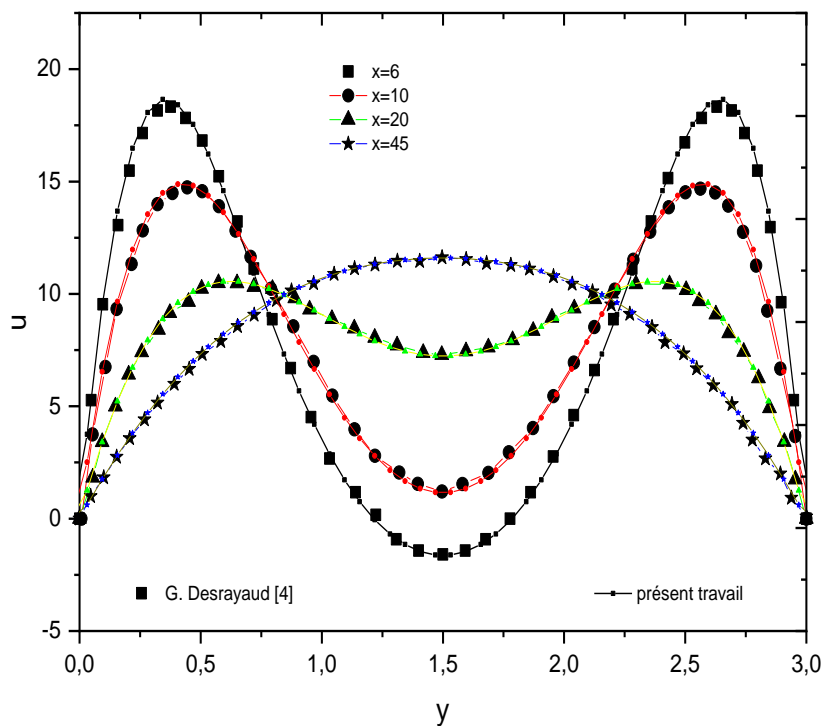


Figure (VI-1) Le maillage utilisé

Les résultats obtenus concernent les effets du nombre de Richardson Ri , le nombre de Lewis Le ainsi que le rapport entre le Grashof thermique et le Grashof massique présentés par les lignes de courants, et la distribution des températures et de la concentration ainsi que les nombres de Nusselt et de Sherwood (Nu , Sh) pour un fluide dont le nombre de Prandlt $Pr = 0.7$. Le nombre de Grashof thermique est pris constant et égale à 10^5 .

VI.2. Validation du code de calcul

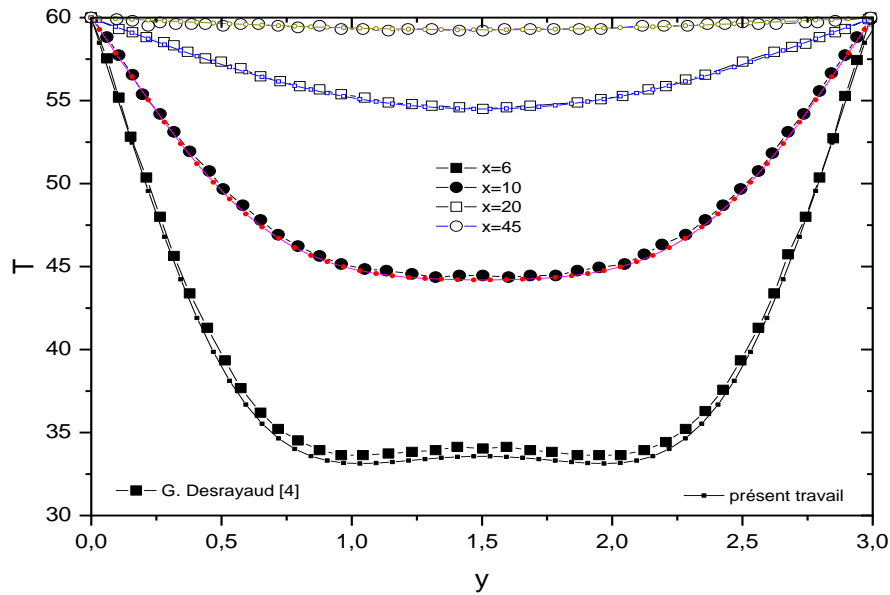
Le code numérique est validé en confrontant nos résultats à ceux de G. Desrayaud [4] pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible entre deux plaques parallèles chauffées à température uniforme pour $Gr=1.59 \times 10^5$, $Re=300$ et une longueur des plaques $L=50$. Nous avons obtenu une bonne concordance. Par conséquent, le code numérique utilisé est apte pour étudier le développement simultané du champ de vitesse, de température et de concentration dans le conduit présenté ultérieurement.



Figure(VI- 2) : comparaison entre les résultats du présent travail et celui de G.Desrayeud

[4]

Variation de la vitesse axiale



*Figure(VI- 3) : comparaison entre les résultats du présent travail et celui de G.Desrayeud [4]
Variation de la température*

VI.3. Résultats et discussion

Les isothermes et les lignes de courant ainsi que la variation du nombre de Nusselt, du nombre de Sherwood et du coefficient de frottement sont présentés pour un fluide dont le nombre de Prandtl $Pr=0.7$ à des différent nombre de Richardson ($Ri=0.5, 1, 5$), des différent valeurs du nombre de Le ($Le= 1, 5,10$) avec différents valeurs du rapport du Grashof massique au Grashof thermique $N=Gr_m /Gr_t$ ($N=0, 0.5, 1, -1, -1.5$).

VI.3.1. Effet du nombre de Richardson :

Le nombre de Richardson mesure l'effet de la convection libre relative à la convection forcée, on a fait varier sa valeur entre 0.5 et 1.5 pour $Sc =Pr=0.7$ ($Le=1$) et $Gr_t=Gr_c=5 \times 10^4$. Pour des très faibles du nombre de Richardson l'effet de la convection forcée est dominant, les lignes de courant sont presque des lignes droites. Avec l'augmentation du nombre de Richardson, on constate l'apparition de l'effet de la convection naturelle, une zone de recirculation composée de deux petites cellules qui tournent dans deux sens opposés formée à l'entrée de la conduite. En augmentant la valeur du nombre de Richardson, l'effet de la convection

naturelle devient dominant et la taille des cellules augmente et elles se rapprochent de plus en plus de l'entrée du canal (figure VI-4).

Le profil de la température est similaire à celui de la concentration ($Le=1$), on constate pour des faibles nombres de Richardson des températures élevées sont localisées au voisinage de la paroi chaude et envahies la majorité du conduit pour des valeurs élevées du nombre de Richardson (voir figure VI-5).

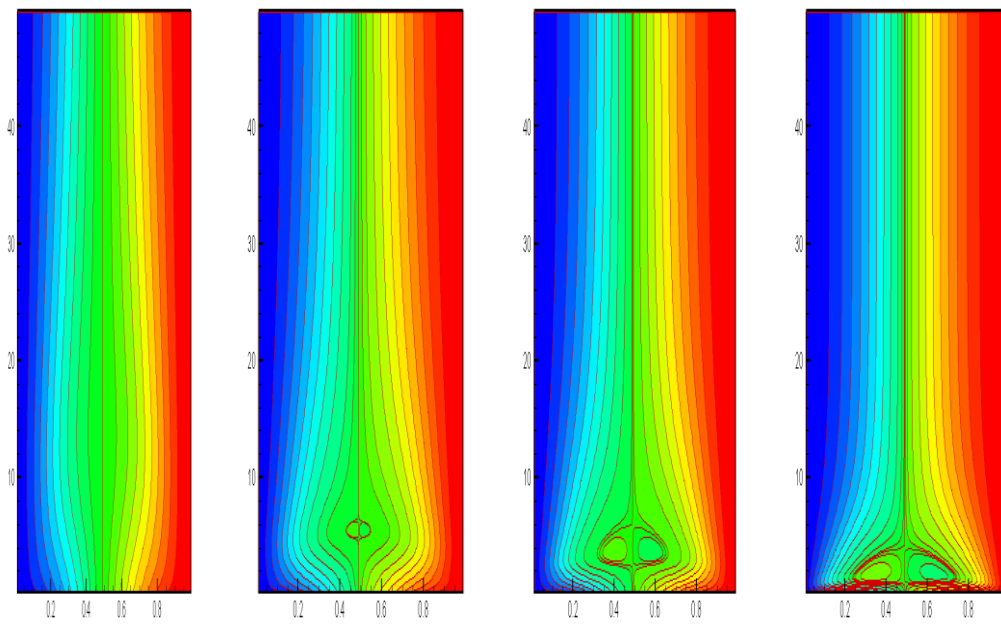


Figure (VI- 4) Les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Richardson (Du droite à gauche $Ri=0.1$, $Ri=0.5$, $Ri=1$, $Ri=1.5$)

Les cellules de recirculation provoquent un gradient élevé de vitesse à l'entrée et au voisinage des parois chaudes. Cet effet est reflété sur la variation du coefficient du frottement qui subit une augmentation rapide à l'entrée de la conduite. Cette augmentation est proportionnelle à la taille des cellules de recirculation, donc au nombre de Richardson (figure VI-6).

La figure VI-7) montre que le nombre de Nusselt subit une diminution rapide à l'entrée de la conduite à cause de l'écart de température entre l'entrée du canal et les parois chaudes. Cette diminution est suivie d'une légère augmentation qui dépend de la valeur du nombre de Richardson.

Le renversement de l'écoulement peut être observé sur la variation de la vitesse, on constate des valeurs négatives de celle-ci (Figure (VI-8)et Figure (VI-11))

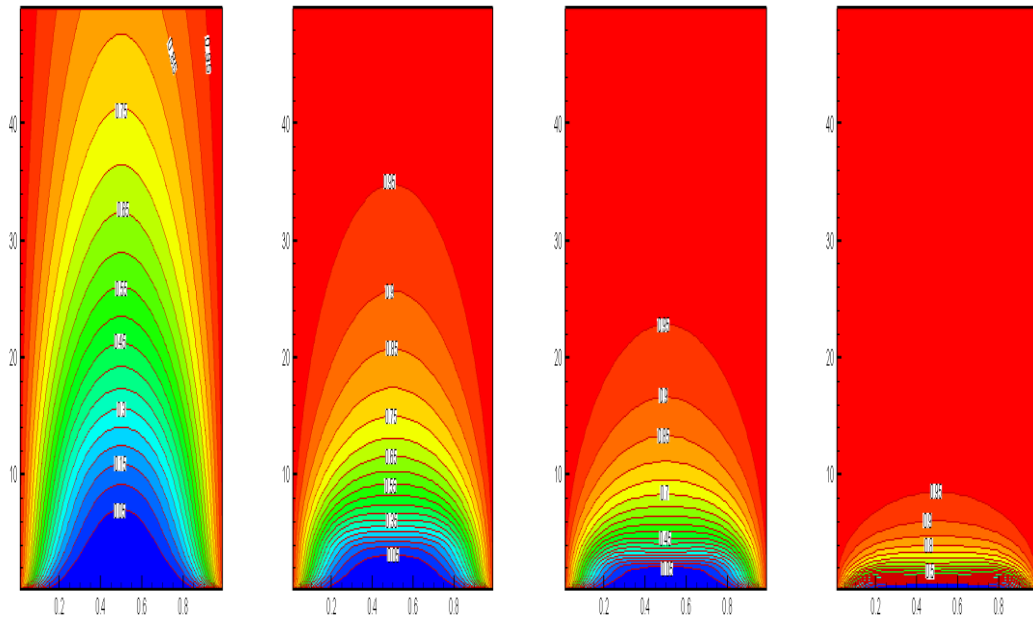


Figure (VI-5) Les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Richardson (Du droite à gauche Ri=0.1, Ri=0.5, Ri=1, Ri=1.5)

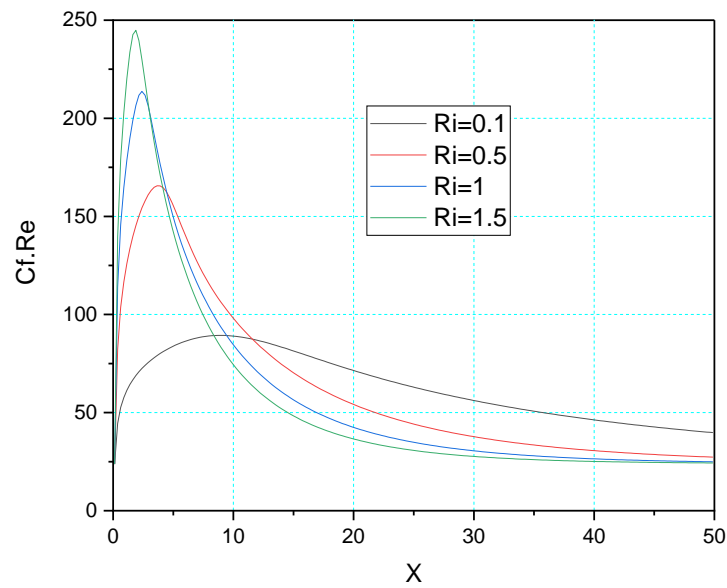


Figure (VI-6) Variation du coefficient de frottement pour différentes valeurs du nombre de Richardson

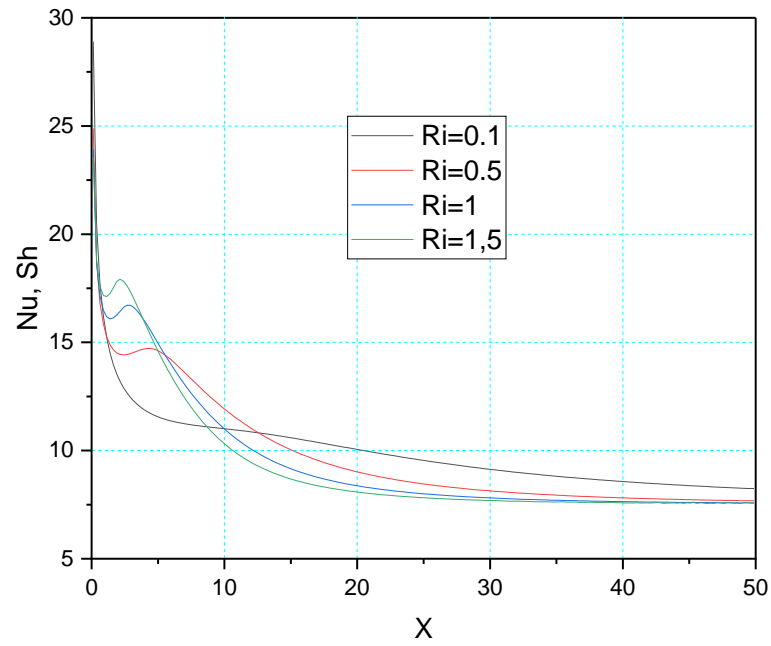


Figure (VI-7) Variation du nombre de Nusselt et du nombre de Scherwood pour différentes valeurs du nombre de Richardson

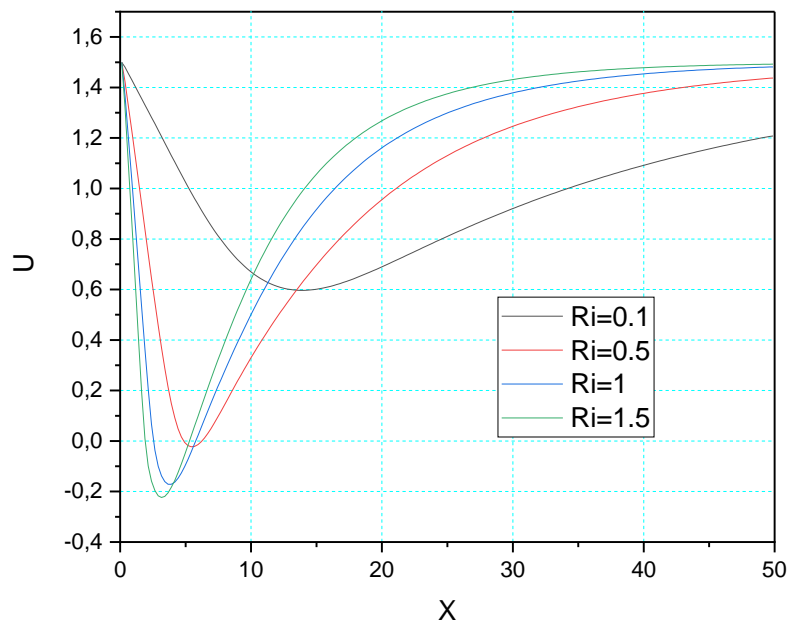


Figure (VI-8) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du nombre de Richardson

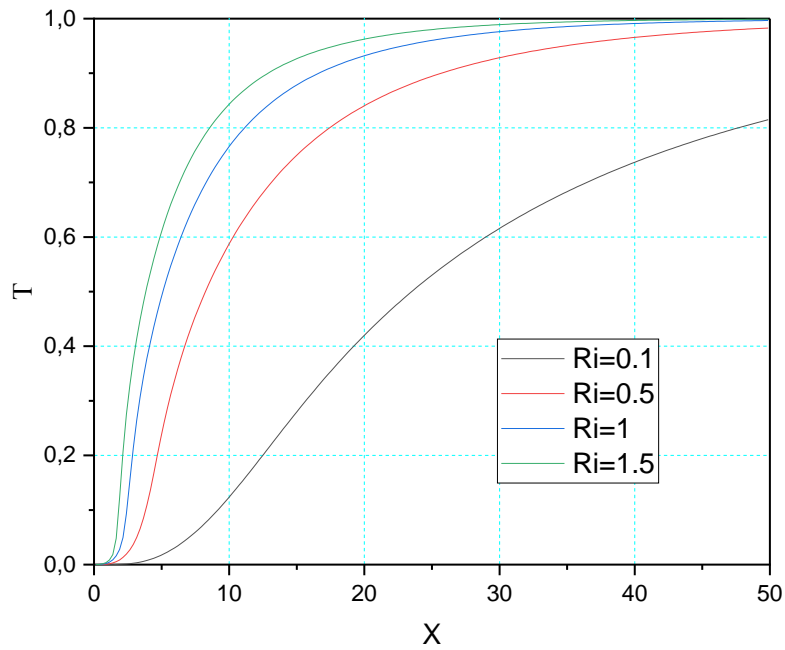


Figure (VI-9) Variation de la température au milieu du canal pour différents valeurs du nombre de Richardson

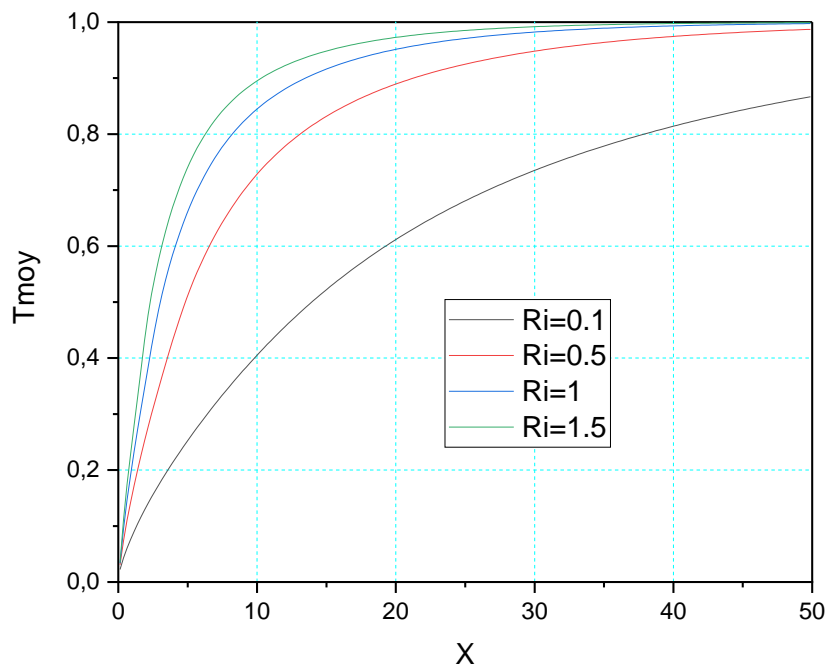


Figure (VI-10) Variation de la température moyenne du fluide pour différents valeurs du nombre de Richardson

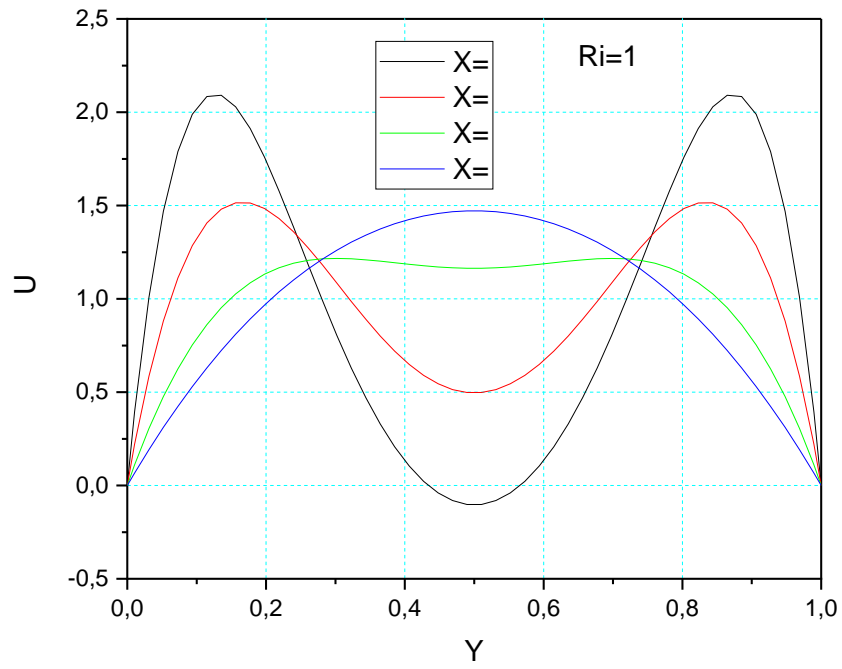


Figure (VI-11) Profil de la vitesse longitudinale à des différents positions pour $Ri=1$

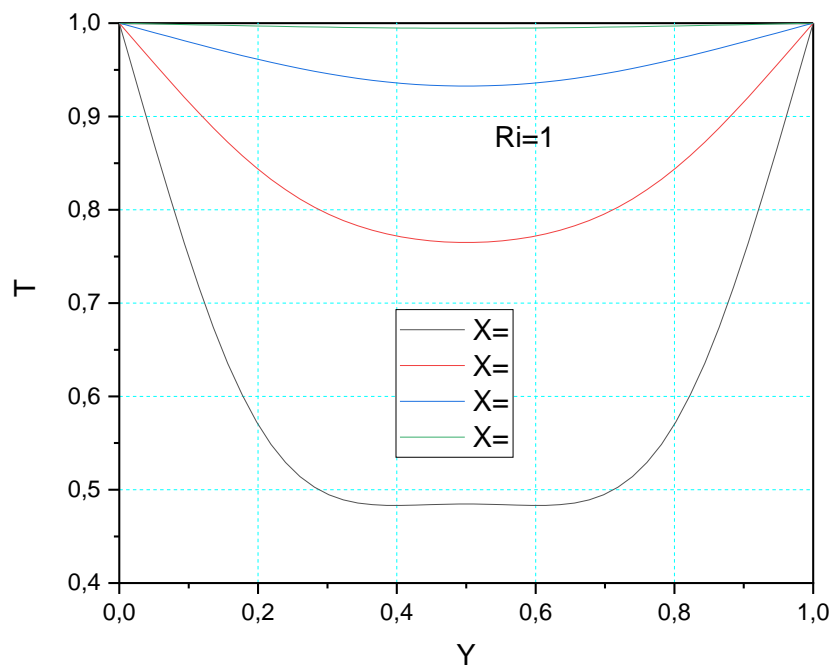


Figure (VI-12) Profil de la température à des différents positions pour $Ri=1$

VI.3.2. Effet du nombre de Lewis :

La dépendance du transport de chaleur et de masse sur le nombre de Lewis est démontrée sur la figure (VI-13). Le nombre de Lewis a varié entre 1 et 15, tandis que le nombre de Richardson Ri a été fixé à $0,01$ et $N = 1$.

Les résultats illustrent des variations significatives des contours de masse (concentration) dues à la dépréciation de la valeur de la diffusivité massique lors de l'augmentation des valeurs du nombre de Lewis. Des couches limites de masse (concentration) plus minces se forment le long des parois chaudes, ce qui signale une augmentation continue du taux de transfert de masse avec l'augmentation de Le . Cette augmentation se traduit par l'augmentation du nombre de Sherwood. (Figure VI-15)

Les résultats soulignent également que l'effet du nombre de Lewis sur les isothermes et les lignes de courant est aussi significatif. On peut observer que les cellules de recirculation tendent à disparaître avec l'augmentation du nombre de Lewis.

Le transfert de chaleur augmente avec la diminution du nombre de Lewis à l'entrée du canal et inversement dans la partie éloignée de l'entrée. (Figure VI-14).

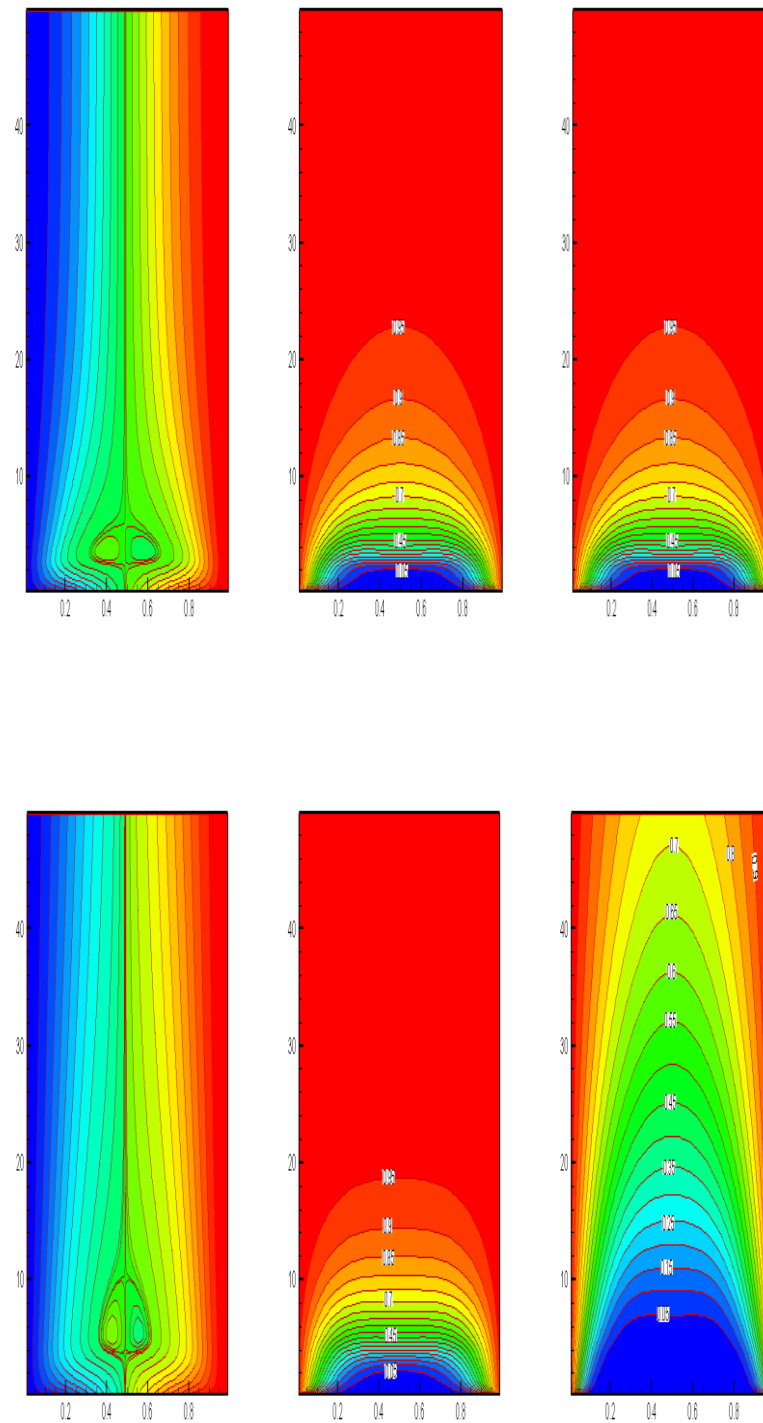


Figure (VI-13) Les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations pour différentes valeurs du nombre de Lewis (a- $Le=1$, b- $Le=5$)

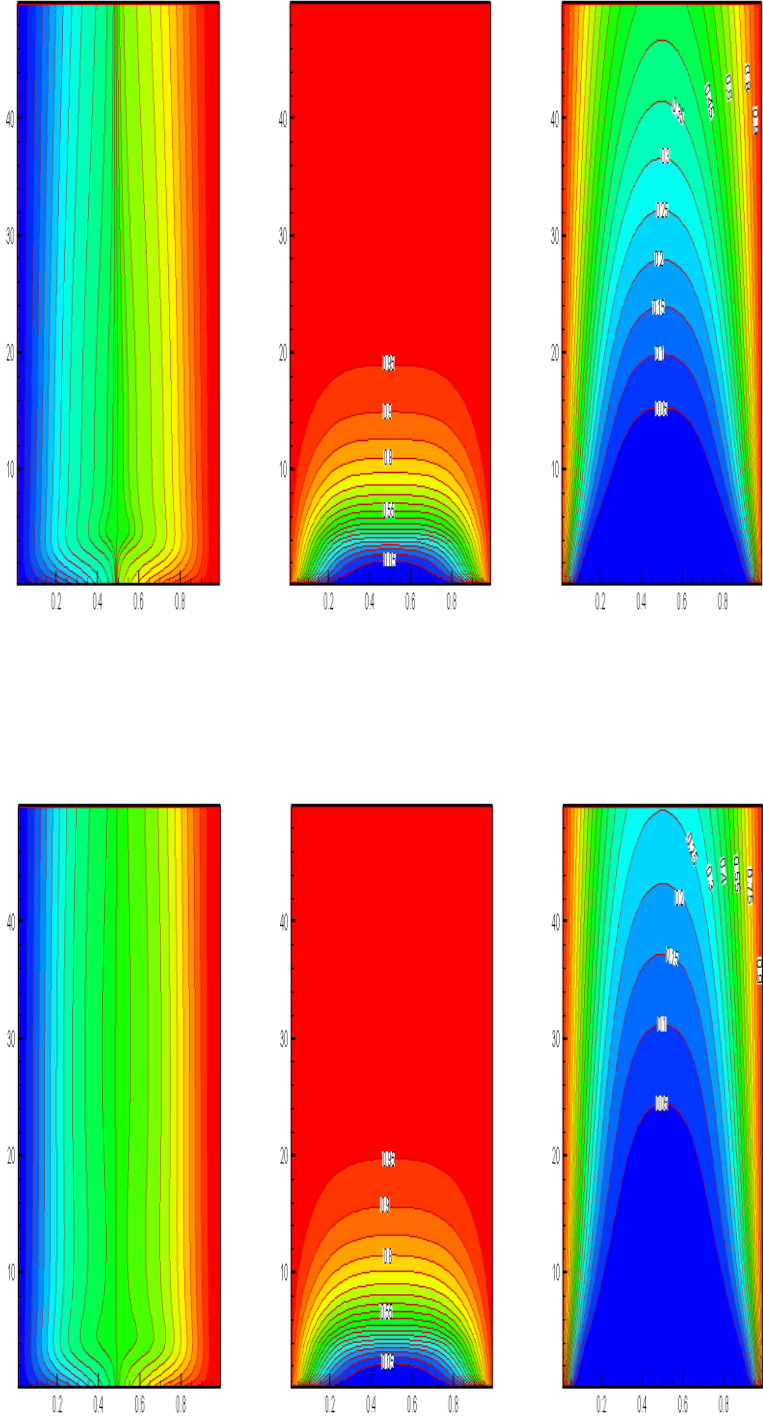


Figure (VI-13) Les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations pour différents valeurs du nombre de Lewis (c- $Le=10$, d- $Le=15$) (suite)

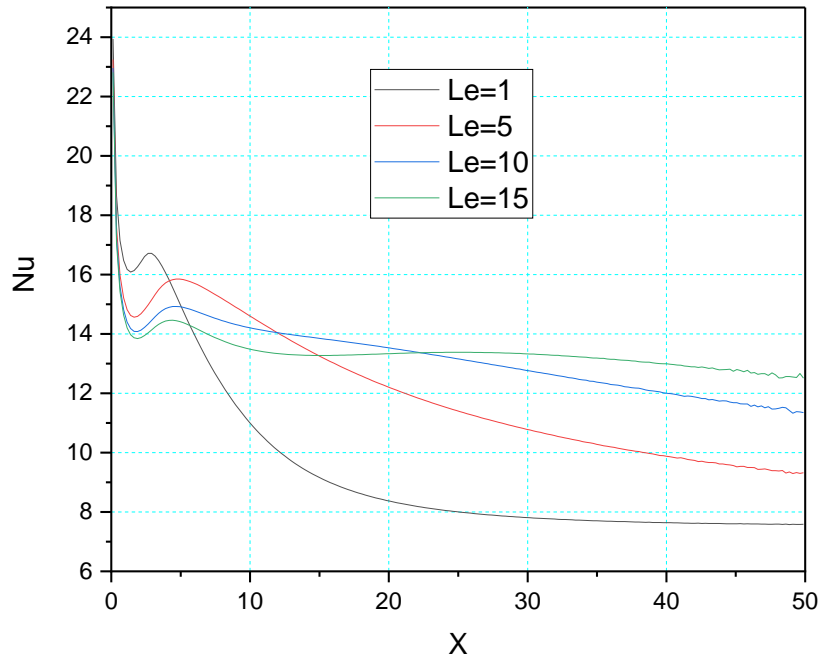


Figure (VI-14) Variation du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre Le

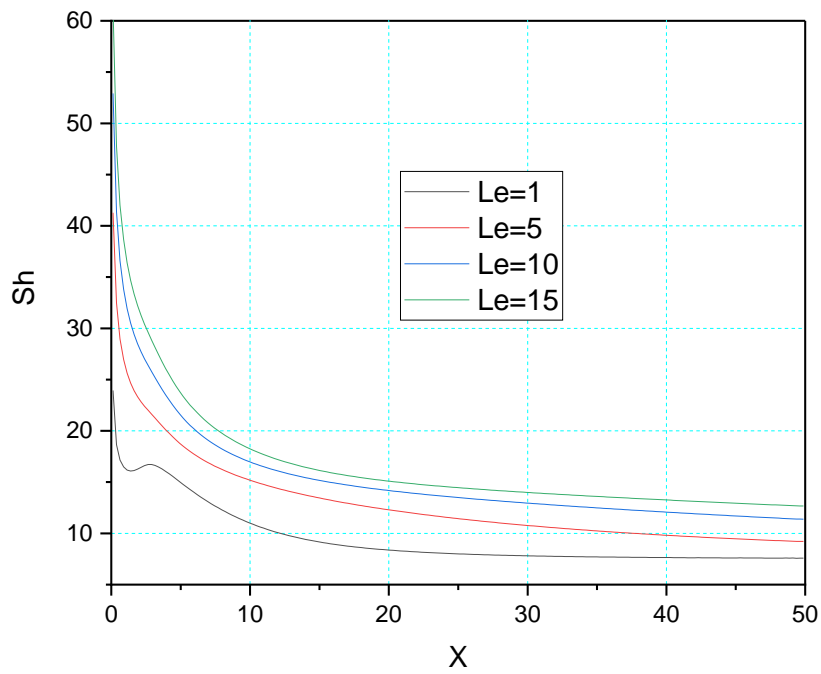


Figure (VI-15) Variation du nombre Sherwood pour différents valeurs du nombre Le

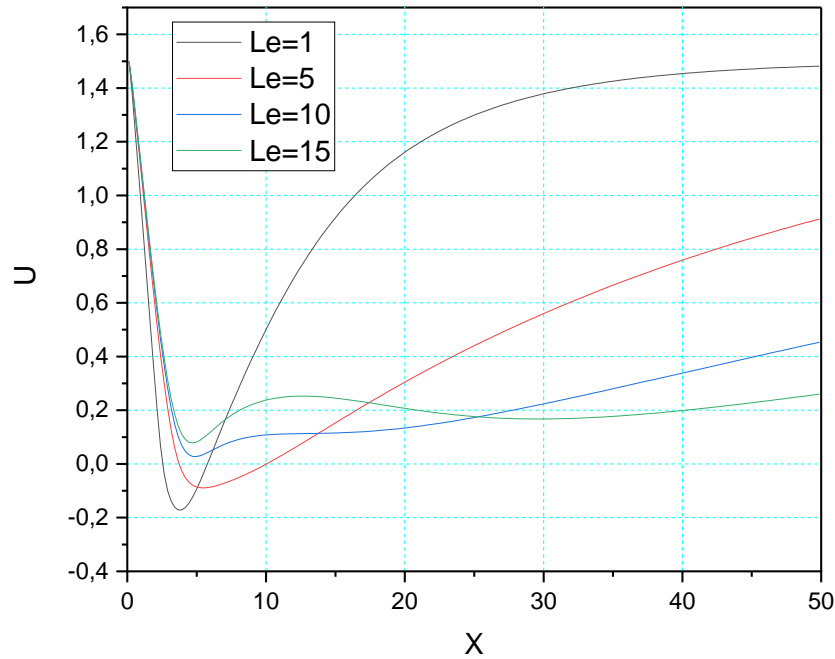


Figure (VI-16) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du nombre Lewis

VI.3.3. Effet du Rapport de flottabilité N :

L'effet du rapport de flottabilité N sur les lignes de courant et sur les isothermes pour un nombre de Lewis ($Le = 1$) est illustré sur la Figure (VI- 17). La valeur du nombre de Richardson a été fixée à 1. Le rapport N 'a été varié entre -1.5 et 10.

Lorsque $N = 0$, le phénomène de transport de masse (concentration) disparaît et le problème se réduit à une pure convection thermique. Pour des valeurs élevées de N ($N=5$ et $N=10$), on constate une concentration des lignes isothermes et iso-concentrations à l'entrée du conduit alors des gradients élevés des températures et des concentrations dans la direction longitudinale. Cet encombrement des lignes sera réduit pour des valeurs négatives du rapport N (écoulement opposé) et on constate la formation des zones de recirculation au voisinage des parois chaudes et l'allure des isothermes est similaire à la conduction pure.

Le taux de transfert augmente avec l'augmentation N , c.-à-d. avec l'augmentation des forces de flottabilité massique comme le montre la figure (VI- 18) et la figure (VI- 20).

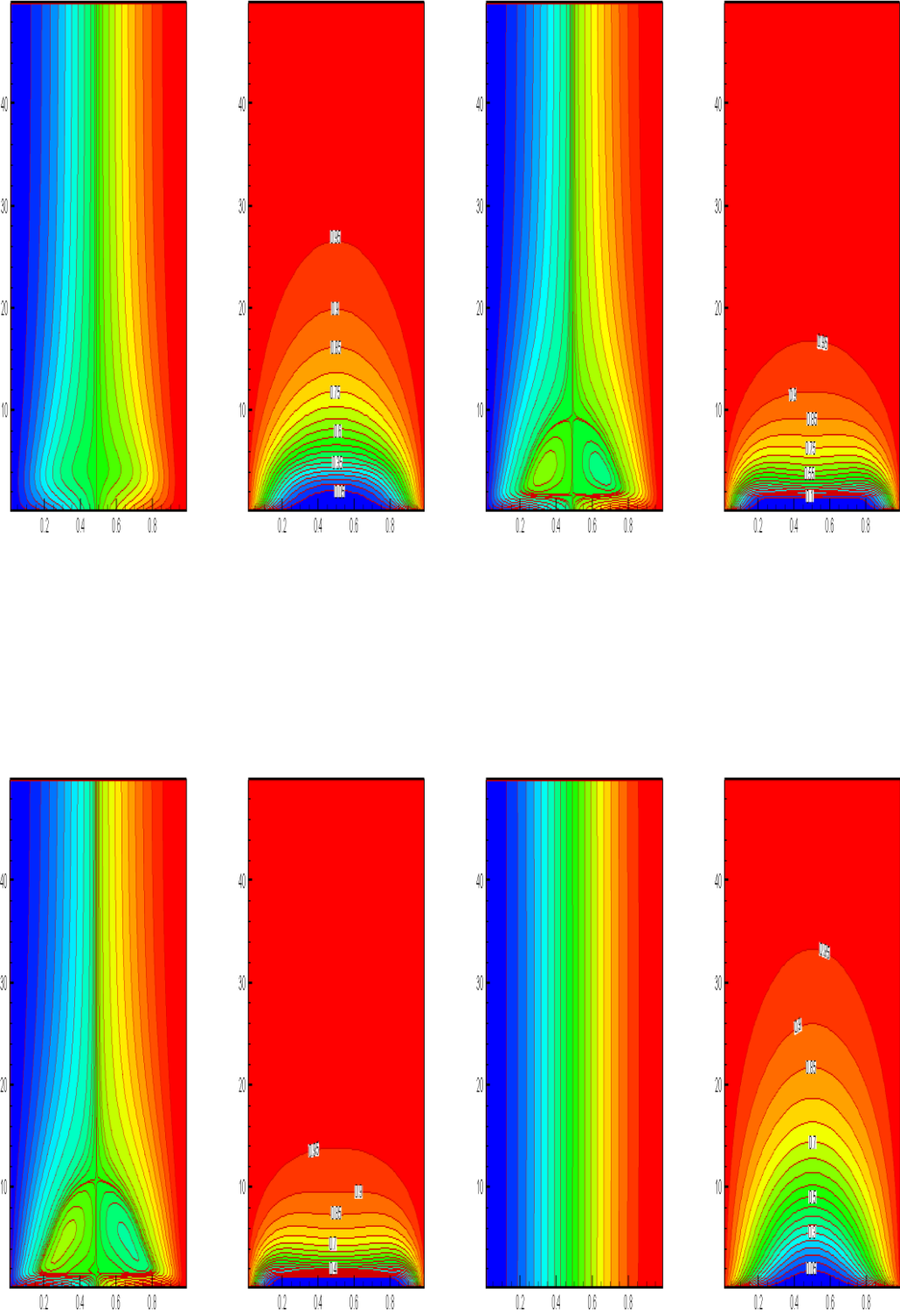


Figure (VI-17) Les lignes de courant et les isothermes pour différents valeurs du Rapport N (a- N=0, b- N=5, c- N=10, d- N=-1)

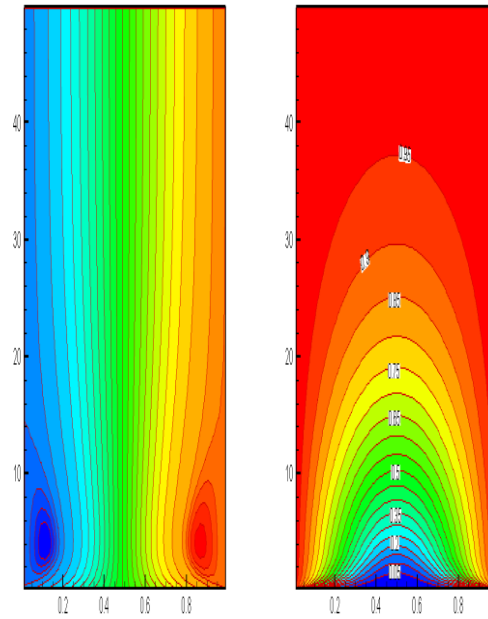


Figure (VI-17) Les lignes de courant et les isothermes pour différents valeurs du Rapport N ($e- N=-1.5$) (suite)

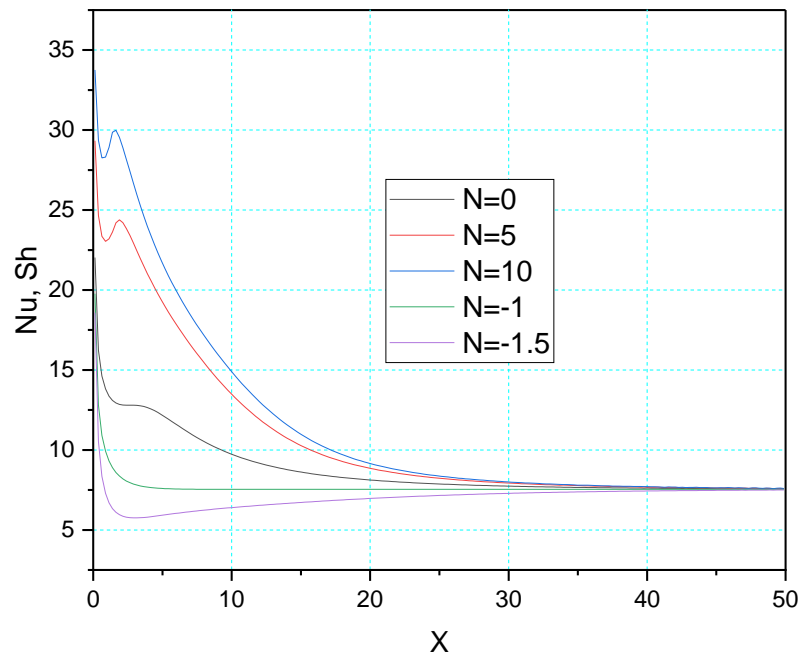


Figure (VI-18) Variation du nombre de Nusselt et du nombre de Scherwood pour différentes valeurs du rapport N

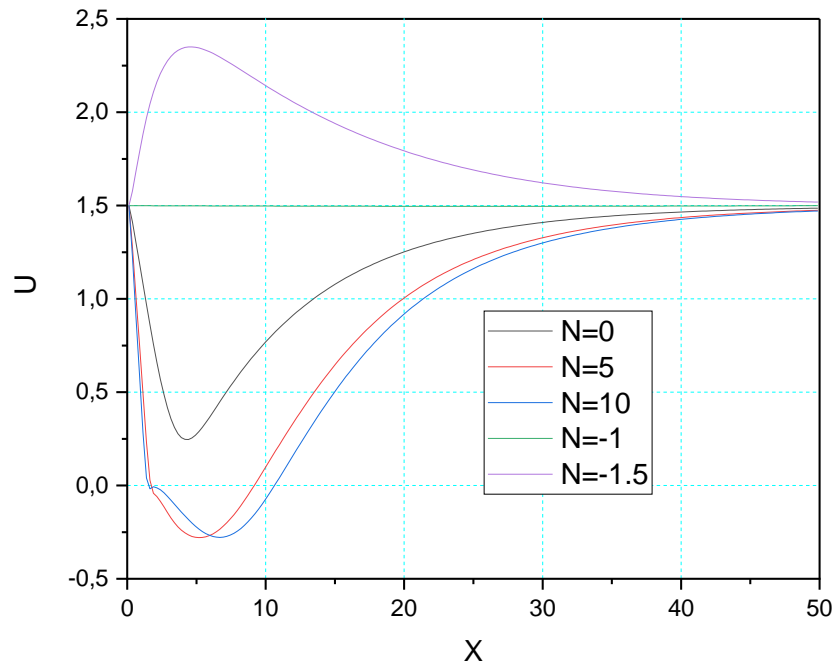


Figure (VI-19) Variation de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différents valeurs du rapport N

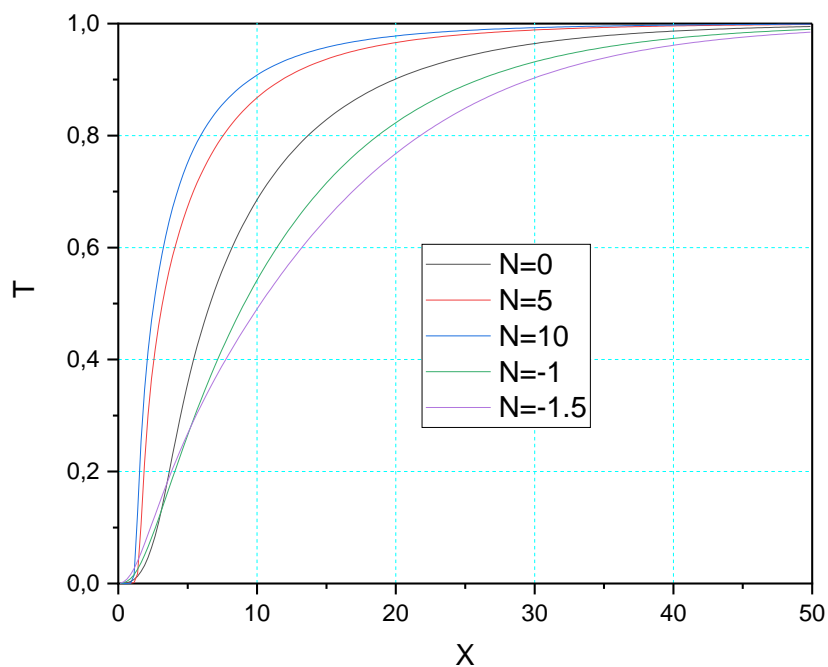


Figure (VI-20) Variation de la température au milieu du canal pour différents valeurs du rapport N

Conclusion

La présente étude porte sur le transfert de chaleur et de masse entre deux plaques parallèles et verticales traversées par un fluide binaire de $Pr = 0.7$ qui fonctionne sous des gradients combinés de température et de masse (concentration). Les résultats de ce travail illustrent que les caractéristiques de transfert de chaleur et de transfert de masse entre les deux plaques sont améliorées pour les faibles valeurs du nombre de Richardson Ri en raison de l'effet dominant de l'effet mécanique (convection forcée). Des couches limites de masse plus minces sont observées le long des parois chaudes. L'augmentation du nombre de Lewis entraîne des taux de transfert de masse plus élevés. Cependant, l'augmentation du rapport de flottabilité dans le sens positif provoque une augmentation à la fois des taux de transfert de chaleur et de masse à entre les deux plaques parallèles, tandis qu'un taux de flottabilité négatif conduit à la disparition de la zone de recirculation au milieu du canal et la naissance de deux tourbillons aux voisinages des parois chaudes.

Références bibliographiques

- [1] Patankar, S. V. (1980). Numerical Heat transfer and fluidflow. *Hemisphere Publishing Corporation and McGraw-Hill Book Company, New York.*
- [2] Orfi, J. et Galanis, N. (2002). Developing laminar mixed convection with heat and mass transfer in horizontal and vertical tubes. *Int. J. therm. Sci*, 41:319–331.
- [3] Ait Hammou, Z., Benhamou, B., Galanis, N. et Orfi, J. (2004). Laminar mixed convection of humid air in a vertical channel with evaporation or condensation at the wall. *Int. J. therm. Sci*, 43:531–539.
- [4] Desrayaud, G. et Lauriat, G. (2009). Flow reversal of laminar convection in entry region of symmetrically heated, vertical plate channels. *Int. J. Thermal Sci*, 48:2036–2045.
- [5] Salah El-Din, M. M. (2003). effect of thermal and mass buoyancy forces on the development of laminar mixed convection between vertical parallel plates with uniform wall heat and mass fluxes. *Int. J. therm. Sci*, 42:447–453.
- [6] H. K. Versteeg & W. Malalasekera (1995), An introduction to Computational fluid dynamics, *Longman Scientific & Technical.*
- [7] Abdalla M. Al-Amiri, Khalil M. Khanafer, Ioan Pop, Numerical simulation of combined thermal and mass transport in a square lid-driven cavity, *International Journal of Thermal Sciences* 46 (2007) 662–671

Résumé :

Dans ce travail nous proposons une étude numérique de la convection mixte laminaire d'un écoulement d'un fluide Newtonien et incompressible entre deux plaques parallèles et verticales. Les équations différentielles de conservation de masse, de quantité de mouvement de l'énergie et de la concentration ont été intégrées et discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats numériques obtenus pour différentes valeurs du nombre de Richardson, du nombre de Lewis et du rapport de flottabilité sont présentés sous forme de lignes de courant, lignes isothermes et variation du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood. Cette étude a été réalisée pour $Gr_t = 5 \times 10^4$. Tout au long de l'étude, la longueur du canal est constante et égale à $50.b$

Mots clé : convection mixte, plaques parallèles, transfert de chaleur et de masse, méthode des volumes finis

Abstract:

In this work we propose a numerical study of laminar mixed convection between two parallel and vertical plates. The fluid is Newtonian and incompressible. The differential equations for conservation of mass, momentum, energy and species were integrated and discretized using the finite volume method. Numerical results obtained for different values of Richardson number, Lewis number and buoyancy ratio are presented in the form of iso-contours of streamlines and temperature. In addition, the results for the variation of Nusselt number are discussed. This study was performed for $Gr_t = 5 \times 10^4$. Throughout the study, the length of the channel is taken constant and equal to $50.b$.

Keywords: mixed convection, parallel plates, heat and mass transfer, finite volume method

المخلص

في هذا العمل، نقترح دراسة عددية لانتقال حراري مختلط بين صفيحتين متوازيتين وبشكل عمودي. المائع نيوتوني وغير قابل للضغط. تم تكامل المعادلات التفاضلية للحفاظ على الكتلة، والزخم، والطاقة والتركيز وفكها باستخدام طريقة الحجم المحدود. يتم تقديم النتائج العددية التي تم الحصول عليها للقيم المختلفة لعدد ريشاردسون، عدد لوييس ونسبة الطفو في شكل معالم متساوية لخطوط للتيار ودرجة الحرارة. بالإضافة إلى ذلك، تتم مناقشة نتائج تباين عدد نيسالت. أجريت هذه الدراسة لـ $Gr = 10^4$.

طوال فترة الدراسة، تم أخذ طول القناة ثابتاً ومساوياً لـ: $50.b$

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري المختلط، الصفائح المتوازية، انتقال الحرارة والكتلة، طريقة الحجم المحدود